



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/05.05.15.29-TDI

## **SINCRONIZAÇÃO REMOTA EM REDES DO TIPO ESTRELA COM OSCILADORES NÃO IDÊNTICOS**

Juliana Cestari Lacerda

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada, orientada pelos Drs. Elbert Einstein Nehrer Macau, e Celso Bernardo Nóbrega Freitas, aprovada em 03 de maio de 2017.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3NR96KE>>

INPE  
São José dos Campos  
2017

## **PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

E-mail: pubtc@inpe.br

## **COMISSÃO DO CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (DE/DIR-544):**

### **Presidente:**

Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação (CPG)

### **Membros:**

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

Dr. André de Castro Milone - Coordenação de Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dra. Carina de Barros Melo - Coordenação de Laboratórios Associados (CTE)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação de Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Dr. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SID)

### **BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SID)

### **REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Simone Angélica Del Duca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

### **EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Marcelo de Castro Pazos - Serviço de Informação e Documentação (SID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/05.05.15.29-TDI

## **SINCRONIZAÇÃO REMOTA EM REDES DO TIPO ESTRELA COM OSCILADORES NÃO IDÊNTICOS**

Juliana Cestari Lacerda

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada, orientada pelos Drs. Elbert Einstein Nehrer Macau, e Celso Bernardo Nóbrega Freitas, aprovada em 03 de maio de 2017.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3NR96KE>>

INPE  
São José dos Campos  
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Lacerda, Juliana Cestari.

L116s Sincronização remota em redes do tipo estrela com osciladores não idênticos / Juliana Cestari Lacerda. – São José dos Campos : INPE, 2017.

xxviii + 161 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/05.05.15.29-TDI)

Dissertação (Mestrado em Computação Aplicada) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2017.

Orientadores : Drs. Elbert Einstein Nehrer Macau, e Celso Bernardo Nóbrega Freitas.

1. Sincronização. 2. Sincronização remota. 3. Oscilador de stuart-landau. I.Título.

CDU 004.93'1

---



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aluno (a): *Juliana Cestari Lacerda*

"SINCRONIZAÇÃO REMOTA EM REDES DO TIPO ESTRELA COM OSCILADORES NÃO IDÊNTICOS"

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de **Mestre** em  
**Computação Aplicada**

Dr. **Lamartine Nogueira Frutuoso  
Guimarães**



Presidente / INPE / SJCampos - SP

Dr. **Eibert Einstein Nehrer Macau**



Orientador(a) / INPE / São José dos Campos - SP

Dr. **Celso Bernardo Nóbrega Freitas**



Orientador(a) / INPE / São José dos Campos - SP

Dr. **Solon Venâncio de Carvalho**



Membro da Banca / INPE / SJCampos - SP

Dr. **Leonardo Bacelar Lima Santos**



Membro da Banca / INPE / São José dos Campos - SP

Dr. **Tiago Pereira da Silva**



Convidado(a) / USP / São Paulo - SP

Este trabalho foi aprovado por:

( ) maioria simples

(X) unanimidade

São José dos Campos, 03 de maio de 2017



*“For me, it is far better to grasp the Universe as it really is than to persist in delusion, however satisfying and reassuring”.*

CARL SAGAN

em *‘The Demon-Haunted World: Science as a Candle in the Dark’*, 1996



*A meus pais **Rosangela** e **Judson**, a minha avó **Lenir**  
e ao meu esposo **Cláudio***



## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a toda a minha família e, em especial, a meus pais Judson e Rosângela, a meu irmão Leonardo, e a minha avó Lenir, por todo o carinho e apoio ao longo de todos esses anos.

A meu esposo Cláudio, pelo carinho, paciência e por sempre estar a meu lado.

Aos meus queridos Psiu, Chapolin, Espiriguidiberto e Quark, por tornarem os meus dias sempre mais alegres.

Aos meus orientadores Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau e Dr. Celso Bernardo Nóbrega Freitas pela oportunidade, paciência, disponibilidade e ensinamentos.

Aos meus amigos, em especial aos que conheci no INPE e que me ajudaram muito ao longo deste processo. Em especial ao Me. Luciano Magrini, por toda ajuda e suporte que me concedeu ao longo deste trabalho.

Ao INPE, pela oportunidade de estudo.

À CAPES, pelo suporte financeiro.



## RESUMO

O fenômeno da sincronização é muito observado na natureza, podendo ser encontrado nos mais variados sistemas, como em físicos, biológicos e sociais e, por esse motivo, é objeto de intensas pesquisas. Uma abordagem ao problema da sincronização consiste em modelar cada unidade do sistema considerado por um oscilador. Neste trabalho, foi utilizado o modelo do oscilador de Stuart-Landau, que possui fase e amplitude como variáveis dinâmicas, e estudou-se o fenômeno da sincronização remota, que ocorre quando osciladores não vizinhos se sincronizam, enquanto os osciladores que se situam entre eles permanecem não sincronizados, em redes do tipo estrela. Primeiramente, o fenômeno da sincronização foi estudado analiticamente, onde as condições necessárias para sincronização do sistema foram obtidas. Posteriormente, foi analisada a influência das condições iniciais e das frequências naturais do sistema na sincronização remota. Através de experimentos numéricos, verificou-se ainda o fenômeno da multiestabilidade para constantes de acoplamento intermediárias, no sentido que, dependendo das condições iniciais, o sistema pode exibir ou não sincronização remota.

Palavras-chave: Sincronização. Sincronização remota. Oscilador de Stuart-Landau.



# REMOTE SYNCHRONIZATION IN STAR-LIKE NETWORKS OF NON-IDENTICAL OSCILLATORS

## ABSTRACT

The phenomenon of synchronization is often observed in nature and can be found in many different systems, such as in physical, biological and social, and for this reason is the subject of intense research. One approach to the synchronization problem is to model each unit of the system being considered by an oscillator. In this work, we used the Stuart-Landau oscillator model, which presents amplitude and phase as dynamic variables, and studied the phenomenon of remote synchronization, which occurs when non-neighbor oscillators synchronize, while the oscillators that are between them remain non-synchronized, in star-like networks. First, the phenomenon of synchronization was analytically studied, where the necessary conditions for synchronization of the system were obtained. Subsequently, the influence of the initial conditions and the natural frequencies of the system on remote synchronization were analyzed. Through numerical experiments, the phenomenon of multistability was verified for intermediate coupling, in a sense that, depending on the initial conditions, the system may or may not exhibit remote synchronization.

Keywords: Synchronization. Remote synchronization. Stuart-Landau oscillator.



## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 Esquema de uma rede livre de escala, onde os <i>hubs</i> são representados em azul e os demais nós em cinza. . . . .	4
2.1 Espaço de fase bidimensional, com variáveis de estado $q_1$ e $q_2$ , e a trajetória feita pela evolução no tempo do sistema, dada pelo ciclo limite. Essa forma de ciclo limite corresponde a um oscilador auto-sustentado. . . . .	9
2.2 (a) Fase $\phi(t)$ e amplitude $A$ de um oscilador. (b) Perturbação aplicada no ponto no ciclo limite. Ela decai na direção radial e se mantém a mesma na direção tangente ao ciclo limite. . . . .	10
2.3 Evolução de trajetórias com condições iniciais próximas (círculo cinza) sobre o ciclo limite. O círculo se contrai na direção radial (expoente de Lyapunov negativo) e mantém o mesmo tamanho na direção tangente ao ciclo limite (expoente de Lyapunov igual a zero). . . . .	10
2.4 Exemplo de como gerar a série simbólica (binária) e decimal a partir da série temporal usando palavra de tamanho 10. . . . .	12
2.5 Redes geradas a partir de duas séries temporais do mapa Logístico para (a) $r = 3.629$ (período 6) e (b) $r = 3.961$ (período 8). . . . .	13
2.6 De cima para baixo: grau dos vértices e expoente de Lyapunov em função do parâmetro logístico $r$ e diagrama de bifurcação. . . . .	15
2.7 De cima para baixo: número de vértices conectados (vermelho) e densidade da rede (azul), diâmetro, grau médio, média da centralidade <i>betweenness</i> normalizada e expoente de Lyapunov em função do parâmetro logístico $r$ . . . . .	16
2.8 (a) Diferença de frequência do oscilador forçado $\Omega$ e da força externa $\omega$ em função de $\omega$ para um valor fixo da amplitude $\epsilon$ . (b) Gráficos similares ao da letra (a) para diferentes valores de amplitude. (c) Região onde a frequência do oscilador forçado é igual à frequência da força aplicada ao sistema. Essa região é chamada de língua de Arnold, ou região de sincronização. . . . .	18
2.9 Maneiras distintas de visualizar o sistema dado por 2.5. (a) Osciladores são considerados como pontos no círculo unitário, tendo fase $\theta_i$ e frequência instantânea $\dot{\theta}_i$ , com $i = 1, 2$ , (b) movimento do sistema ao redor de um toro, tendo as fases como coordenadas. . . . .	19

2.10	Trajectoria fechada ao redor do toro, feita pelo sistema desacoplado 2.6 com frequências dadas por $q\omega_1 = p\omega_2$ , onde $\frac{p}{q}$ é um número racional. . . . .	19
2.11	Exemplo de um fluxo quasi-periódico. Trajetória densa ao redor do toro, feita pelo sistema desacoplado 2.6 com frequências dadas por $q\omega_1 = p\omega_2$ , onde $\frac{p}{q}$ é um número irracional. . . . .	20
2.12	Diagrama de bifurcação da Eq. 2.7 para $ \omega_1 - \omega_2  < k_1 + k_2$ , temos dois pontos fixos, um estável (preto) e um instável (branco). . . . .	21
2.13	Seção de Poincaré. . . . .	22
2.14	Parâmetros de ordem $R$ e $\psi$ representados como um vetor que aponta a partir do centro do círculo unitário. O comprimento do vetor é dado por $ R $ e a direção é dada por $\psi$ . Os osciladores são os pontos no círculo unitário e quanto mais próximos, maior o valor de $ R $ . Quando todos estão no mesmo ponto, $ R  = 1$ . . . . .	25
2.15	Esquema de uma rede com três osciladores. O oscilador 1 é chamado <i>hub</i> (nó central) e os osciladores 2 e 3 são chamados de periféricos. . . . .	29
3.1	Rede do tipo estrela a ser considerada. O nó central (azul) tem frequência $\omega_1$ e os periféricos (cinza) têm frequência $\omega$ . . . . .	33
3.2	Região de estabilidade do sistema 3.3 e 3.4 no seu ponto de equilíbrio $x_i = 0$ e $y_i = 0$ para $i = 1, 2, 3, 4$ . Na região vermelha, o sistema é estável. Já na região verde, é instável. Onde $\wedge$ é o conectivo lógico que representa uma conjunção. . . . .	48
3.3	Em (a) temos o diagrama de bifurcação do sistema 3.3 e 3.4, com as suas regiões descritas à direita. Em (b), temos mesmo diagrama, onde pode-se ver de maneira mais clara, as regiões de sincronização (amarelo), de ponto de equilíbrio ( $x_i = 0, y_i = 0$ para $i = 1, 2, 3, 4$ ) estável (vermelho) e Desordem (azul), onde nenhuma das duas situações anteriores ocorre. As fronteiras entre as regiões também está em destaque. Onde $\wedge$ é o conectivo lógico que representa uma conjunção. . . . .	52
3.4	(a) Gráfico de Lissajous $x_n, x_m$ para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede do sistema 3.3 e 3.4. (b) Série temporal de todos os nós, <i>hub</i> em vermelho, periféricos em azul. Para $\frac{k}{\alpha} = 0.2$ e $\frac{\Delta\omega}{\alpha} = 1.9$ , na região de desordem. O nó central é representado como 0, os periféricos são 1, 2 e 3. Não pode-se observar sincronização aqui. . . . .	54

3.5	(a) Gráfico de Lissajous $x_n, x_m$ para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede do sistema 3.3 e 3.4. (b) Série temporal de todos os nós, <i>hub</i> em vermelho, periféricos em azul. Para $\frac{k}{\alpha} = 0.9$ e $\frac{\Delta\omega}{\alpha} = 1.9$ , na região de desordem. O nó central é representado como 0, os periféricos são 1, 2 e 3. Podemos observar que os nós periféricos estão sincronizados.	55
3.6	(a) Gráfico de Lissajous $x_n, x_m$ para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede do sistema 3.3 e 3.4. (b) Série temporal de todos os nós, <i>hub</i> em vermelho, periféricos em azul. Para $\frac{k}{\alpha} = 1.0$ e $\frac{\Delta\omega}{\alpha} = 1.9$ . O nó central é representado como 0, os periféricos são 1, 2 e 3. O sistema se encontra na região de sincronização global.	56
3.7	(a) Gráfico de Lissajous $x_n, x_m$ para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede do sistema 3.3 e 3.4. (b) Série temporal de todos os nós, <i>hub</i> em vermelho, periféricos em azul. Para $\frac{k}{\alpha} = 3.1$ e $\frac{\Delta\omega}{\alpha} = 4.9$ . O nó central é representado como 0, os periféricos são 1, 2 e 3. O sistema se encontra na região de ponto de equilíbrio estável.	58
3.8	(a) Gráfico de Lissajous $x_n, x_m$ para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede do sistema 3.3 e 3.4. (b) Série temporal de todos os nós, <i>hub</i> em vermelho, periféricos em azul. Para $\frac{k}{\alpha} = 3.6$ e $\frac{\Delta\omega}{\alpha} = 4.9$ , na região de sincronização. O nó central é representado como 0, os periféricos são 1, 2 e 3.	59
4.1	Rede do tipo estrela. Cada nó da rede representa um oscilador. O nó central (azul) é chamado de <i>hub</i> e os nós em cinza os periféricos.	62
4.2	(a) Gráfico de Lissajous $\theta_n, \theta_m$ para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede. O oscilador central é identificado como 0 e os extremos como 1, 2, 3, 4. (b) De cima para baixo: Séries temporais e frequência instantânea $\dot{\theta}$ dos osciladores em função do tempo. Nó central está plotado em vermelho, os periféricos em azul. Constante de acoplamento $k = 0.2$ , não há sincronização.	64
4.3	(a) Gráfico de Lissajous $\theta_n, \theta_m$ para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede. O oscilador central é identificado como 0 e os extremos como 1, 2, 3, 4. (b) De cima para baixo: Séries temporais e frequência instantânea $\dot{\theta}$ dos osciladores em função do tempo. Nó central está plotado em vermelho, os periféricos em azul. Constante de acoplamento $k = 0.6$ , há sincronização remota.	65

4.4	(a) Gráfico de Lissajous $\theta_n, \theta_m$ para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede. O oscilador central é identificado como 0 e os extremos como 1, 2, 3, 4. (b) De cima para baixo: Séries temporais e frequência instantânea $\dot{\theta}$ dos osciladores em função do tempo. Nó central está plotado em vermelho, os periféricos em azul. Constante de acoplamento $k = 0.8$ , há sincronização global. . . . .	66
4.5	Gráfico de $r^{direct}$ e $r^{indirect}$ em função do acoplamento $k$ da rede. . . . .	68
4.6	(a) Dependência de $\Delta r$ com $\Delta\omega$ e $k$ . $\Delta r$ é representado pela barra de cores e assume valores entre 0 e 1. (b) Língua de Arnold, plotada em roxo. Consideramos que temos sincronização remota uando $\Delta r \geq 0.8$ . . . . .	70
4.7	Gráfico de $r^{direct}$ e $r^{indirect}$ em função do acoplamento $k$ da rede. Em preto temos o modelo de Stuart-Landau com $\alpha = 1$ , em azul, o mesmo modelo com $\alpha = 100$ , em vermelho temos o modelo de Kuramoto. Note que para esses dois últimos modelos, não temos o surgimento do fenômeno da sincronização remota, pois $r^{direct}$ e $r^{indirect}$ atingem seus valores máximos ao mesmo tempo. Aqui SL é abreviação de Stuart-Landau. . . . .	72
4.8	Dependência de $\Delta r$ com $\Delta\omega$ e $k$ para o modelo de Kuramoto. $\Delta r$ é representado pela barra de cores e assume valores entre 0 e 1. Consideramos que há sincronização remota quando $\Delta r \geq 0.8$ . . . . .	73
4.9	Rede do tipo estrela com $N = 11$ nós. . . . .	75
4.10	Média e desvio padrão de $r^{direct}$ e $r^{indirect}$ em função da constante de acoplamento $k$ , para a distribuição de frequências naturais 4.11, onde $\epsilon_n$ é uma variável aleatória com distribuição uniforme entre $(0, a)$ e $a = \{0.00, 0.01, 0.02\}$ . Para cada valor de $k$ , são geradas 20 distribuições de frequências naturais e é calculada a média e o desvio padrão de $r^{direct}$ e $r^{indirect}$ . . . . .	77
4.11	Média e desvio padrão de $r^{direct}$ e $r^{indirect}$ em função da constante de acoplamento $k$ , para a distribuição de frequências naturais 4.11, onde $\epsilon_n$ é uma variável aleatória com distribuição uniforme entre $(0, a)$ e $a = \{0.03, 0.05, 0.07\}$ . Para cada valor de $k$ , são geradas 20 distribuições de frequências naturais e é calculada a média e o desvio padrão de $r^{direct}$ e $r^{indirect}$ . . . . .	78
4.12	Média e desvio padrão de $r^{direct}$ e $r^{indirect}$ em função da constante de acoplamento $k$ , para a distribuição de frequências naturais 4.11, onde $\epsilon_n$ é uma variável aleatória com distribuição uniforme entre $(0, a)$ e $a = \{0.10, 0.14, 0.18\}$ . Para cada valor de $k$ , são geradas 20 distribuições de frequências naturais e é calculada a média e o desvio padrão de $r^{direct}$ e $r^{indirect}$ . . . . .	79

4.13	Média e desvio padrão de $r^{direct}$ e $r^{indirect}$ em função da constante de acoplamento $k$ , para a distribuição de frequências naturais 4.11, onde $\epsilon_n$ é uma variável aleatória com distribuição uniforme entre $(0, a)$ e $a = \{0.22, 0.26, 0.30\}$ . Para cada valor de $k$ , são geradas 20 distribuições de frequências naturais e é calculada a média e o desvio padrão de $r^{direct}$ e $r^{indirect}$ . . . . .	80
4.14	Dependência de $\Delta k =  k^{direct} - k^{indirect} $ com o tamanho da distribuição de frequências naturais dos osciladores periféricos $a$ (para a distribuição de frequências naturais 4.11, onde $\epsilon_n$ é uma variável aleatória com distribuição uniforme entre $(0, a)$ ). Onde $k^{direct}$ é o valor de $k$ para o qual o sistema atinge pela primeira vez $r^{direct} = 1$ e $k^{indirect}$ é o valor de $k$ para o qual o sistema atinge $r^{indirect} = 1$ pela primeira vez. Ou seja, $\Delta k$ mede o intervalo para o qual temos sincronização remota. . . . .	81
4.15	Média e desvio padrão de $r^{direct}$ (vermelho) e $r^{indirect}$ (azul) em função da constante de acoplamento $k$ , para frequências naturais fixas e condições iniciais aleatórias geradas por uma distribuição uniforme com intervalo $(-a_{xy}, a_{xy})$ , com $a_{xy} = \{0.2, 0.4, 0.5\}$ . Para cada valor de $k$ , são geradas 20 distribuições de condições iniciais e é calculada a média e o desvio padrão de $r^{direct}$ e $r^{indirect}$ . . . . .	84
4.16	Média e desvio padrão de $r^{direct}$ (vermelho) e $r^{indirect}$ (azul) em função da constante de acoplamento $k$ , para frequências naturais fixas e condições iniciais aleatórias geradas por uma distribuição uniforme com intervalo $(-a_{xy}, a_{xy})$ , com $a_{xy} = \{0.6, 0.8, 1.4\}$ . Para cada valor de $k$ , são geradas 20 distribuições de condições iniciais e é calculada a média e o desvio padrão de $r^{direct}$ e $r^{indirect}$ . . . . .	85
4.17	Média e desvio padrão de $r^{direct}$ (vermelho), $r^{indirect}$ (azul) e média do módulo do parâmetro de ordem $R$ (preto) em função da constante de acoplamento $k$ . Foram utilizadas 20 condições iniciais com uma distribuição uniforme em $(-0.5, 0.5)$ para cada valor de $k$ e as frequências naturais foram mantidas fixas e são dadas por 4.12 e 4.13. Em (a) temos uma rede com $N = 11$ nós e em (b) uma rede com $N = 51$ nós. . . . .	87
4.18	Média e desvio padrão de $r^{indirect}$ (azul), $r^{direct}$ (vermelho) e do módulo do parâmetro de ordem de ordem $R$ (preto) em função da constante de acoplamento para um rede com 3 nós. Para cada valor de $k$ foram utilizadas 20 condições iniciais e as frequências naturais foram mantidas fixas $\{\omega_n\} = \{2.5, 1.0158, 1.0060\}$ , com $n = 0, 1, 2$ . . . . .	88

4.19	Par de condições iniciais $(x^{inicial}, y^{inicial})$ que dão (vermelho) e não dão (azul) origem à sincronização remota. Para $k = 0.6$ e uma estrela com três nós e frequência natural fixada em $\{\omega_n\} = \{2.500, 1.0158, 1.0060\}$ , com $n = 0, 1, 2$ . . . . .	90
4.20	Condições iniciais de cada oscilador, que dão (vermelho) e não dão (azul) origem à sincronização remota. Para $k = 0.6$ e uma estrela com três nós e frequência natural fixada em $\{\omega_n\} = \{2.500, 1.0158, 1.0060\}$ , com $n = 0, 1, 2$ . (a) Temos as coordenadas $x^{inicial}$ de todos os três osciladores, em (b) temos as coordenadas $y^{inicial}$ . Em (a) e (b) temos quatro visualizações diferentes da mesma figura. . . . .	91
4.21	Fases iniciais de cada oscilador, dadas por $\theta_n = \tan^{-1} \frac{y_n}{x_n}$ , que dão (vermelho) e não dão (azul) origem à sincronização remota. Para $k = 0.6$ e uma estrela com três nós e frequência natural fixada em $\{\omega_n\} = \{2.500, 1.0158, 1.0060\}$ , com $n = 0, 1, 2$ . Temos quatro visualizações diferentes da mesma figura. . . . .	92
4.22	Fases iniciais de cada oscilador, dadas por $\theta_n = \tan^{-1} \frac{y_n}{x_n}$ , que dão (vermelho) e não dão (azul) origem à sincronização remota. Para $k = 0.6$ e uma estrela com três nós e frequência natural fixada em $\{\omega_n\} = \{2.500, 1.000, 1.025\}$ , com $n = 0, 1, 2$ . Temos quatro visualizações diferentes da mesma figura. . . . .	93
4.23	Gráficos de $r^{direct}$ (vermelho), $r^{indirect}$ (azul) e média do módulo do parâmetro de ordem de ordem $R$ (preto) em função da constante de acoplamento $k$ , para uma mesma distribuição de frequências naturais e diferentes condições iniciais. As condições iniciais do Sistema 2 (4.24(b)) fazem com que a sincronização remota do sistema desapareça para $0.575 \lesssim k \lesssim 0.65$ . Isso não ocorre para o mesmo sistema quando utilizamos as condições iniciais do Sistema 1 (4.14). . . . .	97
4.24	Gráficos de $r^{direct}$ (vermelho), $r^{indirect}$ (azul) e média do módulo do parâmetro de ordem de ordem $R$ (preto) em função da constante de acoplamento $k$ . Integramos novamente o Sistema 2, Figura 4.24(b), utilizando agora um maior número de iterações. . . . .	98
4.25	Gráfico de Lissajous $\theta_n, \theta_m$ para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede, para o Sistema 1 e uma constante de acoplamento $k = 0.4$ . O oscilador central é identificado como 0, os demais são os periféricos. Temos sincronização remota nesta situação. . . . .	101

4.26	Gráfico de Lissajous $\theta_n, \theta_m$ para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede para o Sistema 2 e uma constante de acoplamento $k = 0.4$ . O oscilador central é identificado como 0, os demais são os periféricos. Temos sincronização remota nesta situação. . . . .	102
4.27	Histograma do módulo da diferença de fases entre um par de osciladores para o Sistema 1 e uma constante de acoplamento $k = 0.4$ . No eixo x, temos o módulo da diferença de fases indo de 0 até $2\pi$ e no eixo y temos o número de contagens. O oscilador central é identificado como nó-0, os demais são os periféricos. . . . .	103
4.28	Histograma do módulo da diferença de fases entre um par de osciladores para o Sistema 2 e uma constante de acoplamento $k = 0.4$ . No eixo x, temos o módulo da diferença de fases indo de 0 até $2\pi$ e no eixo y temos o número de contagens. O oscilador central é identificado como nó-0, os demais são os periféricos. . . . .	104
4.29	(a)-(b) Série temporal, (c)-(d) fase $\theta$ e (e)-(f) frequência instantânea $\dot{\theta}$ em função do tempo . O <i>hub</i> aparece em vermelho e periféricos em azul. (g)-(h) Módulo do parâmetro de ordem $R$ em função do tempo, em preto temos $R$ calculado para todos os nós, em azul, apenas para os nós periféricos. Constante de acoplamento $k = 0.4$ . Sistema 1 está à esquerda e Sistema 2 à direita. Como estamos considerando a fase $\theta$ entre $[-2\pi, 2\pi]$ , (c) e (d) deveriam ser gráficos descontínuos, as retas verticais nestes gráficos foram plotadas de maneira a deixar o gráfico contínuo e facilitar a visualização. . . . .	105
4.30	Ciclos limites e seção de Poincaré (construída a partir do <i>hub</i> ) para o Sistema 1 e constante de acoplamento $k = 0.4$ . Hub em vermelho, periféricos em azul e verde. . . . .	106
4.31	Ciclos limites e seção de Poincaré (construída a partir do <i>hub</i> ) para o Sistema 2 e constante de acoplamento $k = 0.4$ . Hub em vermelho, periféricos em azul e verde. . . . .	107
4.32	Seção de Poincaré, construída a partir do nó periférico 1, para o (a) Sistema 1 e o (b) Sistema 2, com constante de acoplamento $k = 0.4$ . . . .	108
4.33	Gráfico de Lissajous $\theta_n, \theta_m$ para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede, para o Sistema 1 e uma constante de acoplamento $k = 0.6$ . O oscilador central é identificado como 0, os demais são os periféricos. Temos sincronização remota nesta situação. . . . .	111

4.34	Gráfico de Lissajous $\theta_n, \theta_m$ para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede, para o Sistema 2 e uma constante de acoplamento $k = 0.6$ . O oscilador central é identificado como 0, os demais são os periféricos. Temos sincronização remota nesta situação. . . . .	112
4.35	Histograma do módulo da diferença de fases entre um par de osciladores para o Sistema 1 e uma constante de acoplamento $k = 0.6$ . No eixo x, temos o módulo da diferença de fases indo de 0 até $2\pi$ e no eixo y temos o número de contagens. O oscilador central é identificado como nó-0, os demais são os periféricos. . . . .	113
4.36	Histograma do módulo da diferença de fases entre um par de osciladores para o Sistema 2 e uma constante de acoplamento $k = 0.6$ . No eixo x, temos o módulo da diferença de fases indo de 0 até $2\pi$ e no eixo y temos o número de contagens. O oscilador central é identificado como nó-0, os demais são os periféricos. . . . .	114
4.37	(a)-(b) Série temporal, (c)-(d) fase $\theta$ e (e)-(f) frequência instantânea $\dot{\theta}$ em função do tempo . O <i>hub</i> aparece em vermelho e periféricos em azul. (g)-(h) Módulo do parâmetro de ordem $R$ em função do tempo, em preto temos $R$ calculado para todos os nós, em azul, apenas para os nós periféricos. Constante de acoplamento $k = 0.6$ . Sistema 1 está à esquerda e Sistema 2 à direita. Como estamos considerando a fase $\theta$ entre $[-2\pi, 2\pi]$ , (c) e (d) deveriam ser gráficos descontínuos, as retas verticais nestes gráficos foram plotadas de maneira a deixar o gráfico contínuo e facilitar a visualização. . . . .	115
4.38	Ciclos limites e seção de Poincaré para o Sistema 1 e constante de acoplamento $k = 0.6$ . Hub em vermelho, periféricos em azul e verde. . . . .	116
4.39	Ciclos limites e seção de Poincaré para o Sistema 2 e constante de acoplamento $k = 0.6$ . Hub em vermelho, periféricos em azul e verde. . . . .	117
4.40	Seção de Poincaré, construída a partir do nó periférico 1, para o (a) Sistema 1 e o (b) Sistema 2, com constante de acoplamento $k = 0.6$ . . . . .	118
4.41	Fases dos Sistemas 1 e 2 plotadas no círculo unitário, para $k = 0.6$ e frequências naturais fixas dadas por 4.12. (a) Estado inicial do sistema , $t = 0.00$ , dado por 4.14 para o Sistema 1 e 4.15 para o Sistema 2. (b) Ambos os sistemas após $t = 6.10$ unidades de tempo. . . . .	120
4.42	Fases dos Sistemas 1 e 2 plotadas no círculo unitário, para $k = 0.6$ e frequências naturais fixas dadas por 4.12. (a) $t = 10.70$ unidades de tempo e (b) $t = 17.50$ unidades de tempo . . . . .	121

4.43	Fases dos Sistemas 1 e 2 plotadas no círculo unitário, para $k = 0.6$ e frequências naturais fixas dadas por 4.12. (a) $t = 285.00$ unidades de tempo e (b) $t = 1010.00$ unidades de tempo . . . . .	122
4.44	Gráfico de Lissajous $\theta_n, \theta_m$ para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede, para o Sistema 1 e uma constante de acoplamento $k = 0.7$ . O oscilador central é identificado como 0, os demais são os periféricos. Temos sincronização remota nesta situação. . . . .	124
4.45	Gráfico de Lissajous $\theta_n, \theta_m$ para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede, para o Sistema 2 e uma constante de acoplamento $k = 0.7$ . O oscilador central é identificado como 0, os demais são os periféricos. Temos sincronização remota nesta situação. . . . .	125
4.46	Histograma do módulo da diferença de fases entre um par de osciladores para o Sistema 1 e uma constante de acoplamento $k = 0.7$ . No eixo x, temos o módulo da diferença de fases indo de 0 até $2\pi$ e no eixo y temos o número de contagens. O oscilador central é identificado como nó-0, os demais são os periféricos. . . . .	126
4.47	Histograma do módulo da diferença de fases entre um par de osciladores para o Sistema 2 e uma constante de acoplamento $k = 0.7$ . No eixo x, temos o módulo da diferença de fases indo de 0 até $2\pi$ e no eixo y temos o número de contagens. O oscilador central é identificado como nó-0, os demais são os periféricos. . . . .	127
4.48	(a)-(b) Série temporal, (c)-(d) fase $\theta$ e (e)-(f) frequência instantânea $\dot{\theta}$ em função do tempo . O <i>hub</i> aparece em vermelho e periféricos em azul. (g)-(h) Módulo do parâmetro de ordem $R$ em função do tempo, em preto temos $R$ calculado para todos os nós, em azul, apenas para os nós periféricos. Constante de acoplamento $k = 0.7$ . Sistema 1 está à esquerda e Sistema 2 à direita. Como estamos considerando a fase $\theta$ entre $[-2\pi, 2\pi]$ , (c) e (d) deveriam ser gráficos descontínuos, as retas verticais nestes gráficos foram plotadas de maneira a deixar o gráfico contínuo e facilitar a visualização. . . . .	128
4.49	Ciclos limites e seção de Poincaré para o Sistema 1 e constante de acoplamento $k = 0.7$ . Hub em vermelho, periféricos em azul e verde. . . . .	129
4.50	Ciclos limites e seção de Poincaré para o Sistema 2 e constante de acoplamento $k = 0.7$ . Hub em vermelho, periféricos em azul e verde. . . . .	130
4.51	Seção de Poincaré, construída a partir do nó periférico 1, para o (a) Sistema 1 e o (b) Sistema 2, com constante de acoplamento $k = 0.7$ . . . . .	131

4.52	Gráfico de Lissajous $\theta_n, \theta_m$ para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede, para o Sistema 1 e uma constante de acoplamento $k = 0.8$ . O oscilador central é identificado como 0, os demais são os periféricos. Temos sincronização remota nesta situação. . . . .	134
4.53	Gráfico de Lissajous $\theta_n, \theta_m$ para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede, para o Sistema 2 e uma constante de acoplamento $k = 0.8$ . O oscilador central é identificado como 0, os demais são os periféricos. Temos sincronização remota nesta situação. . . . .	135
4.54	Histograma do módulo da diferença de fases entre um par de osciladores para o Sistema 1 e uma constante de acoplamento $k = 0.8$ . No eixo x, temos o módulo da diferença de fases indo de 0 até $2\pi$ e no eixo y temos o número de contagens. O oscilador central é identificado como nó-0, os demais são os periféricos. . . . .	136
4.55	Histograma do módulo da diferença de fases entre um par de osciladores para o Sistema 2 e uma constante de acoplamento $k = 0.8$ . No eixo x, temos o módulo da diferença de fases indo de 0 até $2\pi$ e no eixo y temos o número de contagens. O oscilador central é identificado como nó-0, os demais são os periféricos. . . . .	137
4.56	(a)-(b) Série temporal, (c)-(d) fase $\theta$ e (e)-(f) frequência instantânea $\dot{\theta}$ em função do tempo . O <i>hub</i> aparece em vermelho e periféricos em azul. (g)-(h) Módulo do parâmetro de ordem $R$ em função do tempo, em preto temos $R$ calculado para todos os nós, em azul, apenas para os nós periféricos. Constante de acoplamento $k = 0.8$ . Sistema 1 está à esquerda e Sistema 2 à direita. Como estamos considerando a fase $\theta$ entre $[-2\pi, 2\pi]$ , (c) e (d) deveriam ser gráficos descontínuos, as retas verticais nestes gráficos foram plotadas de maneira a deixar o gráfico contínuo e facilitar a visualização. . . . .	138
4.57	Ciclos limites e seção de Poincaré para o Sistema 1 e constante de acoplamento $k = 0.8$ . Hub em vermelho, periféricos em azul e verde. . . . .	139
4.58	Ciclos limites e seção de Poincaré para o Sistema 2 e constante de acoplamento $k = 0.8$ . Hub em vermelho, periféricos em azul e verde. . . . .	140
4.59	Seção de Poincaré, construída a partir do nó periférico 1, para o (a) Sistema 1 e o (b) Sistema 2, com constante de acoplamento $k = 0.8$ . . . . .	141

4.60	Média e desvio padrão do (a) grau médio e (b) densidade das redes geradas a partir das séries temporais dos osciladores, para uma condição inicial fixa e distribuição de frequência dada por 4.11 com $a = 0.05$ . Em azul estão os valores calculados a partir das redes dos osciladores periféricos, em vermelho estão os valores calculados a partir do das redes do <i>hub</i> . . . . .	145
4.61	Média e desvio padrão da (a) média da centralidade <i>betweenness</i> normalizada e (b) diâmetro das redes geradas a partir das séries temporais dos osciladores, para uma condição inicial fixa e distribuição de frequência dada por 4.11 com $a = 0.05$ . Em azul estão os valores calculados a partir das redes dos osciladores periféricos, em vermelho estão os valores calculados a partir do das redes do <i>hub</i> . . . . .	146
4.62	Média e desvio padrão do (a) grau médio e (b) densidade das redes geradas a partir das séries temporais dos osciladores, para frequências naturais fixas 4.12 e condições iniciais aleatórias, dadas por uma distribuição uniforme entre $(-0.5, 0.5)$ . Em azul estão os valores calculados a partir das redes dos osciladores periféricos, em vermelho estão os valores calculados a partir do das redes do <i>hub</i> . . . . .	148
4.63	Média e desvio padrão da (c) média da centralidade <i>betweenness</i> normalizada e (d) diâmetro das redes geradas a partir das séries temporais dos osciladores, para frequências naturais fixas 4.12 e condições iniciais aleatórias, dadas por uma distribuição uniforme entre $(-0.5, 0.5)$ . Em azul estão os valores calculados a partir das redes dos osciladores periféricos, em vermelho estão os valores calculados a partir do das redes do <i>hub</i> . . . . .	149



## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Objetivos . . . . .	4
1.2 Organização do trabalho . . . . .	4
<b>2 SISTEMAS NÃO LINEARES E SINCRONIZAÇÃO</b> . . . . .	<b>7</b>
2.1 Espaço de Fase . . . . .	8
2.2 Fase e amplitude de osciladores . . . . .	8
2.3 Expoentes de Lyapunov . . . . .	9
2.4 Caracterização da dinâmica de sistemas não lineares através de redes complexas e da dinâmica simbólica . . . . .	11
2.5 Dinâmica de osciladores acoplados . . . . .	14
2.6 Região de sincronização . . . . .	17
2.7 Osciladores Quasi-periódicos . . . . .	17
2.8 Mapa de Poincaré . . . . .	21
2.9 Osciladores caóticos . . . . .	22
2.9.1 Fase em osciladores caóticos . . . . .	22
2.9.2 Sincronização de osciladores caóticos . . . . .	23
2.10 Modelos de Osciladores . . . . .	23
2.10.1 Modelo de Kuramoto . . . . .	23
2.10.2 Modelo de Stuart-Landau . . . . .	26
2.10.2.1 Estabilidade da equação de Stuart-Landau . . . . .	28
2.10.2.2 Mecanismo por trás da sincronização remota e caso limite do oscila- dor de Stuart-Landau . . . . .	28
<b>3 ESTUDO ANALÍTICO DA DINÂMICA DE UMA REDE DO TIPO ESTRELA</b> . . . . .	<b>33</b>
3.1 Fundamentação Teórica . . . . .	35
3.2 Ponto de equilíbrio do sistema . . . . .	39
3.3 Estabilidade no ponto de equilíbrio . . . . .	40
3.4 Condição para sincronização do sistema . . . . .	47
3.5 Resultados Numéricos . . . . .	51
3.6 Conclusões Parciais . . . . .	57

<b>4</b>	<b>SINCRONIZAÇÃO REMOTA EM REDES DO TIPO ESTRELA</b>	<b>61</b>
4.1	Estudo da diferença entre a frequência natural do <i>hub</i> e as frequências dos osciladores periféricos . . . . .	61
4.1.1	Sincronização remota com o modelo de Kuramoto . . . . .	71
4.1.2	Conclusões Parciais . . . . .	71
4.2	Influência da extensão da distribuição das frequências naturais dos nós periféricos . . . . .	74
4.2.1	Conclusões Parciais . . . . .	82
4.3	Estudo da influência das condições iniciais na sincronização remota . . . . .	82
4.3.1	Conclusões Parciais . . . . .	94
4.4	Análise do comportamento do sistema com frequências naturais fixas e duas condições iniciais diferentes . . . . .	94
4.4.1	Conclusões Parciais . . . . .	142
4.5	Uso da dinâmica simbólica para a caracterização do sistema . . . . .	142
4.5.1	Caracterização do sistema com condições iniciais fixas . . . . .	144
4.5.2	Caracterização do sistema com frequências naturais fixas . . . . .	144
4.5.3	Conclusões Parciais . . . . .	147
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>151</b>
5.1	Trabalhos futuros . . . . .	153
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>155</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A sincronização entre unidades que compõe um sistema é um comportamento universal e aparece em muitos sistemas naturais e artificiais (BOCCALETTI, 2008). Um dos sistemas mais icônicos deste área são as raras espécies de vagalumes capazes de piscar simultaneamente e esse ritmo não é ditado por um único vagalume, mas sim por interações entre todos eles. De alguma maneira, o oscilador em cada vagalume (provavelmente alguma parte dos neurônios no seu cérebro) se auto-corrigem para piscar em sincronia com todos os outros. (STROGATZ, 2003; BUCK, 1988).

Fenômenos similares de consenso em sistemas multiagentes também aparece em áreas como: biologia, (VARELA et al., 2001) mostraram que redes síncronas emergem no cérebro; (SHERMAN et al., 1988; LOPPINI et al., 2014) estudam células que secretam insulina no pâncreas; (WONG et al., 1985; AVOLI; CURTIS, 2011) mostram a existência da sincronização de partes do cérebro durante crises epiléticas; (LEEUWEN et al., 2009) estudam a sincronização nos sistemas cardiovasculares de mulheres grávidas e seus fetos; circuitos acoplados, (FORTUNA; FRASCA, 2007) estudam a sincronização de circuitos caóticos não-autônomos; sistemas mecânicos (PANTALEONE, 2002); sistemas sociais, (NÉDA et al., 2000) mostram que o aplauso de uma audiência se torna sincronizado e essa sincronização desaparece e reaparece várias vezes durante o aplauso; (PLUCHINO et al., 2005) utilizam o conceito de sincronização e uma versão modificada do modelo de Kuramoto para modelar a formação da opinião em indivíduos.

Sincronização pode ser definida como “o ajustamento entre ritmos de objetos que oscilam devido à presença de interações fracas entre eles” (PIKOVSKY et al., 2003). Estes “objetos que oscilam” podem ser descritos por sistemas que são levados à oscilação devido a uma fonte de energia e que são estáveis à pequenas perturbações. Quando estudamos sincronização, consideramos em particular sistemas que oscilam mesmo quando isolados. Quando há mais de um sistema oscilando, podem ocorrer interações, que correspondem a uma função e parâmetro de acoplamento, que descrevem, respectivamente, a maneira como a dinâmica dos osciladores é afetada por outros e a intensidade com que isso ocorre. Quanto maior a constante de acoplamento, maior são as interações entre os sistemas. Mesmo com um acoplamento fraco, osciladores não idênticos podem interagir de maneira a se tornarem sincronizados. Podemos dizer que um grupo de osciladores está sincronizado quando todos estão oscilando com uma mesma frequência fixa e a esse regime dá-se o nome de travamento de fase ou *phase-locking* (LEMONS; LANGEVIN, 2002; MIROLLO; STROGATZ,

1990; TESCHE; CLARKE, 1977).

Duas grandezas são determinantes para o surgimento da sincronização entre osciladores: a força de acoplamento e a diferença entre as frequências naturais dos osciladores (suas frequências quando se encontram isolados uns dos outros). Um grupo de osciladores com uma diferença grande entre suas frequências naturais seria difícil de ser sincronizado, pois os osciladores oscilam em frequências muito distintas. Existe uma gama de valores de frequências para os quais um grupo de osciladores se sincroniza, esse intervalo de valores cresce à medida em que a força de acoplamento aumenta, como é ilustrado usualmente pelas chamadas Línguas de Arnold, correspondendo a diagramas no espaço de parâmetros (STROGATZ; MIROLLO, 1991; PIKOVSKY et al., 2003).

Formalmente, podemos dizer que sincronização é um processo no qual um certo número de sistemas dinâmicos, não necessariamente idênticos, estão acoplados ou são conduzidos por uma força comum e conseguem coordenar alguma propriedade dinâmica. Esses sistemas dinâmicos precisam conter uma fonte interna de energia, pois eles oscilam mesmo quando estão isolados.

A sincronização já foi estudada em sistemas de osciladores periódicos acoplados (STROGATZ, 2000) e sistemas caóticos acoplados, onde vários tipos de sincronização foram identificados (BOCCALETTI et al., 2002).

Neste trabalho, nosso foco de interesse é o fenômeno da *Sincronização Remota*, que ocorre quando dois ou mais sistemas dinâmicos, que não estão diretamente acoplados, apresentam sincronização mas os sistemas que os interligam, ou seja, que estão no caminho entre eles, não estão sincronizados. Ela é observada em sistemas reais, como por exemplo: (BERGNER et al., 2012) mostraram o surgimento de sincronização remota usando uma rede de osciladores eletrônicos não-lineares; no estudo do cérebro, (NICOSIA et al., 2013) mostram que as atividades funcionais de áreas simetricamente anatômicas podem estar fortemente correlacionadas, mesmo que essas áreas estejam espacialmente distantes. Outra aplicação pode ser encontrada no estudo do clima, em particular, no estudo da influência das oscilações do El-Niño com a monção indiana (DONGES et al., 2009a; MARAUN; KURTHS, 2005; MOKHOV et al., 2011).

Um dos pioneiros no estudo formal da sincronização de osciladores foi A. A. Andronov (ANDRONOV et al., 1966). A bifurcação de Andronov-Hopf, que consiste no surgimento de um ciclo limite a partir de um ponto de equilíbrio, é modelado pelas

equações de mesmo nome que também são conhecidas como osciladores de Stuart-Landau. No seu caso limite, se torna um dos modelos mais famosos de osciladores, o modelo de Kuramoto, que consiste em um conjunto de osciladores de fase com frequências intrínsecas e acoplamento não linear, dado pelo seno da diferença de fases (KURAMOTO, 1975; PANTELEY et al., 2015).

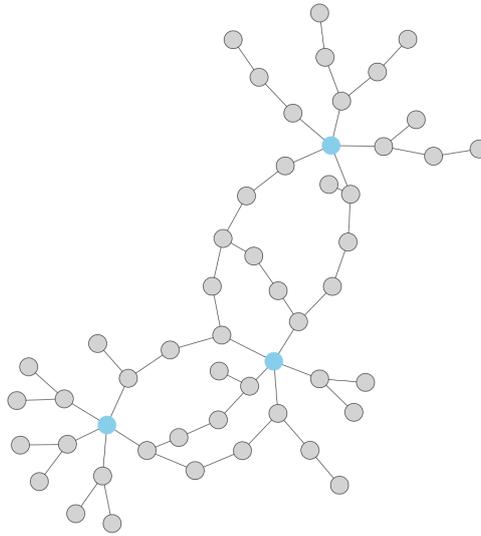
O modelo de Kuramoto impõe que as amplitudes dos osciladores permaneçam constantes. Já no modelo de Stuart-Landau, os osciladores podem sofrer variações nas suas amplitudes, e essa variação se mostra muito importante na descrição do fenômeno da sincronização remota (BERGNER et al., 2012; GAMBUZZA et al., 2013).

Os exemplos anteriores nos remetem ao conceito de *redes de osciladores*, que têm sido um tema muito estudado nas últimas décadas (BOCCALETTI et al., 2006; GIL; MIKHAILOV, 2009; ARENAS et al., 2008; OSIPOV et al., 2007). A relevância desse tema pode ser aferida quando se verifica que ele pode servir de base para a construção de modelos de sistemas nas mais diversas áreas do conhecimento: biologia (ULLNER et al., 2008), climatologia (DONGES et al., 2009b; DONGES et al., 2009a), neurociência (IZHIKEVICH, 2007; BULLMORE; SPORNS, 2009), sistemas sociais (GIL; ZANETTE, 2006) e química (KURAMOTO, 2012). As redes de osciladores são também empregadas na neurocomputação, onde podem ser utilizadas para armazenar e recuperar informação (FOLLMANN et al., 2015).

As redes complexas vêm se mostrando muito apropriadas para modelar fenômenos em que um sistema é composto por um grande número de unidades dinâmicas interconectadas, no intuito de capturar as propriedades globais e emergentes desses sistemas. Neste caso, os nós da rede representam as unidades dinâmicas e as ligações da rede representam as interações entre eles. Pode-se usar redes complexas no estudo de sistemas biológicos e químicos (JEONG et al., 2000; JEONG et al., 2001; SOLE; MONTOYA, 2001; CAMACHO et al., 2002), em redes sociais (WATTS; STROGATZ, 1998; CASTRO; GROSSMAN, 1999; AMARAL et al., 2000; EBEL et al., 2002) e até mesmo no estudo de sistemas não-lineares (LACERDA et al., 2016).

Muitas das redes reais (obtidas através de dados experimentais) apresentam uma forma de distribuição de graus em lei de potência (BOCCALETTI et al., 2006) e são chamadas de redes livre de escala (ALBERT; BARABÁSI, 2002), onde apenas alguns nós, chamados de *hubs* (ou pólos), têm a maioria das ligações, enquanto quase todos os demais nós da rede possuem poucas conexões, como podemos ver na Fig. 1.1. Como exemplos de redes livre de escala podemos citar *World Wide Web*, Redes Sociais e redes de interação proteína-proteína (BOCCALETTI et al., 2006).

Figura 1.1 - Esquema de uma rede livre de escala, onde os *hubs* são representados em azul e os demais nós em cinza.



Fonte: Produção do Autor

## 1.1 Objetivos

A sincronização remota em redes do tipo estrela onde os osciladores são modelados pela equação de Stuart-Landau já foi estudada em (BERGNER et al., 2012), onde se estuda a influência da diferença entre a frequência natural do *hub* e dos nós periféricos na sincronização do sistema; (GAMBUZZA et al., 2013; GAMBUZZA et al., 2016) estuda o surgimento da sincronização remota em redes complexas.

O objetivo deste trabalho é estudar o fenômeno da sincronização remota em redes do tipo estrela, que são os principais constituintes das redes livre de escala, podendo assim capturar a essência desta topologia (BERGNER et al., 2012; FRASCA et al., 2012). Encontraremos as condições necessárias para que o sistema entre em sincronização e estudaremos como as condições iniciais e as frequências naturais dos osciladores influenciam na ocorrência da sincronização remota.

## 1.2 Organização do trabalho

O trabalho está organizado da seguinte maneira:

- Capítulo 2: É abordada a sincronização de osciladores, onde são definidos os conceitos de fase, amplitude e expoentes de Lyapunov. Um método para caracterização da dinâmica de sistemas não lineares é apresentado e

também é estudada a dinâmica de osciladores acoplados, região de sincronização, osciladores quasi-periódicos e caóticos. Por fim, são apresentados dois modelos de osciladores, o modelo de Kuramoto e o modelo de Stuart-Landau.

- Capítulo 3: Neste capítulo, é estudado o fenômeno da sincronização em redes do tipo estrela de forma analítica, obtendo as condições necessárias para a sincronização do sistema.
- Capítulo 4: É estudada o fenômeno da sincronização remota em uma rede do tipo estrela. A influência da frequência natural e das condições iniciais dos osciladores é estudada. Por fim, fazemos o uso da dinâmica simbólica com intuito de caracterizar as mudanças de comportamento apresentadas pelo sistema.



## 2 SISTEMAS NÃO LINEARES E SINCRONIZAÇÃO

O fenômeno da sincronização foi provavelmente estudado pela primeira vez por Christiaan Huygens em 1665, (HUYGENS, 1986). Havia dois relógios de pêndulo fixados na mesma parede e ele percebeu que sempre que um pêndulo estava na extrema esquerda, o outro estava na extrema direita e vice-versa. Sendo assim, eles sempre tinham movimentos opostos. Mesmo quando os seus ritmos eram perturbados, os relógios sempre voltavam, após um certo tempo, aos seus ritmos originais de movimento em oposição de fase. Para explicar o que estava acontecendo, ele afirmou, corretamente, que cada pêndulo causava um movimento imperceptível na viga da parede na qual os relógios estavam fixados e que esse movimento tendia a forçar os pêndulos a se moverem em sincronia. Quando os pêndulos estão finalmente sincronizados, as forças são canceladas e a viga não se move (PIKOVSKY et al., 2003). Hoje, esse fenômeno é chamado de sincronização mútua e os relógios estavam sincronizados em anti-fase, devido ao acoplamento através da viga.

O fenômeno da sincronização pode ser definido como “o ajustamento de ritmos de objetos que oscilam devido às suas interações fracas” (PIKOVSKY et al., 2003), ou seja, é um processo no qual um certo número de sistemas dinâmicos, não necessariamente idênticos, estão acoplados ou são conduzidos por uma força comum e conseguem coordenar alguma propriedade dinâmica.

Estes sistemas dinâmicos precisam conter uma fonte interna de energia, pois estão sempre dissipando energia devido à fricção, resistência elétrica e etc. Sendo assim, são chamados de osciladores autosustentados, pois oscilam mesmo quando estão isolados. A ação combinada da dissipação e da fonte interna de energia determinam a amplitude  $A$  das oscilações. Matematicamente, esses osciladores são descritos por um sistema dinâmico autônomo. A sua oscilação é estável à pequenas perturbações e a sua forma é determinada pelos parâmetros do sistema.

Podemos citar como exemplo de sincronização um par de geradores de triodo, que se sincronizam quando acoplados. Um gerador de triodo produz uma corrente elétrica alternada cuja frequência de oscilação depende de parâmetros do elemento que compõe o gerador. Portanto, geradores diferentes tendem a ter frequências distintas de corrente alternada, mas quando estão acoplados, eles se sincronizam e ficam com uma mesma frequência. Estudos mostraram que mesmo um sinal externo fraco poderia sincronizar esses geradores, o que é um resultado muito útil, pois podemos fazer com que geradores potentes atinjam uma frequência muito específica com a introdução de um gerador muito mais fraco mas muito mais preciso no sistema.

(STROGATZ, 2000; KURAMOTO, 2012). Outro exemplo foi encontrado por biólogos que estudaram o comportamento de pés de feijão. Eles perceberam que as folhas das plantas se mexem para cima e para baixo de acordo com o ciclo diário de luz e escuridão e que mesmo estando isoladas da luz do sol, as folhas fazem um ciclo de 24 horas. Estudos demonstraram a existência de relógios biológicos internos que regulam o ritmo diário dos organismos (KURAMOTO, 2012; KISS et al., 2002; DANIELS et al., 2003) .

## 2.1 Espaço de Fase

Uma construção matemática muito útil no estudo da sincronização é chamada de espaço de fase. Ele é formado por variáveis que descrevem o estado de um sistema. Como exemplo, podemos citar o espaço de fase de um pêndulo, que tem duas dimensões, dadas pela sua posição e sua velocidade. Ou seja, o estado do sistema em um dado instante de tempo é dado por um ponto no espaço de fase, e esse ponto vai se movendo à medida em que o sistema evolui no tempo.

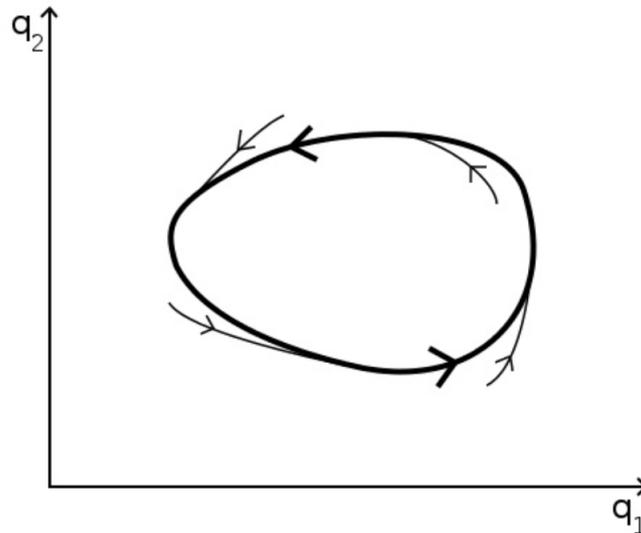
Podemos então descrever a evolução de um oscilador pela sua trajetória no espaço de fase. Osciladores auto-sustentados, quando estão isolados, formam uma curva fechada, chamada de ciclo limite (Figura 2.1), no espaço de fase. Estes osciladores auto-sustentados possuem ciclos limites estáveis, ou seja, todas as trajetórias próximas do ciclo limite acabam se aproximando dele. Pode-se dizer então que eles são estáveis à perturbações, como veremos a seguir (PIKOVSKY et al., 2003).

## 2.2 Fase e amplitude de osciladores

Abaixo vamos fazer algumas definições que serão usadas ao longo do texto e para isso, vamos usar como exemplo um oscilador cuja dinâmica é descrita por  $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi_0)$ . Onde  $\omega_0 = 2\pi f = 2\pi/T$  é a frequência angular natural ( $f$  é a frequência natural e  $T$  é o período),  $A$  é a amplitude e representa a intensidade da oscilação,  $\phi_0$  é a fase inicial e  $\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0$  é a fase. A fase, por definição, é uma função que cresce de maneira uniforme para um oscilador isolado, com um ganho de  $2\pi$  a cada ciclo completo. Aqui usaremos uma fase cíclica que está definida entre 0 e  $2\pi$ . Na Figura 2.3(a) temos a representação do ciclo limite, ou seja, do ponto no plano de fase em coordenadas polares, onde se pode observar a fase e a amplitude. O ponto gira com velocidade  $\omega_0$  no sentido anti-horário.

Vamos agora adotar um sistema de coordenadas que gira no sentido anti-horário com velocidade angular  $\omega_0$ , ou seja, o ponto no plano de fase parece estar imóvel. Quando

Figura 2.1 - Espaço de fase bidimensional, com variáveis de estado  $q_1$  e  $q_2$ , e a trajetória feita pela evolução no tempo do sistema, dada pelo ciclo limite. Essa forma de ciclo limite corresponde a um oscilador auto-sustentado.



Fonte: Daniels (2005)

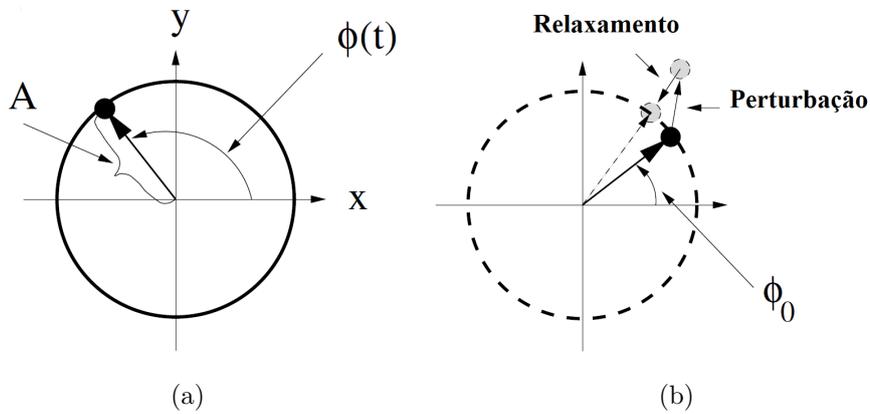
o sistema é perturbado, isto é, quando o ponto sobre o ciclo limite é deslocado, como na Figura 2.3(b), a amplitude da oscilação decai e volta para o ciclo limite, mas a fase perturbada se mantém imóvel. Não há um valor preferido para a fase, ela fica na mesma posição até que uma nova perturbação ocorra, com isso, a fase pode ser controlada por uma força externa o que faz com que o oscilador possa ser sincronizado.

### 2.3 Expoentes de Lyapunov

Se considerarmos trajetórias com condições iniciais próximas no espaço de fases, Figura 2.3, vemos que elas convergem na direção radial (direção da amplitude) com o passar do tempo. Já na direção ao longo do ciclo (direção da fase), elas não convergem e nem divergem, permanecem neutras.

Uma medida que quantifica o comportamento das trajetórias com condições iniciais próximas, são os expoentes de Lyapunov. Quando há uma direção sobre as órbitas do sistemas cujas perturbações são atenuadas, temos um expoente de Lyapunov negativo. Por outro lado, quando diferenças entre trajetórias são intensificadas com o tempo, na chamada sensibilidade às condições iniciais, temos um expoente de

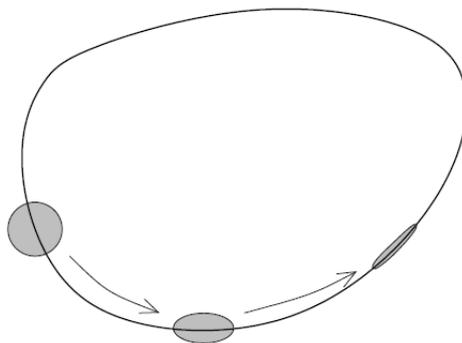
Figura 2.2 - (a) Fase  $\phi(t)$  e amplitude  $A$  de um oscilador. (b) Perturbação aplicada no ponto no ciclo limite. Ela decai na direção radial e se mantém a mesma na direção tangente ao ciclo limite.



Adaptado de: Pikovsky et al. (2003)

Lyapunov positivo. Quando há um expoente de Lyapunov igual a zero, temos uma direção que é neutra. Portanto, a fase pode ser considerada como uma variável que corresponde ao expoente de Lyapunov igual a zero e a amplitude pode ser associada a um expoente de Lyapunov negativo (ALLIGOOD et al., 1996; PIKOVSKY et al., 2003).

Figura 2.3 - Evolução de trajetórias com condições iniciais próximas (círculo cinza) sobre o ciclo limite. O círculo se contrai na direção radial (expoente de Lyapunov negativo) e mantém o mesmo tamanho na direção tangente ao ciclo limite (expoente de Lyapunov igual a zero).



Fonte: Pikovsky et al. (2003)

## 2.4 Caracterização da dinâmica de sistemas não lineares através de redes complexas e da dinâmica simbólica

A caracterização dinâmica de sistemas não lineares é um grande desafio e é usualmente feita através do cálculo dos expoentes de Lyapunov e de diagramas de bifurcação, cujos cálculos são complexos e custosos computacionalmente (STROGATZ, 2014). Uma outra abordagem seria o uso da dinâmica simbólica juntamente com o formalismo de redes complexas (LACERDA et al., 2016).

Essa metodologia é exemplificada no contexto do mapa logístico:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (2.1)$$

onde  $x \in [0, 1]$  é um parâmetro adimensional que mede a população na  $n$ -ésima geração e  $r \in [0, 4]$  é a taxa de crescimento, também chamado de parâmetro logístico.

R. May mostrou que esse modelo apresenta um comportamento complexo quando o seu espaço de parâmetros é explorado (MAY et al., 1976). Feigenbaum utilizou este modelo como um paradigma para mostrar a agora conhecida “rota de duplicação de período” para o caos (FEIGENBAUM, 1983).

Em redes complexas, uma rede corresponde a um grafo, que é composto de vértices conectados por arestas. Podemos representar relações com essas redes, onde os vértices representam entidades e as arestas representa as interações entre elas, e podemos analisar essas redes por meio da teoria das redes complexas. Exemplos de redes complexas incluem internet e redes sociais (BARABÁSI; ALBERT, 1999; BOCCALETTI et al., 2006).

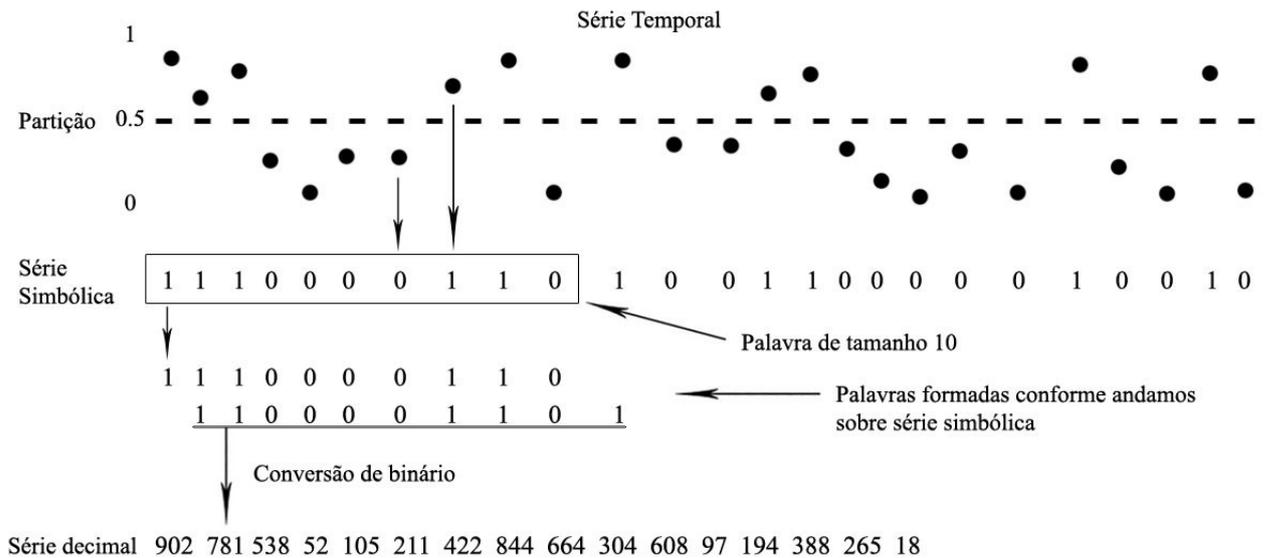
A caracterização dinâmica do sistema dado pela Eq. 2.1 por meio da dinâmica simbólica e de redes complexas se dará da seguinte maneira (Figura 2.4):

- Iteramos o sistema dado por 2.1 para 1000 valores diferentes de  $r$  que irá variar entre 2.9 e 4.0.
- A condição inicial é sempre fixada em  $x_0 = 0.7$ .
- Para cada valor de  $r$ , faremos um total de 10500 iterações e descartamos as 500 primeiras.
- Serão geradas assim 1000 séries temporais distintas, uma rede para cada

valor do parâmetro  $r$ .

- Transformamos cada série temporal em uma série binária. Para toda a extensão da série temporal, se  $x_n \leq 0.5$ , atribuímos o símbolo 0 e se  $x_n > 0.5$ , atribuímos o símbolo 1.
- Definimos uma palavra de tamanho 10. Com ela, caminharemos sobre série binária, andando de um em um, transformando cada palavra binária de tamanho 10 em seu equivalente decimal. Com isso, o número máximo de nós da rede será  $2^{10}$ .
- A partir da série decimal, criaremos a rede do sistema. Cada valor da série decimal será um nó da rede e as ligações entre os nós são dadas entre os vizinhos da série decimal. Só é permitida uma aresta por par de vértices (FREITAS; MACAU, 2016; YU et al., 2013) e é permitida a existência de autoconexões.
- A partir dessa rede, calcularemos as seguintes métricas: grau dos vértices, densidade, número de vértices conectados, diâmetro, grau médio da rede e média da centralidade *betweenness* normalizada.

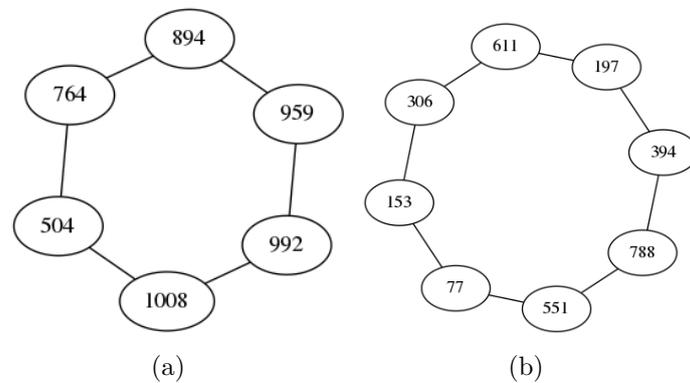
Figura 2.4 - Exemplo de como gerar a série simbólica (binária) e decimal a partir da série temporal usando palavra de tamanho 10.



Fonte: Produção do autor.

Na Fig. 2.5, estão dois exemplos de redes geradas a partir da série temporal do mapa Logístico, onde podemos ver a existência de janelas periódicas, pois elas formam um ciclo. Por exemplo, quando temos período 1, a série decimal tem sempre o mesmo valor, então a rede gerada terá apenas um vértice que estará conectado a si mesmo. Quando temos período 2, a série decimal tem dois valores repetidos que ficam se intercalando, então a rede será formada por dois vértices. O mesmo raciocínio se aplica para períodos maiores.

Figura 2.5 - Redes geradas a partir de duas séries temporais do mapa Logístico para (a)  $r = 3.629$  (período 6) e (b)  $r = 3.961$  (período 8).



Fonte: Produção do autor.

A densidade de um grafo com  $M$  vértices é dada pela relação entre o número de arestas ( $E$ ) e o maior número possível de arestas

$$D = \frac{E}{M(M-2)/2} \quad (2.2)$$

O grau de um vértice em um grafo não direcionado é igual ao número de arestas que incidem sobre ele. O grau médio da rede é a média aritmética dos graus de todos os vértices da rede. O diâmetro de um grafo é definido como o maior dos menores caminhos entre todos os vértices da rede. Já, a centralidade *betweenness* de um vértice mede o número de menores caminhos que passam por ele, portanto, um vértice com alto valor de centralidade *betweenness* tem uma grande importância na rede. A centralidade *betweenness* de um vértice  $v$  é definida como

$$b(v) = \sum_{s \neq v \neq t} \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}} \quad (2.3)$$

onde  $\sigma_{st}$  é o número total de menores caminhos entre o vértice  $s$  e o vértice  $t$  e  $\sigma_{st}(v)$  é o número desses caminhos que passa pelo vértice  $v$ . A centralidade *betweenness* normalizada é dada por

$$\text{norm}(b(v)) = \frac{b(v) - \min(b)}{\max(b) - \min(b)} \quad (2.4)$$

onde  $b$  é o vetor que contém o valor da centralidade *betweenness* de todos os vértices da rede e  $\min(b)$  e  $\max(b)$  são, respectivamente, o valor mínimo e máximo de  $b$ .

Os resultados obtidos da metodologia apresentada nessa seção são apresentados nas Figs. 2.6 e 2.7. Na Fig. 2.6, temos o grau dos vértices e expoente de Lyapunov em função do parâmetro logístico  $r$  e o diagrama de bifurcação. Podemos notar, a partir de  $r = 3.5$ , a existência de algumas janelas periódicas (linhas verticais azuis) no gráfico dos graus dos vértices, essas janelas correspondem a expoentes de Lyapunov negativos e janelas periódicas no diagrama de bifurcação.

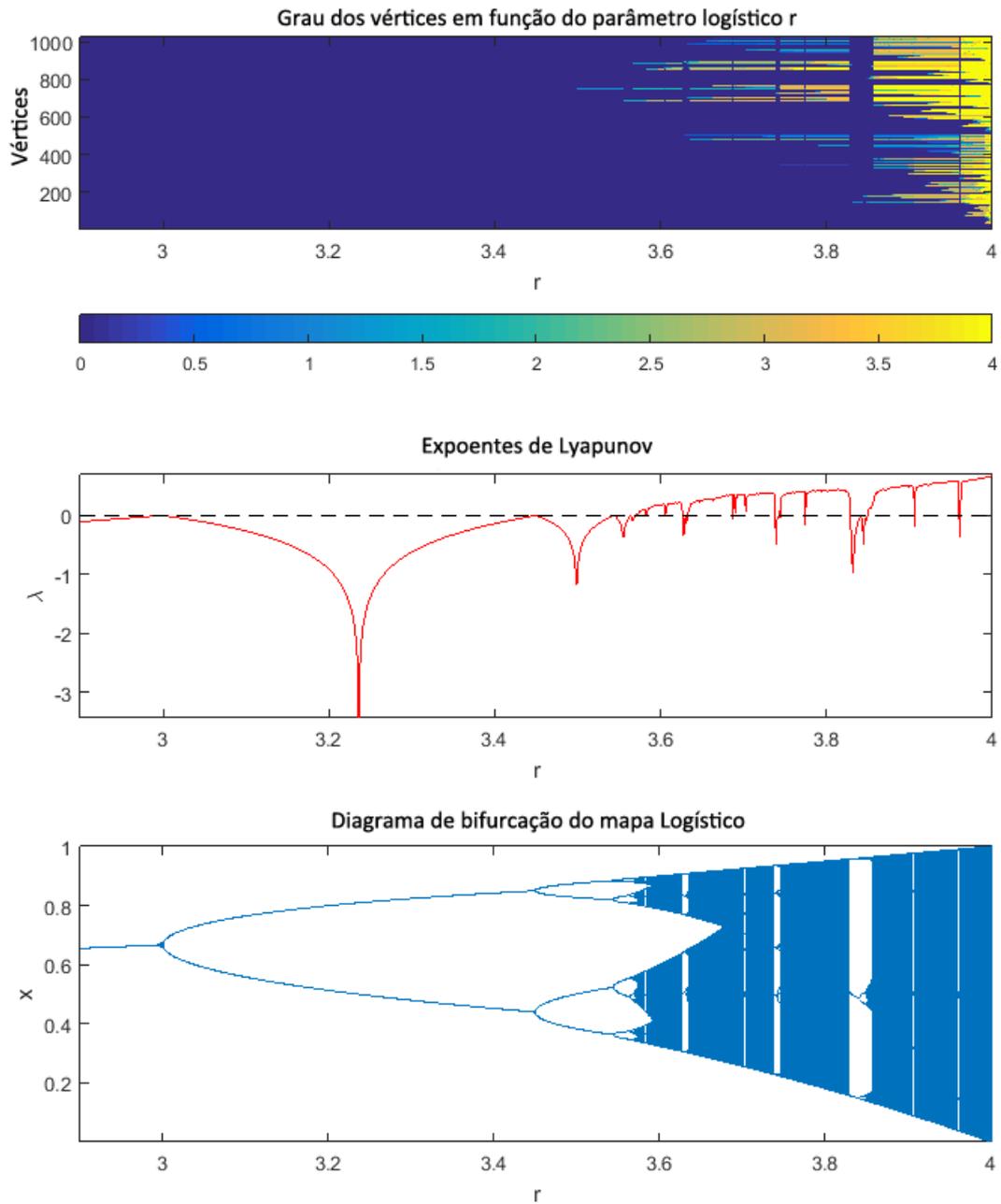
Na Fig. 2.7 temos plotados o número de vértices conectados (vermelho) e densidade da rede (azul), diâmetro, grau médio, média da centralidade *betweenness* normalizada e expoente de Lyapunov em função do parâmetro logístico  $r$ . Também para  $r > 3.5$ , podemos perceber o aparecimento de algumas janelas periódicas, que aparecem como quedas no valor de todas essas medidas, e que correspondem ao expoente de Lyapunov negativo. Por outro lado, quando temos caos, reconhecido quando o expoente de Lyapunov é positivo, as métricas se mantêm constantes ou crescem com o aumento do valor do parâmetro logístico.

Portanto, essa metodologia se mostra capaz de prever a existência de algumas janelas periódicas e de apresentar indícios de comportamento caótico do sistema.

## 2.5 Dinâmica de osciladores acoplados

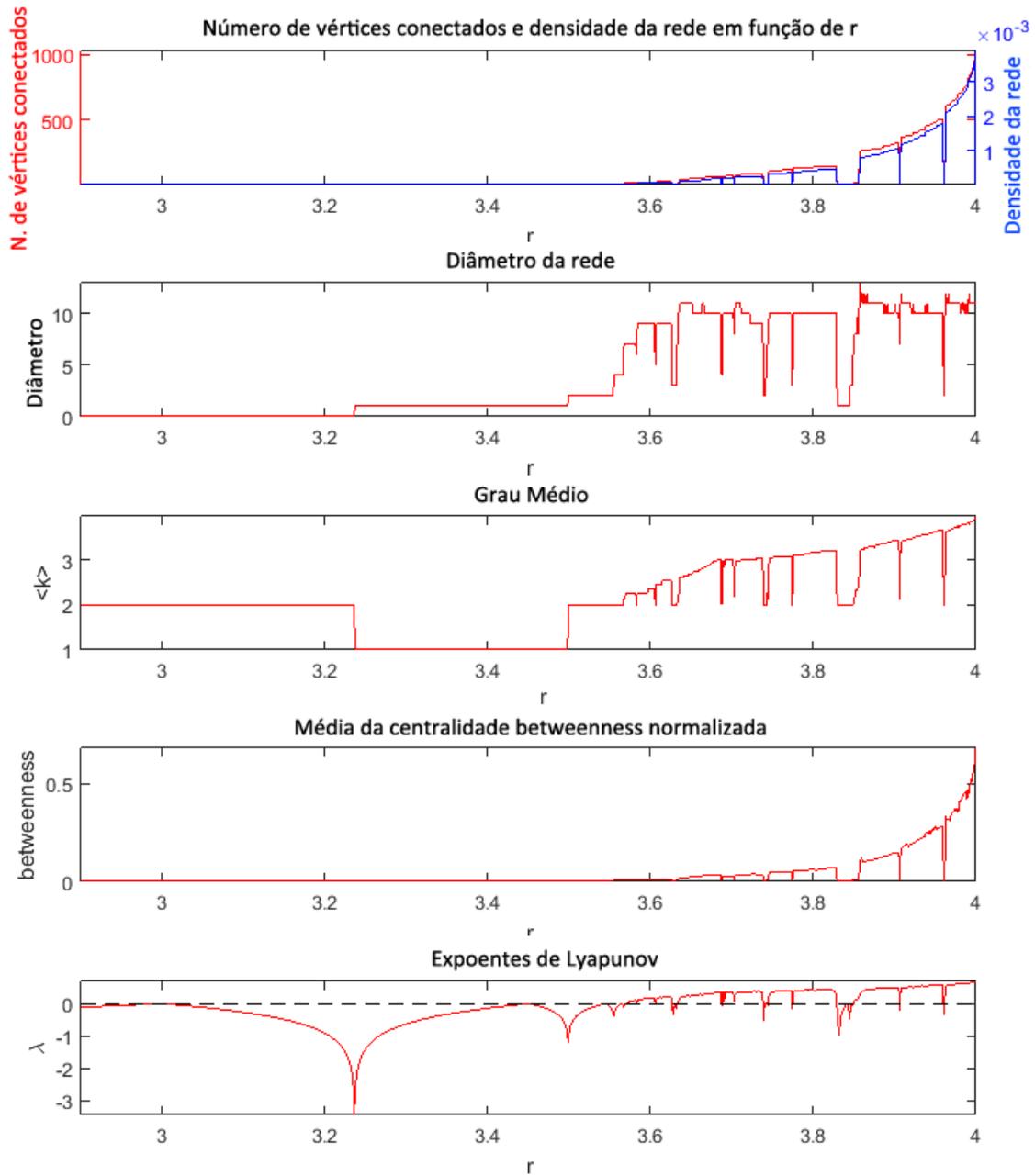
Quando dois osciladores com frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são acoplados, eles passam a oscilar com frequências  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  do sistema acoplado. Essas frequências do sistema acoplado podem ser iguais, se o acoplamento for forte o bastante, eles então oscilam com uma frequência comum  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ . Essa coincidência de frequências é chamada de *frequency locking*.

Figura 2.6 - De cima para baixo: grau dos vértices e expoente de Lyapunov em função do parâmetro logístico  $r$  e diagrama de bifurcação.



Fonte: Produção do autor.

Figura 2.7 - De cima para baixo: número de vértices conectados (vermelho) e densidade da rede (azul), diâmetro, grau médio, média da centralidade *betweenness* normalizada e expoente de Lyapunov em função do parâmetro logístico  $r$ .



Fonte: Produção do autor.

Considerando agora a diferença das fases dos osciladores acoplados, quando as fases  $\phi_1$  e  $\phi_2$  estão próximas, ou seja, quando  $\phi_1 - \phi_2$  é próximo de zero, dizemos que os osciladores estão *sincronizados em fase*. Se as fases se movem em direções opostas, temos a sincronização em *anti-fase* e a diferença entre as fases fica próxima de  $\pi$ . Quando a diferença das fases dos osciladores é constante, temos o que chamamos de *phase locking*.

Quando os osciladores do sistema desacoplado têm frequências proporcionais, do tipo  $n\omega_1 \approx m\omega_2$ , temos o que é chamado de *sincronização de ordem  $n : m$* , para um acoplamento suficientemente grande. Temos então *frequency locking* com  $n\Omega_1 = m\Omega_2$  e *phase locking* dada por  $|n\phi_1 - m\phi_2| < \text{constante}$  (PIKOVSKY et al., 2003).

## 2.6 Região de sincronização

Para descrever a região de sincronização no espaço de parâmetros, considere agora um oscilador com frequência natural  $\omega_0$  que passa a sentir a presença de uma força com frequência  $\omega$  e amplitude  $\epsilon$ . Esse oscilador forçado passa então a oscilar com frequência  $\Omega$  que depende da diferença de frequência (*detuning*)  $\omega_0 - \omega$ . Para um *detuning* suficientemente pequeno, ou seja, se a frequência  $\omega$  da força aplicada ao sistema é relativamente próxima à frequência natural  $\omega_0$  do sistema, a frequência do oscilador forçado  $\Omega$  será igual a  $\omega$ . Para um *detuning* acima de um valor crítico (muito diferente de  $\omega_0$ ), essa igualdade se desfaz, como pode ser visto na parte (a) da Figura 2.8.

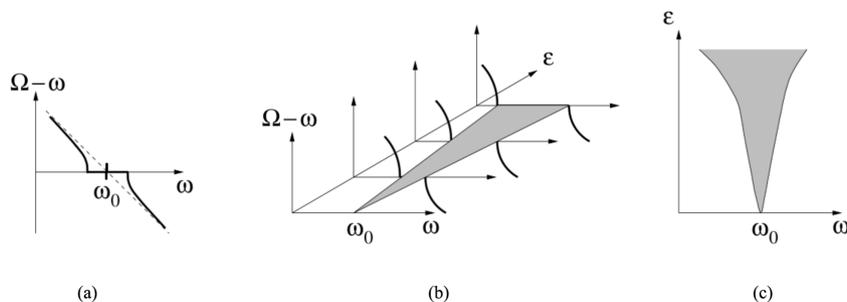
Quando plotamos  $\Omega - \omega$  em função de  $\omega$  para vários valores da amplitude  $\epsilon$  da força aplicada ao sistema, temos uma região no plano  $(\omega, \epsilon)$  onde ambas as frequências são idênticas, partes (b) e (c) da Figura 2.8. Essa região é chamada de região de sincronização ou de *língua de Arnold*. Repare em (b) que quando a amplitude da força  $\epsilon$  é próxima de zero, a frequência do oscilador forçado  $\Omega$  só é igual à frequência da força  $\omega$  quando esta é muito próxima de  $\omega_0$ . Já para uma amplitude alta  $\epsilon$  da força, o intervalo de valores de  $\omega$  que faz com que a frequência do oscilador forçado  $\Omega$  seja igual à frequência  $\omega$  da força é grande.

## 2.7 Osciladores Quasi-periódicos

Considere um par de osciladores acoplados, descritos pelo sistema

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \omega_1 + k_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 + k_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\end{aligned}\tag{2.5}$$

Figura 2.8 - (a) Diferença de frequência do oscilador forçado  $\Omega$  e da força externa  $\omega$  em função de  $\omega$  para um valor fixo da amplitude  $\epsilon$ . (b) Gráficos similares ao da letra (a) para diferentes valores de amplitude. (c) Região onde a frequência do oscilador forçado é igual à frequência da força aplicada ao sistema. Essa região é chamada de língua de Arnold, ou região de sincronização.



Adaptado de: [Pikovsky et al. \(2003\)](#)

onde  $\dot{\theta}_i$  é a frequência instantânea e  $\omega_i$  é a frequência natural do oscilador  $i = 1, 2$ . A constante de acoplamento entre os osciladores é dada por  $k_1$  e  $k_2$ .

Para visualizar o movimento do sistema, podemos imaginar os osciladores como pontos do círculo unitário, com fase  $\theta_i$  que se locomovem com frequência instantânea  $\dot{\theta}_i$ , Figura 2.10(a). Também podemos utilizar as fases  $\theta_i$  como coordenadas, e a evolução do sistema é dada pelo movimento de um único ponto ao redor de um toro (toróide), Figura 2.9.

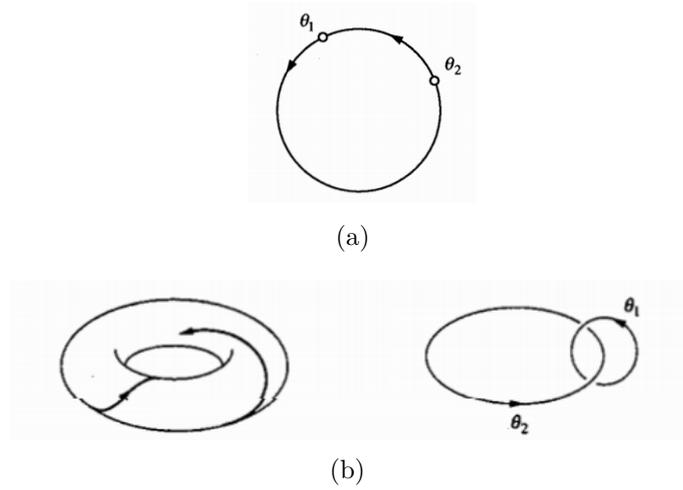
Consideraremos primeiro o sistema não acoplado,  $k_1 = k_2 = 0$ , dado por

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \omega_1 \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2\end{aligned}\tag{2.6}$$

e  $\frac{p}{q} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ . Se  $\frac{p}{q}$  é um número racional, a trajetória do sistema ao redor do toro forma uma órbita fechada, pois  $\theta_1$  completa  $p$  revoluções ao mesmo tempo em que  $\theta_2$  completa  $q$  revoluções. Por exemplo, se  $p = 3$  e  $q = 2$ , temos a trajetória fechada dada pela Figura 2.10.

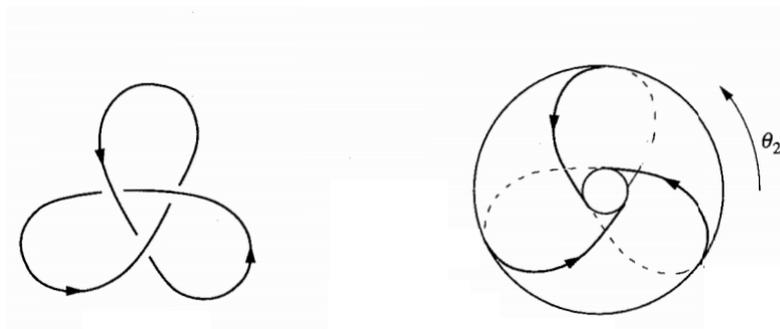
Se  $\frac{p}{q}$  é um número irracional, a trajetória se move ao redor toro de maneira que ela

Figura 2.9 - Maneiras distintas de visualizar o sistema dado por 2.5. (a) Osciladores são considerados como pontos no círculo unitário, tendo fase  $\theta_i$  e frequência instantânea  $\dot{\theta}_i$ , com  $i = 1, 2$ , (b) movimento do sistema ao redor de um toro, tendo as fases como coordenadas.



Fonte: Strogatz (2014)

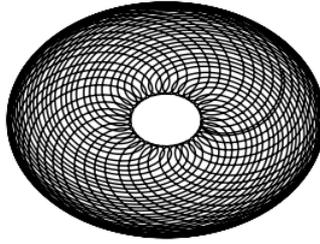
Figura 2.10 - Trajetória fechada ao redor do toro, feita pelo sistema desacoplado 2.6 com frequências dadas por  $q\omega_1 = p\omega_2$ , onde  $\frac{p}{q}$  é um número racional.



Fonte: Strogatz (2014)

nunca se fecha, Figura 2.11. Dizemos que a trajetória é densa no toro, ou seja, cada trajetória fica arbitrariamente próxima de um ponto qualquer do toro. Neste caso, o fluxo é chamado de quasi-periódico (STROGATZ, 2014).

Figura 2.11 - Exemplo de um fluxo quasi-periódico. Trajetória densa ao redor do toro, feita pelo sistema desacoplado 2.6 com frequências dadas por  $q\omega_1 = p\omega_2$ , onde  $\frac{p}{q}$  é um número irracional.



Fonte: Produção do autor.

Considerando agora o sistema acoplado, com  $k_1, k_2 > 0$ , dado por 2.5, podemos descrever a dinâmica do sistema com a diferença entre as fases, dada por  $\phi = \theta_1 - \theta_2$ , ou seja,  $\dot{\phi} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2$  e o sistema é então dado por

$$\dot{\phi} = \omega_1 - \omega_2 - (k_1 + k_2) \sin \phi \quad (2.7)$$

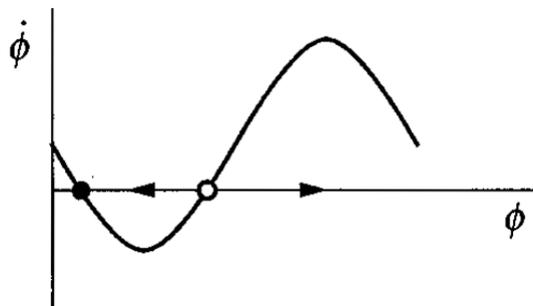
Os pontos fixos do sistema,  $\dot{\phi} = 0$ , são dados por

$$\sin \phi^* = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 + k_2} \quad (2.8)$$

e só existem para  $|\omega_1 - \omega_2| < k_1 + k_2$ , o diagrama de bifurcação é dado pela Figura 2.12. Uma bifurcação sela-nó ocorre quando  $|\omega_1 - \omega_2| = k_1 + k_2$  e para  $|\omega_1 - \omega_2| > k_1 + k_2$ , não existem mais pontos fixos para o sistema.

Primeiro, vamos supor que  $|\omega_1 - \omega_2| < k_1 + k_2$ . Pela Figura 2.12 vemos que todas as trajetórias vão em direção ao ponto fixo estável. Portanto, no toro, as trajetórias do sistema 2.5 se aproximam da solução *phase-locked*, onde a diferença  $\phi^*$  entre as fases dos osciladores é constante. Essa solução é periódica e ambos os osciladores têm a

Figura 2.12 - Diagrama de bifurcação da Eq. 2.7 para  $|\omega_1 - \omega_2| < k_1 + k_2$ , temos dois pontos fixos, um estável (preto) e um instável (branco).



Fonte: Strogatz (2014)

mesma frequência instantânea  $\Omega = \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \omega_2 + k_2 \sin \phi^*$ , substituindo  $\sin \phi^*$  por 2.8, temos

$$\Omega = \frac{k_1 \omega_2 + k_2 \omega_1}{k_1 + k_2} \quad (2.9)$$

que é chamada de *frequência de compromisso* e tem seu valor entre as frequências naturais  $\omega_1$  e  $\omega_2$  dos osciladores.

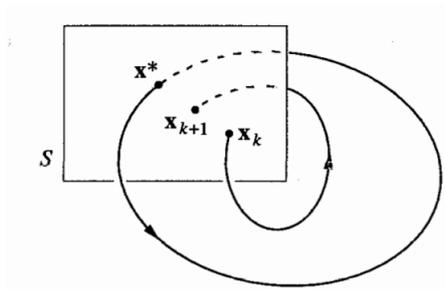
Se formos aumentando a diferença entre as frequências naturais dos osciladores, ou seja, se aumentarmos o valor de  $|\omega_1 - \omega_2|$ , os pontos fixos do sistema irão coexistir, dando origem a uma bifurcação sela-nó quando  $|\omega_1 - \omega_2| = k_1 + k_2$ . Após essa bifurcação, o fluxo se comporta como o sistema desacoplado que vimos anteriormente, podemos ter um fluxo quasi-periódico da Eq. 2.11 ou um fluxo racional da Eq. 2.10, onde temos um ciclo fechado ao redor do toro.

## 2.8 Mapa de Poincaré

Considere um sistema n-dimensional dado por  $\dot{x} = f(x)$ . Seja  $S$  uma superfície com dimensão  $n - 1$  que é transversa ao fluxo da Figura 2.13, ou seja, todas as trajetórias atravessam  $S$ , nunca ficando paralelas a essa superfície.  $S$  é chamada de seção de Poincaré.

O mapa de Poincaré  $P$  é um mapeamento de  $S$  em si mesmo, obtido quando seguimos trajetórias de uma interseção com  $S$  até a próxima. Se  $x_k$  denota a k-ésima interseção,

Figura 2.13 - Seção de Poincaré.



Fonte: Strogatz (2014)

então o mapa de Poincaré é definido por  $P(x_k) = x_{k+1}$ .

Seja  $x^*$  um ponto fixo de  $P$ , ou seja,  $P(x^*) = x^*$ . Então, a trajetória que começa em  $x^*$  eventualmente retornará a  $x^*$  após um tempo  $T$ , o que indica que essa trajetória é fechada para o sistema original  $\dot{x} = f(x)$ . Vemos então que o mapa de Poincaré converte problemas de analisar órbitas em problemas de análise de pontos fixos de um mapeamento.

## 2.9 Osciladores caóticos

### 2.9.1 Fase em osciladores caóticos

Para a definição de fase em um sistema caótico autônomo contínuo, pode-se utilizar uma seção de Poincaré apropriada na qual a órbita caótica cruza uma vez a cada rotação. Sucessivos cruzamentos com a seção de Poincaré são associados a um aumento de  $2\pi$  na fase e esta fase é definida como uma função linear no tempo, dada por:

$$\phi(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n \quad (2.10)$$

Onde  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$  e  $t_n$  é o tempo do n-ésimo cruzamento do fluxo com a seção de Poincaré. Observe-se que nem sempre é possível construir em geral seções de Poincaré apropriadas, em especial para osciladores não coerentes, o que requer técnicas numéricas de atribuição de fase (PIKOVSKY et al., 2003). Contudo, optou-se por analisar nesse texto osciladores caóticos com seções de Poincaré conhecidas na literatura.

### 2.9.2 Sincronização de osciladores caóticos

Osciladores autossustentados podem gerar sinais caóticos e sistemas de osciladores caóticos também podem sofrer sincronização. Para caracterizar esses osciladores, fixamos um tempo  $\tau$  consideravelmente grande e contamos o número de ciclos  $N_\tau$  dentro deste intervalo, damos a essa medida no nome de frequência média, que é dada abaixo.

$$\langle f \rangle = \frac{N_\tau}{\tau} \quad (2.11)$$

Quando o acoplamento entre dois osciladores caóticos for grande o suficiente, as frequências médias dos dois osciladores se igualam e temos sincronização das frequências. Se o acoplamento for fraco, as amplitudes dos osciladores caóticos continuarão irregulares e não relacionadas, mas podemos usar a diferença entre as fases dos sinais para caracterizar a sincronização de fase.

## 2.10 Modelos de Osciladores

### 2.10.1 Modelo de Kuramoto

Nos anos 60, o fenômeno da sincronização coletiva em diferentes sistemas naturais fez com que vários cientistas tentassem desenvolver modelos que explicassem esse comportamento. Arthur Winfree ([WINFREE, 1967](#)) desenvolveu um método muito popular quando estava tentando modelar a sincronização de grandes grupos (como no exemplo dos vagalumes). No modelo, o sistema era dado pela interação de muitos osciladores auto-sustentados. Ele assumiu que os osciladores eram quase idênticos e que a constante de acoplamento entre eles era pequena. Isso ajudou a simplificar os cálculos e fez com que a única variável do problema fosse a fase dos osciladores ([STROGATZ, 2000](#); [STROGATZ, 2003](#); [DANIELS, 2005](#); [ACEBRÓN et al., 2005](#)).

Ele propôs um modelo em que a fase de um oscilador fosse determinada pela ação combinada de todos os osciladores do sistema. A taxa de variação dessa fase seria determinada por uma combinação da frequência natural do oscilador  $\omega_i$  e do estado coletivo de todos os osciladores. A sensibilidade do oscilador à contribuição coletiva é dada pela função  $Z$  e a sua própria contribuição é dada pela função  $X$ . A equação que descreve este modelo é dada por

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \left( \sum_{j=1}^N X(\theta_j) \right) Z(\theta_i) \quad (2.12)$$

onde  $N$  é o número de osciladores,  $i = 1, \dots, N$ ,  $\theta_i$  é a fase do oscilador  $i$ ,  $\dot{\theta}_i$  é a taxa de variação da fase ou frequência instantânea do oscilador  $i$  e  $\omega_i$  é a frequência natural do oscilador  $i$ . Após fazer simulações computacionais, Winfree descobriu que dado um acoplamento suficientemente grande e um intervalo pequeno de valores de frequências naturais, os osciladores entravam em sincronização (STROGATZ, 2000; STROGATZ, 2003; DANIELS, 2005).

Y. Kuramoto começou a trabalhar com sincronização em 1975. Ele usou as mesmas suposições de Winfree e após intensos cálculos matemáticos, ele provou que a dinâmica de um sistema quase idêntico e constituído por osciladores auto-sustentados acoplados era dada por (STROGATZ, 2000; STROGATZ, 2003; DANIELS, 2005) :

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta_i - \theta_j) \quad (2.13)$$

onde  $N$  é o número de osciladores,  $i = 1, \dots, N$ ,  $\Gamma_{ij}$  é a função de interação e determina o tipo de acoplamento entre os osciladores  $i$  e  $j$ .

Após isso, Kuramoto assumiu que cada oscilador afetada todos os outros, uma interação que tem o nome de acoplamento global. Também assumiu que as interações tinham o mesmo peso e dependiam apenas da diferença de fase de maneira senoidal (DANIELS, 2005). As funções de interação são então dadas por

$$\Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i) = \frac{K}{N} \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (2.14)$$

Substituindo a Eq. 2.14 na Eq. 2.13, temos o Modelo de Kuramoto:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (2.15)$$

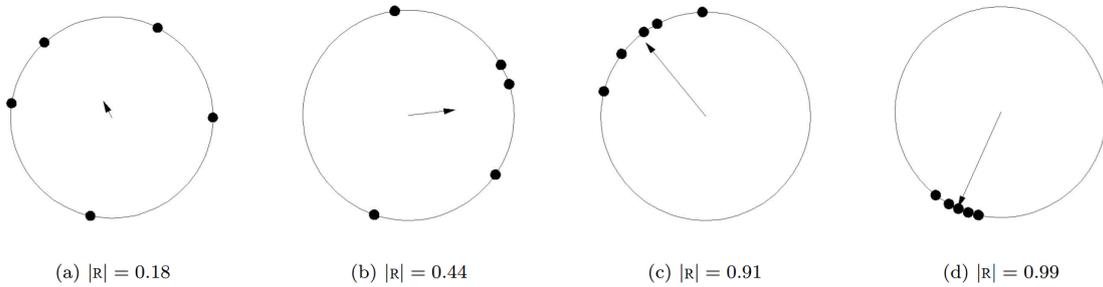
onde  $i = 1, \dots, N$ ,  $K$  é a constante de acoplamento e  $N$  é o número de osciladores.

Os parâmetros de ordem de Kuramoto,  $R$  e  $\psi$  são definido por

$$Re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \quad (2.16)$$

onde o módulo do parâmetro de ordem  $R$  está entre 0 e 1,  $|R| \in [0, 1]$ , e mede a quantidade de comportamento coletivo do sistema e o parâmetro de ordem  $\psi$  mede a fase média de todos os osciladores. Uma maneira de visualizar esses parâmetros é imaginar cada oscilador como um ponto que se move em um círculo unitário, os parâmetros dão origem então a um vetor fixado no centro do círculo, como podemos ver na Fig. 2.14, o módulo de  $R$  nos dá o tamanho do vetor e a fase  $\psi$  nos dá a sua direção. Quanto mais próximos estão os osciladores, mais  $|R|$  se aproxima de 1. Neste trabalho, usaremos apenas  $R$ , de maneira que sempre estaremos nos referindo à ele quando falarmos de parâmetro de ordem.

Figura 2.14 - Parâmetros de ordem  $R$  e  $\psi$  representados como um vetor que aponta a partir do centro do círculo unitário. O comprimento do vetor é dado por  $|R|$  e a direção é dada por  $\psi$ . Os osciladores são os pontos no círculo unitário e quanto mais próximos, maior o valor de  $|R|$ . Quando todos estão no mesmo ponto,  $|R| = 1$ .



Fonte: Daniels (2005)

Podemos escrever o Modelo de Kuramoto em função do parâmetro de ordem. Multiplicando ambos os lados da Eq. 2.16 por  $e^{i\theta_i}$ , temos:

$$Re^{i(\psi-\theta_i)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i(\theta_j-\theta_i)} \quad (2.17)$$

Cuja parte imaginária é dada por

$$R \sin(\psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (2.18)$$

Substituindo a Eq. 2.18 em 2.15, temos o Modelo de Kuramoto em função do parâmetro de ordem:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + KR \sin(\psi - \theta_i) \quad (2.19)$$

Neste modelo de osciladores de fase, três tipos de comportamento coletivo são observados: incoerência, *frequency locking* e *frequency locking* parcial. Temos incoerência quando todos os osciladores se movimentam com frequência observada muito próxima à suas frequências naturais. Isso ocorre se o acoplamento é pequeno, relativo ao tamanho da diferença das frequências naturais. *Frequency locking* ocorre quando a diferença de fase de qualquer par de osciladores é constante no tempo, o que ocorre quando o acoplamento é forte em relação ao tamanho da diferença das frequências naturais. Já o *Frequency locking* parcial ocorre quando um número limitado de osciladores encontra-se em *frequency locking*. Esse estado é o estado intermediário entre incoerência e *frequency locking* (MATTHEWS et al., 1991).

O que faz o Modelo de Kuramoto tão interessante é o trabalho teórico que ele possibilita. Kuramoto provou que haveria uma transição de fase para a sincronização e achou uma equação que calculava o acoplamento crítico necessário para que isso acontecesse (KURAMOTO, 2012). Mesmo com todas as simplificações feitas na criação do modelo, foi demonstrado que ele realmente descreve uma grande classe de osciladores acoplados. Kiss et al. (KISS et al., 2002) apresentaram uma evidência experimental de um sistema físico mapeado para o modelo de Kuramoto usando populações de osciladores químicos precisamente controlados para confirmar que o modelo corretamente prevê as condições necessárias para a sincronização (DANIELS, 2005). Este modelo também é usado no em modelos de memória associativa (FOLLMANN et al., 2015; ACEBRÓN et al., 2005).

### 2.10.2 Modelo de Stuart-Landau

Winfrey e Kuramoto assumiram em seus modelos que os osciladores são fracamente acoplados em relação à sua atração ao ciclo limite. O que acaba fazendo com que o acoplamento só influencie a fase do oscilador, ou seja, só influencia o seu movimento sobre o ciclo limite sem mudar a sua amplitude.

Vamos agora apresentar um modelo mais geral, que permita que as oscilações tenham variações na amplitude. Esse modelo é dado pela equação de Stuart-Landau (ANDRONOV et al., 1966; MATTHEWS et al., 1991; PANTELEY et al., 2015):

$$\dot{u}_n = (\alpha + i\omega_n - |u_n|^2)u_n \quad (2.20)$$

onde  $n = 0, \dots, N - 1$ ,  $N$  é o número de osciladores do sistema,  $u_n$  é a posição do oscilador  $n$  no plano complexo, ou seja,  $u_n = x_n + iy_n$ ,  $w_n$  é a frequência natural do oscilador  $n$  e  $\alpha$  é o parâmetro de bifurcação de Hopf, onde o ponto de equilíbrio perde sua estabilidade e há o surgimento de um ciclo limite (GUCKENHEIMER; HOLMES, 2013).

A Eq. 2.20 se refere apenas à um oscilador isolado. Considerando uma rede com  $N$  osciladores, cujo parâmetro de acoplamento entre os canais de comunicação seja o mesmo para todos os nós, a evolução do sistema será dada por:

$$\dot{u}_n = (\alpha + i\omega_n - |u_n|^2)u_n + \frac{k}{d_n} \sum_{m=1}^N g_{nm}(u_m - u_n) \quad (2.21)$$

onde  $k$  é a constante de acoplamento,  $d_n$  é o grau do oscilador  $n$  e  $(g_{nm})$  é a matriz de adjacência da rede, ou seja,  $g_{nm}$  terá valor 1 se  $n$  está ligado à  $m$  e 0 caso contrário. A fase dos osciladores é dada por  $\theta_n(t) = -\text{iln} \frac{u_n(t)}{|u_n(t)|}$ , onde  $i = \sqrt{-1}$  e  $\text{ln}$  é o logaritmo neperiano.

Sua equivalente real, com  $u(t) = x(t) + iy(t)$ , é dada por

$$\dot{x}_n = x_n(\alpha - x_n^2 - y_n^2) - w_n y_n + \frac{k}{d_n} \sum_{m=1}^N g_{nm}(x_m - x_n) \quad (2.22)$$

$$\dot{y}_n = y_n(\alpha - x_n^2 - y_n^2) - w_n x_n + \frac{k}{d_n} \sum_{m=1}^N g_{nm}(y_m - y_n) \quad (2.23)$$

Neste caso, a fase dos osciladores é dada por  $\theta_n(t) = \tan^{-1} \frac{y_n(t)}{x_n(t)}$ , mais especificamente,  $\theta_n(t) = \text{atan2}(y_n(t), x_n(t))$ .

Em coordenadas polares, com  $u = \rho e^{i\theta}$ ,  $x(t) = \rho(t) \cos \theta(t)$  e  $y(t) = \rho(t) \sin \theta(t)$  a Eq. 2.21 é dada por

$$\dot{\rho}_n = \alpha\rho_n - \rho_n^3 + \frac{k}{d_n} \sum_{m=1}^N g_{nm}(\rho_m \cos(\theta_m - \theta_n) - \rho_n) \quad (2.24)$$

$$\dot{\theta}_n = \omega_n + \frac{k}{d_n} \sum_{m=1}^N g_{nm} \left( \frac{\rho_n}{\rho_m} \sin(\theta_m - \theta_n) \right) \quad (2.25)$$

No modelo de Kuramoto 2.15, as amplitudes permanecem constantes devido aos osciladores serem fracamente acoplados. Já no modelo de Stuart-Landau, os osciladores podem sofrer variações nas suas amplitudes, o que acaba dando origem ao fenômeno da sincronização remota, que será estudada mais adiante.

### 2.10.2.1 Estabilidade da equação de Stuart-Landau

Iremos agora estudar a estabilidade da equação de Stuart-Landau para um oscilador isolado (Eq. 2.20). Em coordenadas polares,  $u = \rho e^{i\theta}$ , temos:

$$\dot{\rho}_n = \alpha\rho_n - \rho_n^3 \quad (2.26)$$

$$\dot{\theta}_n = \omega_n \quad (2.27)$$

Para achar os pontos fixos do sistema, devemos igualar as Eqs. 2.26 e 2.27 a zero.

Acharemos primeiro os pontos fixos para a Eq. 2.26. Seja  $f(\rho) = \alpha\rho - \rho^3$ , para achar os pontos fixos  $\rho^*$ , fazemos então  $f(\rho) = 0$ . Temos como raízes  $\rho_1^* = 0$ ,  $\rho_2^* = \sqrt{\alpha}$  e  $\rho_3^* = -\sqrt{\alpha}$ . Para que o sistema seja estável no ponto fixo encontrado, devemos ter  $f'(\rho^*) < 0$  (STROGATZ, 2014; ALLIGOOD et al., 1996). Portanto, como  $f'(\rho^*) = \alpha - 3(\rho^*)^2$ , temos  $f'(0) = \alpha$  e  $f'(\pm\sqrt{\alpha}) = -2\alpha$ . O ponto fixo  $\rho_1^* = 0$  é estável se  $\alpha < 0$  e os pontos fixos  $\rho_{1,2}^* = \pm\sqrt{\alpha}$  são estáveis se  $\alpha > 0$ .

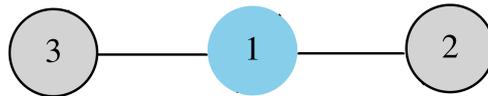
Considerando agora a Eq. 2.27, seja  $f(\theta) = \omega_n$ , seu único ponto fixo é  $\omega_n^* = 0$  e como  $f'(\theta) = 1$ , logo este ponto fixo é instável.

### 2.10.2.2 Mecanismo por trás da sincronização remota e caso limite do oscilador de Stuart-Landau

Para analisar a emergência da sincronização remota em um caso simples, vamos considerar um sistema com três osciladores, onde dois deles (osciladores da extremi-

dade) estejam ligados apenas ao oscilador central (*hub*), Figura 2.15. Nosso objetivo é entender como os osciladores 2 e 3 entram em sincronização, sem que o oscilador entre eles, 1, também se sincronize.

Figura 2.15 - Esquema de uma rede com três osciladores. O oscilador 1 é chamado *hub* (nó central) e os osciladores 2 e 3 são chamados de periféricos.



Fonte: Produção do autor.

Para que os nós 2 e 3 fiquem mutuamente sincronizados, as ações do nó 2 precisam ser transmitidas ao nó 3 e vice-versa. Ou seja, a dinâmica do nó 1 tem que ser de tal forma que não altere as ações dos nós periféricos.

Portanto, a escala de tempo média do atrator do *hub* deve ser suficientemente diferente das escalas dos atratores dos nós periféricos para que ele não se sincronize com eles. E também, os nós periféricos não podem ser muito diferentes entre si para que possam se sincronizar com interações fracas. As perturbações no *hub* não devem decair muito rapidamente, pois ele deve ser capaz de transmitir as interações entre os nós periféricos (BERGNER et al., 2012).

O decaimento das perturbações no modelo de Stuart-Landau é controlado pelo parâmetro de bifurcação de Hopf,  $\alpha$ . Se temos uma perturbação no sistema, ou seja, se ele é afastado do seu ciclo limite (Seção 2.2), quanto maior  $\alpha$ , mais rapidamente o desvio decairá ao ciclo limite. O desvio irá decair quase que instantaneamente quando  $\alpha \rightarrow \infty$ . Portanto, é esperado que o regime de sincronização remota desapareça neste caso.

Vamos agora analisar o que acontece com o sistema descrito pelas equações de Stuart-Landau quando  $\alpha \rightarrow \infty$ . Para isso, consideraremos as equações forma polar. Seja  $R_n = \frac{\rho_n}{\sqrt{\alpha}}$ , onde  $\sqrt{\alpha}$  é o valor da amplitude no equilíbrio e  $\alpha > 0$  (Seção 2.10.2.1). Podemos então reescrever as Eqs. 2.24, 2.25 como :

$$\dot{R}_n = \alpha R_n - \alpha R_n^3 + \frac{k}{d_n} \sum_{m=1}^N g_{nm} (R_m \cos(\theta_m - \theta_n) - R_n) \quad (2.28)$$

$$\dot{\theta}_n = \omega_n + \frac{k}{d_n} \sum_{m=1}^N g_{nm} \left( \frac{R_n}{R_m} \sin(\theta_m - \theta_n) \right) \quad (2.29)$$

Reescalando a variável temporal por  $dT = \alpha dt$  na Eq. 2.28, temos:

$$\frac{dR_n}{dT} = R_n - R_n^3 + \frac{k}{\alpha d_n} \sum_{m=1}^N g_{nm} (R_m \cos(\theta_m - \theta_n) - R_n) \quad (2.30)$$

No equilíbrio,  $\frac{dR_n}{dT} = 0$  :

$$R_n - R_n^3 + \frac{k}{\alpha d_n} \sum_{m=1}^N g_{nm} (R_m \cos(\theta_m - \theta_n) - R_n) = 0 \quad (2.31)$$

Quando  $\alpha \rightarrow \infty$ , o termo com o acoplamento  $k$  tende a zero e ficamos com

$$R_n(1 - R_n^2) = 0 \quad (2.32)$$

Como  $R_n \neq 0$ , temos que  $R_n \rightarrow 1$  quando  $\alpha \rightarrow \infty$ . E mais, como  $R_n = \frac{\rho_n}{\sqrt{\alpha}}$ ,  $\rho_n = R_n \sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha}$ , como havíamos mencionado anteriormente.

Substituindo  $R \rightarrow 1$  na Eq. 2.29, temos que  $\frac{R_n}{R_m} = 1$ , portanto, essa equação se torna

$$\dot{\theta}_n = \omega_n + \frac{k}{d_n} \sum_{m=1}^N g_{nm} (\sin(\theta_m - \theta_n)) \quad (2.33)$$

Que é o modelo de Kuramoto aplicado à redes de osciladores. Portanto, o modelo de Kuramoto é um caso limite do modelo de Stuart-Landau, quando  $\alpha \rightarrow \infty$  (Resultados numéricos na Seção 4.1.1). Neste limite, a amplitude não tem nenhuma influência na evolução do sistema, ou seja, o nível de sincronização remota é praticamente inexistente, o que sugere que a modulação da amplitude é o principal mecanismo por trás da sincronização remota (GAMBUZZA et al., 2013; BERGNER et al., 2012; GAMBUZZA et al., 2016).

Apesar de a modulação da amplitude aparentar ser a origem da sincronização remota, também podemos ter esse tipo de sincronização com algumas versões modificadas do modelo de Kuramoto. Existe um modelo mais geral da Eq. 2.15, chamado modelo de Kuramoto-Sakaguchi, onde um termo constante é introduzido no acoplamento, chamado de *phase frustration* ou *phase shift* (SAKAGUCHI; KURAMOTO, 1986; VLASOV et al., 2014). Com este modelo, é possível observar sincronização remota de osciladores, como foi observado entre pares de osciladores simétricos de uma rede (NICOSIA et al., 2013). Se introduzirmos um atraso no modelo de Kuramoto dado pela Eq.2.15, ou seja, se considerarmos que um oscilador não é afetado instantaneamente pelo outros, temos a possibilidade do surgimento da sincronização remota no estudo de redes bipartidas (PUNETHA et al., 2015).

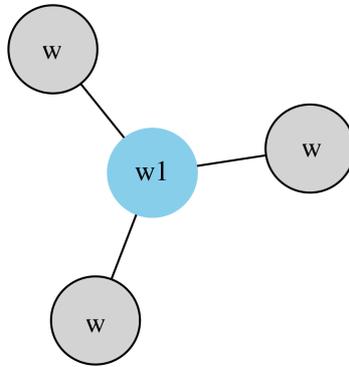


### 3 ESTUDO ANALÍTICO DA DINÂMICA DE UMA REDE DO TIPO ESTRELA

A sincronização remota em uma rede ocorre quando alguns nós, que não possuem ligações físicas entre si, se sincronizam, sem que os nós que estão no caminho entre eles estejam sincronizados. Para que haja sincronização remota, temos que considerar um sistema com amplitude livre para caracterizar a dinâmica da rede (Seção 2.10.2.2). Portanto, para descrever este comportamento, uma das possibilidades é usar o oscilador de Stuart-Landau, que é um modelo relativamente simples que consegue capturar esse fenômeno.

Para simplificar os cálculos, será considerada aqui uma rede do tipo estrela com quatro nós, Figura 3.1. O nó central (*hub*) com frequência  $\omega_1$  e três periféricos (*folhas*) com mesma frequência  $\omega_n = \omega$  para  $n = 2, 3, 4$ . Embora sejam utilizados apenas três folhas, os resultados analíticos obtidos neste capítulo valem para um número qualquer de osciladores periféricos, obtidos em (FRASCA et al., 2012).

Figura 3.1 - Rede do tipo estrela a ser considerada. O nó central (azul) tem frequência  $\omega_1$  e os periféricos (cinza) têm frequência  $\omega$ .



Fonte: Produção do autor.

A dinâmica da rede será dada pela equação de Stuart-Landau 2.21. A equação que governa o nó central é então dada por

$$\dot{u}_1 = (\alpha + i\omega_1 - |u_1|^2)u_1 + \frac{k}{3} \sum_{m=2}^N (u_m - u_1) \quad (3.1)$$

onde  $N = 4$  é o número total de nós,  $u \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha$  é o parâmetro de bifurcação de Hopf (ALLIGOOD et al., 1996),  $\omega_1$  é a frequência natural do oscilador central (*hub*) e  $k$  é a constante de acoplamento.

A equação que governa os nós periféricos é dada por

$$\dot{u}_n = (\alpha + i\omega - |u_n|^2)u_n + k(u_1 - u_n) \quad (3.2)$$

para  $n = 2, 3, 4$ . Onde  $\omega$  é a frequência dos nós periféricos.

Suas equivalentes reais ( $u = x + iy$ ) são dadas por :

$$\dot{x}_1 = x_1(\alpha - x_1^2 - y_1^2) - w_1 y_1 + \frac{k}{3} \sum_{m=2}^N (x_m - x_1) \quad (3.3)$$

$$\dot{y}_1 = y_1(\alpha - x_1^2 - y_1^2) - w_1 x_1 + \frac{k}{3} \sum_{m=2}^N (y_m - y_1)$$

$$\dot{x}_n = x_n(\alpha - x_n^2 - y_n^2) - w_n y_n + k(x_1 - x_n) \quad (3.4)$$

$$\dot{y}_n = y_n(\alpha - x_n^2 - y_n^2) - w_n x_n + k(y_1 - y_n)$$

para  $n = 2, 3, 4$ .

Em coordenadas polares ( $u = \rho e^{i\theta}$ ) as Eqs. 3.1 e 3.2 se tornam:

$$\dot{\rho}_1 = \alpha \rho_1 - \rho_1^3 + \frac{k}{3} \sum_{m=2}^N (\rho_m \cos(\theta_m - \theta_1) - \rho_1) \quad (3.5)$$

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 + \frac{k}{3} \sum_{m=2}^N \left( \frac{\rho_1}{\rho_m} \sin(\theta_m - \theta_1) \right)$$

$$\dot{\rho}_n = \alpha \rho_n - \rho_n^3 + k \rho_1 \cos(\theta_1 - \theta_n) - \rho_n \quad (3.6)$$

$$\dot{\theta}_n = \omega + k \frac{\rho_n}{\rho_1} \sin(\theta_1 - \theta_n)$$

para  $n = 2, 3, 4$ .

### 3.1 Fundamentação Teórica

Serão apresentados aqui alguns teoremas, proposições e definições que serão utilizados ao longo deste capítulo.

**Definição 1. Autovetor e Autovalor** - Um vetor  $V \in R^n$  é um autovetor de uma matriz  $A$  com entradas reais  $n \times n$  se  $V$  é a solução não nula do sistema de equações lineares  $(A - \lambda I)V = 0$ . A quantidade  $\lambda$  é chamada de autovalor de  $A$ , e  $V$  é um autovetor associado à  $\lambda$  (HIRSCH et al., 2013).

**Proposição 1.** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Os autovalores de  $A$  são as raízes do seu polinômio característico, dado por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \quad (3.7)$$

onde  $I$  é a matriz identidade.

**Proposição 2.** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Se  $\lambda$  é um autovalor de  $A$ , então os autovetores de  $A$  associados a  $\lambda$  são as soluções do sistema homogêneo

$$(A - \lambda I)V = 0 \quad (3.8)$$

onde  $I$  é a matriz identidade.

**Proposição 3.** Suponha que  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são autovalores reais e distintos de  $A$  com autovetores associados  $V_1, \dots, V_n$ . Então  $V_i$  são linearmente independentes (HIRSCH et al., 2013).

**Corolário 1.** Suponha que  $A$  seja uma matriz com autovalores distintos e reais. Então existe uma matriz  $T$  tal que

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

onde todas as entradas fora da diagonal são zero (HIRSCH et al., 2013).

**Corolário 2.** Se  $A' = T^{-1}AT$ , então as colunas da matriz  $T$  são  $n$  autovetores linearmente independentes de  $A$  (HIRSCH et al., 2013).

**Definição 2. Matriz semelhante** - Sejam  $A$  e  $A'$  matrizes  $n \times n$ . Dizemos que  $A'$  é semelhante a  $A$ , se existe uma matriz inversível  $T$  tal que  $A' = T^{-1}AT$ .

**Teorema 1.** Matrizes semelhantes possuem os mesmos autovalores.

**Demonstração:** Sejam  $A$  e  $A'$  matrizes semelhantes. Então, de acordo com a Definição 2,  $A' = T^{-1}AT$ , para algum  $T$  inversível. Será demonstrado que  $A$  e  $A'$  tem os mesmos polinômios característicos ( $p_A(\lambda)$  e  $p_{A'}(\lambda)$ ). Tem-se

$$\begin{aligned} p_{A'}(\lambda) &= \det(A' - \lambda I) = \det(T^{-1}AT - \lambda I) = \det(T^{-1}AT - T^{-1}\lambda IT) = \\ &= \det(T^{-1}(A - \lambda I)T) = \det(T^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(T) = \\ &= \det(T^{-1}) \det(T) \det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda) \end{aligned}$$

Como  $p_A(\lambda) = p_{A'}(\lambda)$ , segue que  $A$  e  $A'$  tem os mesmos autovalores. ■

**Definição 3. Matriz de Grau  $D$**  - A matriz de Grau  $D$  é uma matriz diagonal que contém a informação do grau de cada vértice (número de arestas que estão conectadas a ele).

**Definição 4. Matriz de Adjacência  $A$**  - A matriz de Adjacência  $A$  é utilizada para representar um grafo, seus elementos indicam se os pares de vértices são adjacentes no grafo (valor de entrada igual a 1) ou não (valor de entrada igual a 0).

**Definição 5. Matriz Laplaciana  $L$**  - Define-se matriz Laplaciana  $L$  como:

$$L = D - A \tag{3.10}$$

**Definição 6. Matriz Laplaciana normalizada  $G$**  - A matriz Laplaciana normalizada  $G$  é dada por

$$G = D^{-1}.L \tag{3.11}$$

**Definição 7. Produto de Kronecker** - Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$  e  $B$  uma matriz  $p \times q$ , então o produto de Kronecker  $A \otimes B$  é uma matriz em bloco  $m.p \times n.q$  dada por

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

**Proposição 4.** *O produto de Kronecker é bilinear e associativo. Portanto, valem:*

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$$

onde  $B$  e  $C$  tem as mesmas dimensões.

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$$

onde  $B$  e  $A$  tem as mesmas dimensões.

$$(kA) \otimes B = A \otimes (kB) = k(A \otimes B)$$

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são matrizes e  $k$  é um escalar.

**Proposição 5.** *Considere a matriz Laplaciana normalizada  $G$  (Definição 6) e seja  $T$  a sua matriz diagonalizante dada pelo Corolário 1. Então se  $H$  é uma matriz diagonal da forma*

$$H = \begin{pmatrix} A & & & \\ & B & & \\ & & \ddots & \\ & & & B \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

com  $A, B \in \mathbb{R}$ , a sua matriz semelhante é dada por:

$$H' = T^{-1}HT = \begin{pmatrix} \frac{A+B}{2} & \frac{A-B}{2} & & \\ \frac{A-B}{2} & \frac{A+B}{2} & & \\ & & B & \\ & & & \ddots & \\ & & & & B \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

(FRASCA et al., 2012)

A proposição anterior pode ser generalizada para uma matriz  $H$  diagonal por blocos, como pode-se ver a seguir.

**Proposição 6.** *Seja a matriz  $H$  dada pela Eq. 3.13 com  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , então a sua matriz semelhante é:*

$$H' = T^{-1} \otimes I_n \cdot H \cdot T \otimes I_n = \begin{pmatrix} \frac{A+B}{2} & \frac{A-B}{2} & & & \\ \frac{A-B}{2} & \frac{A+B}{2} & & & \\ & & B & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & B \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

(FRASCA et al., 2012)

**Definição 8. Matriz Jacobiana** - Considere um sistema dado por  $\dot{x} = f(x, y)$  e  $\dot{y} = g(x, y)$  e suponha que  $(x^*, y^*)$  seja um ponto fixo, ou seja,  $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$ . Seja  $u = x - x^*$  e  $v = y - y^*$  pequenas perturbações no ponto fixo. Essa perturbação irá evoluir de acordo com

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \text{termos quadráticos}$$

A matriz

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)}$$

é chamada de matriz Jacobiana no ponto fixo  $(x^*, y^*)$  (STROGATZ, 2014).

**Definição 9. Sistema Linearizado** - Quando os termos quadráticos da Definição 8 são descartados, obtém-se o sistema linearizado, que é dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

**Definição 10. Ponto de equilíbrio** - Seja uma equação diferencial dada por  $x' = f(t, X)$  com  $X \in \mathbb{R}^n$ .  $X^*$  é um ponto de equilíbrio dessa equação se  $f(t, X^*) = 0$  para todo  $t$ .

**Definição 11. Ponto de equilíbrio estável e assintoticamente estável -** Suponha que  $X^* \in \mathbb{R}^n$  seja um ponto de equilíbrio da equação diferencial  $X' = F(X)$ . Então  $X^*$  é um equilíbrio estável se para cada vizinhança  $O$  de  $X^* \in \mathbb{R}^n$  existir uma vizinhança  $O_1$  de  $X^*$  em  $O$  tal que toda solução  $X(t)$  com  $X(0) = X_0$  em  $O_1$  é definida e permanece em  $O$  para todo  $t > 0$ . Se  $O_1$  pode ser escolhido de maneira que, em adição às propriedades para a estabilidade, tenha-se  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X^*$ , dizemos que  $X^*$  é assintoticamente estável (HIRSCH et al., 2013).

**Teorema 2.** Suponha que um sistema  $n$ -dimensional  $X' = F(X)$  tenha um ponto de equilíbrio em  $X^*$  e todos os autovalores do sistema linearizado em  $X^*$  tenham partes reais negativas. Então  $X^*$  é assintoticamente estável (HIRSCH et al., 2013).

### 3.2 Ponto de equilíbrio do sistema

Encontraremos agora o ponto de equilíbrio (Definição 10) do sistema dado pelas Eqs. 3.3 e 3.4, para isso, introduziremos a seguinte notação:

$$\begin{aligned}
 f_1 = \dot{x}_1 &= x_1(\alpha - x_1^2 - y_1^2) - w_1 y_1 + \frac{k}{3} \sum_{m=2}^N (x_m - x_1) \\
 f_2 = \dot{y}_1 &= y_1(\alpha - x_1^2 - y_1^2) - w_1 x_1 + \frac{k}{3} \sum_{m=2}^N (y_m - y_1) \\
 f_3 = \dot{x}_2 &= x_2(\alpha - x_2^2 - y_2^2) - w y_2 + k(x_1 - x_2) \\
 f_4 = \dot{y}_2 &= y_2(\alpha - x_2^2 - y_2^2) - w x_2 + k(y_1 - y_2) \\
 f_5 = \dot{x}_3 &= x_3(\alpha - x_3^2 - y_3^2) - w y_3 + k(x_1 - x_3) \\
 f_6 = \dot{y}_3 &= y_3(\alpha - x_3^2 - y_3^2) - w x_3 + k(y_1 - y_3) \\
 f_7 = \dot{x}_4 &= x_4(\alpha - x_4^2 - y_4^2) - w y_4 + k(x_1 - x_4) \\
 f_8 = \dot{y}_4 &= y_4(\alpha - x_4^2 - y_4^2) - w x_4 + k(y_1 - y_4)
 \end{aligned}$$

Seja o vetor  $F(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$  dado por

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4) \\ \vdots \\ f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4) \\ f_8(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Para encontrar os pontos de equilíbrio, impomos

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4) = 0 \quad (3.17)$$

obtêm-se como solução única  $x_i = 0$  e  $y_i = 0$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Portanto, este sistema possui apenas um ponto de equilíbrio, onde não há oscilações (*oscillation death*), ou seja, o sistema encontra-se em repouso.

### 3.3 Estabilidade no ponto de equilíbrio

A fim de estudar a estabilidade no ponto de equilíbrio do sistema, serão construídas as seguintes matrizes a partir da Figura 3.1: Grau  $D$ , Adjacência  $A$ , Laplaciana  $L$  e Laplaciana normalizada (*Random walk normalized Laplacian*)  $G$  (FRASCA et al., 2012).

A matriz de Grau (Definição 3) é dada por

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Sua matriz de Adjacência (Definição 4) é

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

A matriz Laplaciana (Definição 5) é dada por:

$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Já a matriz Laplaciana normalizada (Definição 6) desta rede do tipo estrela é dada

por

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

No estudo da estabilidade, serão também utilizados os autovetores e autovalores da matriz Laplaciana normalizada  $G$  (FRASCA et al., 2012).

De acordo com a Proposição 1, autovalores de  $G$  são as raízes da sua equação característica:

$$\det(G - \lambda I) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda = 0 \quad (3.22)$$

Portanto,  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ .

Os autovetores de  $G$  (Proposição 2), são dados por:

$$(G - \lambda_i I)V_i = 0 \quad (3.23)$$

onde  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Assim,  $V_1 = (1, -1, -1, -1)^T$ ,  $V_2 = (1, 1, 1, 1)^T$ ,  $V_3 = (0, 1, -1, 0)^T$ ,  $V_4 = (0, 1, 0, -1)^T$ .

Os autovalores de  $G$  não são distintos (como supõe a Proposição 3), mas os seus autovetores são linearmente independentes. Podemos então montar a matriz  $T$ , utilizada no Corolário 1, colocando os autovetores de  $G$  nas suas colunas (Corolário 2):

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Calculando  $T^{-1}GT$ , vemos que o resultado é uma matriz diagonal com os autovalores de  $G$  como entrada (Corolário 1):

$$G' = T^{-1}GT = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Analisaremos agora a estabilidade do sistema no ponto de equilíbrio calculado na seção anterior,  $x_i = 0$  e  $y_i = 0$ , onde  $i = 1, 2, 3, 4$ .

O Jacobiano (Definição 8) do sistema, dado pelas Eqs. 3.3 e 3.4, ao redor do ponto de equilíbrio é dado por

$$J(\bar{x}, \bar{y}) \Big|_{x_i, y_i=0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{x_i, y_i=0} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \Big|_{x_i, y_i=0} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \Big|_{x_i, y_i=0} & \frac{\partial f_1}{\partial y_4} \Big|_{x_i, y_i=0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_8}{\partial x_1} \Big|_{x_i, y_i=0} & \frac{\partial f_8}{\partial y_1} \Big|_{x_i, y_i=0} & \cdots & \frac{\partial f_8}{\partial x_4} \Big|_{x_i, y_i=0} & \frac{\partial f_8}{\partial y_4} \Big|_{x_i, y_i=0} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

onde  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  e  $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ . Temos então

$$J \Big|_{x_i, y_i=0} = \begin{pmatrix} \alpha - k & -\omega_1 & \frac{k}{3} & 0 & \frac{k}{3} & 0 & \frac{k}{3} & 0 \\ \omega_1 & \alpha - k & 0 & \frac{k}{3} & 0 & \frac{k}{3} & 0 & \frac{k}{3} \\ k & 0 & \alpha - k & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & \omega & \alpha - k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 & \alpha - k & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & \omega & \alpha - k & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - k & -\omega \\ 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & \alpha - k \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

onde  $J = J(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$ .

Considerando a matriz Laplaciana normalizada do sistema, dada por 3.21, pode-se escrever o Jacobiano de uma maneira mais compacta:

$$J \Big|_{x_i, y_i=0} = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -\omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & \alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -k & 0 & \frac{k}{3} & 0 & \frac{k}{3} & 0 & \frac{k}{3} & 0 \\ 0 & -k & 0 & \frac{k}{3} & 0 & \frac{k}{3} & 0 & \frac{k}{3} \\ k & 0 & -k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & -k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 & -k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & 0 & -k & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

$$J \Big|_{x_i, y_i=0} = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -\omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & \alpha \end{pmatrix} - kG \otimes I_2$$

$$J \Big|_{x_i, y_i=0} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix} - kG \otimes I_2$$

$$J \Big|_{x_i, y_i=0} = J' - kG \otimes I_2 \quad (3.28)$$

$$\text{onde } J' = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix}, J_1 = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega_1 \\ \omega_1 & \alpha \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \text{ e } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para facilitar os cálculos, iremos considerar os autovalores de uma matriz semelhante à matriz Jacobiana  $J$ , pois como mostrado no Teorema 1, matrizes semelhantes possuem os mesmos autovalores.

Seja  $\tilde{J}$  uma matriz semelhante a  $J$ , pela Definição 2 e pela Proposição 6,  $\tilde{J}$  é dada

por

$$\tilde{J} = T^{-1} \otimes I_2 . J . T \otimes I_2 \quad (3.29)$$

Usando propriedades mostradas na seção anterior, calcularemos  $\tilde{J}$ .

$$\tilde{J} = (T^{-1} \otimes I_2) . J . (T \otimes I_2) = (T^{-1} \otimes I_2) . [J' - kG \otimes I_2] . (T \otimes I_2) \quad *3.28$$

$$\tilde{J} = [(T^{-1} \otimes I_2) . J' - k(T^{-1} \otimes I_2) . G \otimes I_2] . (T \otimes I_2)$$

$$\tilde{J} = (T^{-1} \otimes I_2) . J' . (T \otimes I_2) - k(T^{-1} \otimes I_2) . G \otimes I_2 . (T \otimes I_2)$$

$$\tilde{J} = (T^{-1} \otimes I_2) . J' . (T \otimes I_2) - k(T^{-1} . G . T) \otimes I_2 \quad *4$$

Pela Eq. 3.15, sabemos que

$$(T^{-1} \otimes I_2) . J' . (T \otimes I_2) = \begin{pmatrix} \frac{J_1+J_2}{2} & \frac{J_1-J_2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{J_1-J_2}{2} & \frac{J_1+J_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Pela Eq. 3.25, temos

$$T^{-1}GT = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

A matriz  $\tilde{J}$  é então dada por

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} \frac{J_1+J_2}{2} & \frac{J_1-J_2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{J_1-J_2}{2} & \frac{J_1+J_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes I_2 \quad (3.32)$$

Substituindo  $J_1 = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega_1 \\ \omega_1 & \alpha \end{pmatrix}$ ,  $J_2 = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix}$  e  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  na equação acima, vemos que  $\tilde{J}$  é uma matriz diagonal por blocos e é dada por:

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} \alpha - 2k & \frac{-w_1-w}{2} & 0 & \frac{-w_1+w}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{w_1+w}{2} & \alpha - 2k & \frac{w_1-w}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-w_1+w}{2} & \alpha & \frac{-w_1-w}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{w_1-w}{2} & 0 & \frac{w_1+w}{2} & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - k & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & \alpha - k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - k & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & \alpha - k \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Como os autovalores de uma matriz diagonal por blocos são os autovalores dos seus blocos (BONATTI et al., 2016), temos que os autovalores de  $\tilde{J}$  são os autovalores das matrizes  $J_{p1}$ ,  $J_{p2}$ ,  $J_{p3}$ , dadas abaixo.

$$J_{p1} = \begin{pmatrix} \alpha - 2k & \frac{-w_1-w}{2} & 0 & \frac{-w_1+w}{2} \\ \frac{w_1+w}{2} & \alpha - 2k & \frac{w_1-w}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-w_1+w}{2} & \alpha & \frac{-w_1-w}{2} \\ \frac{w_1-w}{2} & 0 & \frac{w_1+w}{2} & \alpha \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

$$J_{p2} = J_{p3} = \begin{pmatrix} \alpha - k & -\omega \\ \omega & \alpha - k \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Os autovalores de  $J_{p1}$  são dados por

$$\mu_1 = \alpha - k + \sqrt{4k^2 - 2\omega_1^2 - 2\omega^2 + 2\sqrt{(\omega_1 + \omega)^2(\omega_1^2 + \omega^2 - 2\omega\omega_1 - 4k^2)}} \quad (3.36)$$

$$\mu_2 = \alpha - k - \sqrt{4k^2 - 2\omega_1^2 - 2\omega^2 + 2\sqrt{(\omega_1 + \omega)^2(\omega_1^2 + \omega^2 - 2\omega\omega_1 - 4k^2)}} \quad (3.37)$$

$$\mu_3 = \alpha - k + \sqrt{4k^2 - 2\omega_1^2 - 2\omega^2 - 2\sqrt{(\omega_1 + \omega)^2(\omega_1^2 + \omega^2 - 2\omega\omega_1 - 4k^2)}} \quad (3.38)$$

$$\mu_4 = \alpha - k - \sqrt{4k^2 - 2\omega_1^2 - 2\omega^2 - 2\sqrt{(\omega_1 + \omega)^2(\omega_1^2 + \omega^2 - 2\omega\omega_1 - 4k^2)}} \quad (3.39)$$

Os autovalores de  $J_{p2}$  ( $\mu_5, \mu_6$ ) e  $J_{p3}$  ( $\mu_7, \mu_8$ ) são:

$$\mu_5 = \mu_7 = \alpha - k + i\omega \quad (3.40)$$

$$\mu_6 = \mu_8 = \alpha - k - i\omega \quad (3.41)$$

De acordo com o Teorema 2, para que tenhamos um comportamento assintoticamente estável no ponto de equilíbrio, as partes reais dos autovalores acima precisam ser negativas.

O cálculo da estabilidade para os autovalores  $\mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8$  é simples, dado por:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\{\alpha - k \pm i\omega\} &< 0 \\ \alpha - k &< 0 \\ k &> \alpha\end{aligned}$$

Portanto, os autovalores  $\mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8$  tem parte real negativa, ou seja, o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável, quando  $k > \alpha$ .

Para o estudo do sinal dos autovalores  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ , vamos considerar o polinômio característico de  $J_{p1}$  que é dado por

$$\Phi(p) = \det(J_{p1} - pI) = p^4 + A_1p^3 + A_2p^2 + A_3p + A_4 \quad (3.42)$$

onde  $I$  é a matriz identidade e os coeficientes  $A_1, A_2, A_3, A_4$  são dados por

$$A_1 = 4k - 4\alpha$$

$$A_2 = 4k^2 + \omega_1^2 + 6\alpha^2 + \omega^2 - 12k\alpha$$

$$A_3 = -2\alpha\omega^2 - 4\alpha^3 - 8k^2\alpha - 2\alpha\omega_1^2 + 2k\omega_1^2 + 2k\omega^2 + 12k\alpha^2$$

$$A_4 = -2\alpha k\omega^2 + k^2\omega^2 + k^2\omega_1^2 + \omega^2\omega_1^2 + 2k^2\omega\omega_1 + \alpha^4 + \alpha^2\omega_1^2 - 4k\alpha^3 - 2\alpha k\omega_1^2 + \alpha^2\omega^2 + 4k^2\alpha^2$$

Um polinômio característico dado por  $\Phi(p) = a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4$  é estável se as seguintes condições forem satisfeitas:

$$\begin{aligned}a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0 \\ a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 > 0\end{aligned}$$

Essas condições são dadas pelo Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz (OGATA; YANG, 1970; PONTRIAGUINE; TER-MKRTCJAN, 1975).

Para que o polinômio 3.42 seja estável, devemos então impor

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \quad A_4 > 0 \quad (3.43)$$

$$A_1 A_2 A_3 - A_3^2 - A_1^2 A_4 > 0 \quad (3.44)$$

Adicionalmente, vamos exigir que a constante de acoplamento  $k$  seja positiva, e que a diferença entre o valor da frequência dos nós periféricos e do hub seja também positiva:

$$k > 0 \quad (3.45)$$

$$\Delta\omega = \omega - \omega_1 > 0 \quad (3.46)$$

Resolvendo as inequações 3.43, 3.44, 3.45, 3.46 simultaneamente, obtemos como solução:

$$\Delta\omega > 2\alpha \quad (3.47)$$

$$\alpha < k < \frac{1}{8\alpha}(4\alpha^2 + \Delta\omega^2) \quad (3.48)$$

Ou ainda,

$$\frac{\Delta\omega}{\alpha} > 2 \quad (3.49)$$

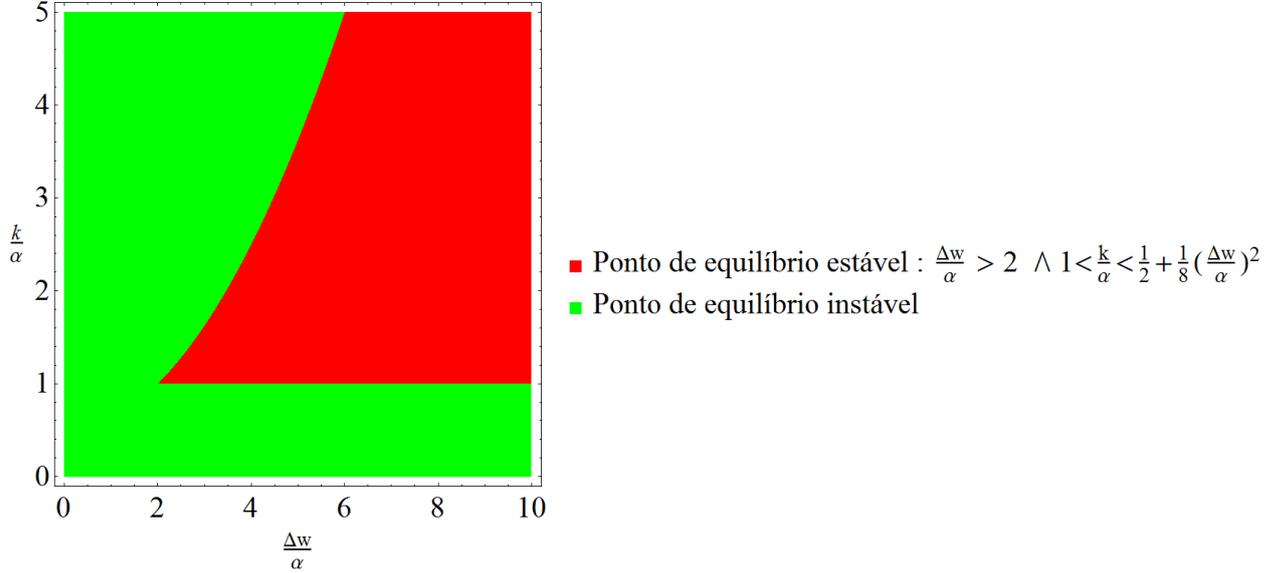
$$1 < \frac{k}{\alpha} < \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\left(\frac{\Delta\omega}{\alpha}\right)^2 \quad (3.50)$$

Portanto, o sistema 3.3 e 3.4 é estável ao redor do seu ponto de equilíbrio ( $x_i = 0$  e  $y_i = 0$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ ) quando as condições 3.49 e 3.50 são satisfeitas. Podemos ver essa região na Figura 3.2. Em vermelho, temos a região de estabilidade do sistema no seu ponto de equilíbrio. Na região em verde esse ponto de equilíbrio é instável.

### 3.4 Condição para sincronização do sistema

Vamos agora obter a região onde temos sincronização global do sistema, ou seja, todos os osciladores estão sincronizados entre si. Por conveniência, utilizaremos agora o sistema escrito em coordenadas polares, Eqs. 3.5 e 3.6.

Figura 3.2 - Região de estabilidade do sistema 3.3 e 3.4 no seu ponto de equilíbrio  $x_i = 0$  e  $y_i = 0$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Na região vermelha, o sistema é estável. Já na região verde, é instável. Onde  $\wedge$  é o conectivo lógico que representa uma conjunção.



Fonte: Produção do autor.

Em coordenadas polares, o sistema encontra-se sincronizado em *phase locking* quando a sua amplitude é constante ( $\dot{\rho}_i = 0$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ ) e temos uma diferença constante entre as fases dos osciladores (Seção 2.5).

Consideraremos primeiro as equações das amplitudes. Tomando  $\dot{\rho}_i = 0$  nas Eqs. 3.5 e 3.6 temos:

$$\alpha \rho_1 - \rho_1^3 + \frac{k}{3} \sum_{i=2}^N (\rho_i \cos(\theta_i - \theta_1) - \rho_1) = 0 \quad (3.51)$$

$$\alpha \rho_i - \rho_i^3 + k \rho_1 \cos(\theta_1 - \theta_i) - \rho_i = 0 \quad (3.52)$$

para  $i = 2, 3, 4$  e  $N = 4$ . Se multiplicarmos a Eq. 3.51 por 3 e subtrairmos dela a Eq. 3.52 para todos os valores de  $i$ , teremos:

$$3(\alpha \rho_1 - \rho_1^3) - \sum_{i=2}^N (\alpha \rho_i - \rho_i^3) + k \left( \sum_{i=2}^N (\rho_i \cos(\theta_i - \theta_1) - \rho_1) - \sum_{i=2}^N (\rho_1 \cos(\theta_1 - \theta_i) - \rho_i) \right) = 0 \quad (3.53)$$

Da equação acima, obtemos que  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4$ . Ou seja, quando há sincronização, as amplitudes dos osciladores são as mesmas.

Consideraremos agora as equações para as fases nas Eqs. 3.5 e 3.6. Quando a rede de osciladores está sincronizada, eles oscilam com uma frequência comum que chamaremos de  $\Omega$ . Para facilitar os cálculos, introduziremos uma nova variável  $\zeta_i$  definida como

$$\zeta_i = \theta_i - \Omega t \quad (3.54)$$

para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Sua derivada é então dada por

$$\dot{\zeta}_i = \dot{\theta}_i - \Omega \quad (3.55)$$

onde  $\dot{\theta}_i$  é a frequência instantânea, que é igual a  $\Omega$  quando o sistema está sincronizado. Portanto quando há sincronização, temos  $\dot{\zeta}_i = 0 \forall i$ . Reorganizando a Eq. 3.55:

$$\dot{\theta}_i = \dot{\zeta}_i + \Omega \quad (3.56)$$

Substituindo a Eq. 3.56 nas equações das fases do sistema 3.5 e 3.6 e lembrando que  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4$ , temos:

$$\dot{\zeta}_1 + \Omega = \omega_1 + \frac{k}{3} \sum_{i=2}^N \sin(\zeta_i - \zeta_1) \quad (3.57)$$

$$\dot{\zeta}_i + \Omega = \omega_i + k \sin(\zeta_1 - \zeta_i) \quad (3.58)$$

Impondo que o sistema esteja sincronizado, podemos escrever as equações acima como:

$$\dot{\zeta}_1 = -\Omega + \omega_1 + \frac{k}{3} \sum_{i=2}^N \sin(\zeta_i - \zeta_1) = 0 \quad (3.59)$$

$$\dot{\zeta}_i = -\Omega + \omega_i + k \sin(\zeta_1 - \zeta_i) = 0 \quad (3.60)$$

com  $i = 1, 2, 3, 4$  e  $N = 4$ .

Para encontrar o valor de  $\Omega$ , multiplicamos a Eq. 3.59 por 3 e a somamos com a Eq. 3.60 para todos os valores de  $i$ . Obtemos:

$$3(\omega_1 - \Omega) + \sum_{i=2}^N (\omega_i - \Omega) + k \sum_{i=2}^N [\sin(\zeta_i - \zeta_1) + \sin(\zeta_1 - \zeta_i)] = 0 \quad (3.61)$$

Como o que está dentro da segunda somatória é zero, a equação acima fica reduzida a:

$$3(\omega_1 - \Omega) + \sum_{i=2}^N (\omega_i - \Omega) = 0 \quad (3.62)$$

Como  $\omega_i = \omega$  para  $i = 2, 3, 4$  (todos os nós periféricos possuem a mesma frequência natural), a Eq. 3.62 resulta em  $\Omega = \frac{\omega_1 + \omega}{2}$ .

Portanto, quando a rede está sincronizada, todos os nós oscilam com uma mesma frequência  $\Omega$  dada por  $\frac{\omega_1 + \omega}{2}$ .

Vamos agora voltar à Eq. 3.60 para um nó periférico  $i$  qualquer :

$$\sin(\zeta_1 - \zeta_i) = \frac{\Omega - \omega_i}{k} \quad (3.63)$$

Substituindo  $\Omega = \frac{\omega_1 + \omega}{2}$  e sabendo que o seno é limitado entre -1 e 1, temos

$$-1 \leq \frac{\omega_1 - \omega}{2k} \leq 1 \quad (3.64)$$

Ou seja,

$$\frac{|\omega_1 - \omega|}{2k} \leq 1 \quad (3.65)$$

Lembrando que  $\Delta\omega = \omega - \omega_1$ , chegamos então numa condição necessária para que o sistema dado pelas Eqs. 3.3 e 3.4 esteja sincronizado:

$$k \geq \frac{|\Delta\omega|}{2} \quad (3.66)$$

Utilizando as condições 3.49, 3.50 e 3.66, podemos representar o diagrama de bifurcação do sistema dado por 3.3 e 3.4. Lembrando que estamos impondo aqui que  $\Delta\omega > 0$ .

Na Figura 3.3, a região de onde o sistema possui equilíbrio estável (em vermelho) é a mesma apresentada na Figura 3.2, definida por  $\frac{\Delta\omega}{\alpha} > 2$  e  $1 < \frac{k}{\alpha} < \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\left(\frac{\Delta\omega}{\alpha}\right)^2$ .

Na região amarela da Figura 3.4(b) (regiões amarela e verde da Figura 3.4(a)), temos a região de sincronização, onde os osciladores tem uma mesma frequência  $\Omega = \frac{\omega_1 + \omega}{2}$  e possuem diferença de fase constante. Essa região também é chamada de língua de Arnold 2.6 e é dada pela intersecção de  $\frac{k}{\alpha} \geq \frac{\Delta\omega}{2\alpha}$  e  $\frac{k}{\alpha} \leq 1$  com  $\frac{k}{\alpha} \geq \frac{\Delta\omega}{2\alpha}$  e  $\frac{k}{\alpha} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\left(\frac{\Delta\omega}{\alpha}\right)^2$ .

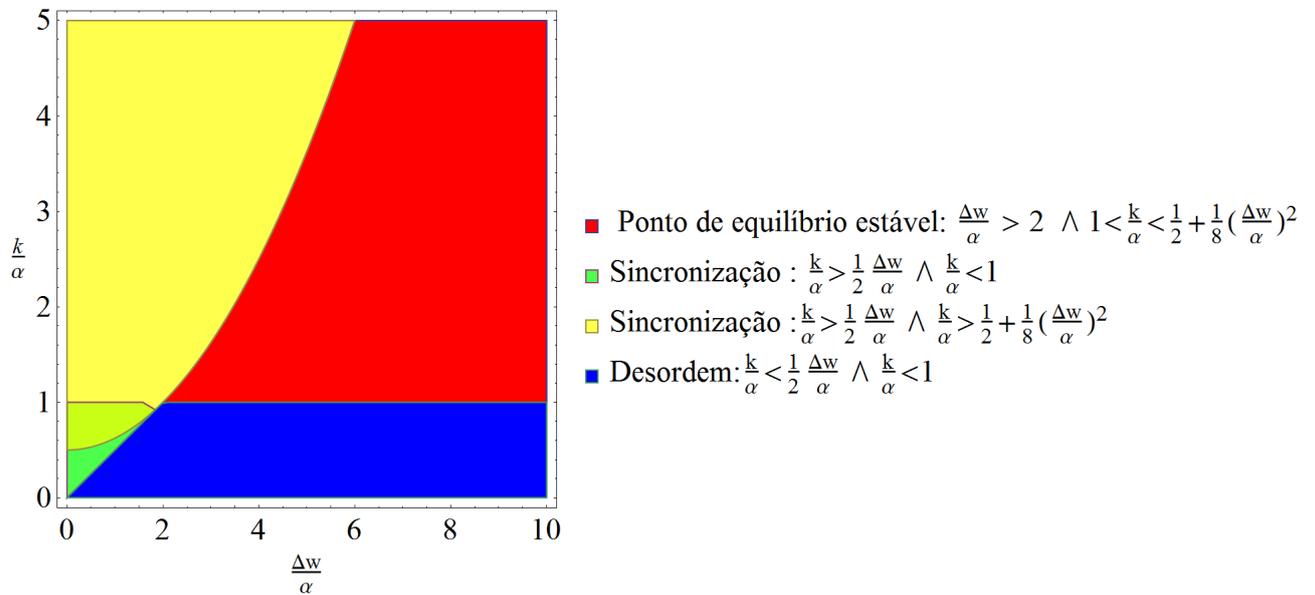
A região em azul (Desordem) é definida por  $\frac{k}{\alpha} < \frac{\Delta\omega}{2\alpha}$  e  $\frac{k}{\alpha} < 1$ . Apesar de o sistema não estar sincronizado globalmente e nem estar em equilíbrio estável, veremos a seguir que existe um comportamento muito interessante nesta região.

Observando a Figura 3.4(b), vemos que a transição para a sincronização pode ocorrer de duas maneiras distintas. Se  $\frac{\Delta\omega}{\alpha} > 2$  e  $\frac{k}{\alpha}$  começa próximo de zero e tem seu valor incrementado, primeiro o sistema passa pela região de Desordem, depois disso, quando  $\frac{k}{\alpha} > 1$ , ele passa por um regime onde possui um ponto de equilíbrio estável. Após isso, assim que  $\frac{k}{\alpha}$  cruza a curva dada por  $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\left(\frac{\Delta\omega}{\alpha}\right)^2$ , o ponto fixo perde a sua estabilidade, ou seja, temos uma bifurcação de Hopf, o que leva o sistema a um regime de sincronização. Por outro lado, se  $\frac{\Delta\omega}{\alpha} < 2$  e  $\frac{k}{\alpha}$  começa próximo de zero e tem seu valor incrementado, o sistema começa na região de desordem e chega no regime de sincronização quando atinge o valor de  $\frac{\Delta\omega}{2\alpha}$ . Nesse último caso, o sistema atinge a sincronização global sem passar pelo regime onde apresenta o ponto de equilíbrio estável. Também neste último caso, pode-se observar uma transição entre o regime de sincronização remota (na região de Desordem) para sincronização global (BERGNER et al., 2012), que será exemplificado na próxima seção.

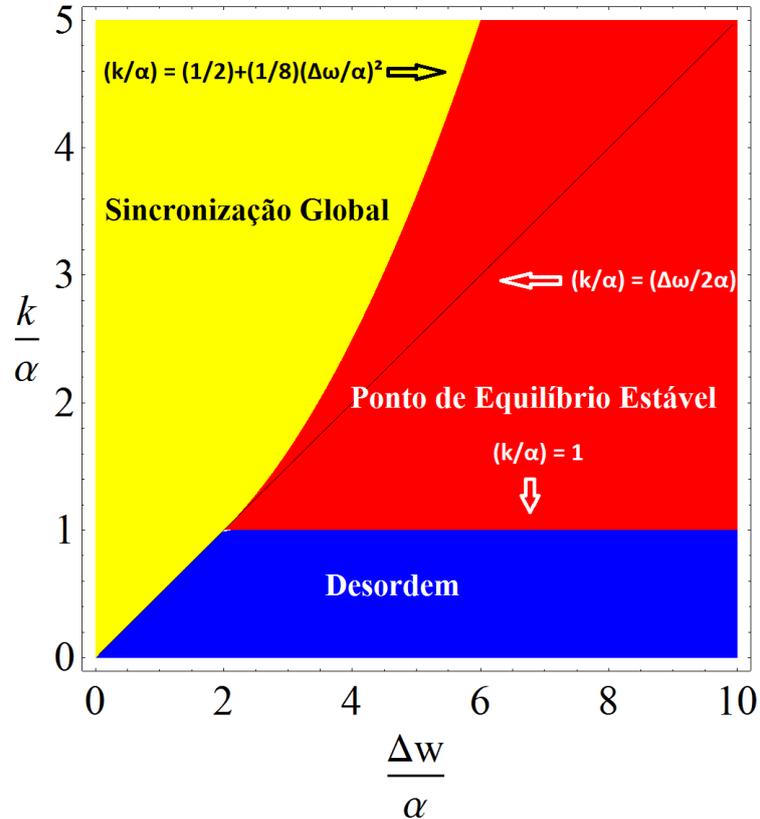
### 3.5 Resultados Numéricos

Como exemplo do que vimos na seção passada, apresentaremos agora alguns resultados numéricos. Fixaremos  $\alpha = 1$  (parâmetro de bifurcação de Hopf),  $\omega_1 = 3.0$  (frequência natural do nó central),  $\omega = 1.1$  (frequência natural dos nós periféricos) e número de nós  $N = 4$ , no sistema representado na Figura 3.1 e descrito por 3.3 e 3.4. As condições iniciais serão fixadas em  $x_{inicial} = (0.5, 0.4, -0.3, -0.8)$  e  $y_{inicial} = (1.3, -0.5, -1.5, 0.1)$ . Para os valores de frequências naturais fixados acima,

Figura 3.3 - Em (a) temos o diagrama de bifurcação do sistema 3.3 e 3.4, com as suas regiões descritas à direita. Em (b), temos mesmo diagrama, onde pode-se ver de maneira mais clara, as regiões de sincronização (amarelo), de ponto de equilíbrio ( $x_i = 0, y_i = 0$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ ) estável (vermelho) e Desordem (azul), onde nenhuma das duas situações anteriores ocorre. As fronteiras entre as regiões também está em destaque. Onde  $\wedge$  é o conectivo lógico que representa uma conjunção.



(a)



(b)

Fonte: Produção do autor.

temos que  $\Delta\omega = 1.9$ . Portanto, como  $\frac{\Delta\omega}{\alpha} < 2$ , começaremos com um valor baixo de  $k$ , dentro região de desordem e, conforme a força de acoplamento for aumentada, passaremos para a região de sincronização global, sem entrar na região de equilíbrio estável.

De 3.66, sabemos que o sistema estará num regime de sincronização global se

$$k \geq \frac{|\Delta\omega|}{2} = 0.95 \quad (3.67)$$

Começaremos na região de desordem, com  $k = 0.2$ . Na Figura 3.5(a) temos o gráfico da coordenada  $x$  dos osciladores plotadas em função de si mesmas. Nesta situação não há sincronização, pois para um valor fixo de  $x_i$ , existem “infinitos” valores de  $x_j$  correspondentes, para  $i$  e  $j = 0, 1, 2, 3$  e  $i \neq j$ , ou seja, temos uma figura densa, praticamente toda preenchida. Já na Figura 3.5(b) temos a série temporal dos quatro osciladores. O *hub* está em vermelho e os periféricos em azul. Podemos notar novamente que as séries temporais não entram em correspondência umas com as outras.

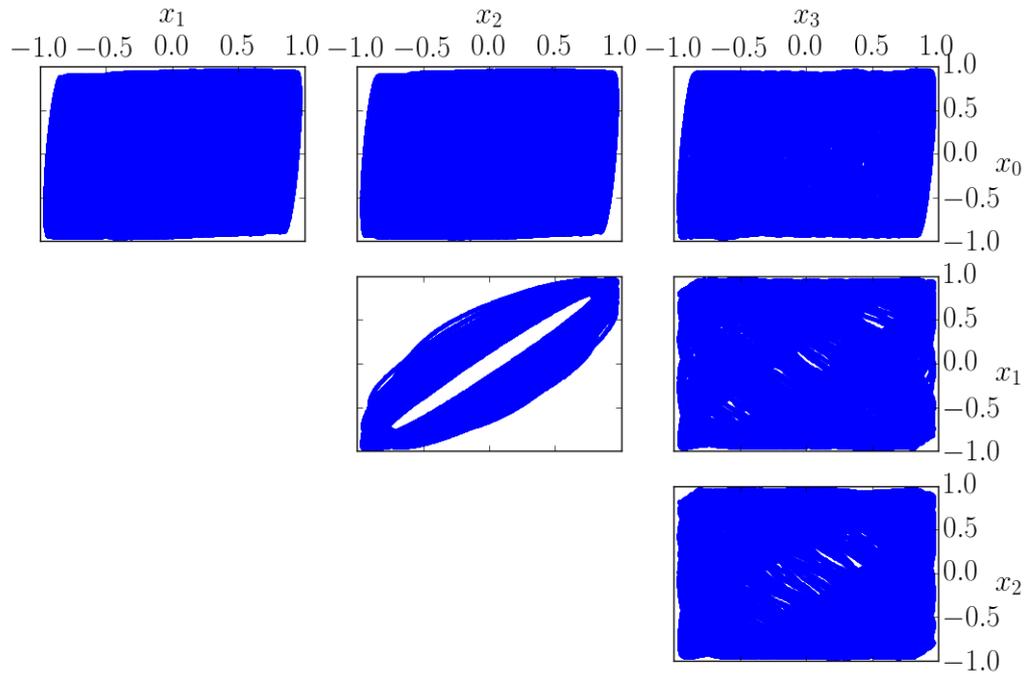
Aumentando a constante de acoplamento para  $k = 0.9$ , temos o aparecimento da sincronização remota (ainda na região de desordem), onde os nós periféricos estão sincronizados entre si, sem que o nó central também esteja. Podemos notar esse comportamento pelo surgimento de formas que se assemelham a segmentos de reta nos diagramas  $x_i, x_j$  da Figura 3.6(a). Note que nos gráficos que contém  $x_0$  (*hub*) nos seus eixos, essa forma não aparece. Já em 3.6(b), podemos notar que os nós periféricos (azul) têm suas séries temporais praticamente iguais, o que também indica sincronização.

Fazendo a constante de acoplamento  $k$  igual a 1.0, entramos na região de sincronização global definida por 3.67 e vista na Figura 3.6. Embora o sistema não esteja com sincronização de fase, ou seja, os osciladores periféricos e o *hub* não compartilham a mesma série temporal na Figura 3.7(b), eles estão em *phase locking*, pois possuem diferença de fase constante.

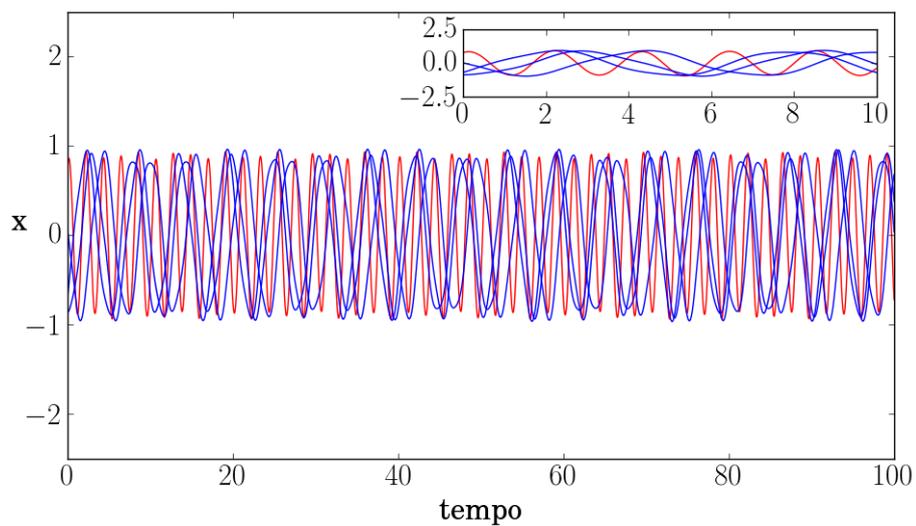
Mudaremos agora a frequência do nó central para  $\omega_1 = 6$ , onde teremos  $\Delta\omega = 4.9$ . De acordo com a discussão da Seção 3.4, como  $\frac{\Delta\omega}{\alpha} > 2$ , para termos sincronização, a condição abaixo deverá ser obedecida:

$$\frac{k}{\alpha} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \left( \frac{\Delta\omega}{\alpha} \right)^2 = 3.50125 \quad (3.68)$$

Figura 3.4 - (a) Gráfico de Lissajous  $x_n, x_m$  para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede do sistema 3.3 e 3.4. (b) Série temporal de todos os nós, *hub* em vermelho, periféricos em azul. Para  $\frac{k}{\alpha} = 0.2$  e  $\frac{\Delta\omega}{\alpha} = 1.9$ , na região de desordem. O nó central é representado como 0, os periféricos são 1, 2 e 3. Não pode-se observar sincronização aqui.



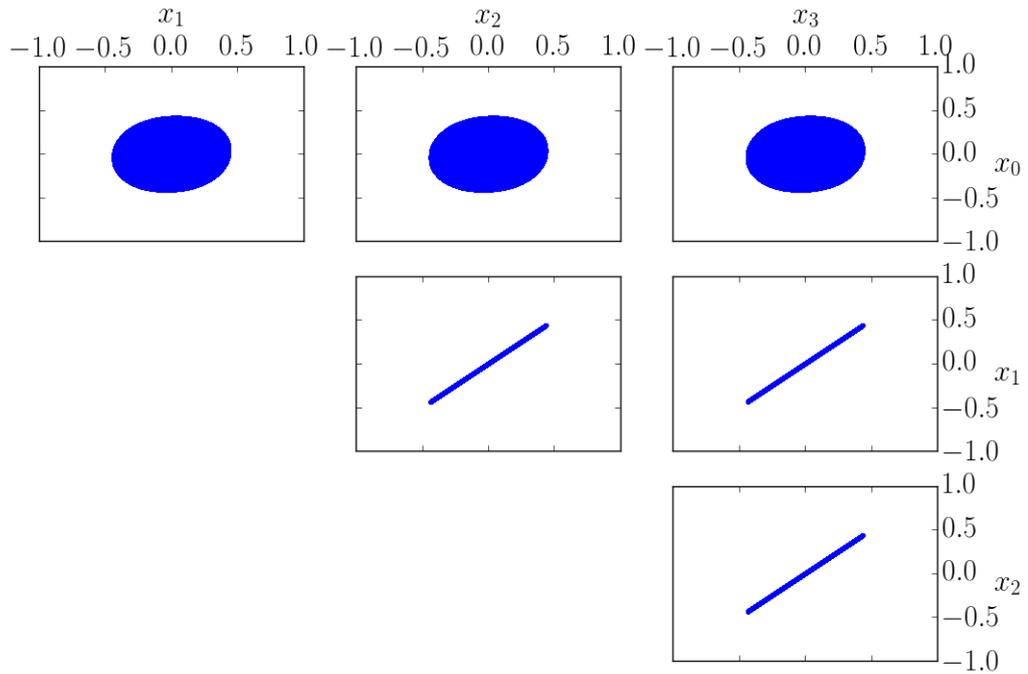
(a)



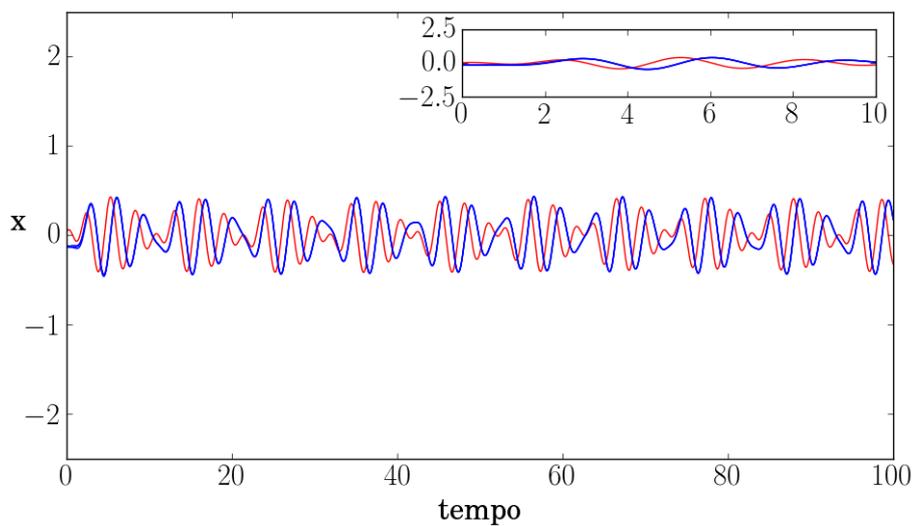
(b)

Fonte: Produção do autor.

Figura 3.5 - (a) Gráfico de Lissajous  $x_n, x_m$  para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede do sistema 3.3 e 3.4. (b) Série temporal de todos os nós, *hub* em vermelho, periféricos em azul. Para  $\frac{k}{\alpha} = 0.9$  e  $\frac{\Delta\omega}{\alpha} = 1.9$ , na região de desordem. O nó central é representado como 0, os periféricos são 1, 2 e 3. Podemos observar que os nós periféricos estão sincronizados.



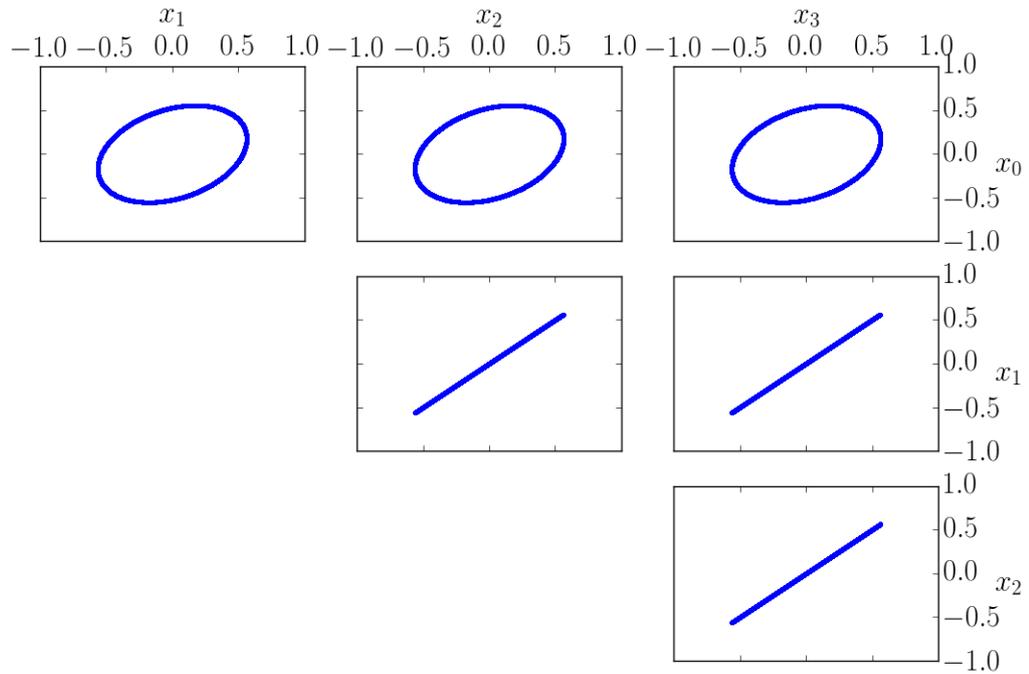
(a)



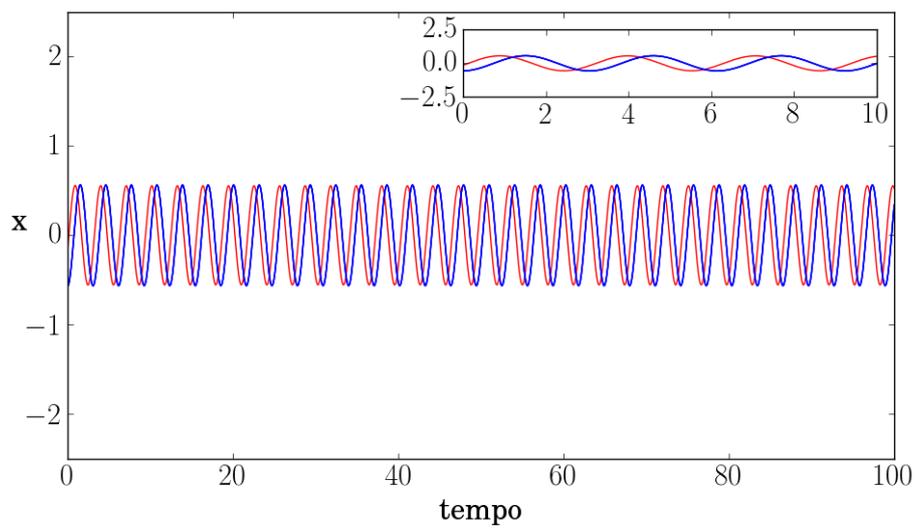
(b)

Fonte: Produção do autor.

Figura 3.6 - (a) Gráfico de Lissajous  $x_n, x_m$  para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede do sistema 3.3 e 3.4. (b) Série temporal de todos os nós, *hub* em vermelho, periféricos em azul. Para  $\frac{k}{\alpha} = 1.0$  e  $\frac{\Delta\omega}{\alpha} = 1.9$ . O nó central é representado como 0, os periféricos são 1, 2 e 3. O sistema se encontra na região de sincronização global.



(a)



(b)

Fonte: Produção do autor.

Para  $0 \leq \frac{k}{\alpha} < 1$ , temos a região de desordem. Já para  $1 \leq \frac{k}{\alpha} < 3.50125$ , estamos na região de ponto de equilíbrio estável

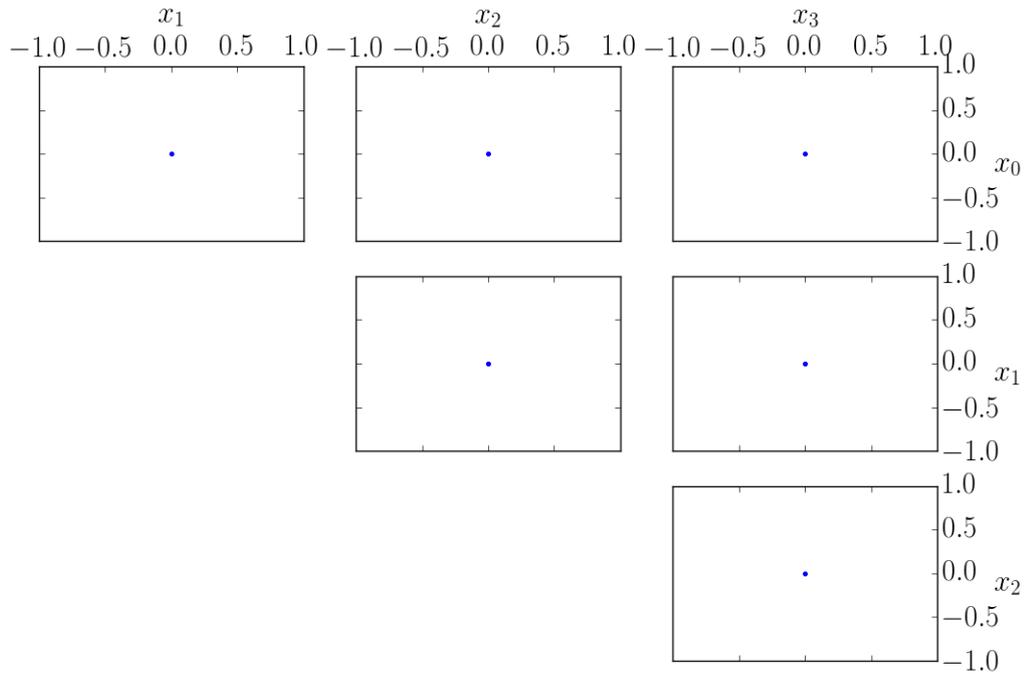
Começaremos na região de equilíbrio estável, com  $k = 3.1$ . Como pode-se ver na Figura 3.7, após o transiente, não há oscilação nesta região, cujo ponto de equilíbrio é dado por  $x_i = y_i = 0$  com  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Aumentando o valor da constante de acoplamento para  $k = 3.6$ , entramos na região de sincronização global, dada pela Figura 3.8. Note que as séries temporais de todos os nós coincidem.

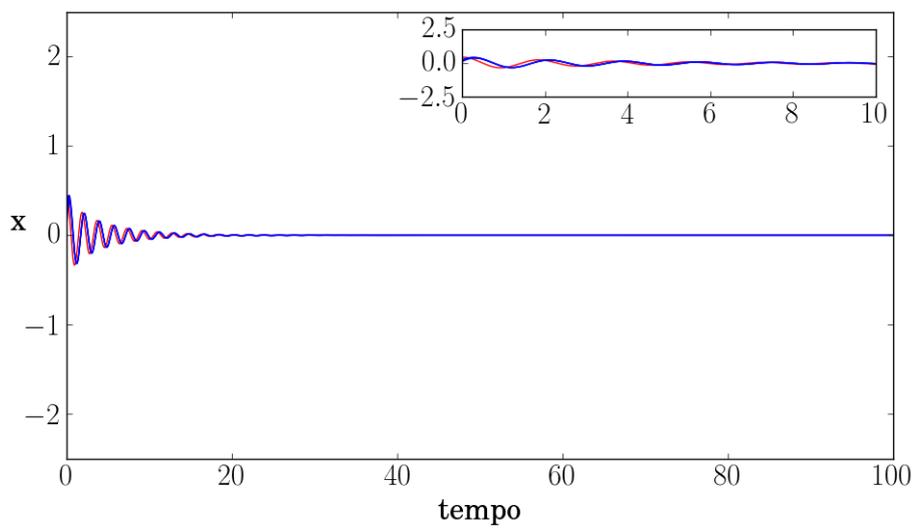
### 3.6 Conclusões Parciais

Neste capítulo, foi considerada uma rede do tipo estrela com quatro osciladores. Consideramos que os osciladores periféricos possuem uma mesma frequência natural  $\omega$  que é diferente da frequência natural do oscilador central  $\omega_1$ . Utilizando o modelo de Stuart-Landau, encontramos o único ponto de equilíbrio do sistema como sendo  $x_i = 0$  e  $y_i = 0$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ , ou seja, quando o sistema considerado está em equilíbrio, ele não oscila. Após isso, encontramos as condições necessárias para que este ponto de equilíbrio seja estável. Também calculamos as condições para que o sistema se encontre globalmente sincronizado. Com isso, foi possível desenhar o diagrama de bifurcação do sistema, que apresentou três regiões distintas: Sincronização Global, Ponto de Equilíbrio Estável e Desordem. Foi mostrado que o fenômeno da sincronização remota aparece na região de Desordem.

Figura 3.7 - (a) Gráfico de Lissajous  $x_n, x_m$  para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede do sistema 3.3 e 3.4. (b) Série temporal de todos os nós, *hub* em vermelho, periféricos em azul. Para  $\frac{k}{\alpha} = 3.1$  e  $\frac{\Delta\omega}{\alpha} = 4.9$ . O nó central é representado como 0, os periféricos são 1, 2 e 3. O sistema se encontra na região de ponto de equilíbrio estável.



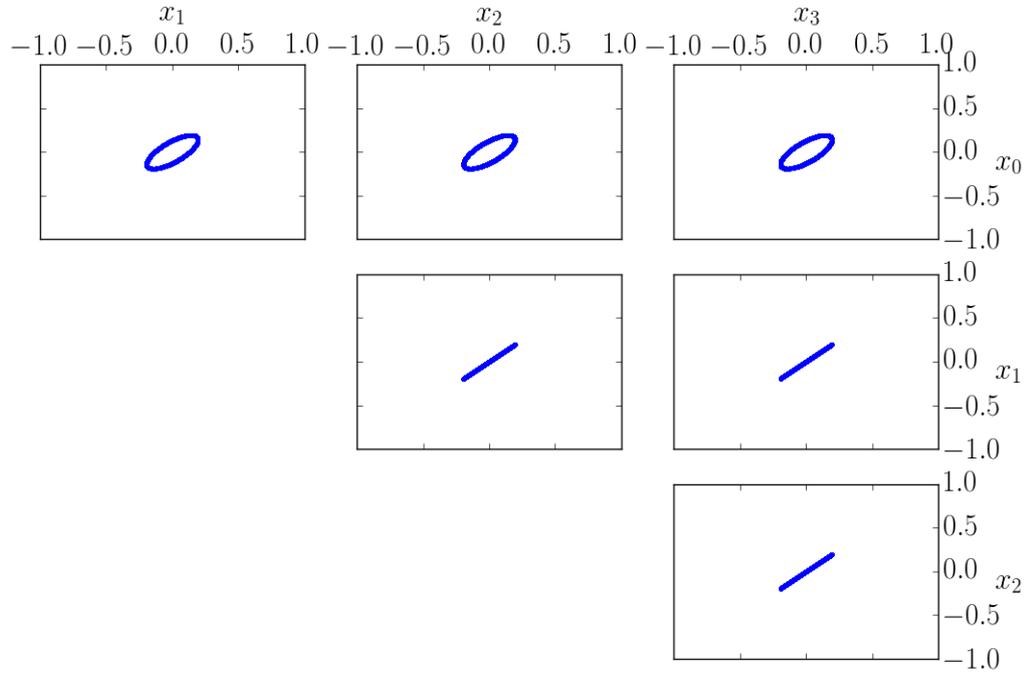
(a)



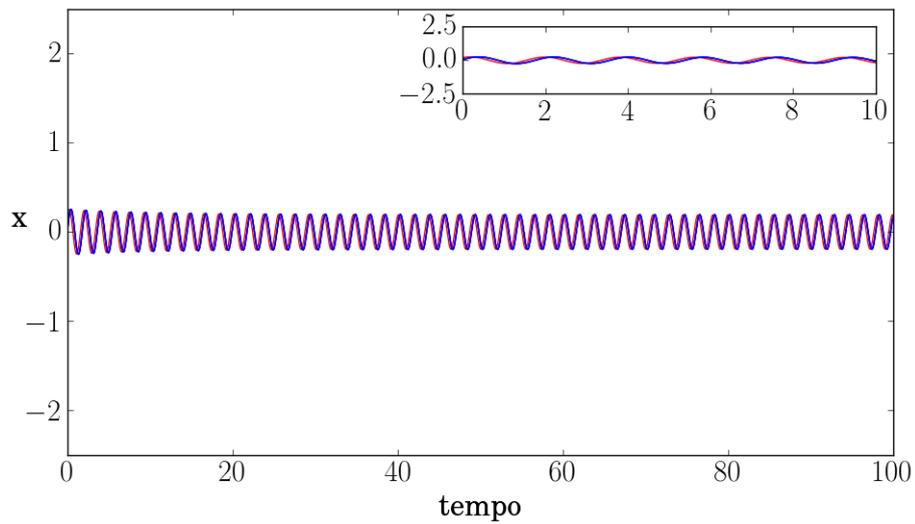
(b)

Fonte: Produção do autor.

Figura 3.8 - (a) Gráfico de Lissajous  $x_n, x_m$  para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede do sistema 3.3 e 3.4. (b) Série temporal de todos os nós, *hub* em vermelho, periféricos em azul. Para  $\frac{k}{\alpha} = 3.6$  e  $\frac{\Delta\omega}{\alpha} = 4.9$ , na região de sincronização. O nó central é representado como 0, os periféricos são 1, 2 e 3.



(a)



(b)

Fonte: Produção do autor.



## 4 SINCRONIZAÇÃO REMOTA EM REDES DO TIPO ESTRELA

No Capítulo 3, foi estudada de forma analítica a sincronização de uma rede do tipo estrela. A fim de simplificar os cálculos, consideramos que os nós periféricos possuíam o mesmo valor de frequência natural. Vamos agora assumir que as frequências naturais dos osciladores periféricos sejam diferentes entre si, e, como número de nós periféricos não tem influência na ocorrência do fenômeno da sincronização remota (FRASCA et al., 2012), iremos variar o número de nós periféricos ao longo deste capítulo. Consideraremos aqui que o sistema está sincronizado quando este atinge o regime de *phase-locking* e passa a se comportar como um corpo rígido, com diferença de fase constante entre os osciladores.

Na seção 4.1, iremos estudar como a diferença entre a frequência do oscilador central e a média da frequência dos osciladores periféricos influencia a sincronização remota. Já na seção 4.2, será estudado como a diferença entre as frequências dos osciladores periféricos influencia na sincronização. Na seção 4.3, será estudado a influência da distribuição das condições iniciais na sincronização remota do sistema. Em 4.4 fixaremos uma distribuição de frequências naturais e duas distribuições de condições iniciais diferentes e analisaremos a dinâmica do sistema. Na Seção 4.5, será utilizada uma abordagem diferente, fazendo uso da dinâmica simbólica, no intuito de detectar as mudanças de comportamento apresentadas pelo sistema e que foram detectadas ao longo deste capítulo utilizando as métricas usuais.

### 4.1 Estudo da diferença entre a frequência natural do *hub* e as frequências dos osciladores periféricos

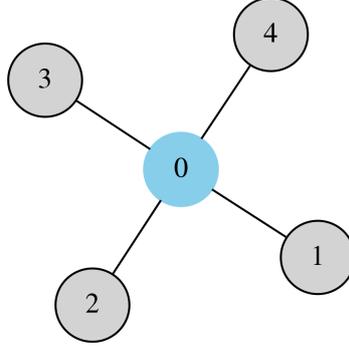
Nesta seção, estudaremos a influência da diferença entre a frequência natural do oscilador central e a média das frequências naturais dos osciladores periféricos na sincronização remota. Será considerada uma rede do tipo estrela com  $N = 5$  nós, representada pela Figura 4.1, cuja matriz de adjacência é dada por

$$(g_{nm}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

O grau de cada nó é dado por  $\{d_n\} = \{4, 1, 1, 1, 1\}$ , onde  $d_0 = 4$  é o grau do nó

central.

Figura 4.1 - Rede do tipo estrela. Cada nó da rede representa um oscilador. O nó central (azul) é chamado de *hub* e os nós em cinza os periféricos.



Fonte: Produção do autor.

A dinâmica desta rede do tipo estrela será representada pela equação de Stuart-Landau 2.22 e 2.23 :

$$\dot{x}_n = x_n(\alpha - x_n^2 - y_n^2) - \omega_n y_n + \frac{k}{d_n} \sum_{m=1}^N g_{nm}(x_m - x_n) \quad (4.2)$$

$$\dot{y}_n = y_n(\alpha - x_n^2 - y_n^2) - \omega_n x_n + \frac{k}{d_n} \sum_{m=1}^N g_{nm}(y_m - y_n) \quad (4.3)$$

onde  $\alpha$  é o parâmetro de decaimento e será fixado em 1,  $\omega_n$  é a frequência natural do oscilador  $n$ ,  $k$  é a força de acoplamento,  $d_n$  é o grau do nó  $n$  e  $(g_{nm})$  é a matriz de adjacência. A fase é dada por  $\theta_n = \tan^{-1} \frac{y_n}{x_n}$ .

As condições iniciais serão fixadas em  $x_n^{inicial} = y_n^{inicial} = 0.1$ , onde  $n = 0, \dots, N - 1$ . Para um estudo inicial, fixaremos as frequências naturais em  $\{\omega_n\} = \{2.5, 0.975, 0.992, 1.008, 1.025\}$ , onde  $\omega_0 = 2.5$  é a frequência do nó central e as demais são as frequências naturais dos nós periféricos. O sistema das equações 4.2 e 4.3 será integrado com o método de Runge-Kutta de quarta ordem, com passo de integração 0.01.

Para a caracterização da sincronização remota, podemos fazer o uso da frequência

instantânea  $\dot{\theta}$  e da fase  $\theta$  dos osciladores. Quando eles estão sincronizados remotamente, espera-se que as frequências instantâneas dos osciladores sincronizados sejam praticamente as mesmas e a diferença entre as suas fases se mantenham constantes.

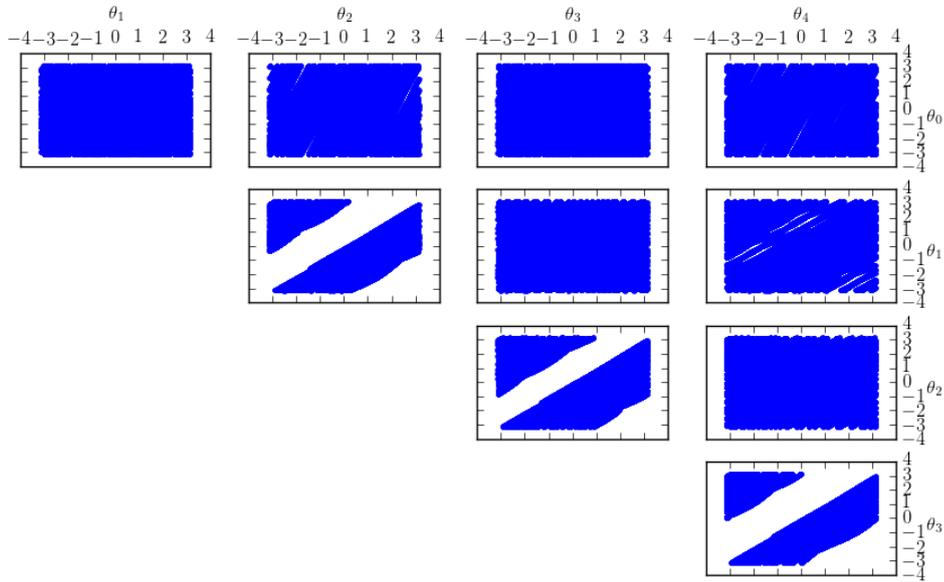
Começamos integrado o sistema com uma constante de acoplamento pequena,  $k = 0.2$ . Na parte (a) da Figura 4.2, temos representadas as fases em função do tempo de todos os osciladores em função delas mesmas (gráfico do tipo Lissajous). Podemos ver aqui que não há indícios de sincronização de nenhum par de nós, pois se compararmos um  $\theta_n$  qualquer com um  $\theta_m$ , vemos que um determinado valor de  $\theta_n$  tem vários correspondentes em  $\theta_m$ . O oscilador central é identificado como 0 e os periféricos como 1, 2, 3, 4. Em (b), na parte superior temos as séries temporais dos osciladores e na parte inferior as suas frequências instantâneas. O nó central está em vermelho e os periféricos em azul. Aqui também não há sinal de sincronização pois as frequências instantâneas não coincidem para nenhum par de nós.

Aumentando o valor da constante de acoplamento para  $k = 0.6$ , temos o surgimento da sincronização remota, como pode-se ver na Figura 4.3. Em 4.4(a), comparando as fases dos osciladores dois-a-dois, podemos ver algumas figuras com menor densidade de pontos, contendo praticamente apenas uma reta, o que mostra que as fases desses osciladores são proporcionais quando estes estão sincronizados. Note que os gráficos contendo o oscilador central não apresentam este comportamento. Na Figura 4.4(b), pode-se notar que as frequências instantâneas dos nós periféricos, em azul, estão muito próximas e apresentam o mesmo comportamento. As séries temporais, apesar de não estarem tão próximas umas das outras, apresentam o mesmo comportamento no gráfico.

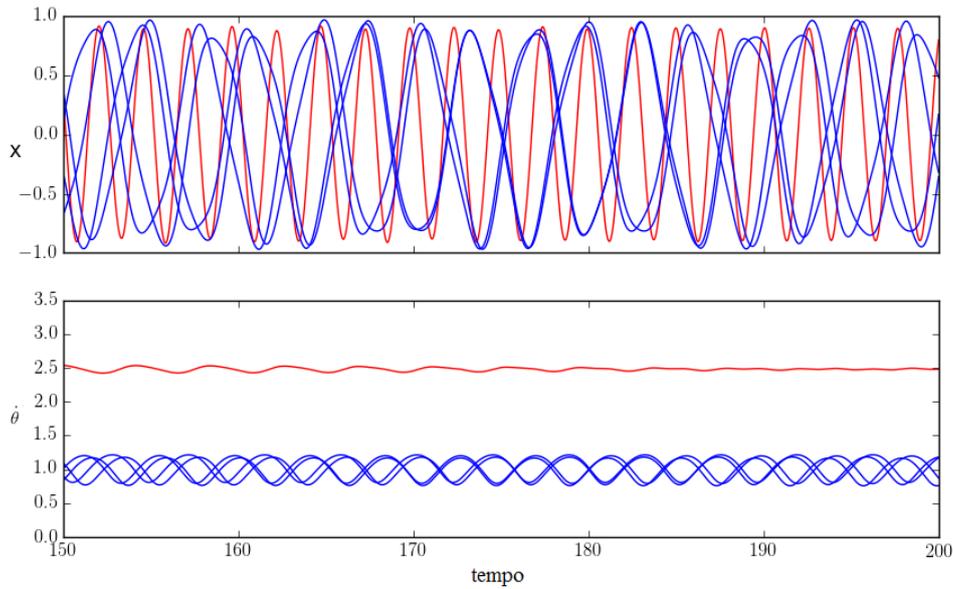
Aumentando ainda mais o valor da constante de acoplamento,  $k = 0.8$ , temos a sincronização global do sistema, Figura 4.4. Nesta situação, o nó central se sincroniza com os demais nós da rede. Em 4.5(a) podemos ver que cada gráfico de  $\theta_n$  em função de  $\theta_m$  é uma reta, o que indica valores correspondentes de fase. Em 4.5(b), podemos ver que todas as frequências instantâneas coincidem e tem um valor fixo. A série temporal de todos os nós periféricos são as mesmas e tem uma diferença constante para a série temporal do nó central, ou seja, o sistema encontra-se em *phase locking*.

Pode-se notar, principalmente em 4.5(a), o surgimento de duas retas nos gráficos do tipo Lissajous. Isso ocorre porque estamos usando a função  $\arctan2(y, x)$  que retorna a fase entre  $-\pi$  e  $\pi$ . Por exemplo, no gráfico de  $\theta_0$  em função de  $\theta_4$ , a reta superior e a reta inferior são uma única reta módulo  $2\pi$ , ou seja, a reta superior “termina” em  $\theta_0 = \pi$  e “continua” em  $\theta_0 = -\pi$ .

Figura 4.2 - (a) Gráfico de Lissajous  $\theta_n, \theta_m$  para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede. O oscilador central é identificado como 0 e os extremos como 1, 2, 3, 4. (b) De cima para baixo: Séries temporais e frequência instantânea  $\dot{\theta}$  dos osciladores em função do tempo. Nó central está plotado em vermelho, os periféricos em azul. Constante de acoplamento  $k = 0.2$ , não há sincronização.



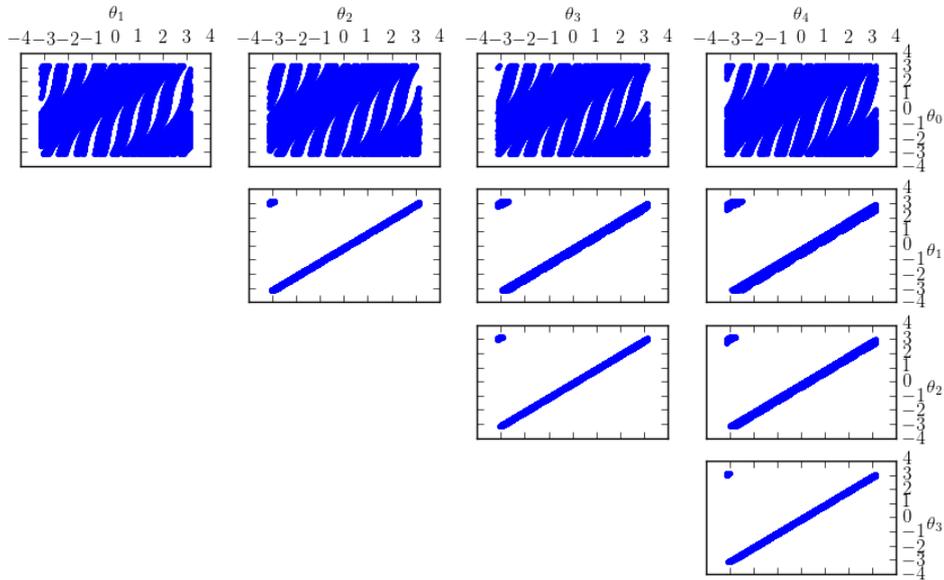
(a)



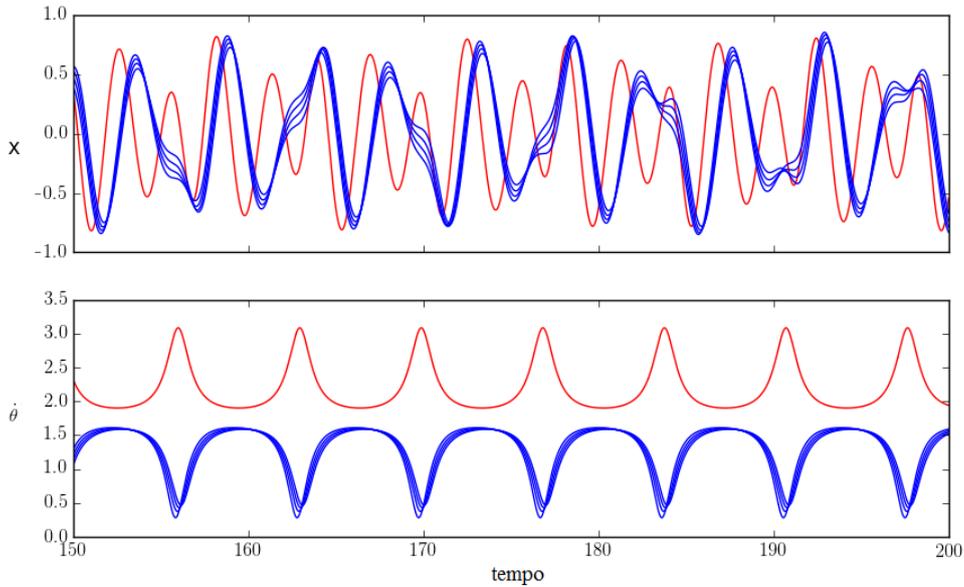
(b)

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.3 - (a) Gráfico de Lissajous  $\theta_n, \theta_m$  para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede. O oscilador central é identificado como 0 e os extremos como 1, 2, 3, 4. (b) De cima para baixo: Séries temporais e frequência instantânea  $\dot{\theta}$  dos osciladores em função do tempo. Nó central está plotado em vermelho, os periféricos em azul. Constante de acoplamento  $k = 0.6$ , há sincronização remota.



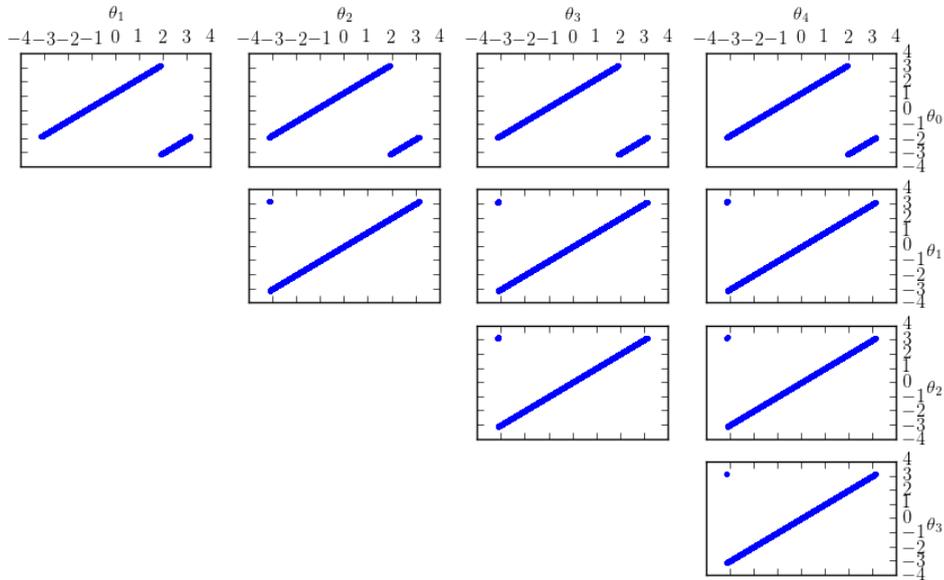
(a)



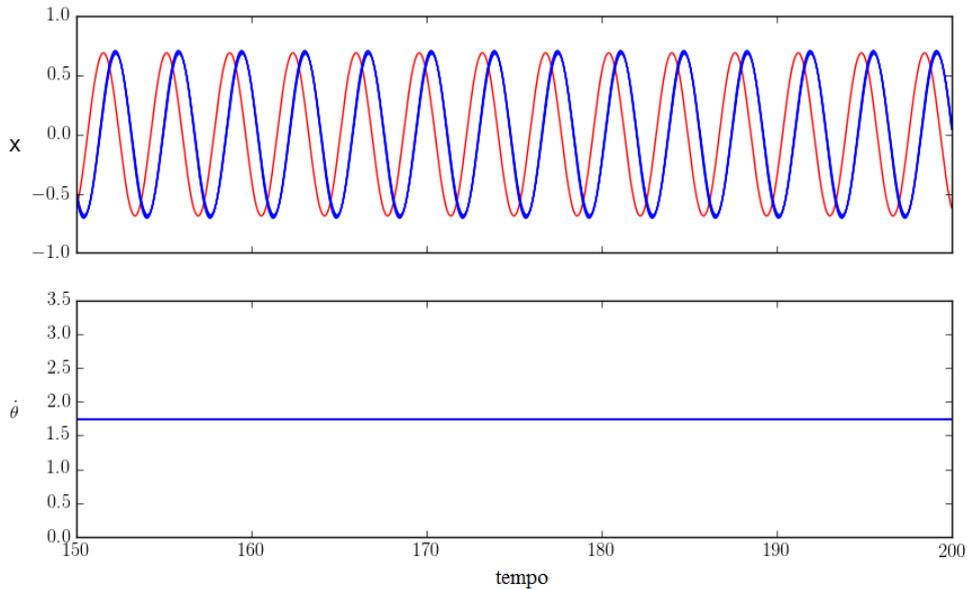
(b)

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.4 - (a) Gráfico de Lissajous  $\theta_n, \theta_m$  para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede. O oscilador central é identificado como 0 e os extremos como 1, 2, 3, 4. (b) De cima para baixo: Séries temporais e frequência instantânea  $\dot{\theta}$  dos osciladores em função do tempo. Nó central está plotado em vermelho, os periféricos em azul. Constante de acoplamento  $k = 0.8$ , há sincronização global.



(a)



(b)

Fonte: Produção do autor.

Introduziremos agora um índice para quantificar o surgimento de *phase locking* no sistema, ou seja, ele irá indicar quando um par de osciladores tem diferença constante entre suas fases e se movem como um corpo rígido. Esse índice é chamado de *índice de sincronização parcial*  $r \in [0, 1]$  (GÓMEZ-GARDENES et al., 2007):

$$r_{nm} = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_r}^{t_r + \Delta t} e^{i[\theta_n(t) - \theta_m(t)]} \right| \quad (4.4)$$

Que também é comumente escrita como:

$$r_{nm} = | \langle e^{i[\theta_n(t) - \theta_m(t)]} \rangle_t | \quad (4.5)$$

onde  $\langle . \rangle_t$  denota a média ao longo do tempo e  $\theta_n(t)$  é a fase do oscilador  $n$ .

Outras medidas interessantes para o estudo da sincronização remota são  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$  (BERGNER et al., 2012). Para a medida da coesão do nó central com o resto da rede, é usado o  $r^{direct} \in [0, 1]$  e para a media da coesão dos nós periféricos é usado o  $r^{indirect} \in [0, 1]$  que são definidos a seguir:

$$r^{direct} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} r_{0n} \quad (4.6)$$

$$r^{indirect} = \frac{2}{(N-1)(N-2)} \sum_{n=1, m>n}^{N-1} r_{nm} \quad (4.7)$$

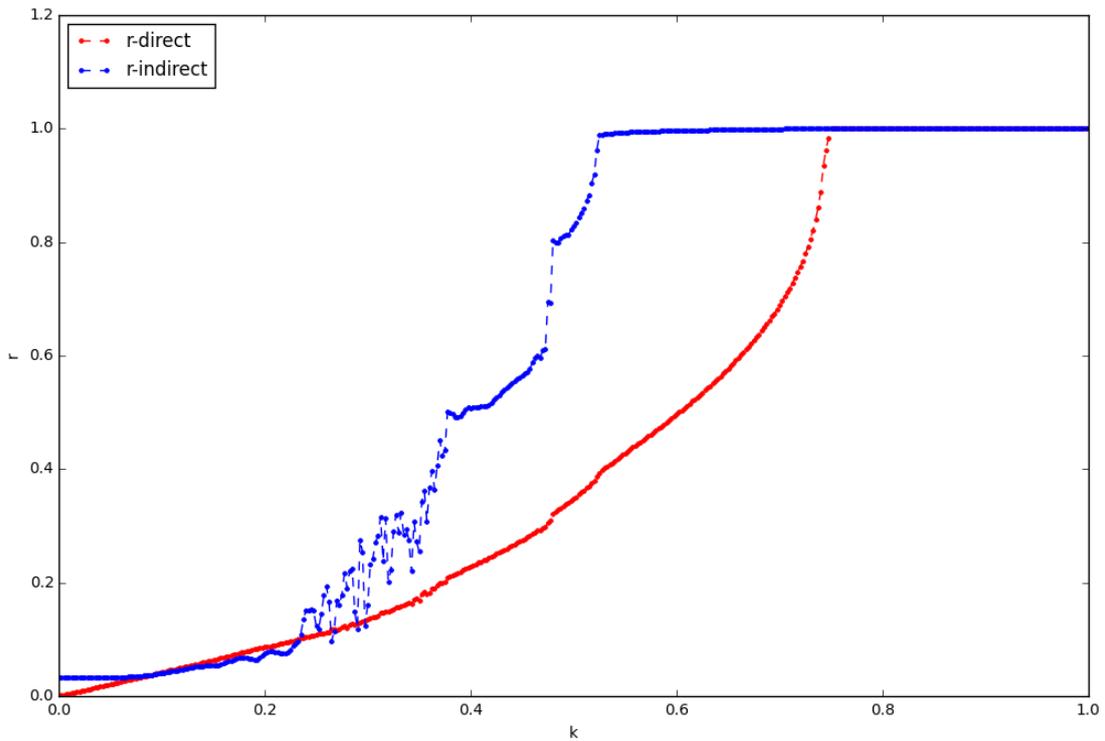
onde  $r_{nm}$  é o índice de sincronização parcial e  $N$  é o número de nós (como estamos chamando o nó central de 0, o somatório vai até  $N-1$ ).

Quando  $r^{direct}$  tem valor muito próximo de 1, o nó central e os periféricos estão se movendo como um corpo rígido e consideramos então que eles estão sincronizados. Se este valor é baixo, não temos sincronização do *hub* com o resto da rede. Quando  $r^{indirect}$  tem o valor próximo de 1, os nós periféricos se movem como um corpo rígido, com mesma frequência instantânea e estão sincronizados entre si. Se este valor é baixo, não temos sincronização entre eles. Quando  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$  coincidem em 1, temos sincronização global da rede.

Na Figura 4.5, temos o gráfico de  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$  em função da constante de aco-

plamento  $k$  aplicada à rede. Note que  $r^{indirect}$  chega ao seu valor máximo (1) antes de  $r^{direct}$ , ou seja, para valores de acoplamento entre 0.47 e 0.74 temos sincronização remota. Para  $k < 0.47$  não temos sincronização e para  $k > 0.74$ , temos sincronização global. Aqui os valores das frequências naturais são mantidos fixos:  $\omega_0 = 2.5, \omega_1 = 0.975, \omega_2 = 0.992, \omega_3 = 1.008$  e  $\omega_4 = 1.025$ .

Figura 4.5 - Gráfico de  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$  em função do acoplamento  $k$  da rede.



Fonte: Produção do autor.

Vamos agora estudar o que acontece quando variamos a frequência do *hub*. Seja  $\Delta r = |r^{direct} - r^{indirect}|$  e a diferença entre as frequências dada por  $\Delta\omega = \omega_0 - \langle \omega_n \rangle$ , onde  $\langle \omega_n \rangle$  é a média das frequências dos osciladores periféricos.

No caso de termos sincronização remota,  $r^{indirect}$  estará próximo de 1, enquanto  $r^{direct}$  será baixo, fazendo com que  $\Delta r$  tenha um valor alto. Em nossa análise, escolhemos como *threshold* para caracterização de sincronização remota  $\Delta r \geq 0.8$ . Se estamos

em um regime onde não há sincronização ou há sincronização total,  $r^{indirect}$  e  $r^{direct}$  terão valores próximos. Serão praticamente 0 no caso de não haver sincronização e estarão próximos de 1 no caso de haver sincronização total. Portanto,  $\Delta r$  terá um valor baixo em ambos os casos.

Na Fig. 4.7(a), temos a constante de acoplamento  $k$  em função da diferença de frequência  $\Delta\omega$  e de  $\Delta r$  que está representado pela barra de cor, sendo vermelho o maior valor (1) e azul o menor (0). Podemos verificar que há duas áreas avermelhadas na figura que representam regiões de sincronização remota. Nota-se que há uma área pintada de azul escuro no meio dessas duas regiões, neste local,  $\Delta r$  é próximo de 0 porque tanto,  $r^{direct}$  quanto  $r^{indirect}$  são próximos de 1, portanto, todas as frequências instantâneas dos osciladores são idênticas e temos a sincronização total do sistema. Essa a região chamada de língua de Arnold (Seção 2.6). Analiticamente, a língua de Arnold é dada por

$$A = \{(k, \omega_0), (k, \omega_1), (k, \omega_2), (k, \omega_3), (k, \omega_4) | k > \max|\Omega - \omega_n|\} \quad (4.8)$$

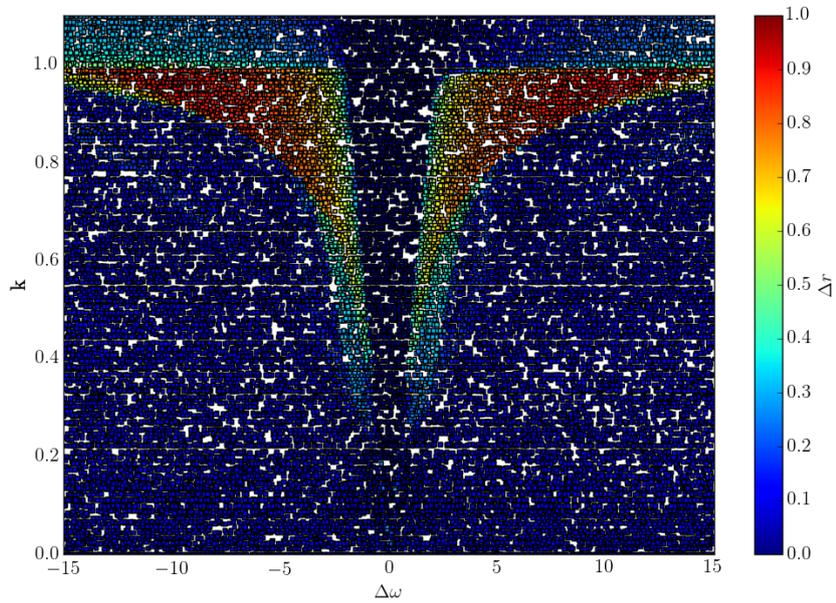
onde  $\Omega$  é a frequência dentro da língua de Arnold, dada por (BERGNER et al., 2012)

$$\Omega = \frac{1}{2}(\omega_0 + \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} \omega_n) \quad (4.9)$$

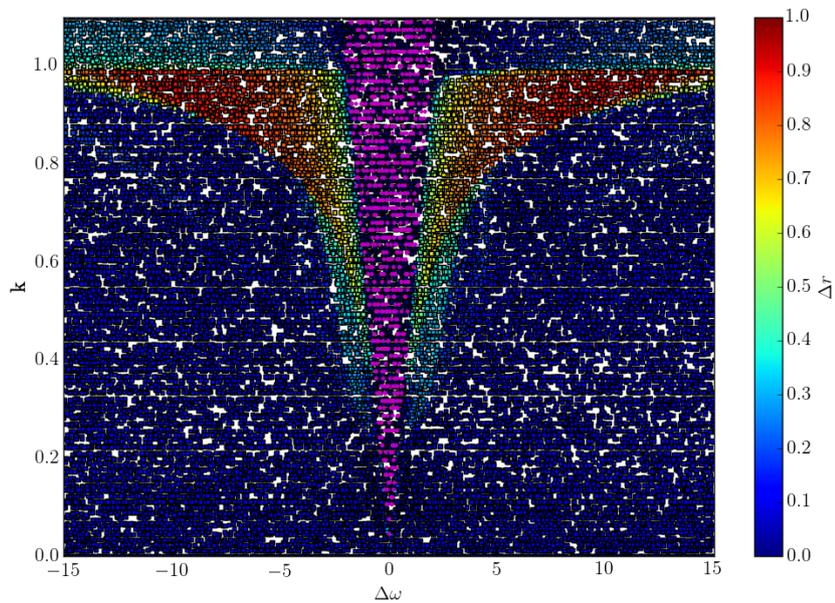
Podemos ver a forma analítica da língua de Arnold plotada de roxo na Figura 4.7(b), note que ela coincide com os cálculos feitos anteriormente.

Nas regiões em azul fora da Língua de Arnold,  $\Delta r$  é próximo de 0 porque tanto  $r^{direct}$  quanto  $r^{indirect}$  são próximos de 0, o sistema então não apresenta nenhum tipo de sincronização. Vemos então que a diferença entre a frequência natural do *hub* e a média das frequências naturais dos nós periféricos,  $\Delta\omega$ , tem um papel muito importante na sincronização remota. Se  $\Delta\omega$  é pequeno, estaremos dentro ou muito perto da língua de Arnold, ou seja, mesmo para uma pequena constante de acoplamento, o sistema estará em sincronização global. Se  $\Delta\omega$  for relativamente grande, será preciso uma constante de acoplamento próxima de 1 para haver a surgimento da sincronização remota e uma constante de acoplamento maior ainda para o sistema atingir a sincronização global. Note que a Fig. 4.6 é simétrica em relação ao eixo  $k$ .

Figura 4.6 - (a) Dependência de  $\Delta r$  com  $\Delta\omega$  e  $k$ .  $\Delta r$  é representado pela barra de cores e assume valores entre 0 e 1. (b) Língua de Arnold, plotada em roxo. Consideramos que temos sincronização remota uando  $\Delta r \geq 0.8$ .



(a)



(b)

Fonte: Produção do autor.

### 4.1.1 Sincronização remota com o modelo de Kuramoto

Vamos analisar agora o que aconteceria se utilizássemos o modelo de Kuramoto (Seção 2.10.1) para estudar a sincronização desta mesma rede. A dinâmica dos osciladores será descrita por:

$$\dot{\theta}_n = \omega_n + \frac{k}{d_n} \sum_{j=0}^{N-1} g_{nm} \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (4.10)$$

onde  $k$  é a constante de acoplamento,  $d_n$  é o grau do nó  $n$ ,  $N$  é o número de osciladores,  $n = 0, \dots, N - 1$  e  $(g_{nm})$  é a matriz de adjacência.

Na Fig. 4.7, temos plotadas as medidas  $r^{direct}$  (bola) e  $r^{indirect}$  (losango) para o modelo de Stuart-Landau com  $\alpha = 1$  (modelo utilizado neste trabalho) em preto, para o modelo de Stuart-Landau com  $\alpha = 100$  em azul e para o modelo de Kuramoto em vermelho. Como mostrado na Seção 2.10.2.2, o modelo de Kuramoto é um caso limite do modelo de Stuart-Landau quando  $\alpha \gg 1$ . Podemos notar esse caso limite ainda na Fig. 4.7, pois o modelo de Kuramoto e o modelo de Stuart-Landau com  $\alpha = 100$  tem praticamente o mesmo comportamento. Nenhum deles consegue descrever o fenômeno da sincronização remota, pois  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$  chegam nos seus valores máximos simultaneamente, atingindo apenas a sincronização global.

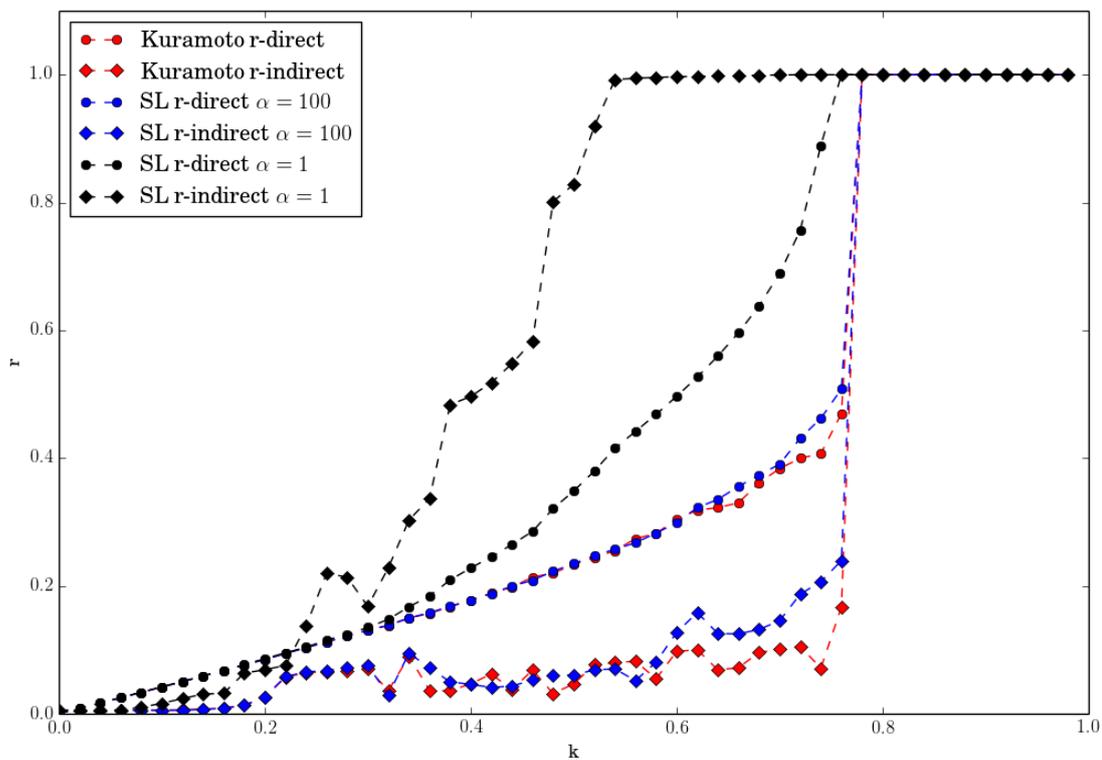
Já na Figura 4.8, temos  $k$  em função de  $\Delta w$  e  $\Delta r$ . Podemos notar que não há surgimento da sincronização remota para nenhum valor de diferença de frequências visto que  $\Delta r$  é sempre próximo de zero. Nesse caso, ou temos sincronização global do sistema ou não temos nenhum tipo de sincronização.

### 4.1.2 Conclusões Parciais

Nesta seção, foi considerada uma rede do tipo estrela com cinco nós. Consideramos condições iniciais idênticas e fixas em todas as simulações para todos os osciladores. Inicialmente, as frequências naturais foram mantidas fixas e a constante de acoplamento foi variada. Para um valor baixo dessa constante, o sistema não apresentou nenhum tipo de sincronização, já para um valor intermediário de acoplamento, pudemos notar o surgimento da sincronização remota e, para uma constante de acoplamento um pouco maior, o surgimento da sincronização global.

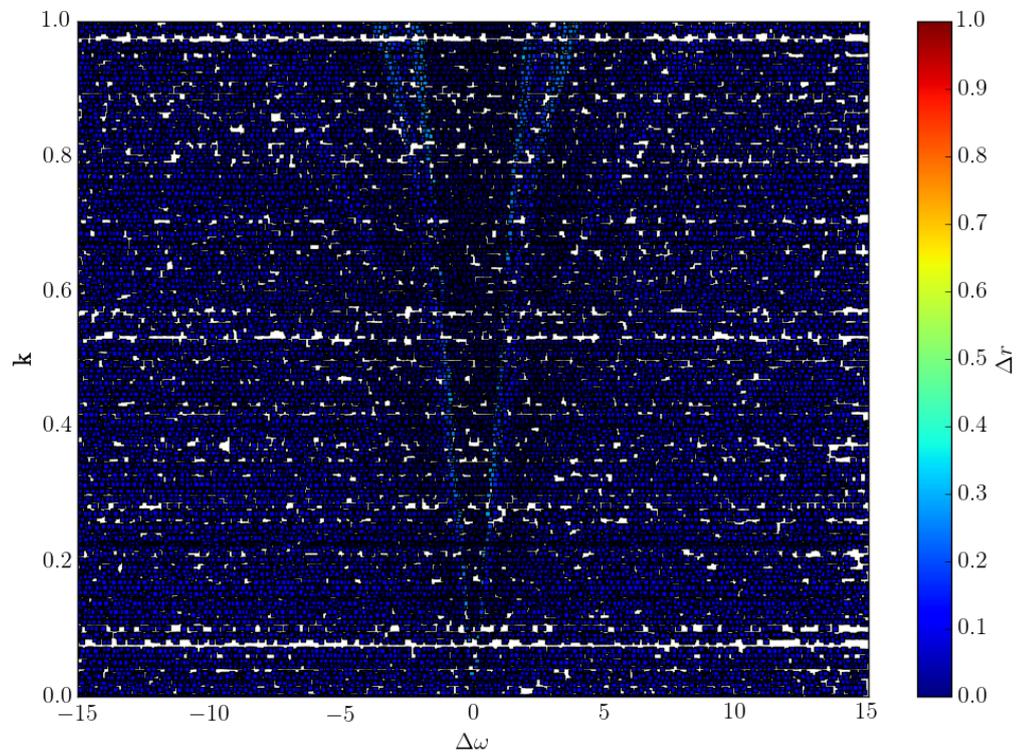
Após isso, começamos a variar o valor da frequência natural do oscilador central e vimos que a diferença entre essa frequência e a média das frequências naturais

Figura 4.7 - Gráfico de  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$  em função do acoplamento  $k$  da rede. Em preto temos o modelo de Stuart-Landau com  $\alpha = 1$ , em azul, o mesmo modelo com  $\alpha = 100$ , em vermelho temos o modelo de Kuramoto. Note que para esses dois últimos modelos, não temos o surgimento do fenômeno da sincronização remota, pois  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$  atingem seus valores máximos ao mesmo tempo. Aqui SL é abreviação de Stuart-Landau.



Fonte: Produção do autor.

Figura 4.8 - Dependência de  $\Delta r$  com  $\Delta\omega$  e  $k$  para o modelo de Kuramoto.  $\Delta r$  é representado pela barra de cores e assume valores entre 0 e 1. Consideramos que há sincronização remota quando  $\Delta r \geq 0.8$ .



Fonte: Produção do autor.

dos osciladores periféricos tem um papel muito importante na sincronização do sistema. Se essa diferença é muito pequena, teremos sincronização global para pequenas constantes de acoplamento. Quando essa diferença é muito grande, é necessário uma alta constante de acoplamento para a sincronização global do sistema, esse resultado também foi mostrado analiticamente no Capítulo 3, e se encontra na região amarela da Fig. 3.4(b). Já para o surgimento da sincronização remota, é necessário um valor intermediário de diferença de frequências,  $1.5 \leq \Delta w \leq 15$ , e uma constante de acoplamento entre  $0.6 < k < 1.0$ . Essa região de sincronização remota se encontra dentro da região chamada de Desordem, encontrada analiticamente no Capítulo 3 e plotada na região azul da Fig. 3.4(b).

Também foi considerado o modelo de Kuramoto e foi mostrado que ele não é capaz de descrever o fenômeno da sincronização remota, como mostrado analiticamente na Seção 2.10.2.2.

## 4.2 Influência da extensão da distribuição das frequências naturais dos nós periféricos

Na Seção 4.1, as frequências dos nós periféricos foram mantidas constantes em  $\{\omega_{1,2,3,4}\} = \{0.975, 0.992, 1.008, 1.025\}$ . Vemos então que a diferença entre a maior e a menor frequência foi de 0.05. Já a frequência do *hub* foi inicialmente mantida fixa em  $\omega_0 = 2.5$ .

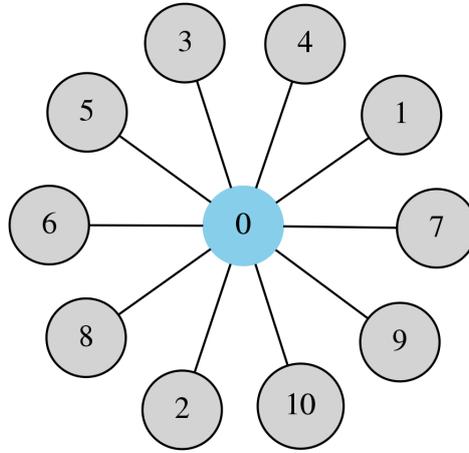
Será considerada agora uma estrela com  $N = 11$  nós, Figura 4.9, manteremos a frequência natural do *hub* fixa em 2.5 e estudaremos a influência do tamanho da distribuição das frequências naturais dos osciladores periféricos no surgimento da sincronização remota do sistema. A frequência dos nós da rede será então dada por:

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 2.5 \\ \omega_n &= 1.0 + \epsilon_n\end{aligned}\tag{4.11}$$

para  $n = 1, \dots, N - 1$ . Onde  $\epsilon_n$  é escolhido aleatoriamente com distribuição uniforme entre  $(0, a)$ . Consideraremos aqui  $a$  variando entre 0 e 0.3.

Teremos então a frequência do *hub* igual à da seção anterior e a frequência dos nós periféricos serão dadas por uma distribuição uniforme com diferença máxima  $a$  entre elas. As condições iniciais serão novamente mantidas fixas. Consideraremos

Figura 4.9 - Rede do tipo estrela com  $N = 11$  nós.



Fonte: Produção do autor.

$x_n^{inicial} = 0.1$  e  $y_n^{inicial} = 0.5$ , para  $n = 0, \dots, N - 1$ .

Nas Figuras 4.10, 4.11, 4.12 e 4.13, temos os gráficos de  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$  em função da constante de acoplamento  $k$  para várias distribuições de frequências naturais, conforme a Eq. 4.11, dadas por diferentes valores de  $a$ . Para cada valor de  $k$ , foram geradas 20 distribuições de frequências com  $\epsilon_n$  variando entre  $(0, a)$  e foram calculados a média e o desvio padrão de  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$ .

Para  $a = 0.00$ , todos os nós periféricos tem a mesma frequência natural e, como as condições iniciais são as mesmas, eles já estão sincronizados desde o início,  $r^{indirect} = 1$ . Como todas as frequências são sempre as mesmas, o desvio padrão é zero. À medida em que  $a$  vai crescendo, ou seja, quando as frequências dos nós periféricos vão se distanciando, é preciso uma constante de acoplamento cada vez maior para que haja a sincronização remota. De maneira que para  $a > 0.26$ , essa sincronização já não é alcançada e o sistema atinge apenas a sincronização global, em  $k \simeq 0.7$  com  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$  atingindo os seus valores máximos simultaneamente.

Poderíamos então pensar que quanto menor o valor de  $a$ , melhor seria para o nosso sistema, pois ele conseguiria atingir a sincronização remota mais rapidamente. Mas vamos agora analisar o que acontece com o valor de  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$  quando  $k$  é muito próximo de zero. Quando estamos nesta situação, com força de acoplamento praticamente nula, é de se esperar que não tenhamos nenhum tipo de influência de um nó sobre o outro, ou seja, esperamos que  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$  tenham um valor muito

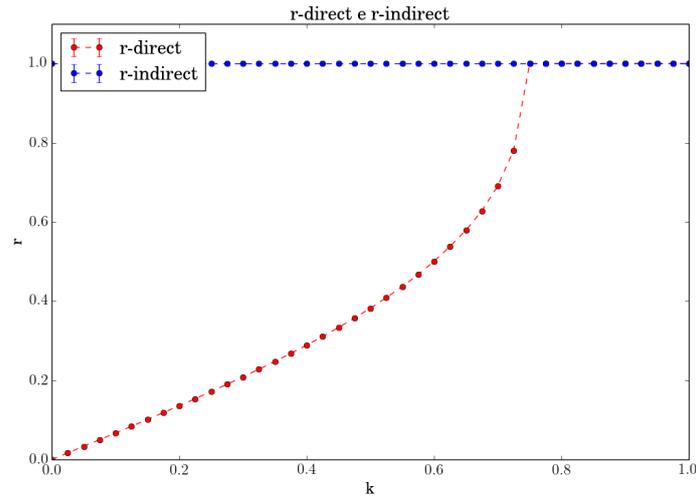
próximo de zero. Isso não ocorre para valores de  $a$  menores que 0.05 com o número de iterações utilizadas no nosso programa. Utilizamos aqui 400.000 iterações (4.000 unidades de tempo) para o transiente (iterações iniciais descartadas) e 2.000.000 de iterações (20.000 unidades de tempo). Se quiséssemos utilizar esses valores baixos de  $a$ , teríamos que aumentar o número de iterações do programa, o que traria um custo computacional maior, visto que o tempo de transiente seria maior ainda com os osciladores afastando-se uns dos outros de maneira muito lenta.

Podemos notar que antes de o sistema atingir a sincronização remota,  $r^{indirect} < 1$ , há um desvio padrão elevado para esta medida, indicando que o comportamento dos osciladores periféricos antes de atingir a sincronização remota é dependente das suas frequências naturais. Já o comportamento do *hub*, em relação ao resto da rede, sofre uma pequena variação quando a distribuição de frequências naturais dos nós periféricos tem uma grande extensão,  $a > 0.14$ . Mas essa variação no seu comportamento desaparece quando o sistema entra em sincronização global  $r^{direct} = 1$ .

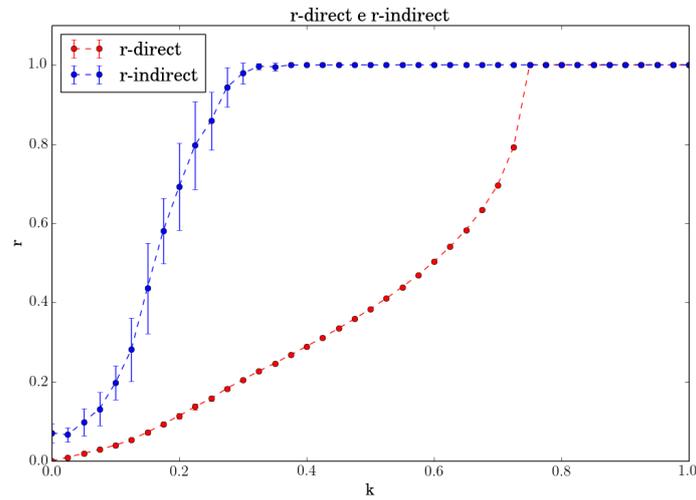
Seja  $k^{direct}$  o valor de  $k$  para o qual o sistema atinge pela primeira vez  $r^{direct} = 1$  (tem-se a sincronização do nó central com os periféricos) e, analogamente, seja  $k^{indirect}$  o valor de  $k$  para o qual o sistema atinge  $r^{indirect} = 1$  pela primeira vez (temos sincronização entre os nós periféricos). Chamaremos de  $\Delta k = |k^{direct} - k^{indirect}|$  a diferença entre os dois.

Na Figura 4.14, temos  $\Delta k$  em função do tamanho da distribuição de frequências naturais  $a$  dos osciladores periféricos, utilizando a distribuição de frequências naturais 4.11, onde  $\epsilon_n$  é uma variável aleatória com distribuição uniforme entre  $(0, a)$ . Quanto maior o valor de  $\Delta k$ , maior é o intervalo em que o sistema se encontra em sincronização remota. Os maiores valores de  $\Delta k$  são encontrados para valores próximos de distribuição das frequências naturais. Quanto maior o valor de  $a$ , ou seja, quanto maior é a extensão da distribuição das frequências dos nós periféricos, maior é a força de acoplamento exigida para a ocorrência da sincronização remota e menor será  $\Delta k$ . Para  $a > 0.26$  já não temos mais o fenômeno da sincronização remota,  $\Delta k = 0$ , como foi dito anteriormente. Podemos ver estes mesmos intervalos nas Figuras 4.10, 4.11, 4.12 e 4.13, ele é a diferença entre o valor de  $k$  para o primeiro ponto em vermelho que chega em  $r = 1$  com o valor de  $k$  para o primeiro ponto em azul que chega em  $r = 1$ .

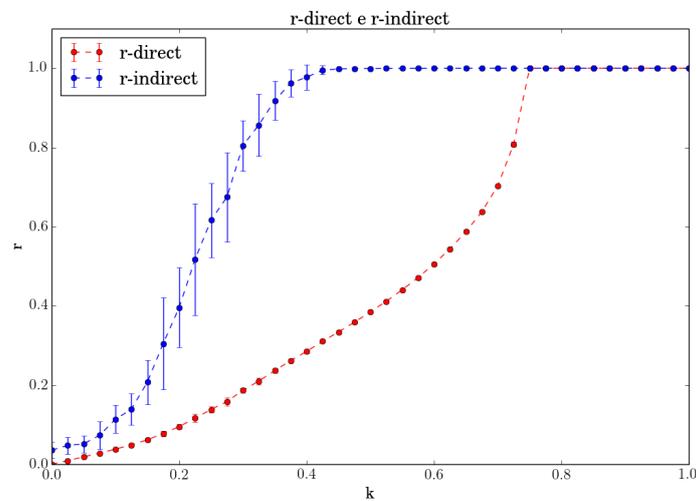
Figura 4.10 - Média e desvio padrão de  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$  em função da constante de acoplamento  $k$ , para a distribuição de frequências naturais 4.11, onde  $\epsilon_n$  é uma variável aleatória com distribuição uniforme entre  $(0, a)$  e  $a = \{0.00, 0.01, 0.02\}$ . Para cada valor de  $k$ , são geradas 20 distribuições de frequências naturais e é calculada a média e o desvio padrão de  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$ .



(a)  $a = 0.00$



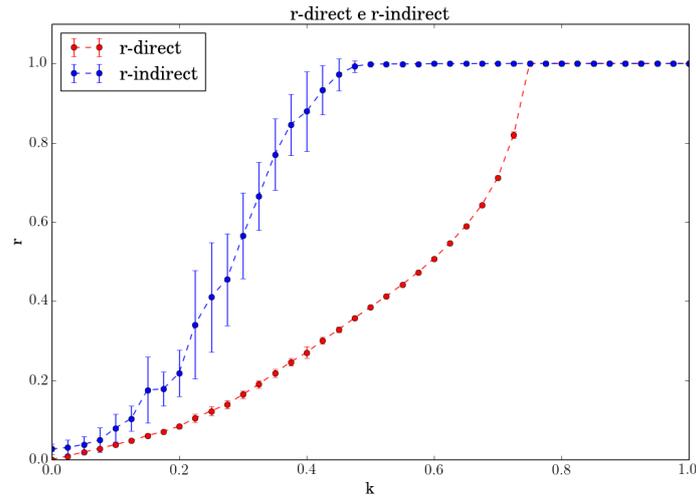
(b)  $a = 0.01$



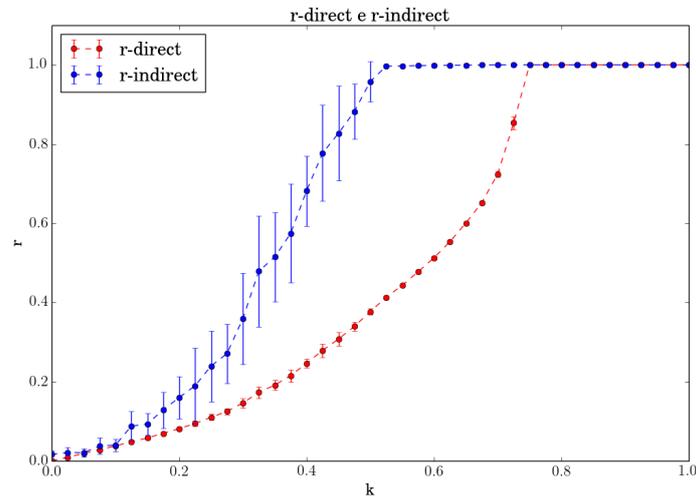
(c)  $a = 0.02$

Fonte: Produção do autor.

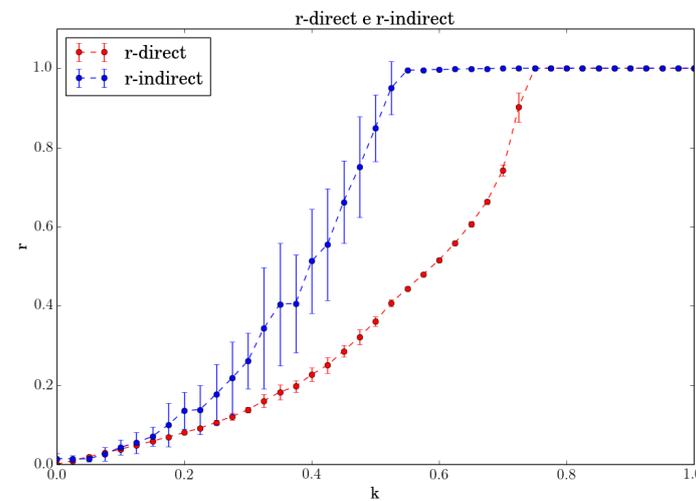
Figura 4.11 - Média e desvio padrão de  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$  em função da constante de acoplamento  $k$ , para a distribuição de frequências naturais 4.11, onde  $\epsilon_n$  é uma variável aleatória com distribuição uniforme entre  $(0, a)$  e  $a = \{0.03, 0.05, 0.07\}$ . Para cada valor de  $k$ , são geradas 20 distribuições de frequências naturais e é calculada a média e o desvio padrão de  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$ .



(a)  $a = 0.03$



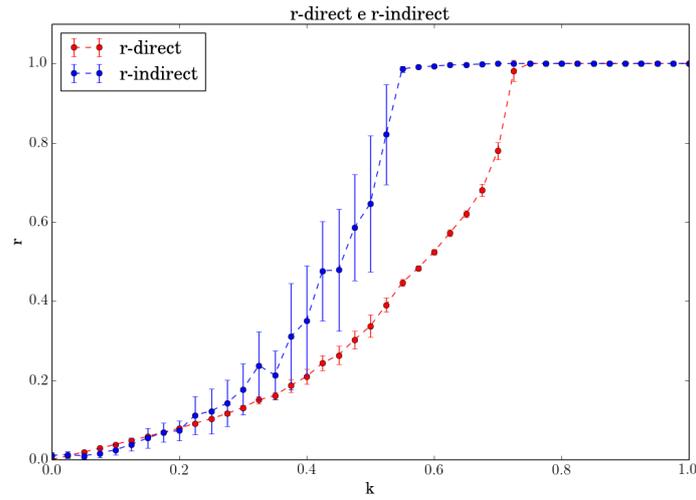
(b)  $a = 0.05$



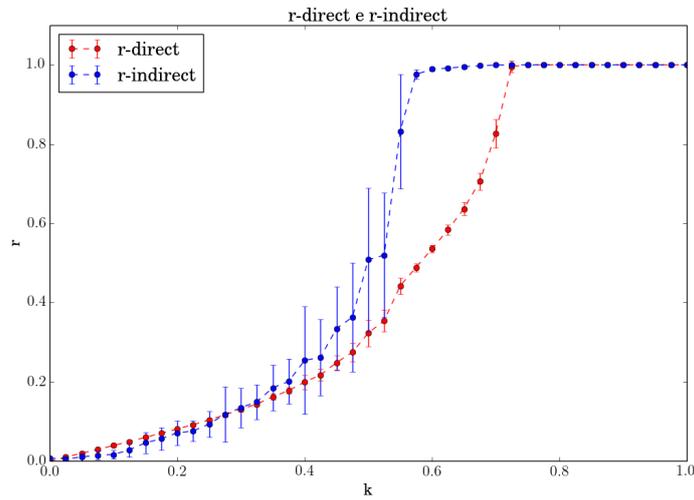
(c)  $a = 0.07$

Fonte: Produção do autor.

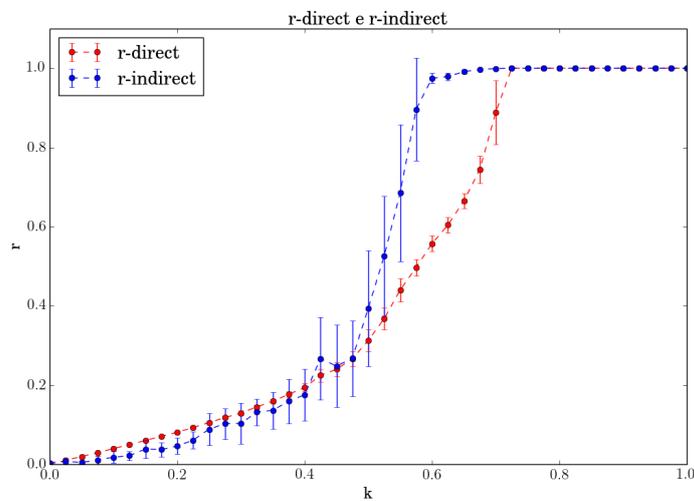
Figura 4.12 - Média e desvio padrão de  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$  em função da constante de acoplamento  $k$ , para a distribuição de frequências naturais 4.11, onde  $\epsilon_n$  é uma variável aleatória com distribuição uniforme entre  $(0, a)$  e  $a = \{0.10, 0.14, 0.18\}$ . Para cada valor de  $k$ , são geradas 20 distribuições de frequências naturais e é calculada a média e o desvio padrão de  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$ .



(a)  $a = 0.10$



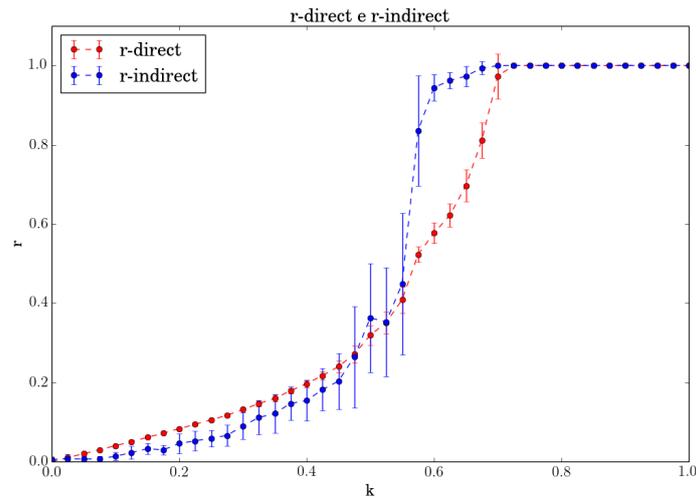
(b)  $a = 0.14$



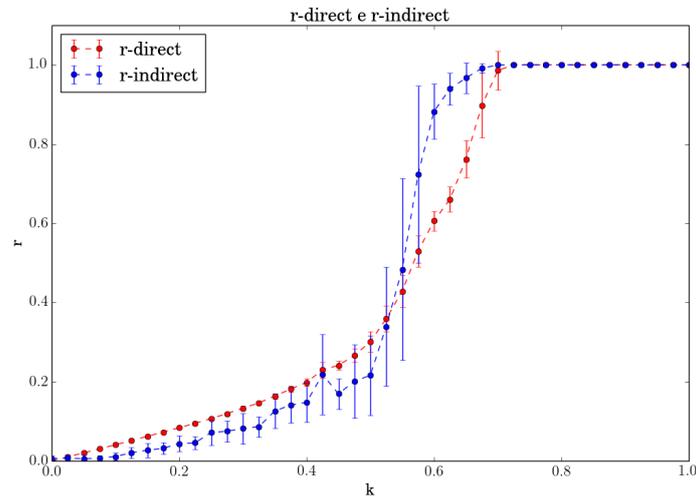
(c)  $a = 0.18$

Fonte: Produção do autor.

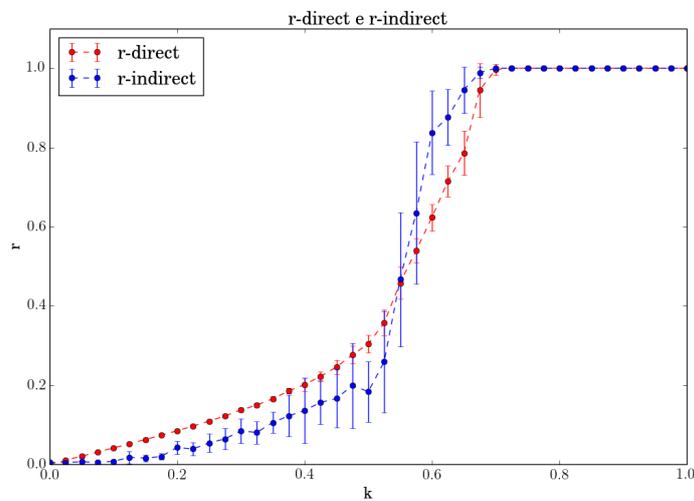
Figura 4.13 - Média e desvio padrão de  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$  em função da constante de acoplamento  $k$ , para a distribuição de frequências naturais 4.11, onde  $\epsilon_n$  é uma variável aleatória com distribuição uniforme entre  $(0, a)$  e  $a = \{0.22, 0.26, 0.30\}$ . Para cada valor de  $k$ , são geradas 20 distribuições de frequências naturais e é calculada a média e o desvio padrão de  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$ .



(a)  $a = 0.22$



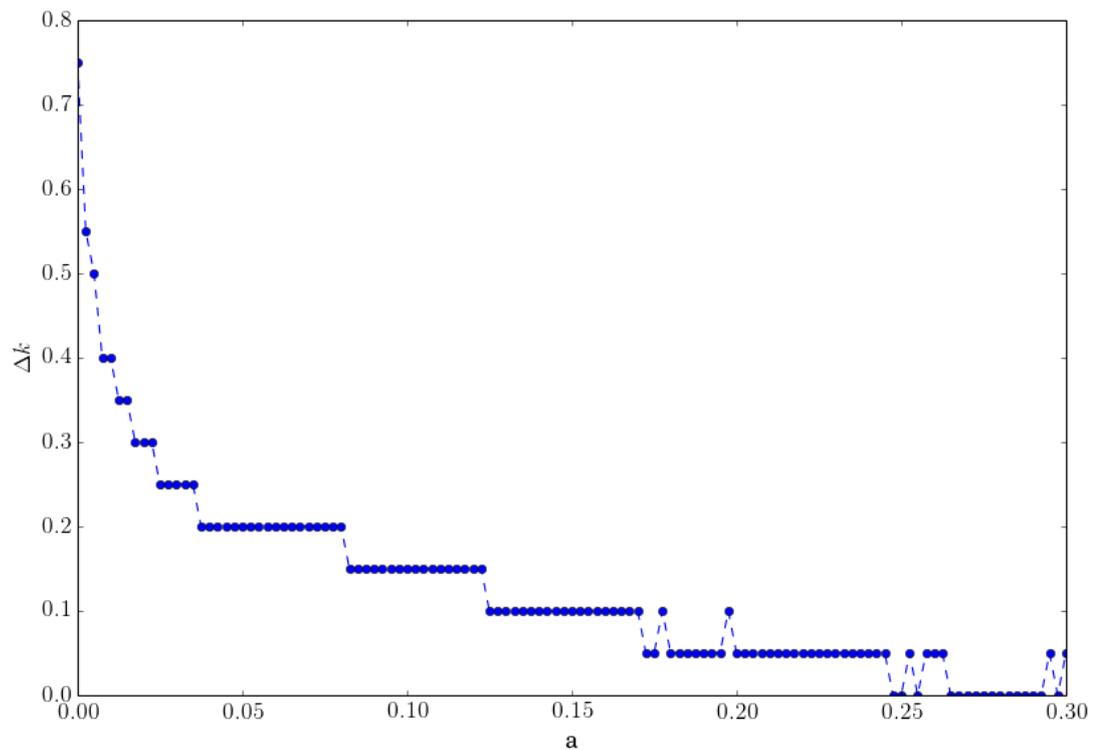
(b)  $a = 0.26$



(c)  $a = 0.30$

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.14 - Dependência de  $\Delta k = |k^{direct} - k^{indirect}|$  com o tamanho da distribuição de frequências naturais dos osciladores periféricos  $a$  (para a distribuição de frequências naturais 4.11, onde  $\epsilon_n$  é uma variável aleatória com distribuição uniforme entre  $(0, a)$ ). Onde  $k^{direct}$  é o valor de  $k$  para o qual o sistema atinge pela primeira vez  $r^{direct} = 1$  e  $k^{indirect}$  é o valor de  $k$  para o qual o sistema atinge  $r^{indirect} = 1$  pela primeira vez. Ou seja,  $\Delta k$  mede o intervalo para o qual temos sincronização remota.



Fonte: Produção do autor.

### 4.2.1 Conclusões Parciais

Nesta seção, mantivemos as condições iniciais de todos os osciladores e a frequência natural do oscilador central fixos e as frequências naturais dos osciladores periféricos foram variadas. Essas frequências foram aleatoriamente distribuídas, dadas por uma distribuição uniforme, e a diferença máxima entre elas foi de  $a$  que variou entre 0 e 0.3.

Vimos que para valores muito pequenos de  $a$ ,  $a < 0.05$ , o sistema atinge sincronização remota para pequenos valores da constante de acoplamento,  $k \in (0.3, 0.45)$ , mas como a diferença entre as frequências naturais é muito pequena, é necessário um transiente muito grande, o que torna o uso de valores muito baixos de  $a$  muito custoso computacionalmente. Quanto maior o valor da diferença máxima entre as frequências naturais dos osciladores periféricos, maior é a força de acoplamento necessária para a sincronização remota, até que para  $a > 0.26$ , esse tipo de sincronização se torna inexistente, com o sistema atingindo apenas a sincronização global.

Foi também possível notar que, para um valor fixo de  $a$ , os valores das frequências naturais dos osciladores periféricos, dados por uma distribuição uniforme aleatória, tem um papel significativo na dinâmica do sistema antes dele atingir a sincronização remota. Após isso, o sistema tem comportamento similar e independe dos valores das frequências naturais utilizadas.

### 4.3 Estudo da influência das condições iniciais na sincronização remota

Até aqui, mantivemos as condições iniciais dos osciladores fixas. Veremos agora o que acontece quando elas variam e para isso, vamos fixar as frequências naturais dos osciladores. Usaremos a mesma distribuição de frequências utilizada na Seção 4.2, dada pela Eq. 4.11, ou seja,  $\omega_0 = 2.5$  e  $\omega_n = 1 + \epsilon_n$ , para  $n = 1, \dots, N - 1$ , onde  $\epsilon_n$  tem seu valor escolhido aleatoriamente com distribuição uniforme entre  $(0, a)$  e  $N = 11$  é o número de osciladores.

Fixaremos aqui  $a = 0.05$  para a gerar a distribuição aleatória de frequências naturais, pois com esse valor, obtivemos  $\Delta k = 0.2$  para condições iniciais fixas, ou seja, temos sincronização remota em um intervalo de constante de acoplamento igual a 0.2. Poderíamos escolher um valor de  $a$  no qual teríamos um  $\Delta k$  maior, mas isso exigiria um número de iterações muito maior no programa, como foi explicado anteriormente.

Geramos então aleatoriamente os valores das frequências naturais dos osciladores periféricos e essa distribuição é dada por:

$$\{\omega_n\} = \{2.5000, 1.0158, 1.0060, 1.0170, 1.0065, 1.0067, 1.0323, \\ 1.0185, 1.0390, 1.0076, 1.0186\} \quad (4.12)$$

para  $n = 0, \dots, N - 1$ .

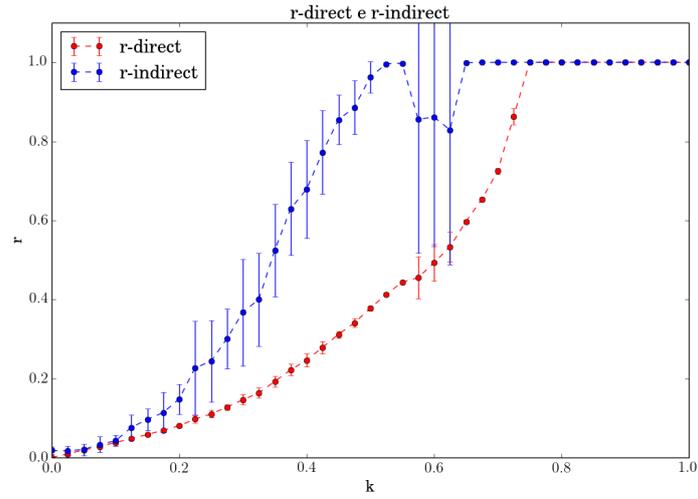
As condições iniciais  $x^{inicial}$  e  $y^{inicial}$  são vetores de tamanho  $N$  e serão geradas aleatoriamente de acordo com uma distribuição uniforme que varia no intervalo  $(-a_{xy}, a_{xy})$ . Analisaremos o que acontece com a sincronização remota quando  $a_{xy}$  varia de 0.1 até 1.4.

Nas Figuras 4.15 e 4.16, temos as medidas  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$  em função da constante de acoplamento  $k$  para vários intervalos de distribuição uniforme. Para cada valor de  $k$ , foram geradas 20 condições iniciais diferentes e foi calculado a média e o desvio padrão de  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$ . Pode-se notar que o sistema atinge sincronização remota para  $k \simeq 0.5$  e que para  $0.575 \lesssim k \lesssim 0.625$  o sistema perde essa sincronização para alguns valores de condições iniciais, retomando novamente a sincronização remota para todos os valores de condição inicial quando  $k > 0.625$ . Esse mesmo comportamento é encontrado para todas as distribuições de condições de condições iniciais testadas. Pode-se notar também que o desvio padrão de  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$  é muito pequeno fora do intervalo  $0.575 \lesssim k \lesssim 0.625$ , o que indica que o comportamento do sistema não tem uma forte dependência em relação às condições iniciais fora deste intervalo.

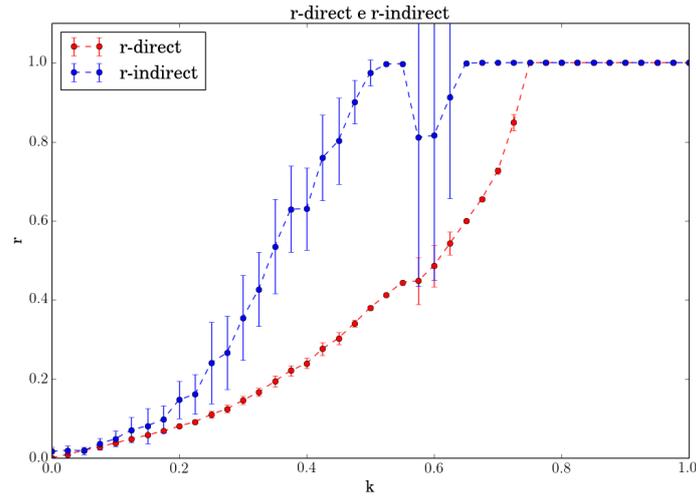
Visto que não há evidências numéricas que indiquem dependência da sincronização com o tamanho do intervalo da distribuição das condições iniciais, escolhemos empiricamente  $a_{xy} = 0.5$  para prosseguir com o nosso estudo.

Vamos agora mostrar que o mesmo fenômeno também ocorre para uma estrela com maior número de nós periféricos. Na Figura 4.17 temos o gráfico de  $r^{direct}$  (vermelho),  $r^{indirect}$  (azul) e média módulo do parâmetro de ordem  $R$  (preto) para condições iniciais aleatórias com distribuição uniforme entre  $(-0.5, 0.5)$  e distribuição de frequências fixa calculada pela Eq. 4.11 com  $a = 0.05$ , dada pela Eq. 4.12 para a rede com  $N = 11$  nós e pela Eq. 4.13 para uma rede com  $N = 51$  nós. O módulo do parâmetro de ordem  $R$ , dado pela Eq. 2.16, mede o quanto as fases de todos os osciladores estão próximas, quando mais próximas, mais perto de 1 será esta medida. A Figura 4.18(a) se refere à estrela com  $N = 11$  nós e a Figura 4.18(b)

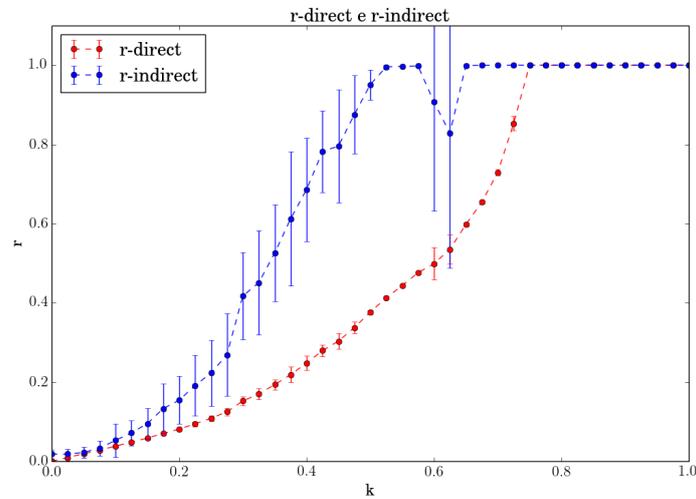
Figura 4.15 - Média e desvio padrão de  $r^{direct}$  (vermelho) e  $r^{indirect}$  (azul) em função da constante de acoplamento  $k$ , para frequências naturais fixas e condições iniciais aleatórias geradas por uma distribuição uniforme com intervalo  $(-a_{xy}, a_{xy})$ , com  $a_{xy} = \{0.2, 0.4, 0.5\}$ . Para cada valor de  $k$ , são geradas 20 distribuições de condições iniciais e é calculada a média e o desvio padrão de  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$ .



(a)  $a_{xy} = 0.2$



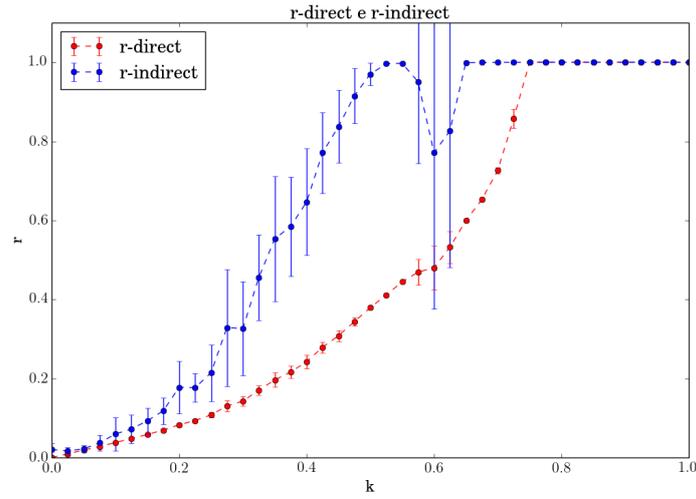
(b)  $a_{xy} = 0.4$



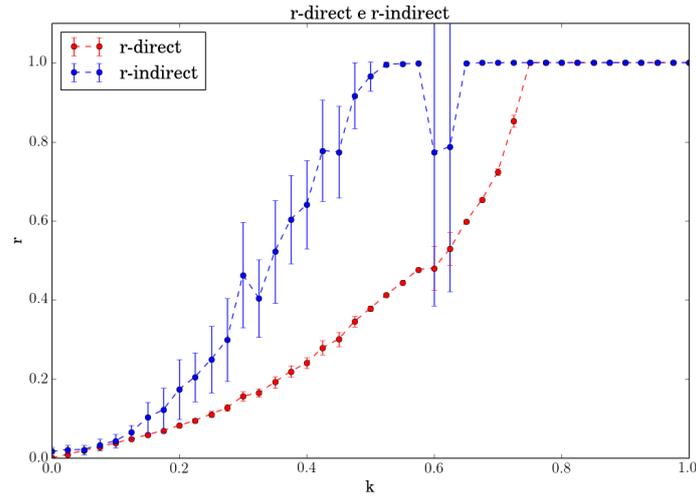
(c)  $a_{xy} = 0.5$

Fonte: Produção do autor.

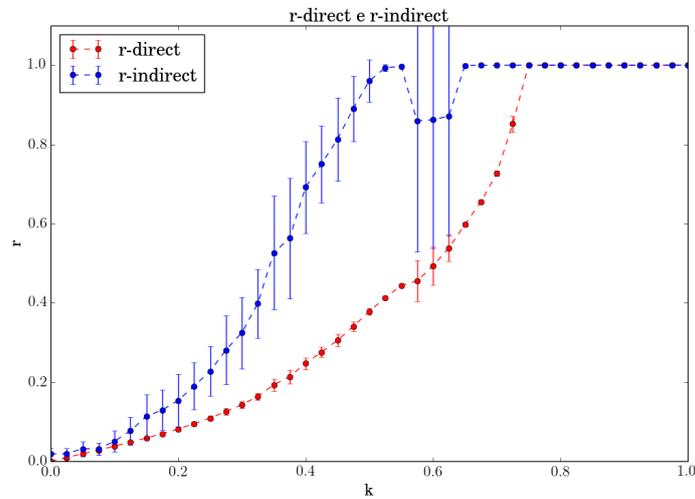
Figura 4.16 - Média e desvio padrão de  $r^{direct}$  (vermelho) e  $r^{indirect}$  (azul) em função da constante de acoplamento  $k$ , para frequências naturais fixas e condições iniciais aleatórias geradas por uma distribuição uniforme com intervalo  $(-a_{xy}, a_{xy})$ , com  $a_{xy} = \{0.6, 0.8, 1.4\}$ . Para cada valor de  $k$ , são geradas 20 distribuições de condições iniciais e é calculada a média e o desvio padrão de  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$ .



(a)  $a_{xy} = 0.6$



(b)  $a_{xy} = 0.8$



(c)  $a_{xy} = 1.4$

Fonte: Produção do autor.

se refere à estrela com  $N = 51$  nós. Podemos ver que em 4.18(b) também há o surgimento de sincronização remota, mas para um valor maior da constante de acoplamento  $k$  quando comparado à 4.18(a), como há mais osciladores periféricos, a força de acoplamento necessária para sincroniza-los é maior. A mesma queda em torno de  $k = 0.6$  ocorre nas duas figuras, indicando que este fenômeno independe do número de osciladores considerados.

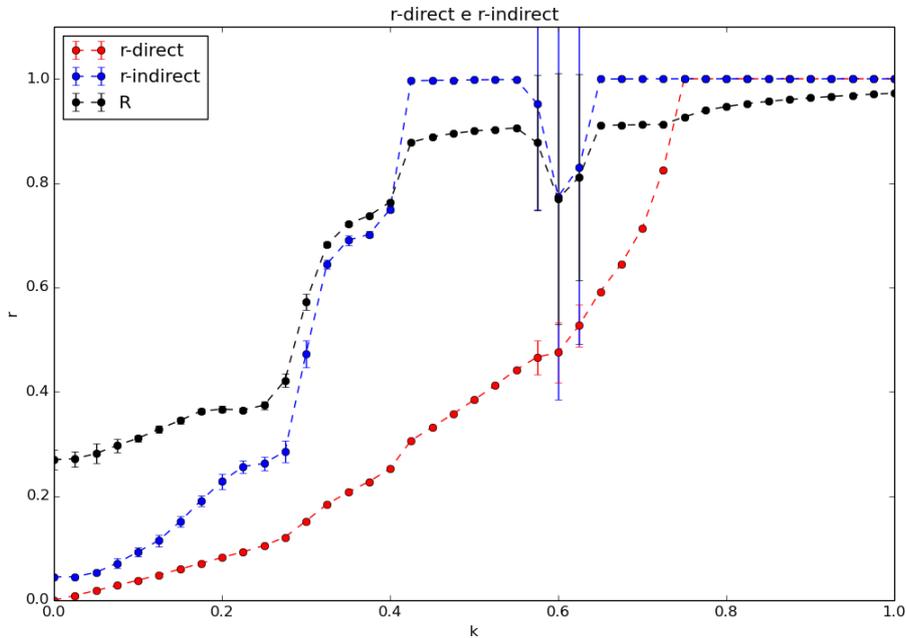
$$\begin{aligned} \{\omega_n\} = \{ & 2.5000, 1.0068, 1.0154, 1.0455, 1.0208, 1.0372, 1.0064, 1.0283, \\ & 1.0361, 1.0190, 1.0052, 1.0317, 1.0170, 1.0108, 1.0144, 1.0119, \\ & 1.0335, 1.0437, 1.0134, 1.0352, 1.0400, 1.0461, 1.0169, 1.0456, \\ & 1.0206, 1.0109, 1.0223, 1.0184, 1.0372, 1.0075, 1.0262, 1.0312, \\ & 1.0493, 1.0358, 1.0345, 1.0353, 1.0258, 1.0023, 1.0082, 1.0078, \\ & 1.0394, 1.0021, 1.0166, 1.0488, 1.0339, 1.0333, 1.0029, 1.0458, \\ & 1.0076, 1.0015, 1.0313\} \quad (4.13) \end{aligned}$$

Gostaríamos de poder visualizar o conjunto das distribuições de condições iniciais que convergem e o conjunto das distribuições que não convergem para a sincronização remota em  $k = 0.6$ , mas, seria necessário um gráfico com 22 dimensões para plotar as coordenadas  $(x, y)$  de todo sistema e um gráfico com 11 dimensões para plotar as fases iniciais dos 11 osciladores.

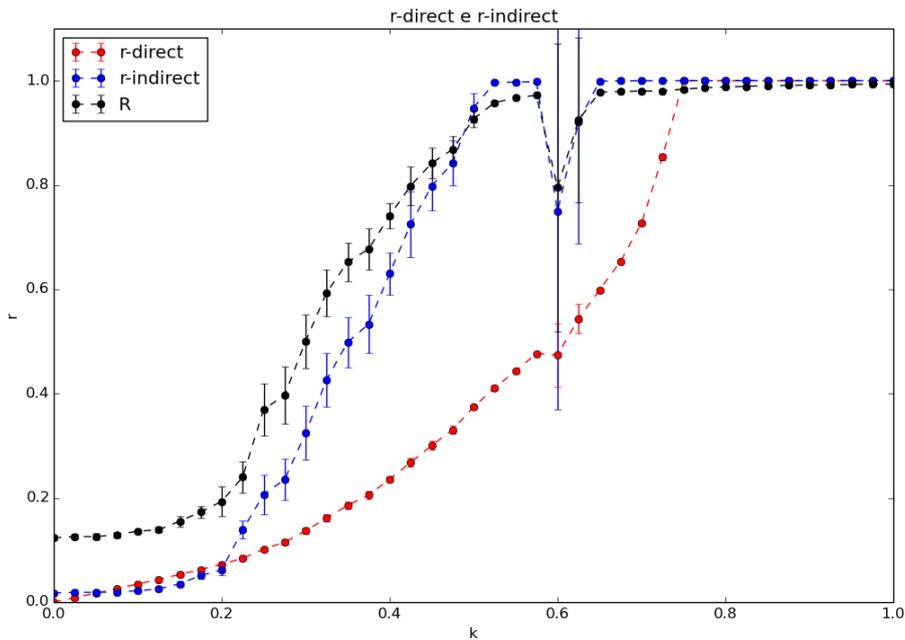
Para conseguirmos uma visualização desse conjunto de condições iniciais, vamos então considerar a menor rede do tipo estrela possível, com três nós, dada pela Figura 2.15 e uma distribuição de frequência calculada aleatoriamente de acordo com a mesma regra utilizada ao longo desta seção, ou seja,  $\omega_0 = 2.5$  e  $\omega_n = 1 + \epsilon_n$ , para  $n = 1, 2$ . Onde  $\epsilon_n$  tem distribuição aleatória uniforme entre  $(0, 0.05)$ . Portanto, as frequências naturais serão dadas por  $\{\omega_n\} = \{2.5, 1.0158, 1.0060\}$ , com  $n = 0, 1, 2$ . Na Figura 4.18, integramos o sistema para 20 condições iniciais diferentes para cada valor da constante de acoplamento e calculamos a média e o desvio padrão das quantidades  $r^{direct}$ ,  $r^{indirect}$  e  $R$ , a fim de medir o nível de sincronização do sistema para vários valores da constante de acoplamento.

O sistema atinge sincronização remota ( $r^{indirect} \simeq 1$  e  $r^{direct} < 1$ ) para um valor relativamente pequeno da constante de acoplamento,  $k \simeq 0.25$ , pois o número de osciladores periféricos é muito baixo. E, como já era esperado, devido às análises

Figura 4.17 - Média e desvio padrão de  $r^{direct}$  (vermelho),  $r^{indirect}$  (azul) e média do módulo do parâmetro de ordem  $R$  (preto) em função da constante de acoplamento  $k$ . Foram utilizadas 20 condições iniciais com uma distribuição uniforme em  $(-0.5,0.5)$  para cada valor de  $k$  e as frequências naturais foram mantidas fixas e são dadas por 4.12 e 4.13. Em (a) temos uma rede com  $N = 11$  nós e em (b) uma rede com  $N = 51$  nós.



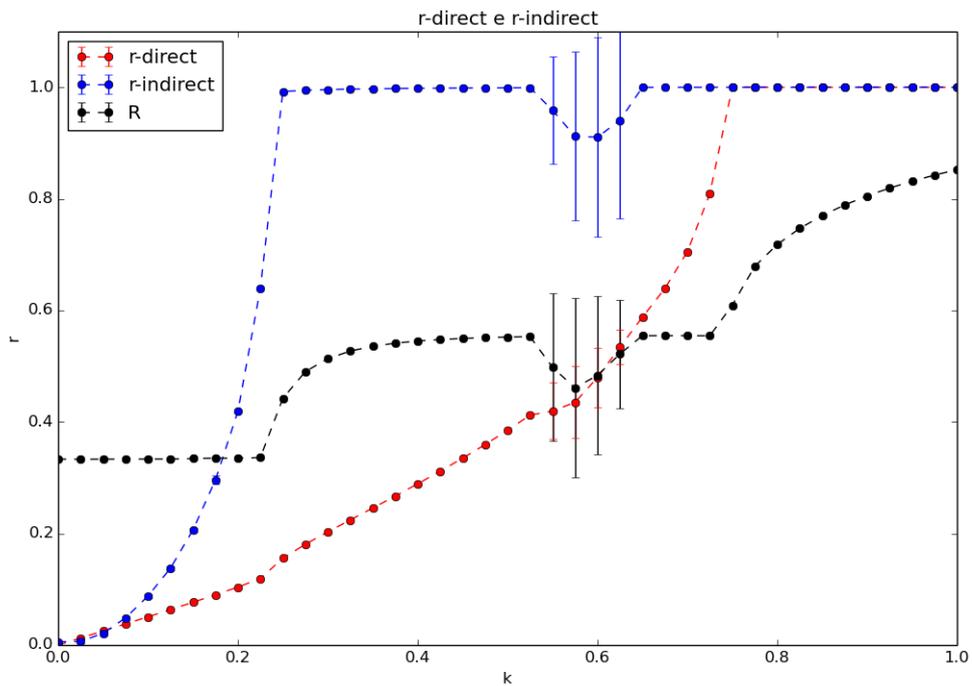
(a) Estrela com  $N = 11$  nós.



(b) Estrela com  $N = 51$  nós.

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.18 - Média e desvio padrão de  $r^{indirect}$  (azul),  $r^{direct}$  (vermelho) e do módulo do parâmetro de ordem de ordem  $R$  (preto) em função da constante de acoplamento para um rede com 3 nós. Para cada valor de  $k$  foram utilizadas 20 condições iniciais e as frequências naturais foram mantidas fixas  $\{\omega_n\} = \{2.5, 1.0158, 1.0060\}$ , com  $n = 0, 1, 2$ .



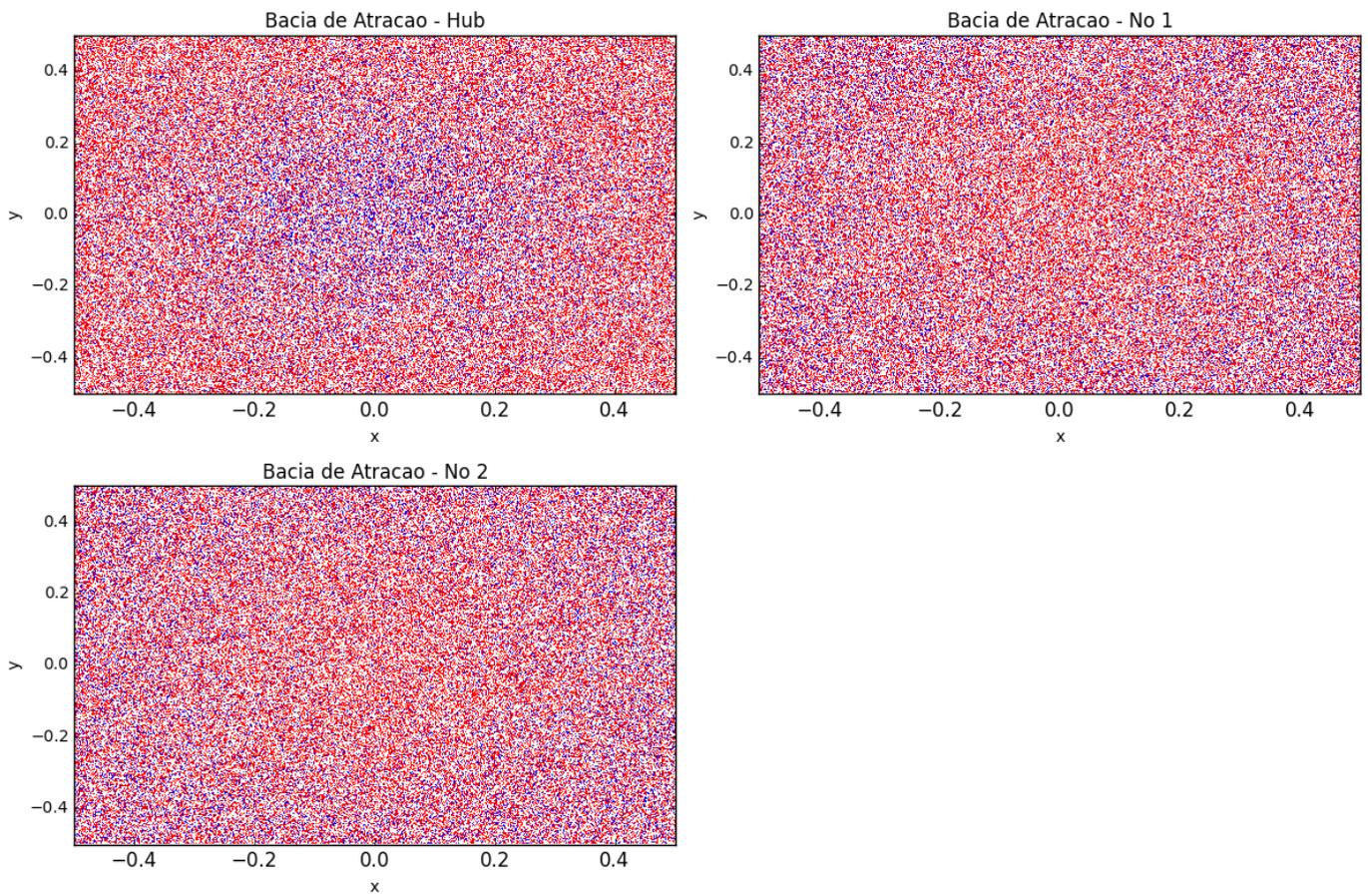
Fonte: Produção do autor.

anteriores, para valores de  $k$  em torno de 0.6, podemos notar uma queda no valor de  $r^{indirect}$ , indicando a perda da sincronização entre os osciladores periféricos. O parâmetro de ordem  $R$  mede o quanto os osciladores estão próximos uns dos outros. Vemos que mesmo quando o sistema entra em sincronização remota eles não compartilham a mesma fase. É esperado que  $R$  seja pequeno para valores baixos da constante de acoplamento, pois a interação entre os osciladores é muito baixa, e isso não ocorre na Fig. 4.18 pois o transiente considerado não é grande o suficiente. Estamos considerando um transiente suficientemente grande apenas para os índices de sincronização parcial  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$ .

Deixando as frequências naturais fixas e considerando a constante de acoplamento  $k = 0.6$ , integramos o sistema várias vezes com condições iniciais aleatórias com distribuição uniforme entre  $(-0.5, 0.5)$  e analisamos os valores finais de  $r^{indirect}$  e  $r^{direct}$  após 2 milhões de iterações (20.000 unidades de tempo). Se  $r^{indirect} > 0.97$  e  $r^{direct} < 0.6$ , consideramos que esse conjunto de condições iniciais leva ao regime de sincronização remota.

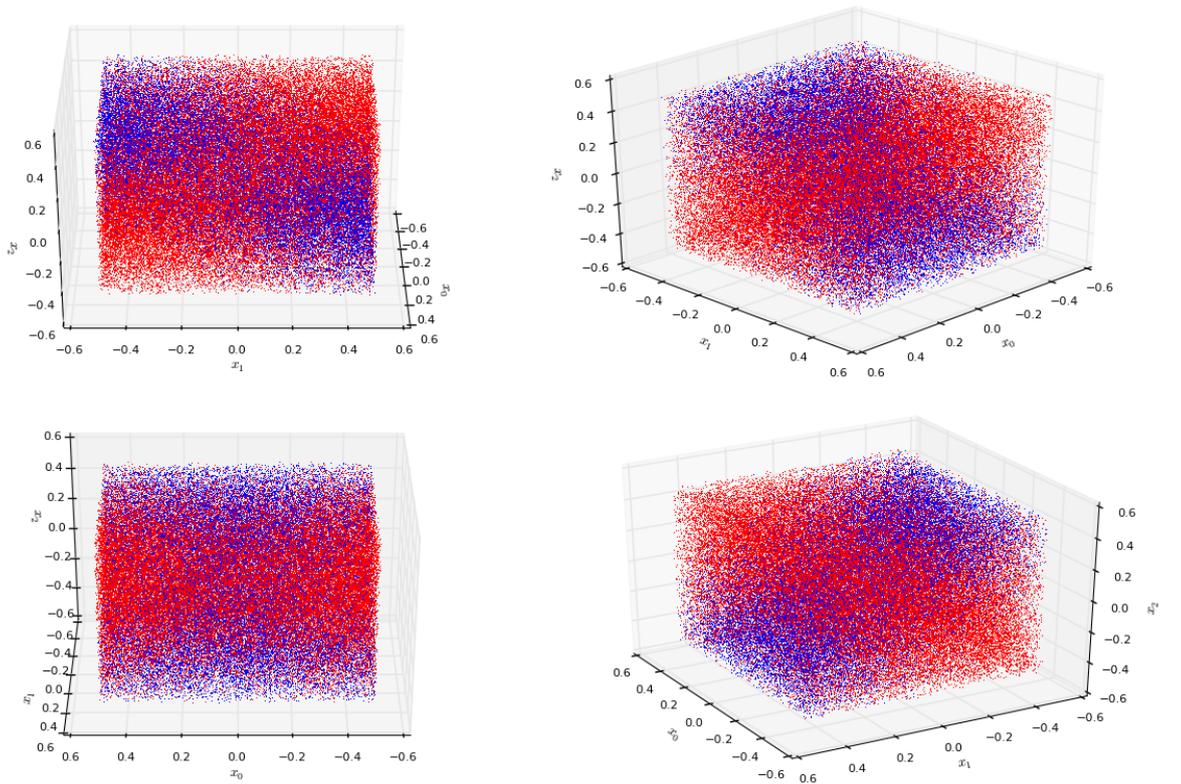
Nas Figuras 4.19, 4.20 e 4.21, temos plotadas todas as condições iniciais que foram consideradas. Em vermelho, temos as condições iniciais que deram origem à sincronização remota e em azul as que não deram e são responsáveis pelas quedas em  $k = 0.6$  nos gráficos de  $r^{indirect}$  e  $r^{direct}$ . Ao todo, 18.18% das condições iniciais utilizadas não deram origem à sincronização remota (pontos em azul). Em 4.19, temos o par de condições iniciais  $(x^{inicial}, y^{inicial})$  de cada oscilador que foi utilizado no programa, mas não é possível visualizar um padrão. Na Fig. 4.21, plotamos  $(x_1^{inicial}, x_2^{inicial}, x_3^{inicial})$  e  $(y_1^{inicial}, y_2^{inicial}, y_3^{inicial})$  para ter uma melhor visualização da bacia de atração do sistema. Na Fig. 4.21, plotamos a fase inicial de cada oscilador em um eixo da figura, onde a fase é dada por  $\theta_n = \tan^{-1} \frac{y_n}{x_n}$  ( $\theta_n = \text{atan2}(y_n, x_n)$ ). A mesma figura é plotada em ângulos de visualização diferentes. Podemos ver um aparecimento de uma bacia de atração mais bem definida que não dá origem à sincronização remota (em azul).

Figura 4.19 - Par de condições iniciais  $(x^{inicial}, y^{inicial})$  que dão (vermelho) e não dão (azul) origem à sincronização remota. Para  $k = 0.6$  e uma estrela com três nós e frequência natural fixada em  $\{\omega_n\} = \{2.500, 1.0158, 1.0060\}$ , com  $n = 0, 1, 2$ .

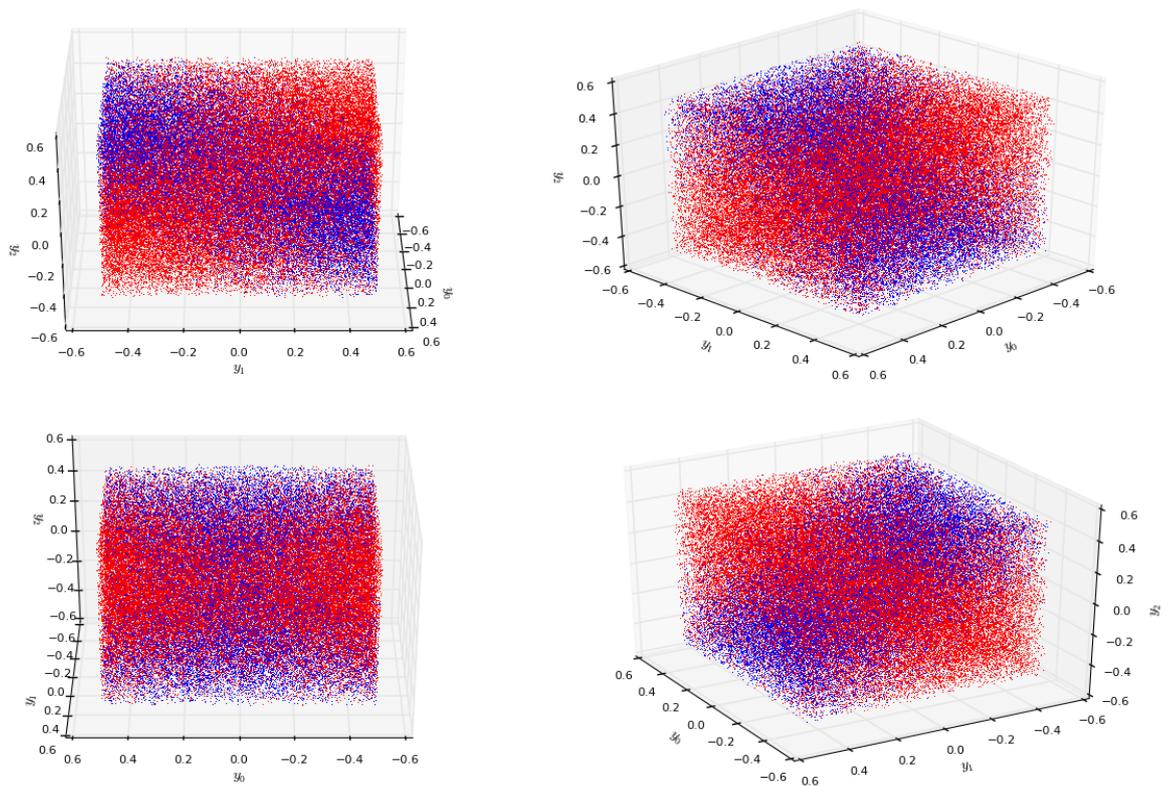


Fonte: Produção do autor.

Figura 4.20 - Condições iniciais de cada oscilador, que dão (vermelho) e não dão (azul) origem à sincronização remota. Para  $k = 0.6$  e uma estrela com três nós e frequência natural fixada em  $\{\omega_n\} = \{2.500, 1.0158, 1.0060\}$ , com  $n = 0, 1, 2$ . (a) Temos as coordenadas  $x^{inicial}$  de todos os três osciladores, em (b) temos as coordenadas  $y^{inicial}$ . Em (a) e (b) temos quatro visualizações diferentes da mesma figura.



(a)

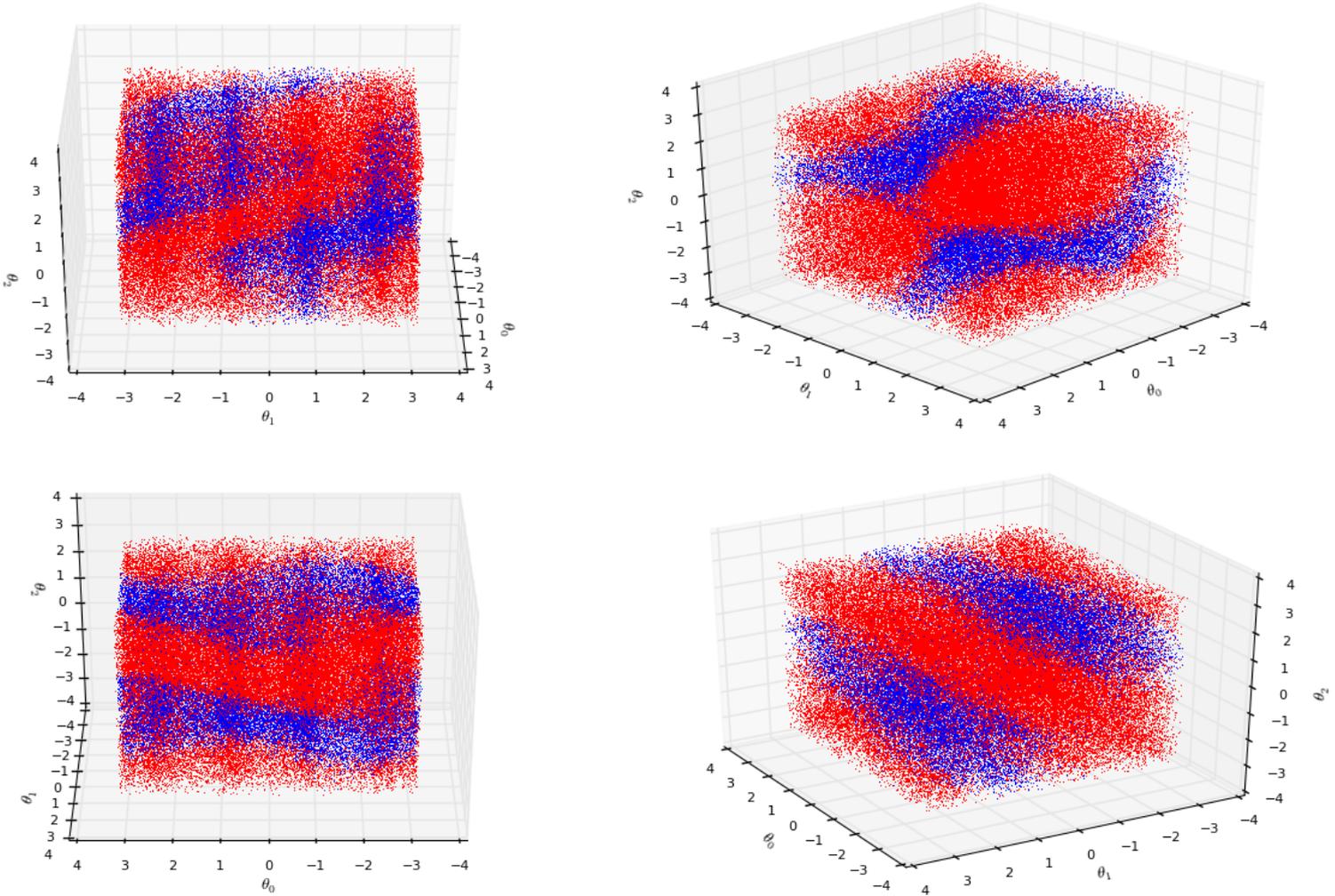


(b)

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.21 - Fases iniciais de cada oscilador, dadas por  $\theta_n = \tan^{-1} \frac{y_n}{x_n}$ , que dão (vermelho) e não dão (azul) origem à sincronização remota. Para  $k = 0.6$  e uma estrela com três nós e frequência natural fixada em  $\{\omega_n\} = \{2.500, 1.0158, 1.0060\}$ , com  $n = 0, 1, 2$ . Temos quatro visualizações diferentes da mesma figura.

Bacia de Atracao



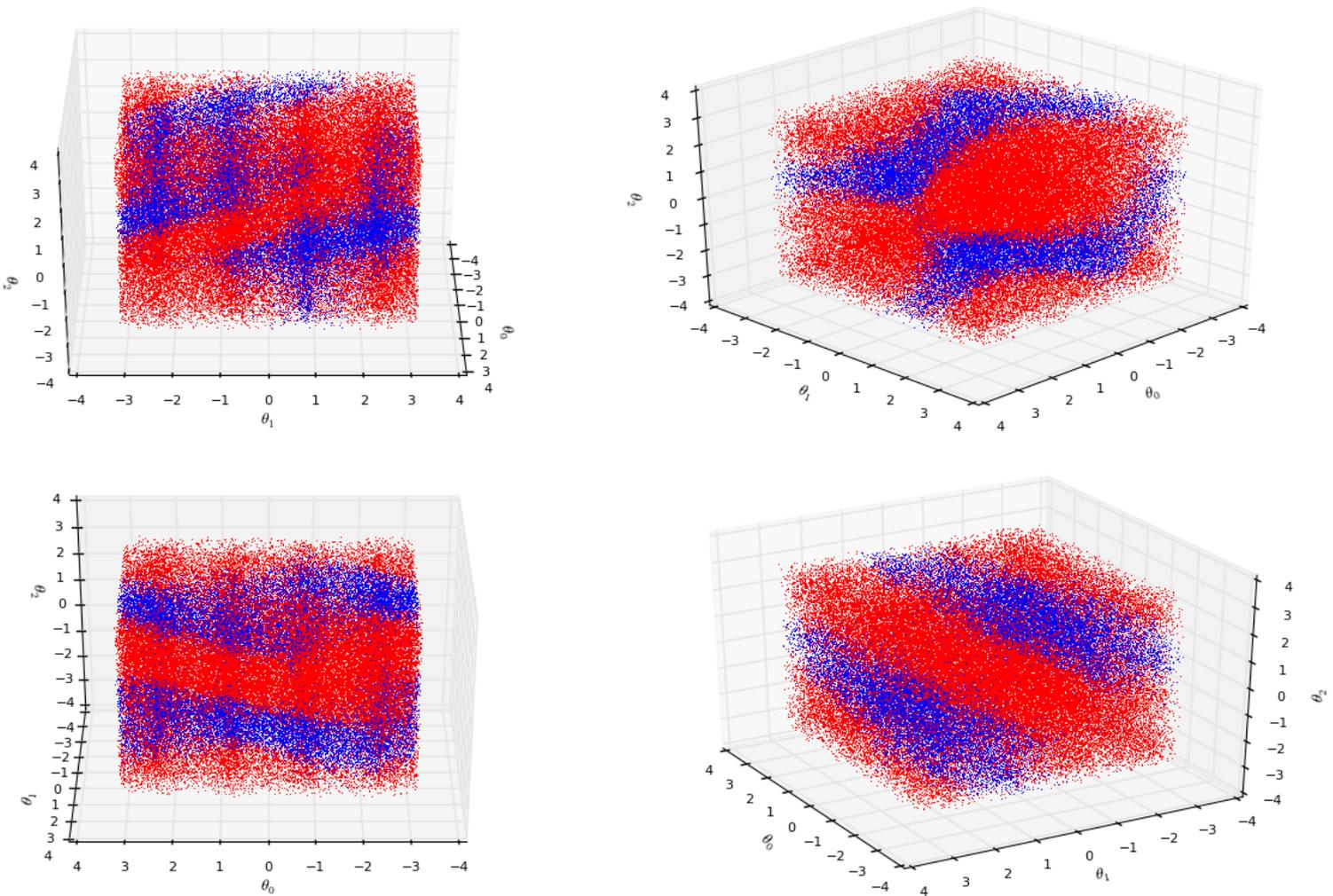
Fonte: Produção do autor.

Para ter certeza de que esse padrão encontrado não é influenciado pela escolha da frequência natural dos osciladores, vamos fazer o mesmo procedimento anterior para um novo conjunto de frequências naturais, dessa vez, as frequências serão comensuráveis e obedecerão às mesmas regras anteriores, ou seja,  $\omega_0 = 2.5$  e o valor máximo da diferença entre as frequências naturais dos osciladores periféricos será  $a = 0.05$ . As frequências são então dadas por  $\{\omega_n\} = \{2.500, 1.000, 1.025\}$ , com  $n = 0, 1, 2$ . Ou seja,  $\omega_1 = \frac{2}{5}\omega_0 = 1.000$  e  $\omega_2 = \frac{41}{100}\omega_0 = 1.025$ . Os resultados se encontram na Figura

4.22 e são praticamente idênticos aos encontrados na Figura 4.21, mostrando que esse padrão de condições iniciais que convergem e não convergem para a sincronização remota em  $k = 0.6$  independe da frequência natural utilizada para o sistema, sendo esta dada pela distribuição da Eq. 4.11 com  $a = 0.05$ .

Figura 4.22 - Fases iniciais de cada oscilador, dadas por  $\theta_n = \tan^{-1} \frac{y_n}{x_n}$ , que dão (vermelho) e não dão (azul) origem à sincronização remota. Para  $k = 0.6$  e uma estrela com três nós e frequência natural fixada em  $\{\omega_n\} = \{2.500, 1.000, 1.025\}$ , com  $n = 0, 1, 2$ . Temos quatro visualizações diferentes da mesma figura.

Bacia de Atracao



Fonte: Produção do autor.

### 4.3.1 Conclusões Parciais

Nesta seção, fixamos os valores das frequências naturais dos osciladores e variamos os valores das condições iniciais do sistema. As frequências naturais foram fixadas de modo que a diferença máxima entre elas não ultrapassasse  $a = 0.05$ . Já as condições iniciais foram distribuídas aleatoriamente, seguindo uma distribuição uniforme dada por  $(-a_{xy}, a_{xy})$ , onde  $a_{xy} \in [0.1, 1.4]$ .

Notamos que o sistema atinge sincronização remota para um mesmo valor da constante de acoplamento  $k \simeq 0.5$ , e atinge sincronização global em  $k \simeq 0.775$ , independentemente do tamanho da distribuição de condições naturais utilizadas. E, para  $0.575 \lesssim k \lesssim 0.625$ , os osciladores periféricos deixam de estar sincronizados, voltando à sincronização em  $k > 0.625$ . No intervalo  $0.575 \lesssim k \lesssim 0.625$ , o desvio padrão se mostrou muito alto, mostrando que o comportamento do sistema neste intervalo é muito dependente das condições iniciais. Já fora deste intervalo, o desvio padrão é praticamente nulo. Todos os intervalos de distribuição das condições iniciais se mostraram equivalentes e escolhemos o intervalo  $(-0.5, 0.5)$  para dar prosseguimento aos estudos.

Para tentar visualizar o conjunto de condições iniciais que converge e o que não converge para a sincronização remota, consideramos uma estrela com três nós, fixamos as frequências naturais e mostramos que na região em que  $k \simeq 0.6$ , a mesma queda na sincronização remota é encontrada. Fixamos então  $k = 0.6$  e calculamos o valor de  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$  para vários valores de condições iniciais diferentes, plotamos esses resultados em um gráfico de três dimensões, onde cada eixo corresponde à fase inicial de um oscilador. Pudemos notar o aparecimento de um padrão no conjunto de condições iniciais que são responsáveis pelo desaparecimento da sincronização remota. O mesmo padrão foi encontrado quando novas frequências foram fixadas.

### 4.4 Análise do comportamento do sistema com frequências naturais fixas e duas condições iniciais diferentes

Nesta seção, continuaremos a manter as frequências naturais dos osciladores fixas e utilizaremos duas condições iniciais distintas, representando um ponto preto e um vermelho na Fig 4.19. Veremos que uma delas não dará origem ao desaparecimento da sincronização remota em  $k \simeq 0.6$  e a outra sim. As diferenças entre o comportamento do sistema nestes dois casos serão analisadas.

Consideraremos nesta seção uma rede com  $N = 11$  nós novamente. Fixaremos as

duas condições iniciais abaixo para o sistema, sendo que elas foram geradas por uma distribuição aleatória uniforme com intervalo  $(-0.5, 0.5)$ .

$$\begin{aligned}
\{x_n^1\} &= \{-0.03672411, 0.38024460, 0.27386404, 0.23925263, \\
&0.05347882, -0.22111217, 0.46526363, -0.47368003, 0.17426283, \\
&\quad -0.31198457, 0.27797903\} \\
\{y_n^1\} &= \{-0.38243125, -0.31546865, 0.48294293, -0.29909983, \\
&0.39475024, -0.38066357, 0.32721335, 0.37426591, -0.48784350, \\
&\quad -0.37711057, 0.24857760\} \quad (4.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{x_n^2\} &= \{0.18310904, -0.38851311, 0.23313545, -0.25566342, \\
&0.41649033, 0.16081773, -0.41299378, 0.22859424, -0.27097222, \\
&\quad 0.36025168, 0.39478912\} \\
\{y_n^2\} &= \{-0.02144717, 0.21144214, 0.36246123, 0.46202932, \\
&-0.47923800, -0.01556482, 0.25587219, 0.12446036, -0.42247640, \\
&\quad -0.16294013, 0.18085761\} \quad (4.15)
\end{aligned}$$

onde  $n = 0, \dots, N - 1$ . Chamaremos o sistema com as condições iniciais  $\{x^1\}$  e  $\{y^1\}$  (Eq. 4.14) de Sistema 1 e o sistema com condições iniciais dadas por  $\{x^2\}$  e  $\{y^2\}$  (Eq. 4.15) de Sistema 2. Em ambos os casos, o sistema terá a mesma distribuição de frequências naturais, dada pela Eq. 4.12. Será mostrado mais adiante que o Sistema 1 mantém o estado de sincronização remota, depois que este é atingido, para qualquer valor da constante de acoplamento. O mesmo não ocorre com o Sistema 2.

Para uma primeira análise do comportamento do sistema para esses valores de condições iniciais, vamos calcular as quantidades  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$  em função da constante de acoplamento, para medirmos o nível de sincronização do sistema. Na Figura 4.23 temos  $r^{direct}$ ,  $r^{indirect}$  e a média do módulo do parâmetro de ordem de ordem  $R$  em função da força de acoplamento  $k$ . Na Figura 4.24(a), temos o Sistema 1 com condições iniciais dadas por 4.14, este sistema atinge a sincronização remota em  $k \simeq 0.425$  e atinge a sincronização global em  $k \simeq 0.75$ . Na Figura 4.24(b), o Sistema 2, conforme a expressão 4.15, também atinge sincronização remota em  $k \simeq 0.425$

mas perde este estado de sincronização para  $0.575 \lesssim k \lesssim 0.65$  e volta a alcançar a sincronização remota em  $k \geq 0.65$ , atingindo a sincronização global em  $k \simeq 0.75$ .

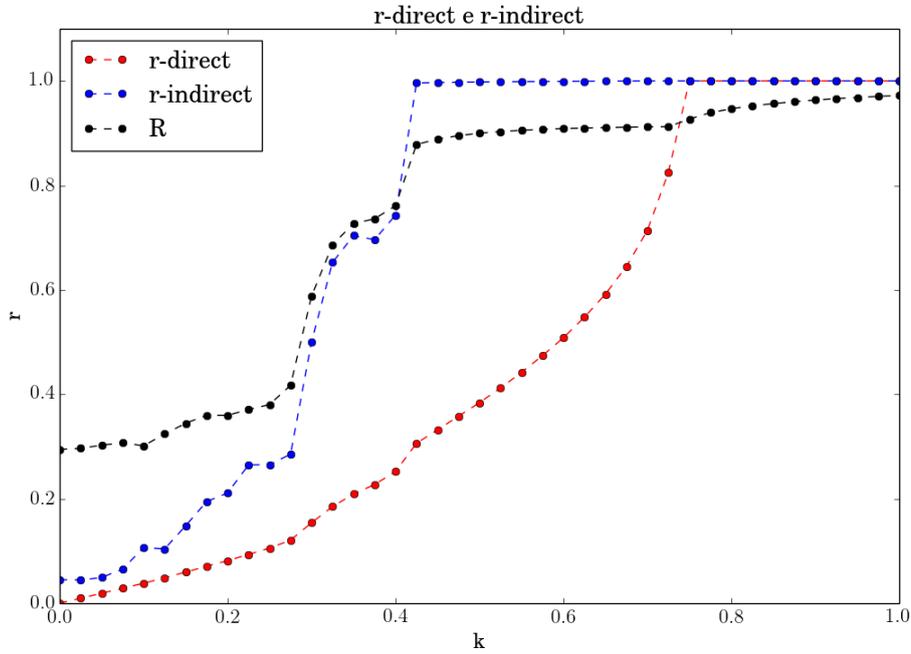
Pode-se notar que apenas o fato de os osciladores começarem as suas oscilações em localizações diferentes é suficiente para que o sistema perca o estado de sincronização remota para valores intermediários de  $k$ . Assim que passamos desta região de instabilidade, os nós periféricos se sincronizam novamente. Como dito anteriormente, estamos utilizando aqui 400.000 iterações (4.000 unidades de tempo) para o transiente e consideramos as próximas 2.000.000 de iterações (20.000 unidades de tempo). Para mostrar que essa queda do Sistema 2 em  $0.575 \lesssim k \lesssim 0.65$  não é um comportamento transiente de longo prazo, fizemos os mesmos cálculos com as mesmas condições iniciais para um transiente de 1.000.000 (10.000 unidades de tempo) e consideramos as próximas 50.000.000 de iterações (500.000 unidades de tempo) e para um transiente de 10.000.000 (100.000 unidades de tempo) e consideramos as próximas 50.000.000 de iterações (500.000 unidades de tempo), Figura 4.24. Podemos notar que o comportamento é análogo ao anterior, quando um número bem menor de iterações foi utilizado. Há fortes evidências de que o fenômeno do desaparecimento da sincronização remota é então devido apenas à condição inicial escolhida.

Vamos agora analisar mais profundamente o comportamento dos dois sistemas para quatro valores específicos da constante de acoplamento, onde ocorrem mudanças significativas no comportamento do sistema.

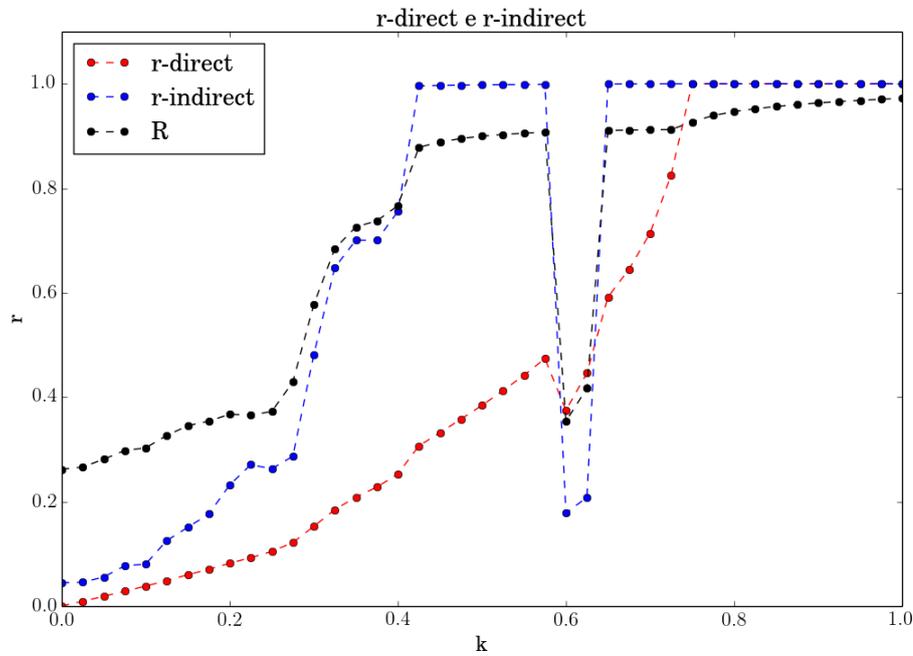
Para  $k = 0.4$ , como pode-se ver na Figura 4.23, estamos em uma região onde não há sincronização remota e nem sincronização global, tanto para o Sistema 1 quanto para o Sistema 2. Observando as fases dos osciladores em função de si mesmas do Sistema 1, Figura 4.25, e do Sistema 2, Figura 4.26, vemos que apenas alguns osciladores periféricos se encontram sincronizados (segmentos de reta), como por exemplo, o oscilador 1 está sincronizado com os periféricos 3, 7 e 10. Os osciladores 6 e 8 estão próximos de estarem sincronizados com o oscilador 1, mas podemos notar que nos seus gráficos, há maior dispersão entre as fases dos osciladores sobre a diagonal, indicando que para um valor de  $\theta_1$  existem vários correspondentes de  $\theta_{6,8}$ . Os dois sistemas apresentam o mesmo comportamento qualitativo.

Podemos recorrer a outras medidas para ajudar na visualização da sincronização ou não destes osciladores, como o módulo da diferença entre as fases de cada par de oscilador ao longo do tempo. Nas Figuras 4.27 e 4.28 temos o histograma do módulo da diferença das fases de dois osciladores, ao longo das 100.000 últimas iterações (1.000 unidades de tempo) para os dois sistemas. Para os osciladores que não se encontram

Figura 4.23 - Gráficos de  $r^{direct}$  (vermelho),  $r^{indirect}$  (azul) e média do módulo do parâmetro de ordem de ordem  $R$  (preto) em função da constante de acoplamento  $k$ , para uma mesma distribuição de frequências naturais e diferentes condições iniciais. As condições iniciais do Sistema 2 (4.24(b)) fazem com que a sincronização remota do sistema desapareça para  $0.575 \lesssim k \lesssim 0.65$ . Isso não ocorre para o mesmo sistema quando utilizamos as condições iniciais do Sistema 1 (4.14).



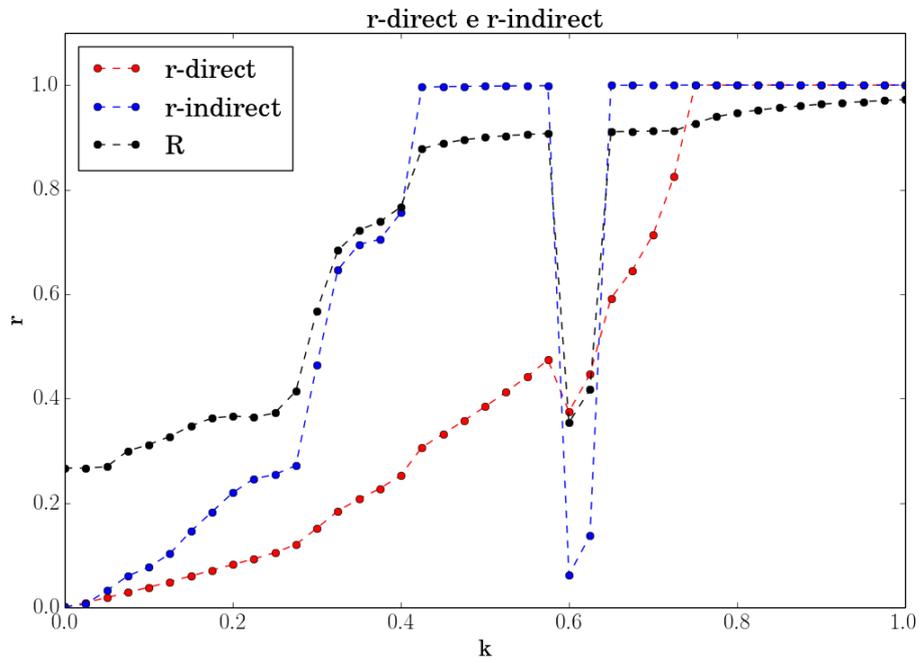
(a) Sistema 1



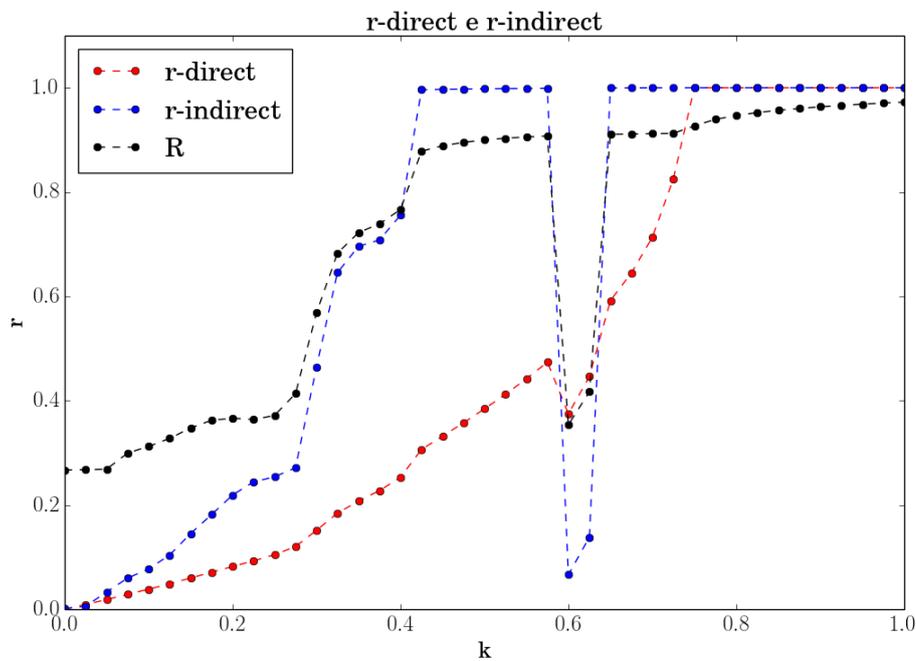
(b) Sistema 2

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.24 - Gráficos de  $r^{direct}$  (vermelho),  $r^{indirect}$  (azul) e média do módulo do parâmetro de ordem de ordem  $R$  (preto) em função da constante de acoplamento  $k$ . Integramos novamente o Sistema 2, Figura 4.24(b), utilizando agora um maior número de iterações.



(a) Sistema 2 - 51 milhões de iterações (510.000 unidades de tempo) com 1 milhão (10.000 unidades de tempo) iniciais descartadas.



(b) Sistema 2 - 60 milhões de iterações (600.000 unidades de tempo) com 10 milhões (100.000 unidades de tempo) iniciais descartadas.

Fonte: Produção do autor.

sincronizados, o valor do módulo da diferenças das fases se mantêm espalhados entre  $0$  e  $2\pi$ , indicando que suas posições relativas estão sempre mudando ao longo do tempo. Já para os poucos osciladores que se encontram sincronizados, esse módulo se mantém fixo, indicando que a distância entre eles se mantém a mesma com o passar do tempo. Podemos observar aqui que em relação ao oscilador 1, os osciladores 3, 7 e 10 apresentam uma diferença de fase fixa em praticamente 100% das contagens. Já para os osciladores 6 e 8, esse número cai um pouco, indicando novamente que ainda não podemos dizer que estes osciladores se encontram sincronizados com o periférico 1.

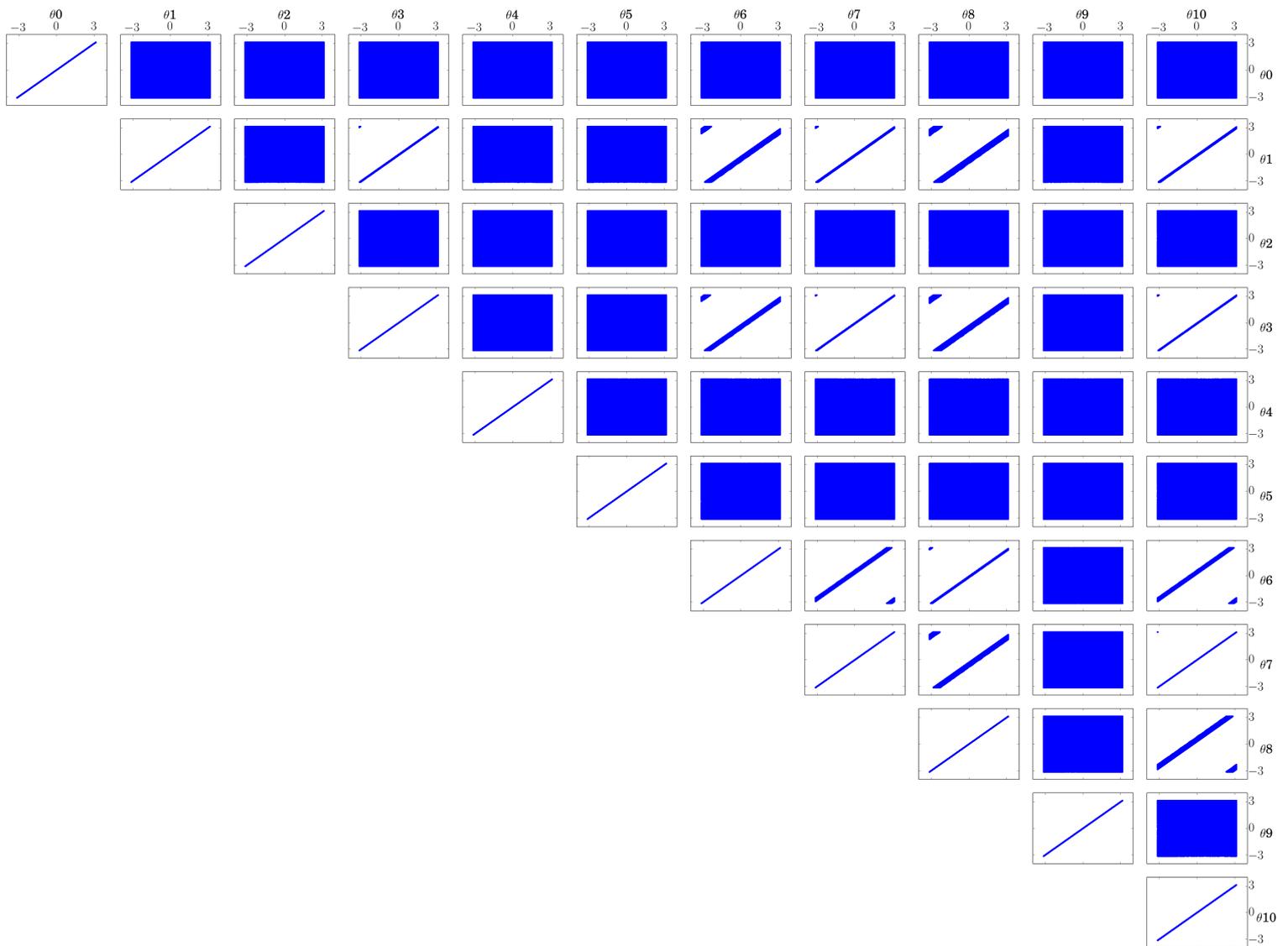
Na Figura 4.29, temos a série temporal  $x$ , a fase em função do tempo, frequência instantânea e módulo do parâmetro de ordem  $R$  em função do tempo, para os Sistemas 1 e 2. Para as três primeiras medidas, os dados do *hub* estão plotados em vermelho e dos periféricos em azul. Podemos notar que a série temporal, a fase em função do tempo e as frequências instantâneas não mostram nenhum indício de sincronização remota ou global, pois nenhuma dessas medidas tem o comportamento semelhante, nem entre todos os periféricos (em azul) e nem entre os periféricos e o *hub* (vermelho). Em relação ao parâmetro de ordem  $R$ , em preto plotamos o seu valor calculado em relação à todo o sistema e em azul plotamos o seu valor calculado levando em consideração apenas os nós periféricos. Ou seja, em preto temos uma medida que indica o quanto todos os osciladores do sistema estão próximos e em azul, temos a medida de quão próximos estão os osciladores periféricos. Lembrando que se todos os osciladores considerados estão com as mesmas fases, ou seja, estão no mesmo ponto,  $|R| = 1$ . Ambos os valores do módulo do parâmetro de ordem variam em relação ao tempo de forma desordenada, indicando que as posições dos osciladores em relação aos demais estão sempre variando com o passar do tempo. Mais um indicativo de que o sistema não apresenta nenhum tipo de sincronização.

Nas Figs. 4.30 e 4.31, temos o espaço de fase dos osciladores e as suas respectivas seções de Poincaré em relação ao *hub* para o Sistema 1 e 2, respectivamente. Obtemos o espaço de fase quando fazemos um gráfico das coordenadas  $x$  e  $y$  de cada oscilador. Utilizamos para isso as 20.000 últimas iterações (200 unidades de tempo). A seção de Poincaré dos osciladores foi construída a partir dos máximos locais da coordenada  $x$  de cada ciclo do *hub*. Para isso, foram utilizadas todas as 2 milhões de iterações (20.000 unidades de tempo). A cada máximo local de  $x^{hub}$ , plotamos  $(x^{hub}, y^{hub})$ ,  $(x^i, y^i)$ ,  $(x^j, y^j)$ , com  $i$  e  $j$  representando os osciladores periféricos considerados em cada gráfico. Observando os espaços de fase, podemos ver a existência de trajetórias densas, que se movem através da superfície de um toro, dando indício de que o

oscilador se encontra em um movimento quasi-periódico (Seção 2.7). Para termos certeza de que o movimento é realmente quasi-periódico, precisamos analisar a sua seção de Poincaré. Se o oscilador exibir um movimento periódico, espera-se que sua seção de Poincaré seja formada por apenas um ponto, pois se plotarmos suas coordenadas  $x$  e  $y$  cada vez que sua coordenada  $x$  atingir um máximo local, essa par de coordenadas será sempre o mesmo. Já para um movimento quasi-periódico, os valores dos máximos locais de  $x$  variam e nunca se repetem, os pontos que formam a seção de Poincaré se espalham através do seu ciclo limite (PREMALATHA et al., 2016). Vemos nas Figs. 4.30 e 4.31 que todos os osciladores apresentam pontos de retorno da órbita na seção de Poincaré densos, indicando que todos os osciladores dos dois sistemas possuem um movimento quasi-periódico.

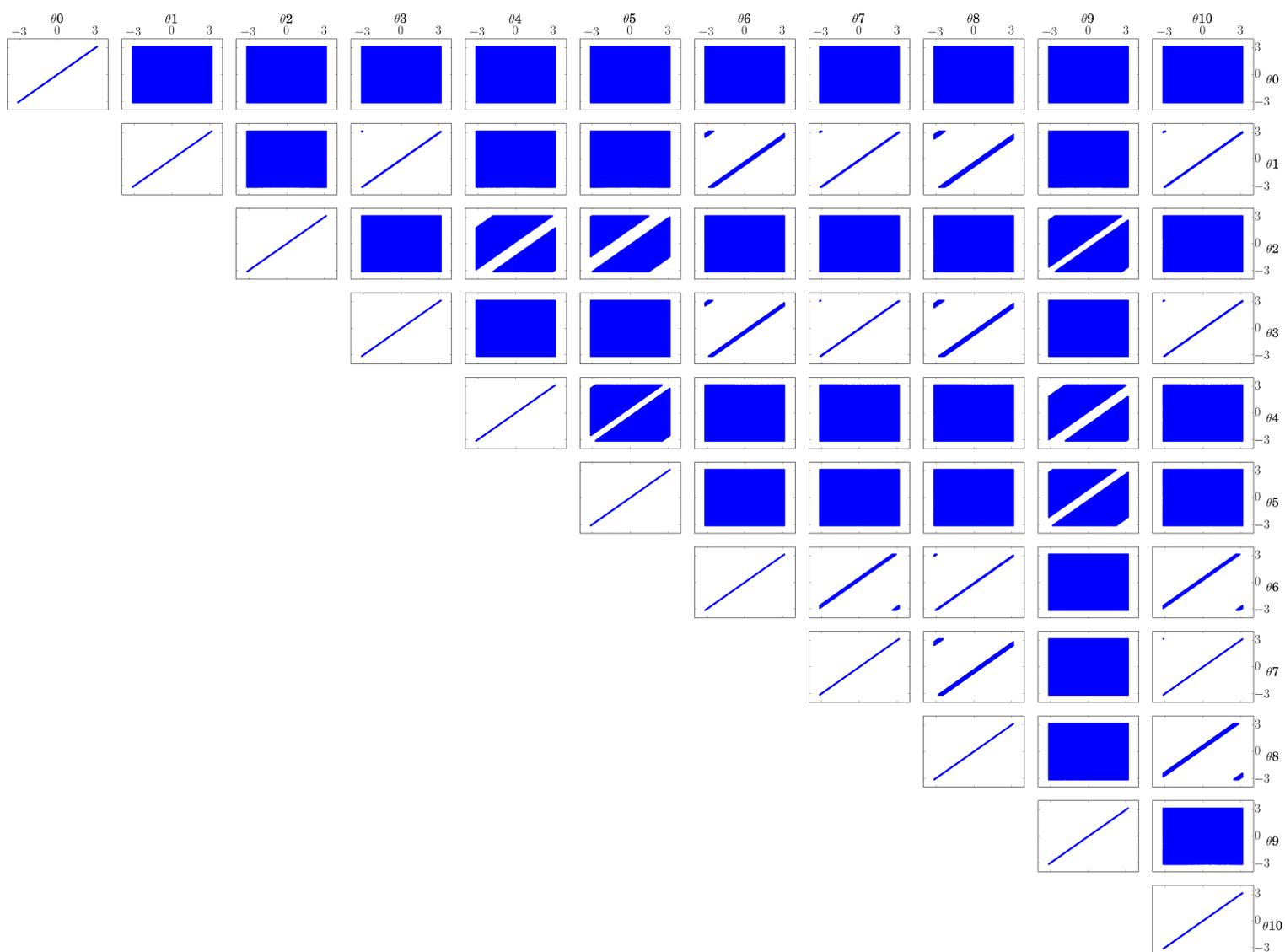
Também podemos utilizar o espaço de fase e a seção de Poincaré para nos auxiliar no estudo da sincronização do sistema. Na Figura 4.32, temos o espaço de fase de cada oscilador plotado em cinza (para os Sistemas 1 e 2) e, por cima, sua seção de Poincaré gerada a partir dos máximos locais da coordenada  $x$  do oscilador periférico 1. Se o oscilador utilizado como referência para o cálculo da seção de Poincaré (periférico 1 no nosso caso) estiver sincronizado com outro, espera-se que a seção de Poincaré do segundo seja formada por uma concentração de pontos limitada a uma certa pequena região ao longo do seu ciclo limite, seguindo o padrão formado pelo periférico utilizado como parâmetro. Se o oscilador utilizado como referência não está sincronizado com outro, a seção de Poincaré deste último apresentará pontos espalhados ao longo de seu ciclo limite. Podemos observar então em 4.32 o comportamento dos osciladores em relação ao periférico 1 e podemos ver, como já havíamos mencionado anteriormente, que apenas os osciladores 3, 7 e 10 estão sincronizados com o oscilador 1, pois suas seções de Poincaré estão concentradas em pequenas regiões de seus respectivos ciclos limites. Os osciladores 6 e 8 estão tendendo a ficar sincronizados com 1.

Figura 4.25 - Gráfico de Lissajous  $\theta_n, \theta_m$  para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede, para o Sistema 1 e uma constante de acoplamento  $k = 0.4$ . O oscilador central é identificado como 0, os demais são os periféricos. Temos sincronização remota nesta situação.



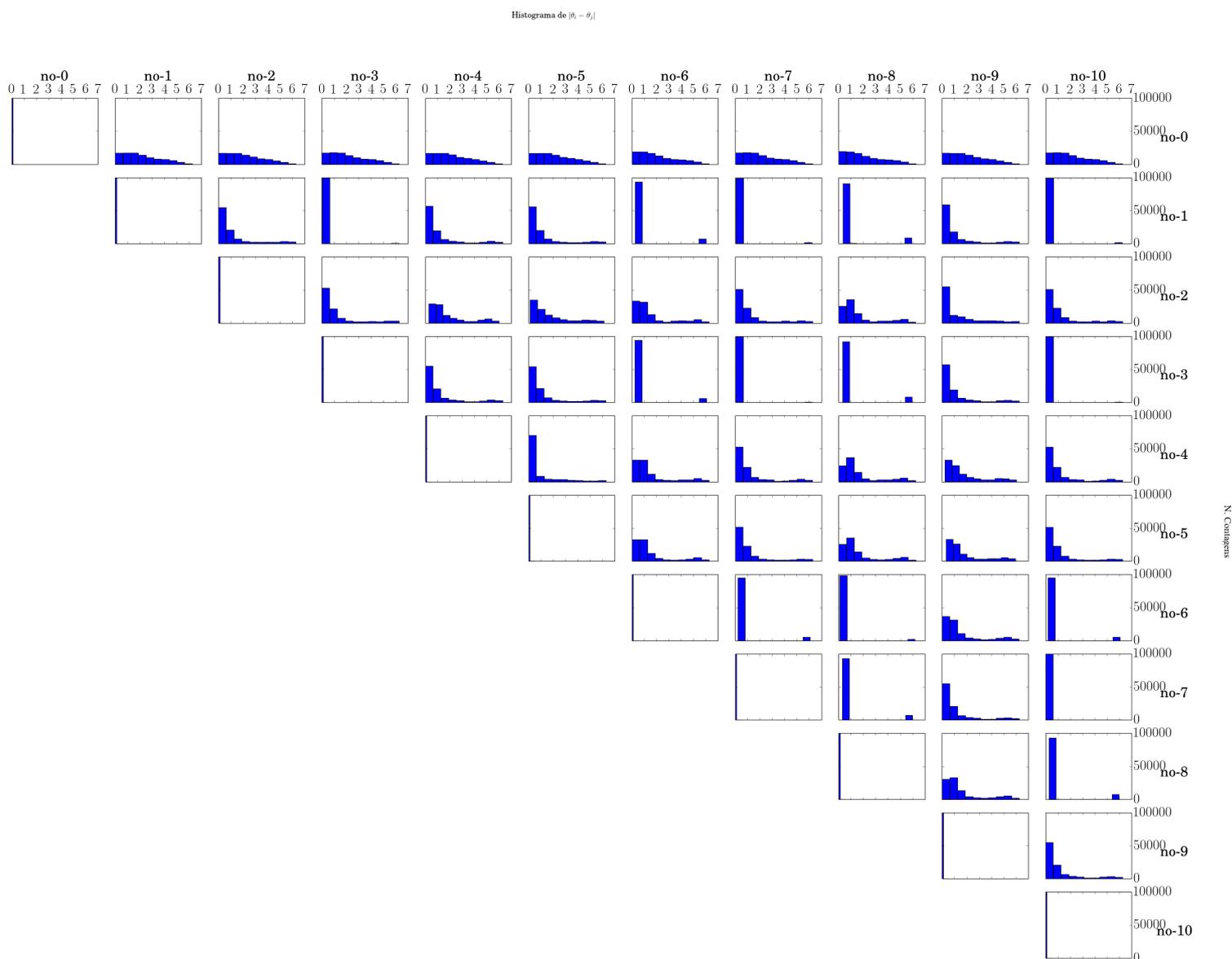
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.26 - Gráfico de Lissajous  $\theta_n, \theta_m$  para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede para o Sistema 2 e uma constante de acoplamento  $k = 0.4$ . O oscilador central é identificado como 0, os demais são os periféricos. Temos sincronização remota nesta situação.



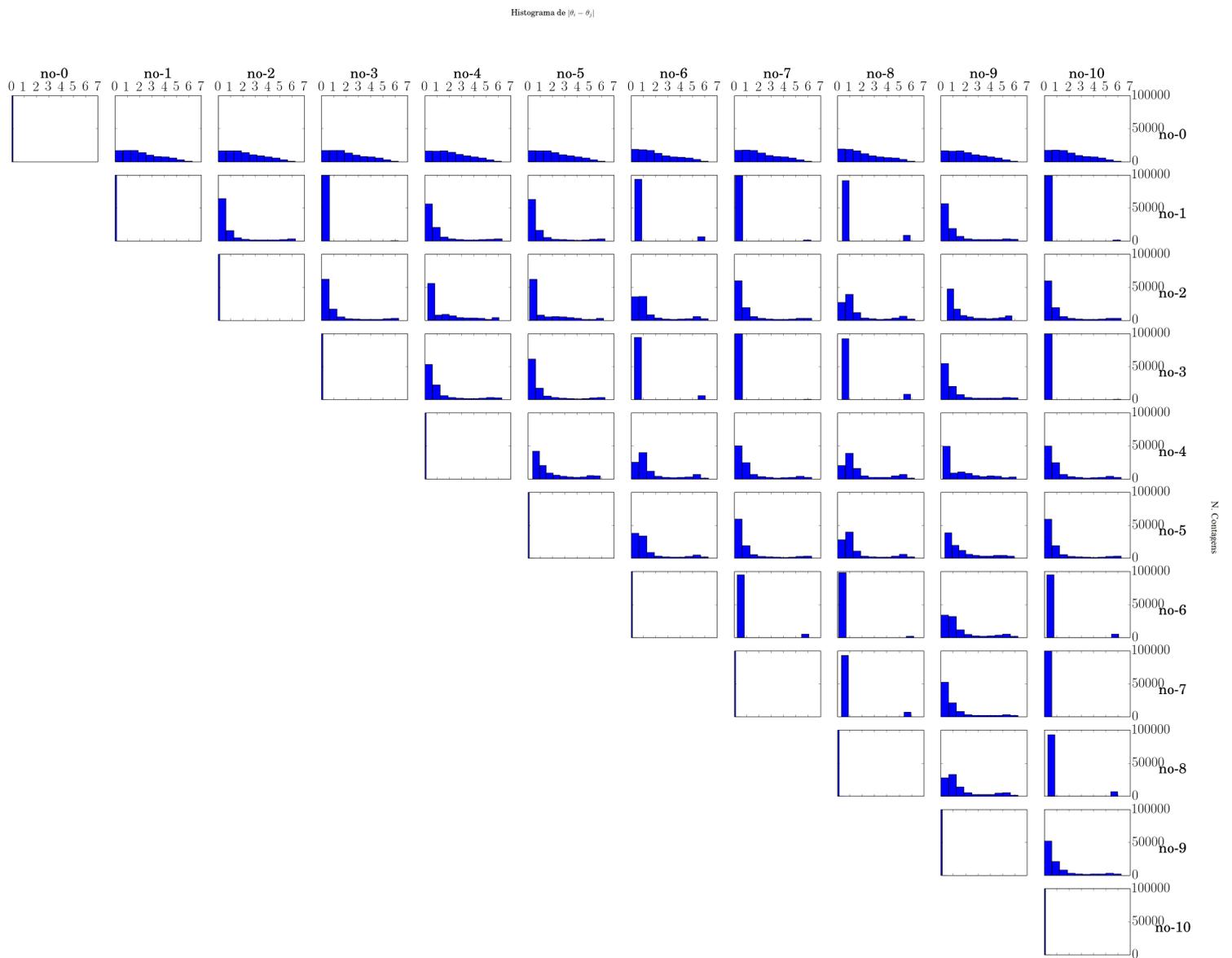
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.27 - Histograma do módulo da diferença de fases entre um par de osciladores para o Sistema 1 e uma constante de acoplamento  $k = 0.4$ . No eixo x, temos o módulo da diferença de fases indo de 0 até  $2\pi$  e no eixo y temos o número de contagens. O oscilador central é identificado como nó-0, os demais são os periféricos.



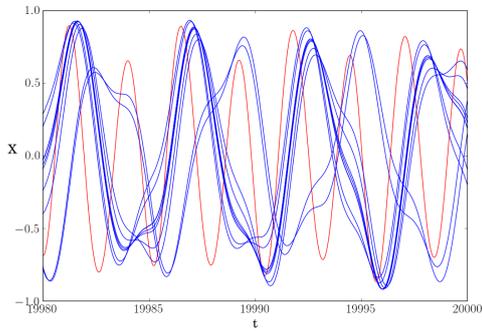
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.28 - Histograma do módulo da diferença de fases entre um par de osciladores para o Sistema 2 e uma constante de acoplamento  $k = 0.4$ . No eixo x, temos o módulo da diferença de fases indo de 0 até  $2\pi$  e no eixo y temos o número de contagens. O oscilador central é identificado como nó-0, os demais são os periféricos.

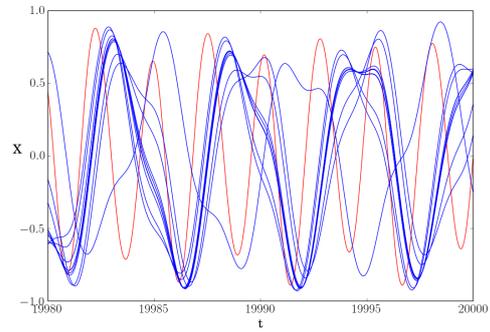


Fonte: Produção do autor.

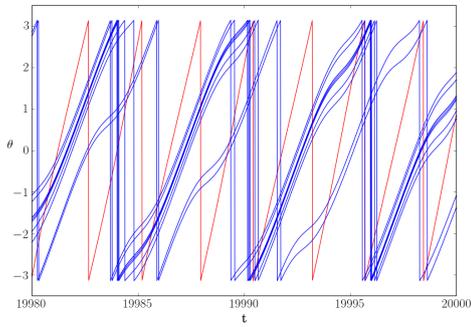
Figura 4.29 - (a)-(b) Série temporal, (c)-(d) fase  $\theta$  e (e)-(f) frequência instantânea  $\dot{\theta}$  em função do tempo . O *hub* aparece em vermelho e periféricos em azul. (g)-(h) Módulo do parâmetro de ordem  $R$  em função do tempo, em preto temos  $R$  calculado para todos os nós, em azul, apenas para os nós periféricos. Constante de acoplamento  $k = 0.4$ . Sistema 1 está à esquerda e Sistema 2 à direita. Como estamos considerando a fase  $\theta$  entre  $[-2\pi, 2\pi]$ , (c) e (d) deveriam ser gráficos descontínuos, as retas verticais nestes gráficos foram plotadas de maneira a deixar o gráfico contínuo e facilitar a visualização.



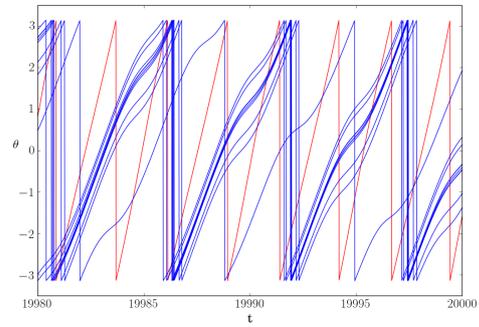
(a) Sistema 1



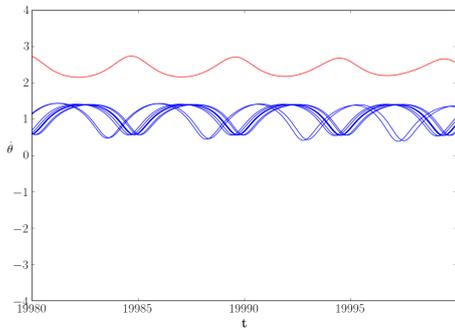
(b) Sistema 2



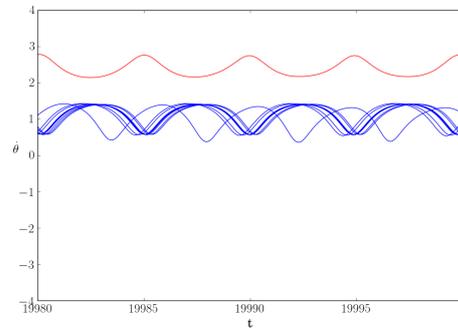
(c) Sistema 1



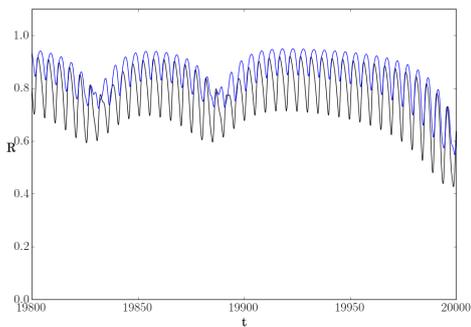
(d) Sistema 2



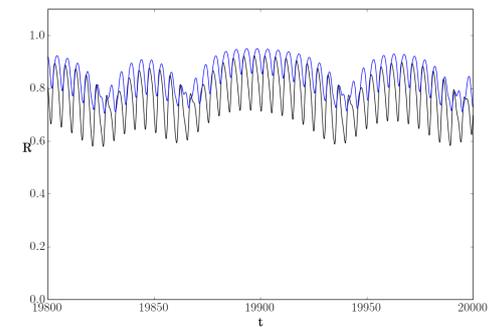
(e) Sistema 1



(f) Sistema 2



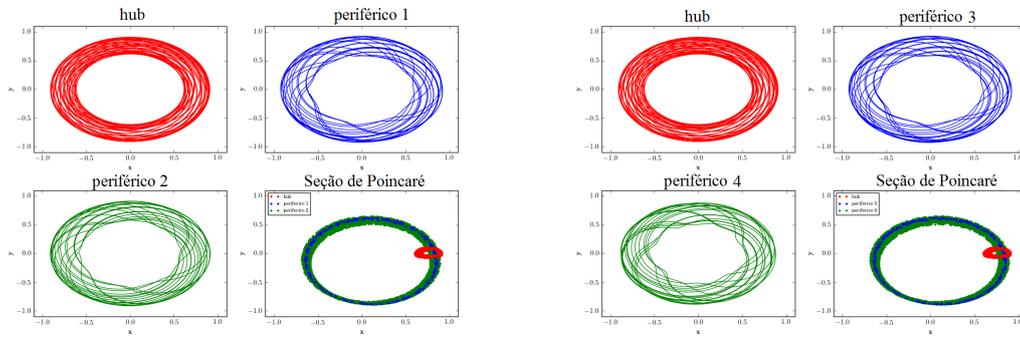
(g) Sistema 1



(h) Sistema 2

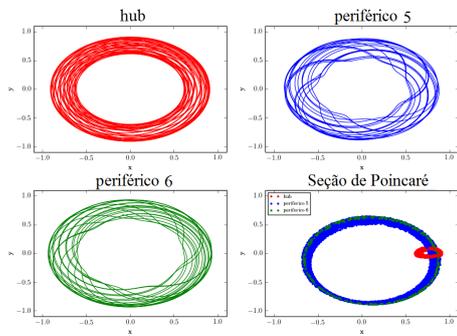
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.30 - Ciclos limites e seção de Poincaré (construída a partir do *hub*) para o Sistema 1 e constante de acoplamento  $k = 0.4$ . Hub em vermelho, periféricos em azul e verde.

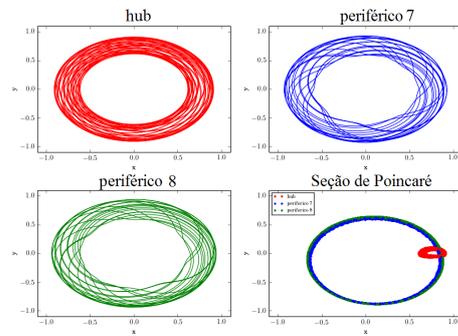


(a) Hub, periférico 1 e periférico 2

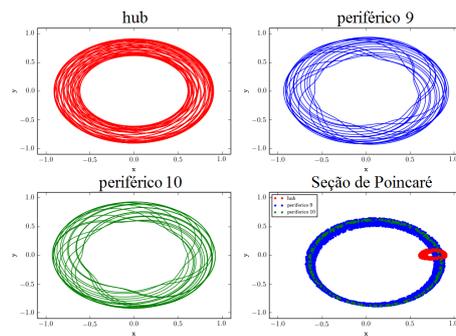
(b) Hub, periférico 3 e periférico 4



(c) Hub, periférico 5 e periférico 6



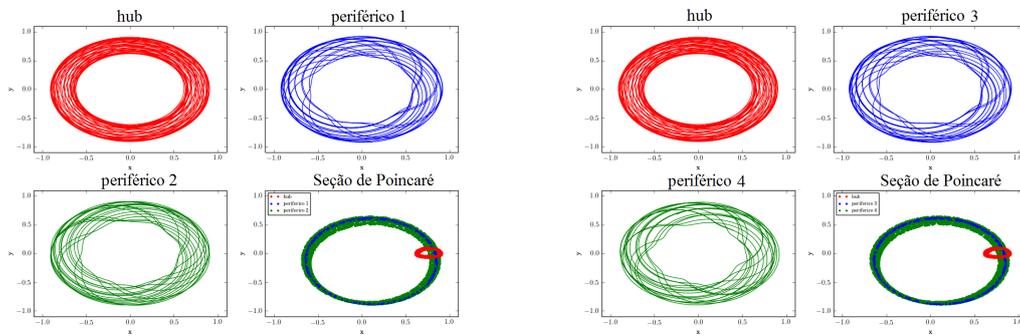
(d) Hub, periférico 7 e periférico 8



(e) Hub, periférico 9 e periférico 10

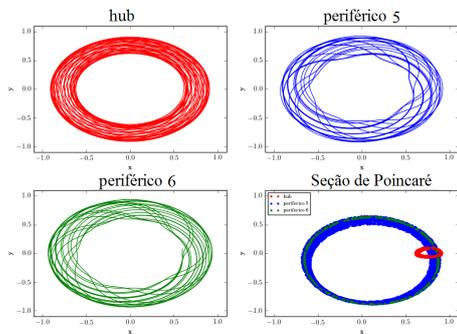
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.31 - Ciclos limites e seção de Poincaré (construída a partir do *hub*) para o Sistema 2 e constante de acoplamento  $k = 0.4$ . Hub em vermelho, periféricos em azul e verde.

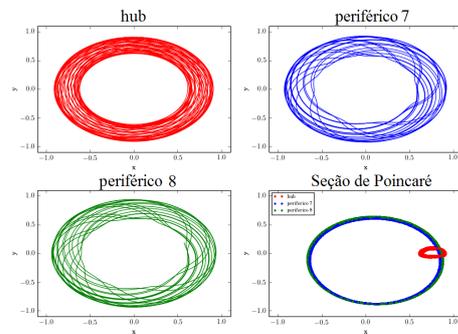


(a) Hub, periferico 1 e periferico 2

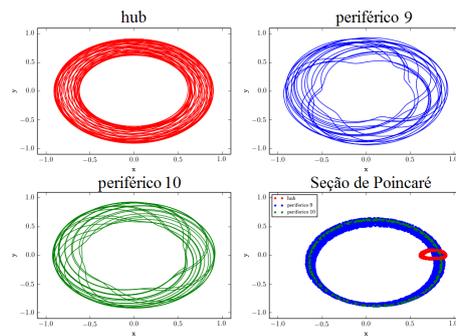
(b) Hub, periferico 3 e periferico 4



(c) Hub, periferico 5 e periferico 6



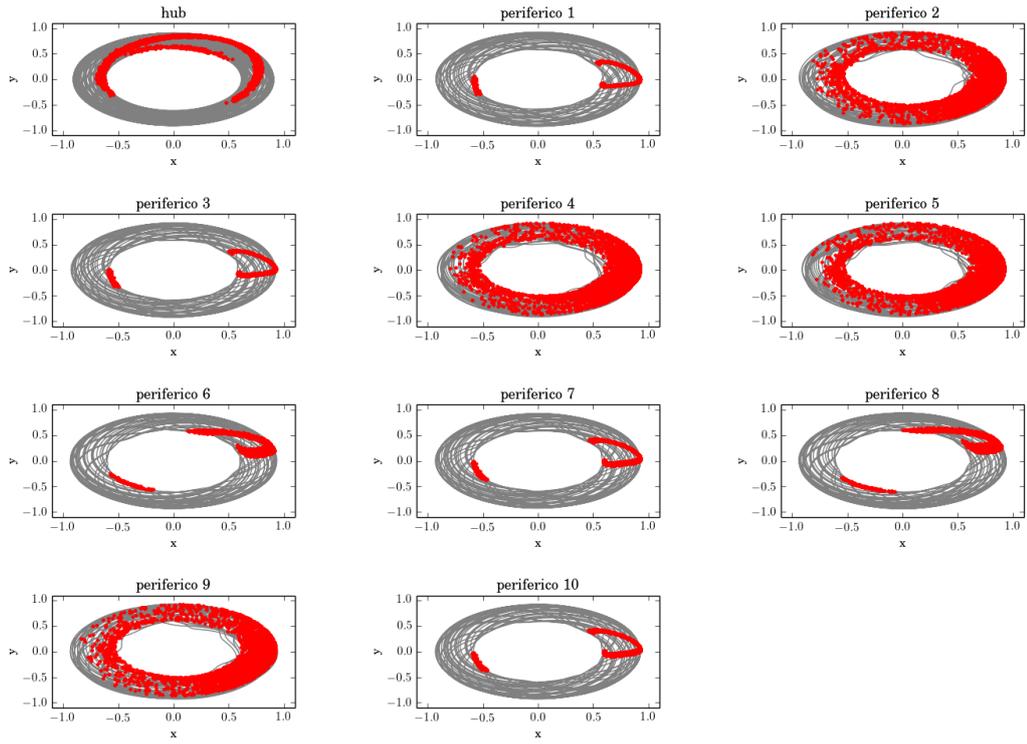
(d) Hub, periferico 7 e periferico 8



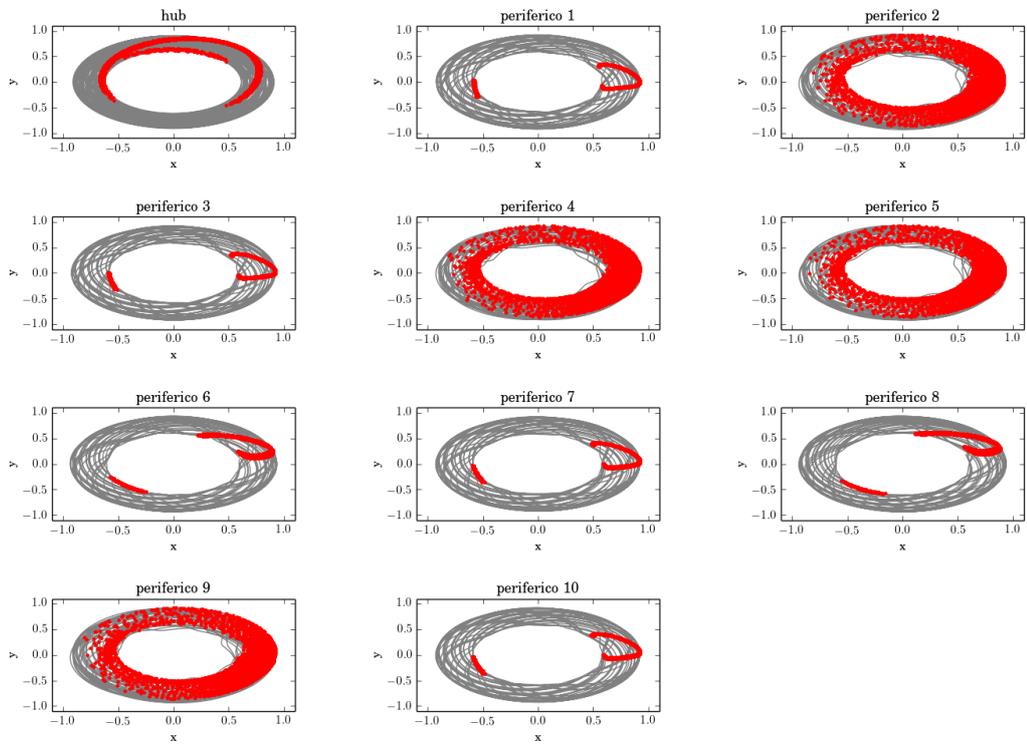
(e) Hub, periferico 9 e periferico 10

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.32 - Seção de Poincaré, construída a partir do nó periférico 1, para o (a) Sistema 1 e o (b) Sistema 2, com constante de acoplamento  $k = 0.4$ .



(a)



(b)

Fonte: Produção do autor.

Pudemos observar que para todas os parâmetros calculadas em  $k = 0.4$ , ambos os sistemas apresentaram o mesmo comportamento. Aumentaremos agora o valor da constante de acoplamento para  $k = 0.6$  e, como pode-ser ver na Figura 4.23, estamos numa região em que o sistema apresenta sincronização remota para as condições iniciais 4.14 e não apresenta essa sincronização para as condições iniciais dadas pela expressão 4.15. É possível observar esse comportamento oposto dos Sistemas 1 e 2 nas Figuras 4.33 e 4.34, onde as fases dos osciladores são plotadas em função de si mesmas. Na Fig. 4.33, podemos observar que todos os osciladores periféricos estão sincronizados e o único que não está sincronizado com os demais é o oscilador central, designado por 0. Já na Fig. 4.34, além de não termos sincronização remota, não temos o indício de sincronização para nenhum par de osciladores.

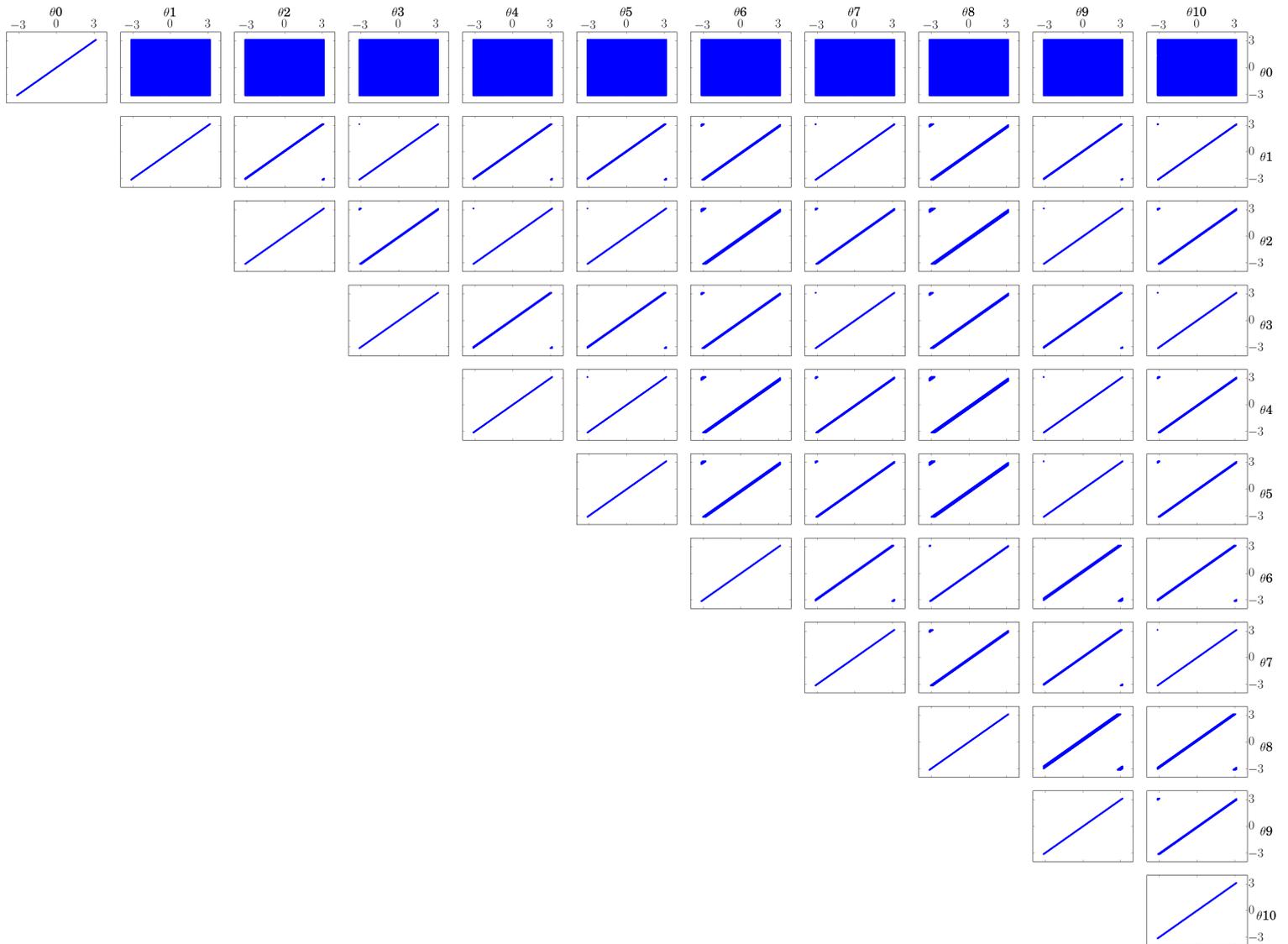
O mesmo comportamento pode ser notado nos histogramas dos módulos das diferenças entre as fases, 4.35 e 4.36. Em 4.35, os módulos se mantêm fixos em um único valor para todos os pares de osciladores periféricos (alguns apresentam contagens em um segundo valor, mas essas contagens são muito baixas e podem ser descartadas) indicando mais uma vez a existência da sincronização remota no Sistema 1. Os módulos da diferença entre as fases dos periféricos em relação ao *hub* variam, indicando que as suas posições relativas estão variando com o tempo. Já para o Sistema 2, Fig. 4.36, os valores dos módulos das fases se encontram espalhados entre 0 e  $2\pi$ , indicando que a distância entre as fases dos pares de osciladores não se mantêm constantes ao longo do tempo.

Na Fig. 4.37, podemos notar claramente as diferenças entre o comportamento dos Sistemas 1 e 2. Enquanto para o Sistema 1 a série temporal, a fase em função do tempo e a frequência instantânea dos osciladores periféricos apresenta um comportamento semelhante, para o Sistema 2 cada uma dessas medidas tem um comportamento diferente para cada oscilador da rede. Observando o módulo do parâmetro de ordem  $R$  do Sistema 1, vemos que o sistema como um todo (preto) exibe um movimento periódico, estando todos com a mesma fase em um dado instante ( $|R| = 1$ ), se afastando e depois estando juntos novamente. Em relação apenas aos nós periféricos (azul), eles se mantêm juntos, com fases muito próximas em todos os instantes de tempo. Já para o Sistema 2, tanto o  $R$  em relação à todo o sistema quanto em relação apenas aos periféricos, não é periódico, indicando que os osciladores se movem de forma desordenada. Podemos observar também que o valor médio de  $R$  é baixo para este sistema, indicando que o conjunto formado pelos osciladores nunca se encontra muito próximo.

Nas Figs. 4.38 e 4.39, temos o espaço de fase e a seção de Poincaré calculada em relação aos máximos locais da coordenada  $x$  do *hub* para os Sistema 1 e 2 respectivamente. O Sistema 1 continua com movimento quasi-periódico em todos os seus osciladores, pois todos apresentam uma seção de Poincaré densa. Já no Sistema 2, o *hub* passa a apresentar um movimento periódico, pois sua trajetória no espaço de fase é um ciclo fechado e sua seção de Poincaré é formada por apenas um ponto. Os demais osciladores continuam a apresentar movimento quasi-periódico.

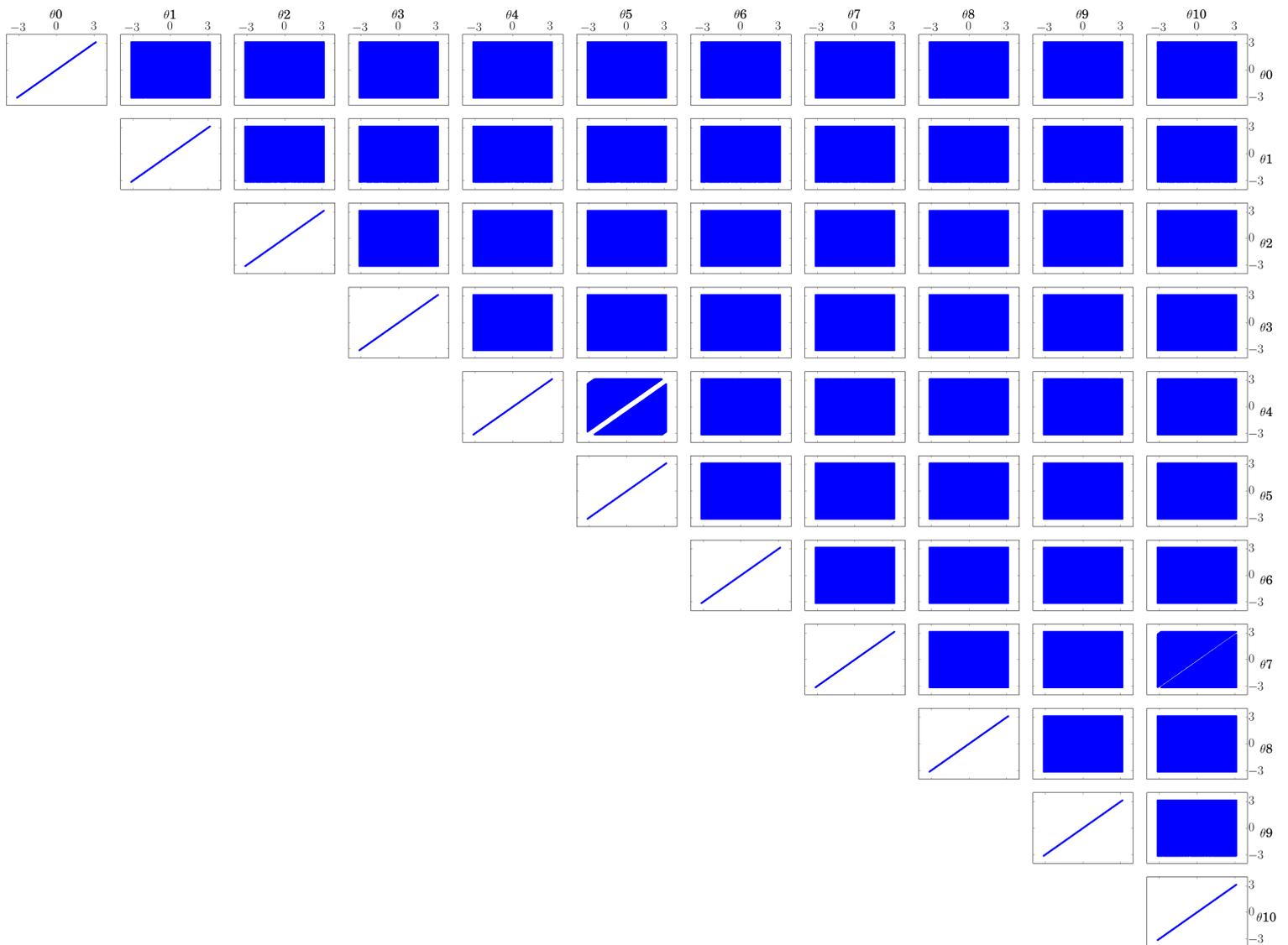
Em 4.40, temos o espaço de fase e a seção de Poincaré construídas em relação ao periférico 1 para os dois sistemas. Para o Sistema 1, todos os nós periféricos apresentam uma seção de Poincaré semelhante à seção do periférico 1, indicando que estes estão sincronizados. Já para o Sistema 2, as seções de Poincaré dos demais osciladores são densas, indicando mais uma vez que nenhum par de osciladores está sincronizado para essas condições iniciais.

Figura 4.33 - Gráfico de Lissajous  $\theta_n, \theta_m$  para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede, para o Sistema 1 e uma constante de acoplamento  $k = 0.6$ . O oscilador central é identificado como 0, os demais são os periféricos. Temos sincronização remota nesta situação.



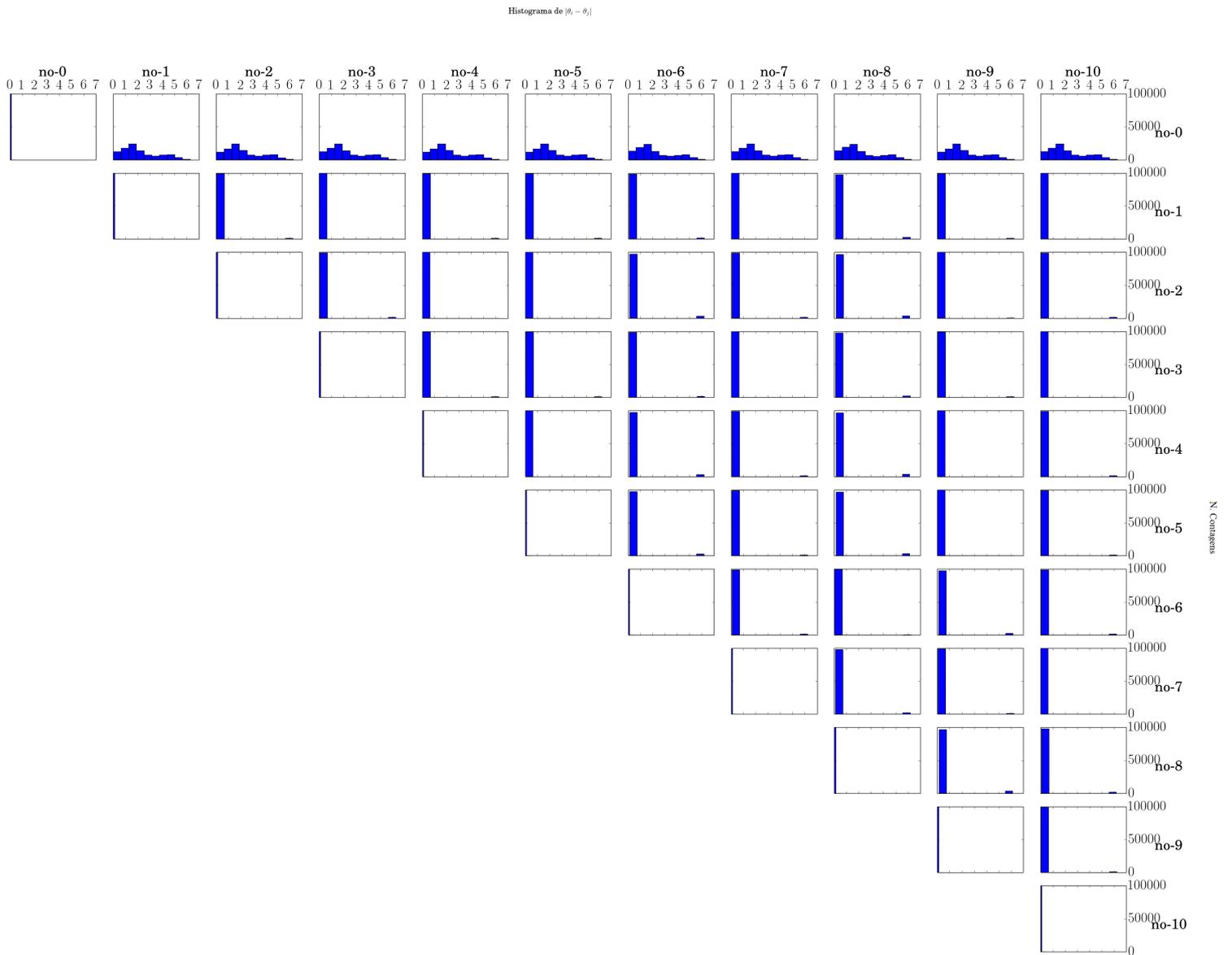
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.34 - Gráfico de Lissajous  $\theta_n, \theta_m$  para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede, para o Sistema 2 e uma constante de acoplamento  $k = 0.6$ . O oscilador central é identificado como 0, os demais são os periféricos. Temos sincronização remota nesta situação.



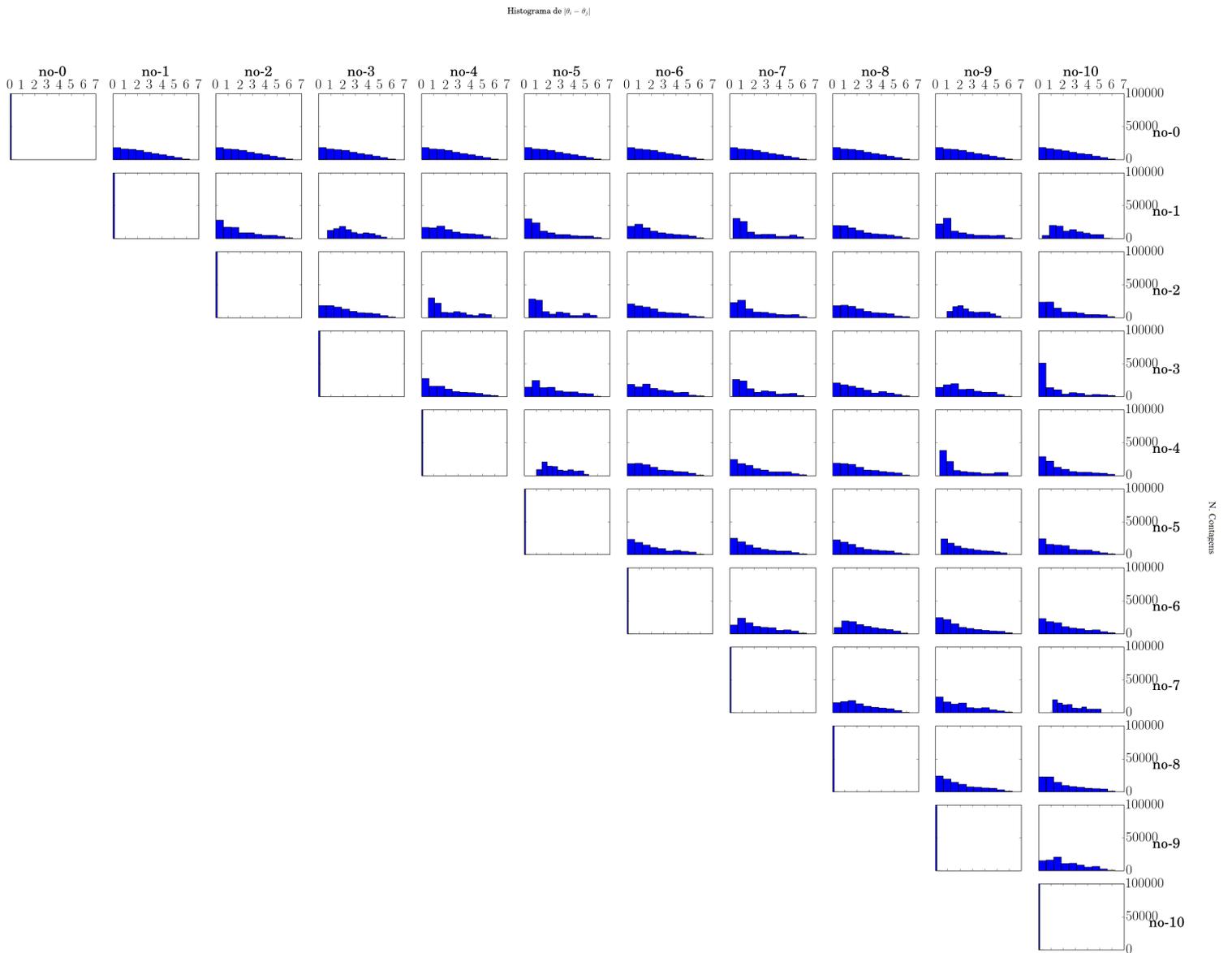
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.35 - Histograma do módulo da diferença de fases entre um par de osciladores para o Sistema 1 e uma constante de acoplamento  $k = 0.6$ . No eixo x, temos o módulo da diferença de fases indo de 0 até  $2\pi$  e no eixo y temos o número de contagens. O oscilador central é identificado como nó-0, os demais são os periféricos.



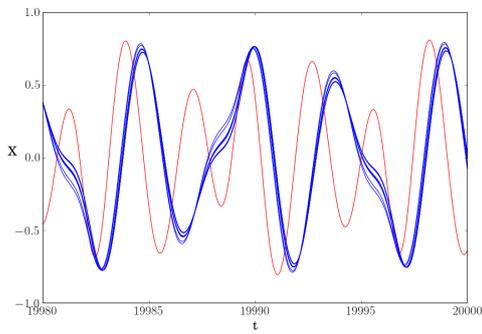
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.36 - Histograma do módulo da diferença de fases entre um par de osciladores para o Sistema 2 e uma constante de acoplamento  $k = 0.6$ . No eixo x, temos o módulo da diferença de fases indo de 0 até  $2\pi$  e no eixo y temos o número de contagens. O oscilador central é identificado como nó-0, os demais são os periféricos.

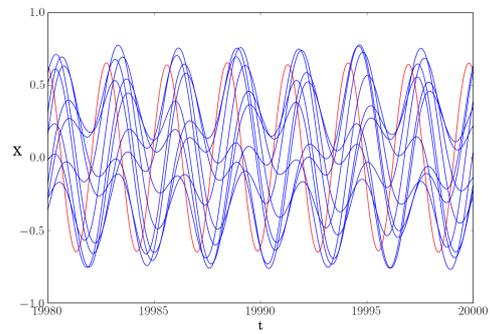


Fonte: Produção do autor.

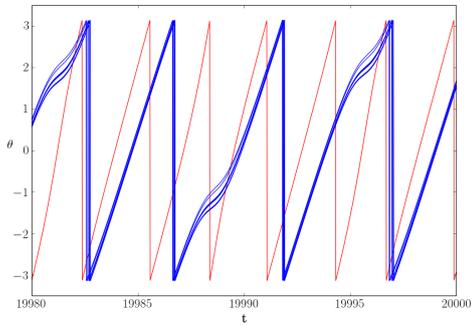
Figura 4.37 - (a)-(b) Série temporal, (c)-(d) fase  $\theta$  e (e)-(f) frequência instantânea  $\dot{\theta}$  em função do tempo . O *hub* aparece em vermelho e periféricos em azul. (g)-(h) Módulo do parâmetro de ordem  $R$  em função do tempo, em preto temos  $R$  calculado para todos os nós, em azul, apenas para os nós periféricos. Constante de acoplamento  $k = 0.6$ . Sistema 1 está à esquerda e Sistema 2 à direita. Como estamos considerando a fase  $\theta$  entre  $[-2\pi, 2\pi]$ , (c) e (d) deveriam ser gráficos descontínuos, as retas verticais nestes gráficos foram plotadas de maneira a deixar o gráfico contínuo e facilitar a visualização.



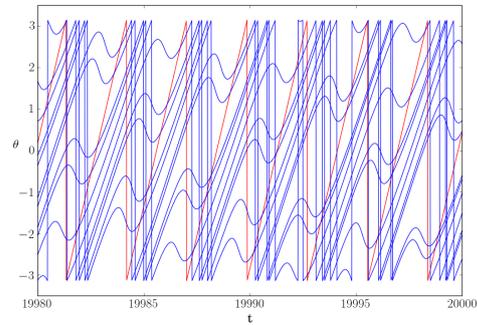
(a) Sistema 1



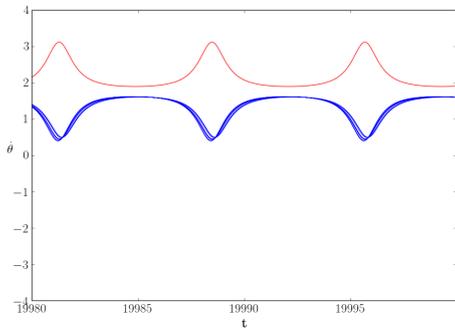
(b) Sistema 2



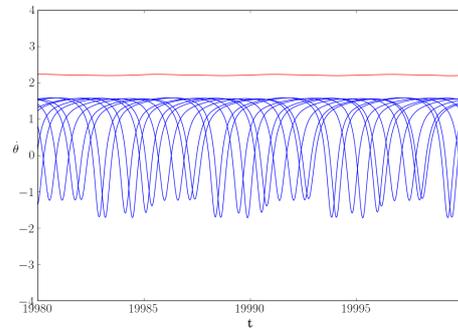
(c) Sistema 1



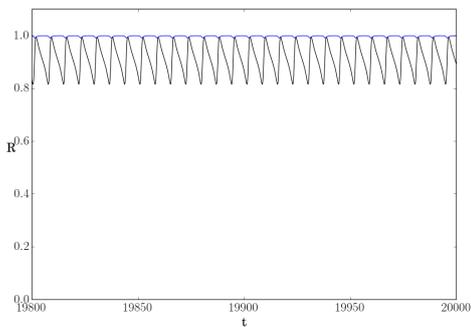
(d) Sistema 2



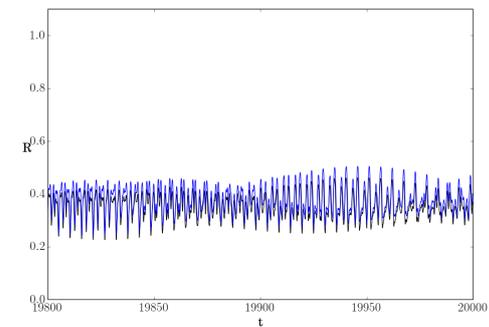
(e) Sistema 1



(f) Sistema 2



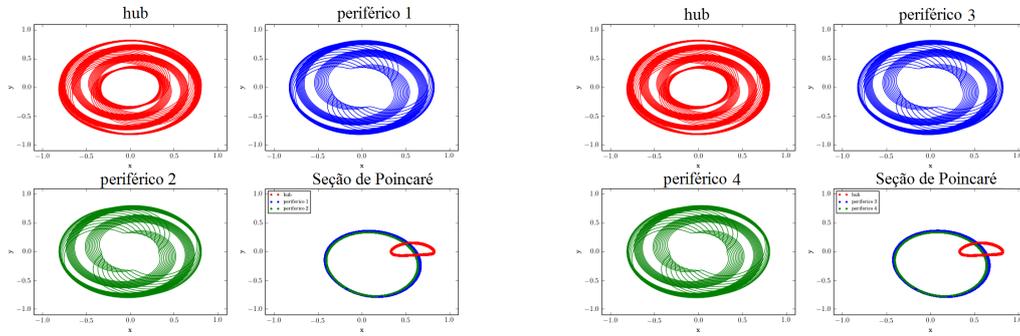
(g) Sistema 1



(h) Sistema 2

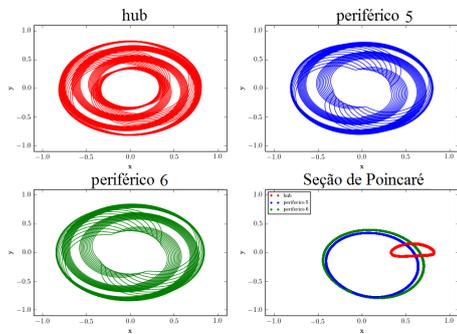
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.38 - Ciclos limites e seção de Poincaré para o Sistema 1 e constante de acoplamento  $k = 0.6$ . Hub em vermelho, periféricos em azul e verde.

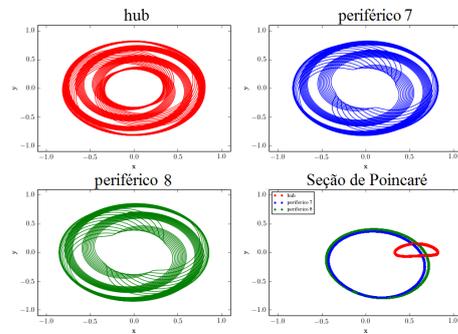


(a) Hub, periférico 1 e periférico 2

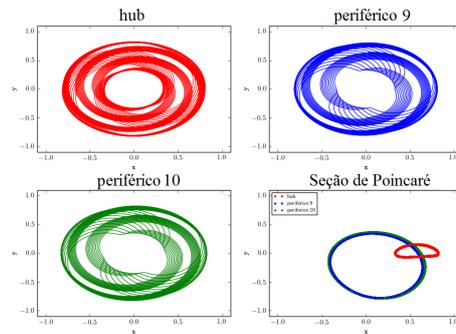
(b) Hub, periférico 3 e periférico 4



(c) Hub, periférico 5 e periférico 6



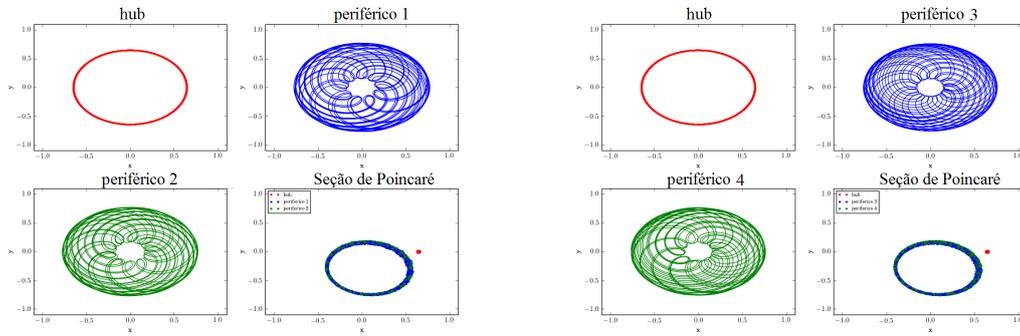
(d) Hub, periférico 7 e periférico 8



(e) Hub, periférico 9 e periférico 10

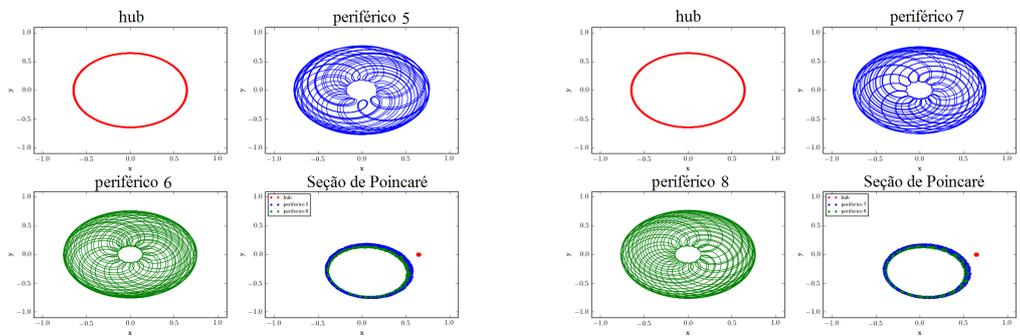
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.39 - Ciclos limites e seção de Poincaré para o Sistema 2 e constante de acoplamento  $k = 0.6$ . Hub em vermelho, periféricos em azul e verde.



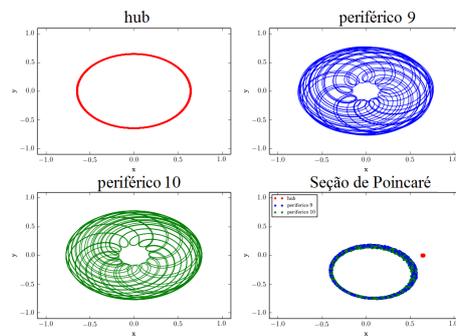
(a) Hub, periférico 1 e periférico 2

(b) Hub, periférico 3 e periférico 4



(c) Hub, periférico 5 e periférico 6

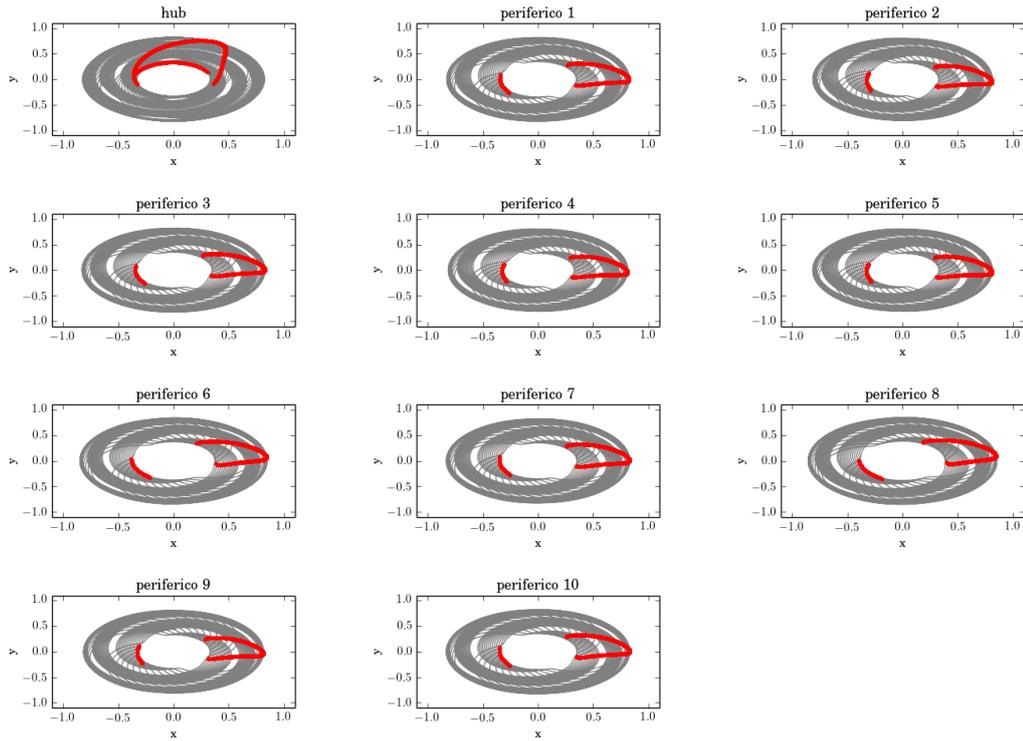
(d) Hub, periférico 7 e periférico 8



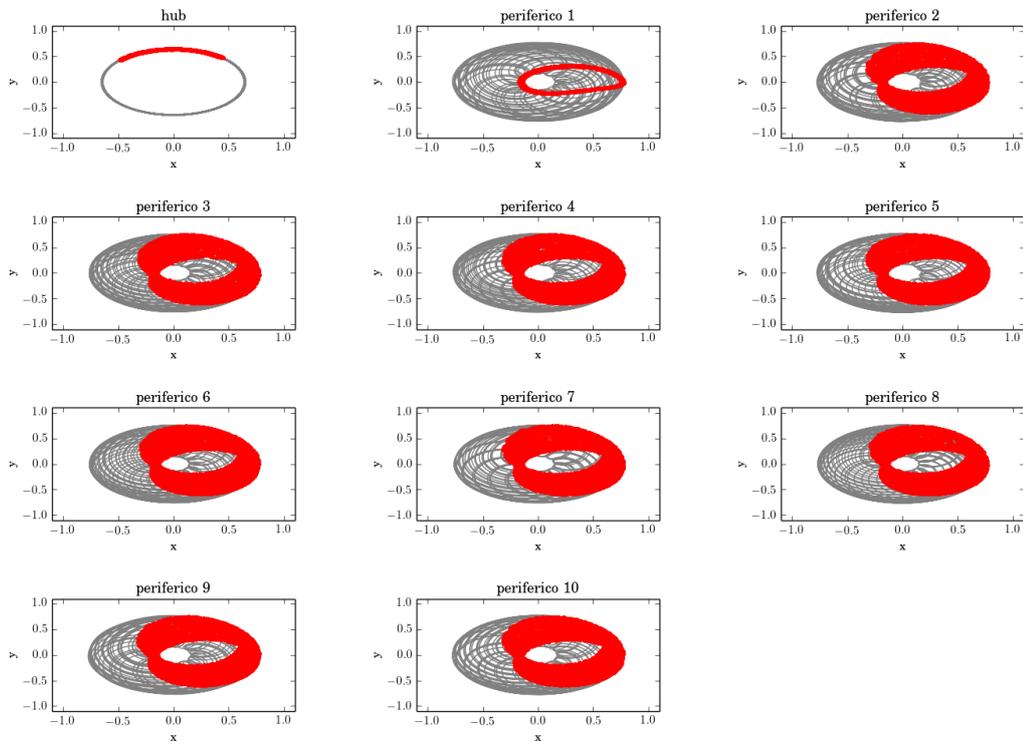
(e) Hub, periférico 9 e periférico 10

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.40 - Seção de Poincaré, construída a partir do nó periférico 1, para o (a) Sistema 1 e o (b) Sistema 2, com constante de acoplamento  $k = 0.6$ .



(a)



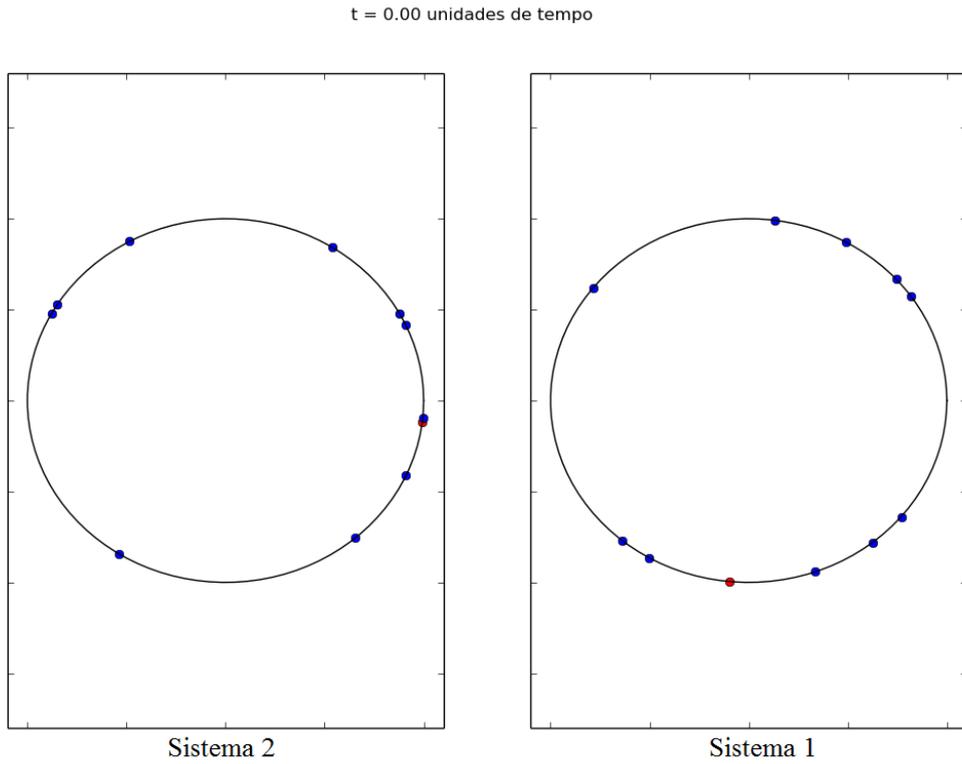
(b)

Fonte: Produção do autor.

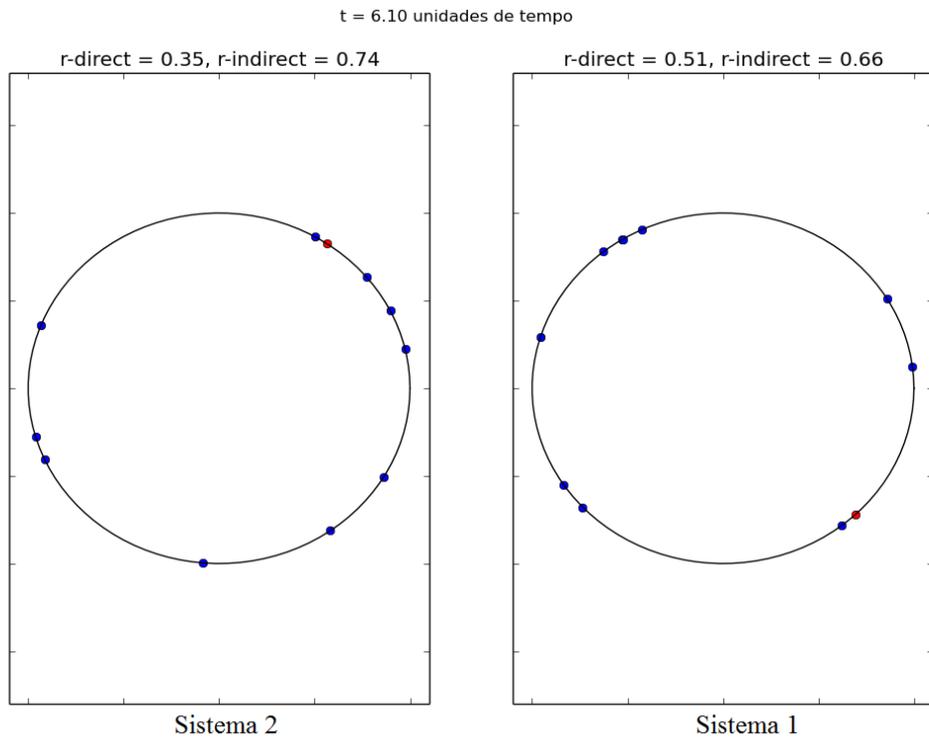
Com o intuito de melhor visualizar o comportamento dos Sistemas 1 e 2 na região dada por  $k = 0.6$ , plotamos as fases dos osciladores dos dois sistemas ao longo do tempo em um círculo unitário, Figuras 4.41, 4.42, 4.43. O Sistema 1 está representado na coluna da direita e o Sistema 2 está na coluna da esquerda. Os osciladores periféricos estão plotados em azul e os *hubs* em vermelho. Na parte de cima das subfiguras, temos o valor de  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$  de cada sistema, no instante de tempo em questão.

Em 4.42(a), temos os dois sistemas no estado inicial com as posições dadas por 4.14 para o Sistema 1 e 4.15 para o Sistema 2. Lembrando que nesta seção os dois sistemas possuem as mesmas frequências naturais, dadas por 4.12. Com o passar o tempo, podemos notar que os osciladores periféricos do Sistema 1 vão rapidamente tendendo a ter uma fase parecida, em 4.43(a), com apenas  $t = 10.70$  unidades de tempo, já podemos observar essa tendência. Em 4.44(a), após  $t = 285.00$  unidades de tempo, o Sistema 1 está se aproximando do estado de sincronização remota, com  $r^{indirect} = 0.97$ , enquanto o Sistema 2 não apresenta nenhum sinal de sincronização,  $r^{indirect} = 0.44$ . Mesmo com o aumento do número de iterações, Figura 4.43, não temos sincronização no Sistema 2. Note que o Sistema 1 já entrou em *phase locking*, com  $r^{indirect} \simeq 1.0$ , ou seja, os osciladores periféricos se comportam como um corpo rígido, todos se movimentando com a mesma frequência instantânea e diferença de fase constante.

Figura 4.41 - Fases dos Sistemas 1 e 2 plotadas no círculo unitário, para  $k = 0.6$  e frequências naturais fixas dadas por 4.12. (a) Estado inicial do sistema,  $t = 0.00$ , dado por 4.14 para o Sistema 1 e 4.15 para o Sistema 2. (b) Ambos os sistemas após  $t = 6.10$  unidades de tempo.



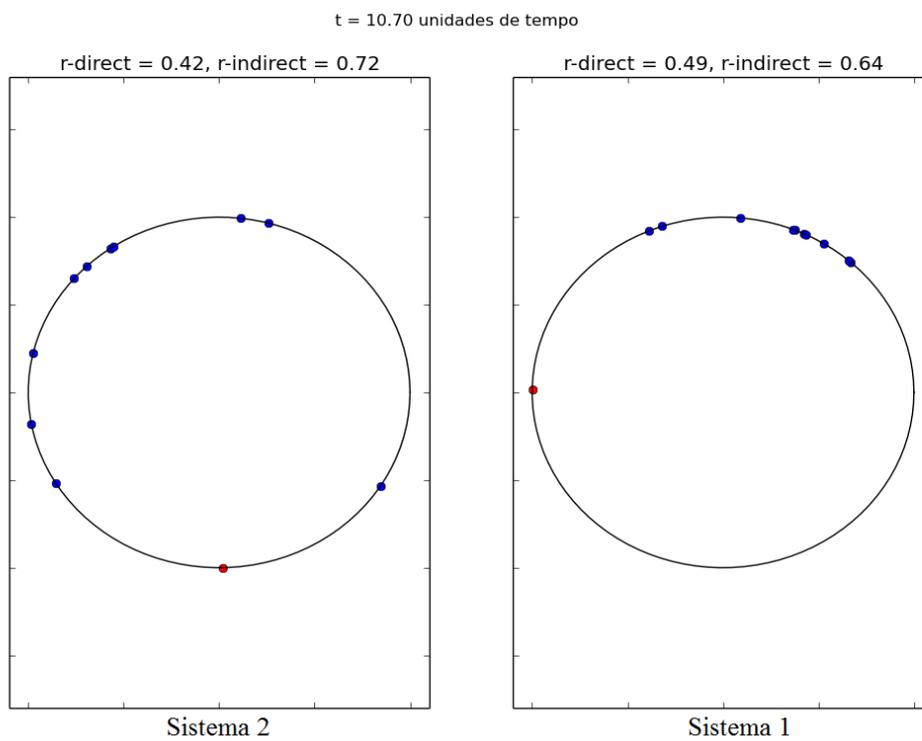
(a) t = 0.00 unidades de tempo



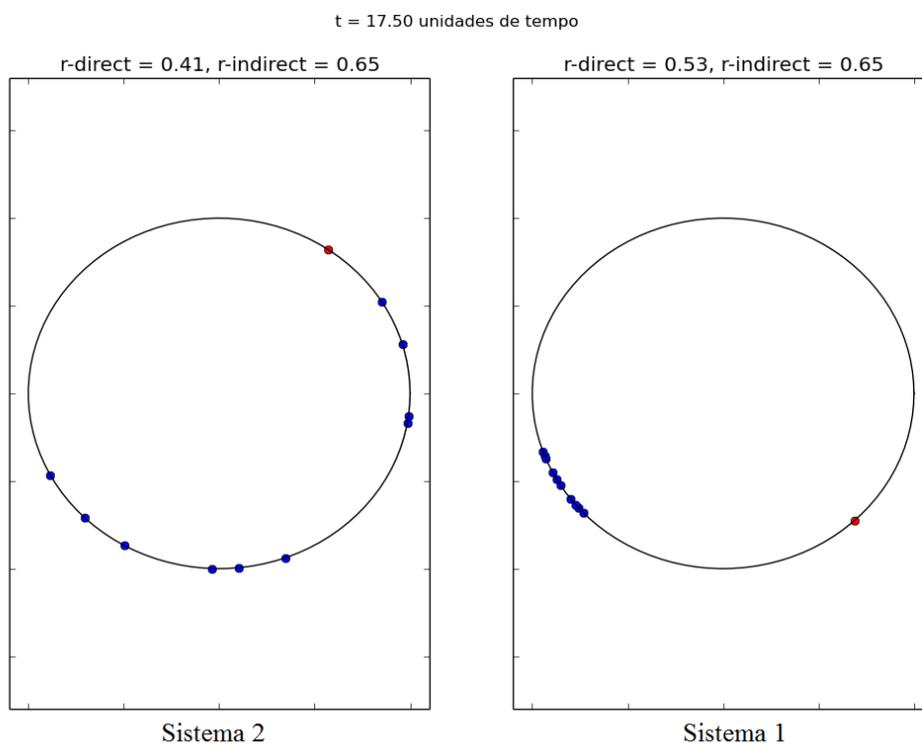
(b) t = 6.10 unidades de tempo

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.42 - Fases dos Sistemas 1 e 2 plotadas no círculo unitário, para  $k = 0.6$  e frequências naturais fixas dadas por 4.12. (a)  $t = 10.70$  unidades de tempo e (b)  $t = 17.50$  unidades de tempo



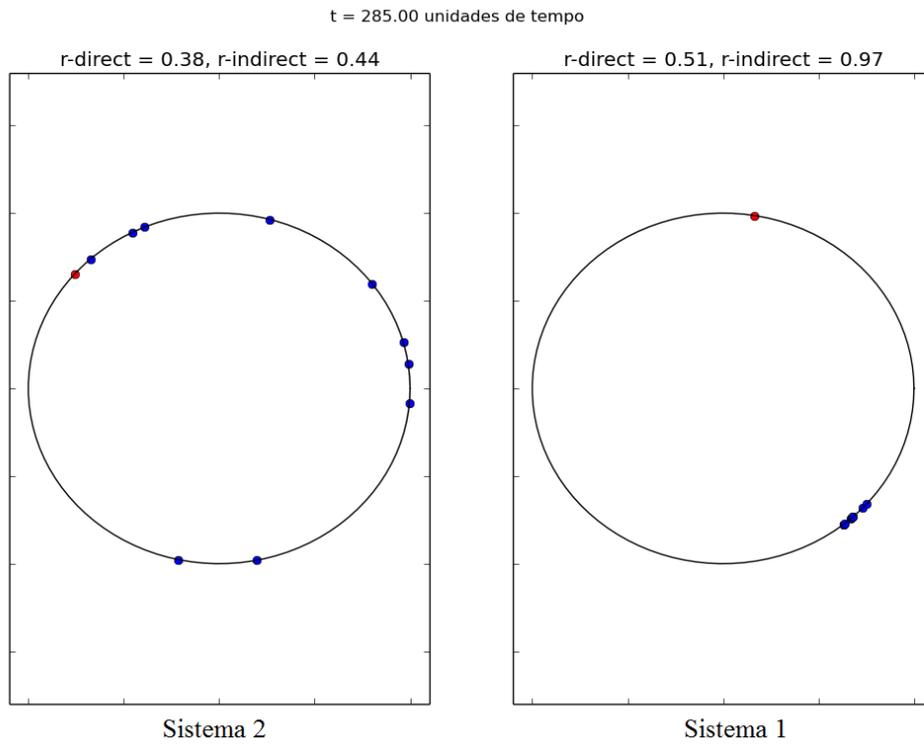
(a)  $t = 10.70$  unidades de tempo



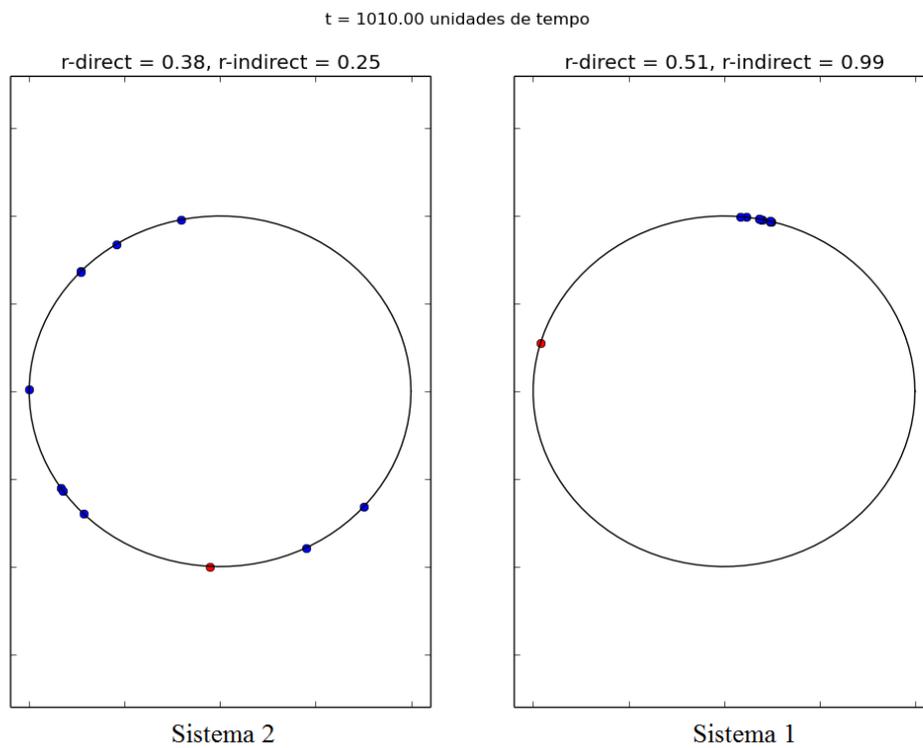
(b)  $t = 17.50$  unidades de tempo

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.43 - Fases dos Sistemas 1 e 2 plotadas no círculo unitário, para  $k = 0.6$  e frequências naturais fixas dadas por 4.12. (a)  $t = 285.00$  unidades de tempo e (b)  $t = 1010.00$  unidades de tempo



(a)  $t = 285.00$  unidades de tempo



(b)  $t = 1010.00$  unidades de tempo

Fonte: Produção do autor.

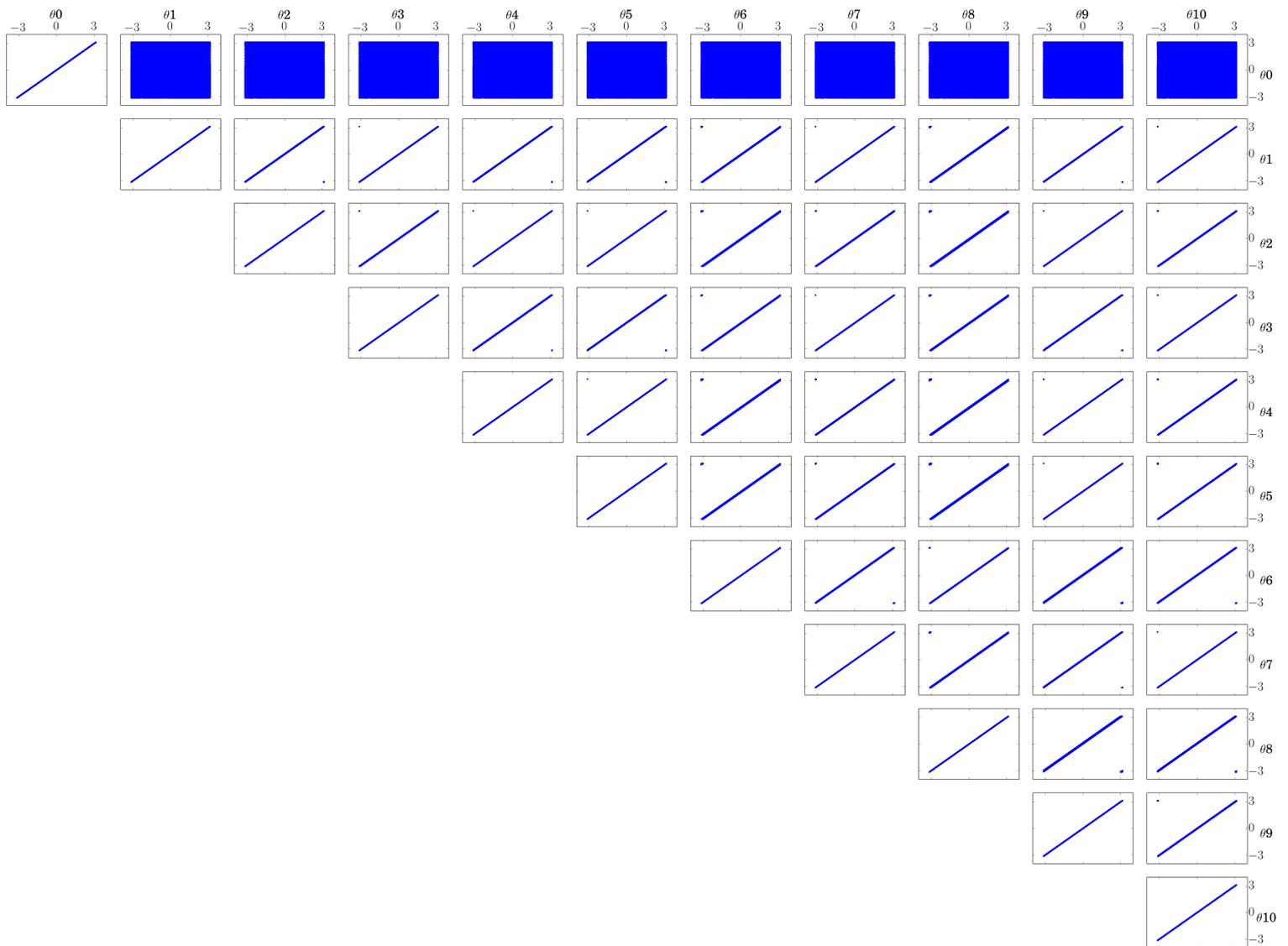
Aumentando a constante de acoplamento para  $k = 0.7$ , entramos em uma região onde os dois sistemas apresentam sincronização remota, Figura 4.23. Podemos observar esse fenômeno de sincronização remota em 4.44 e 4.45, onde as fases dos osciladores são plotadas em função de si mesmas. O *hub* é o único que não se encontra sincronizado com os demais, sendo que as figuras da sua fase em relação às fases dos periféricos cobrem toda a região do gráfico.

Em 4.46 e 4.47 temos o histograma do módulo da diferença entre as fases dos osciladores para o Sistema 1 e 2 respectivamente. Vemos que os dois sistemas apresentam comportamento semelhante e que o módulo se mantém em um valor fixo para todos os pares de osciladores periféricos. O único que tem o comportamento diferente, novamente, é o nó central, que apresenta uma diferença de fase em relação aos nós periféricos que varia com o passar do tempo.

Na Figura 4.48, temos a série temporal, a fase em função do tempo, frequência instantânea e módulo do parâmetro de ordem  $R$  para os dois Sistemas, que, mais uma vez, apresentam comportamento semelhante. Podemos ver que para as três primeiras medidas, os nós periféricos (em azul) apresentam um comportamento semelhante, diferindo apenas do nó central (vermelho). O módulo do parâmetro de ordem  $R$  calculado em relação à todos os osciladores (preto) varia de forma periódica, sendo que todos os osciladores possuem a mesma fase no ponto de máxima aproximação. Já  $R$  calculado apenas para os osciladores periféricos (azul) se mantém constante e muito próximo de 1, indicando que os nós periféricos possuem fases semelhantes.

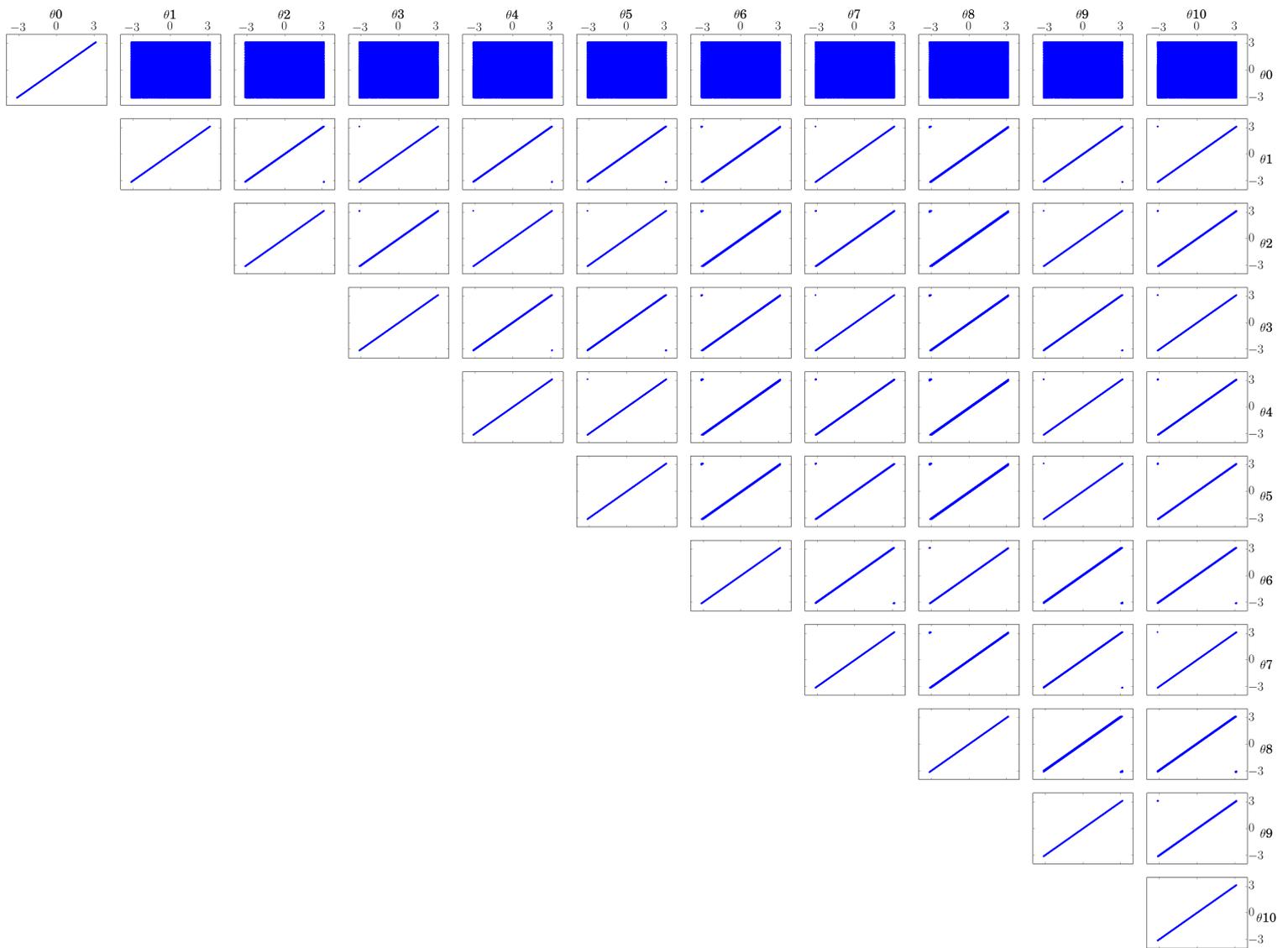
O espaço de fase e a seção de Poincaré construída a partir dos máximos locais da coordenada  $x$  do *hub* para os Sistemas 1 e 2 se encontram nas Figuras 4.49 e 4.50. Vemos que para ambos os sistemas, os osciladores apresentam movimentos quasi-periódicos. As seções de Poincaré calculadas em relação aos máximos locais da coordenada  $x$  do periférico 1 se encontram na Figura 4.51, onde temos mais uma indicação de que ambos os sistemas apresentam sincronização remota, pois as seções de todos os nós periféricos são semelhantes, a única que difere é a seção do nó central.

Figura 4.44 - Gráfico de Lissajous  $\theta_n, \theta_m$  para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede, para o Sistema 1 e uma constante de acoplamento  $k = 0.7$ . O oscilador central é identificado como 0, os demais são os periféricos. Temos sincronização remota nesta situação.



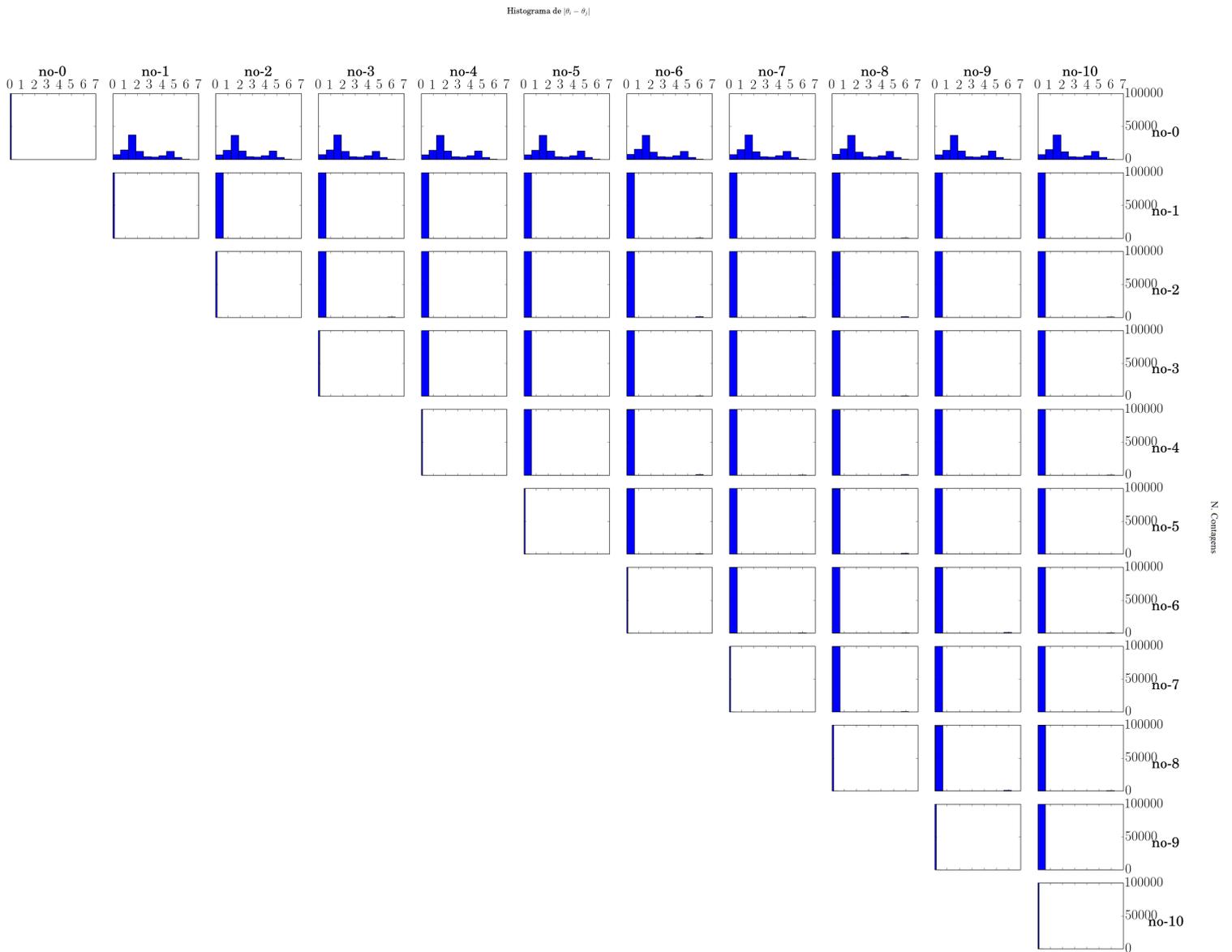
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.45 - Gráfico de Lissajous  $\theta_n, \theta_m$  para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede, para o Sistema 2 e uma constante de acoplamento  $k = 0.7$ . O oscilador central é identificado como 0, os demais são os periféricos. Temos sincronização remota nesta situação.



Fonte: Produção do autor.

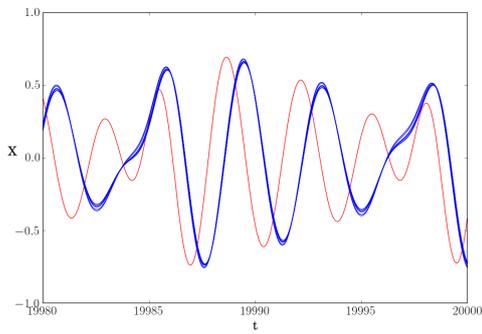
Figura 4.46 - Histograma do módulo da diferença de fases entre um par de osciladores para o Sistema 1 e uma constante de acoplamento  $k = 0.7$ . No eixo x, temos o módulo da diferença de fases indo de 0 até  $2\pi$  e no eixo y temos o número de contagens. O oscilador central é identificado como nó-0, os demais são os periféricos.



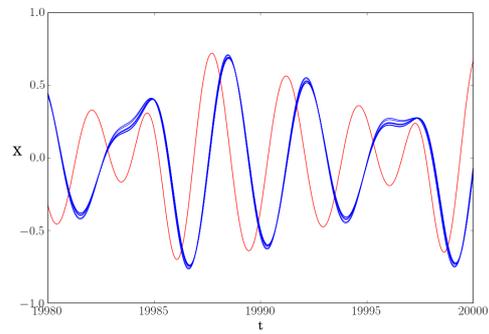
Fonte: Produção do autor.



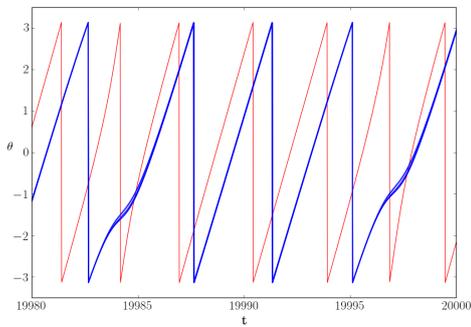
Figura 4.48 - (a)-(b) Série temporal, (c)-(d) fase  $\theta$  e (e)-(f) frequência instantânea  $\dot{\theta}$  em função do tempo . O *hub* aparece em vermelho e periféricos em azul. (g)-(h) Módulo do parâmetro de ordem  $R$  em função do tempo, em preto temos  $R$  calculado para todos os nós, em azul, apenas para os nós periféricos. Constante de acoplamento  $k = 0.7$ . Sistema 1 está à esquerda e Sistema 2 à direita. Como estamos considerando a fase  $\theta$  entre  $[-2\pi, 2\pi]$ , (c) e (d) deveriam ser gráficos descontínuos, as retas verticais nestes gráficos foram plotadas de maneira a deixar o gráfico contínuo e facilitar a visualização.



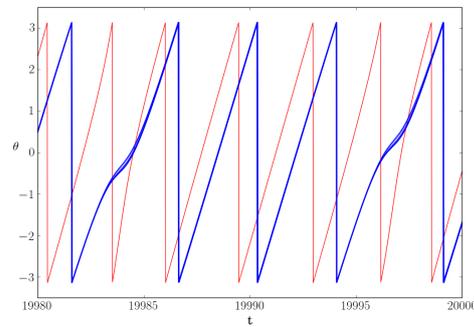
(a) Sistema 1



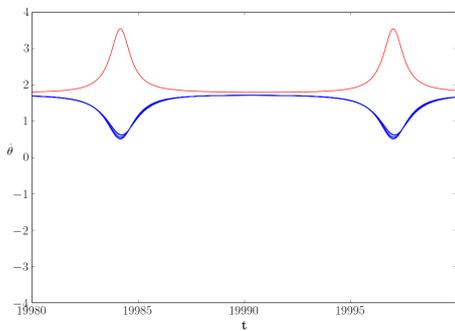
(b) Sistema 2



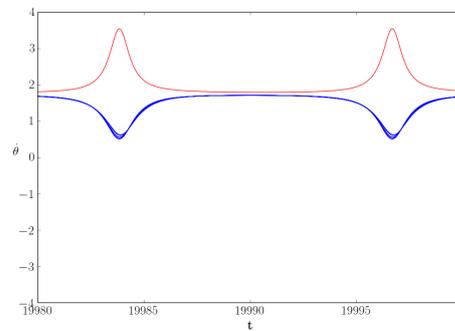
(c) Sistema 1



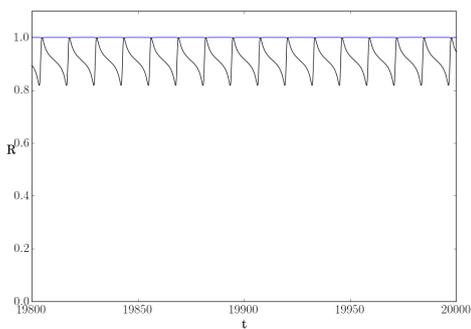
(d) Sistema 2



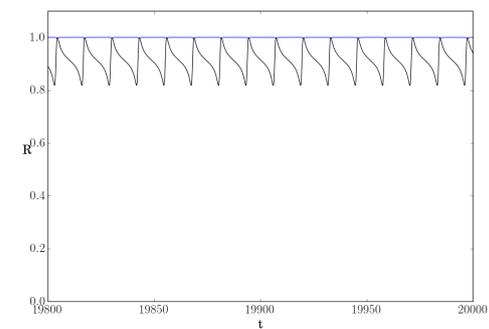
(e) Sistema 1



(f) Sistema 2



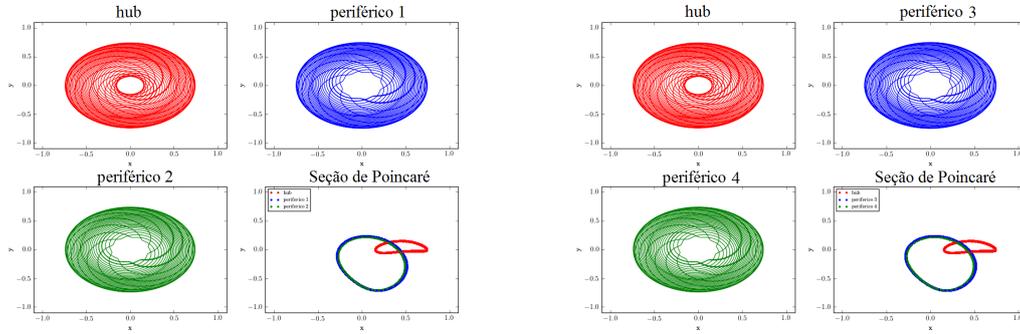
(g) Sistema 1



(h) Sistema 2

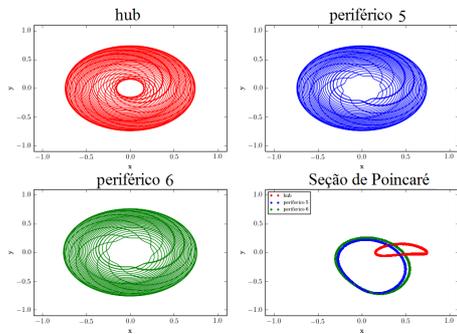
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.49 - Ciclos limites e seção de Poincaré para o Sistema 1 e constante de acoplamento  $k = 0.7$ . Hub em vermelho, periféricos em azul e verde.

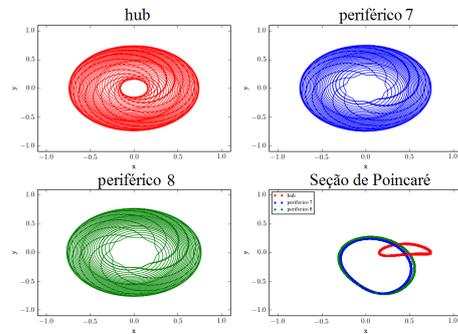


(a) Hub, periférico 1 e periférico 2

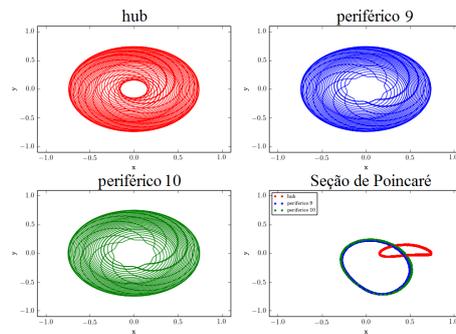
(b) Hub, periférico 3 e periférico 4



(c) Hub, periférico 5 e periférico 6



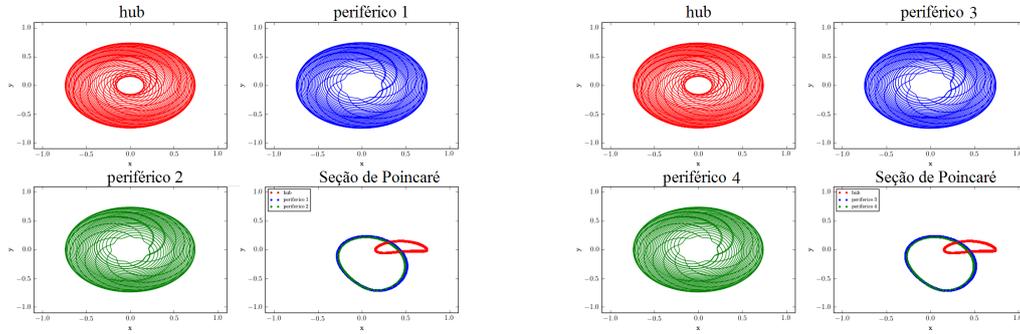
(d) Hub, periférico 7 e periférico 8



(e) Hub, periférico 9 e periférico 10

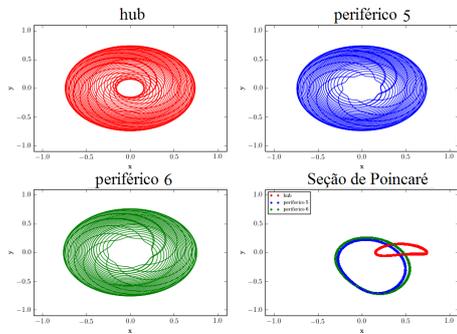
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.50 - Ciclos limites e seção de Poincaré para o Sistema 2 e constante de acoplamento  $k = 0.7$ . Hub em vermelho, periféricos em azul e verde.

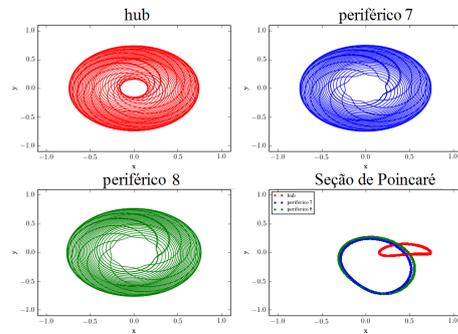


(a) Hub, periferico 1 e periferico 2

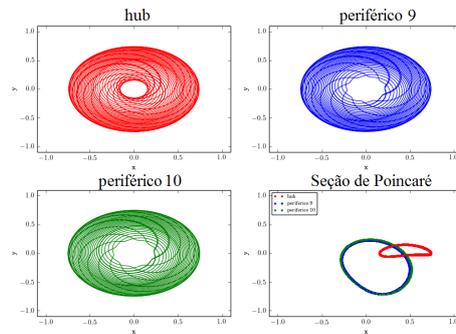
(b) Hub, periferico 3 e periferico 4



(c) Hub, periferico 5 e periferico 6



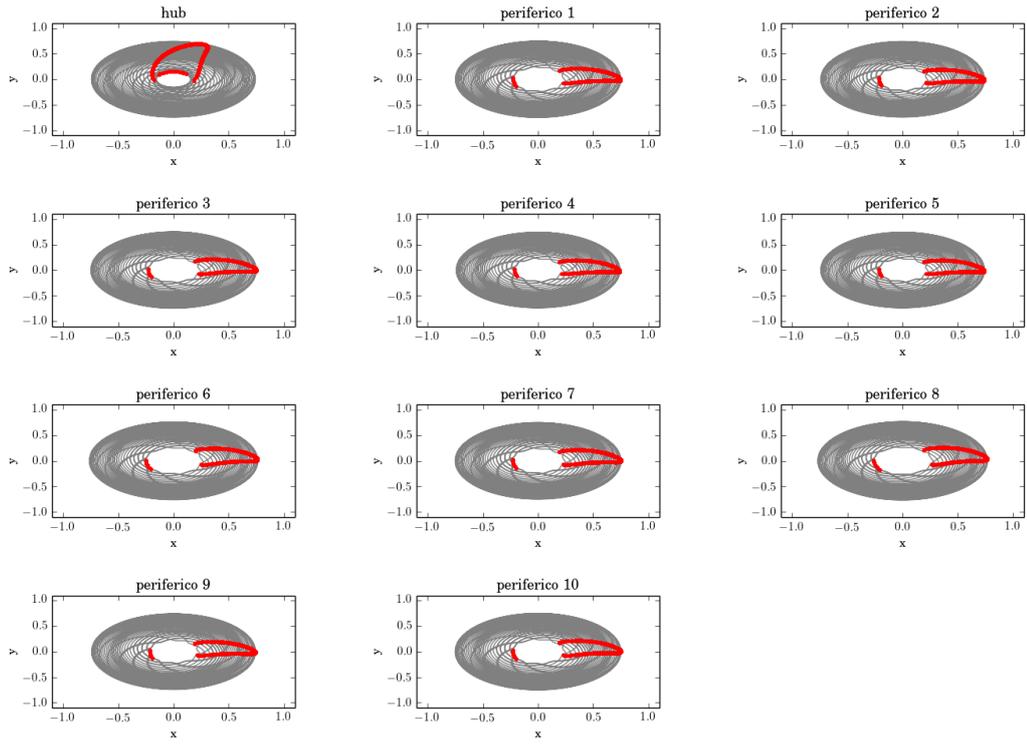
(d) Hub, periferico 7 e periferico 8



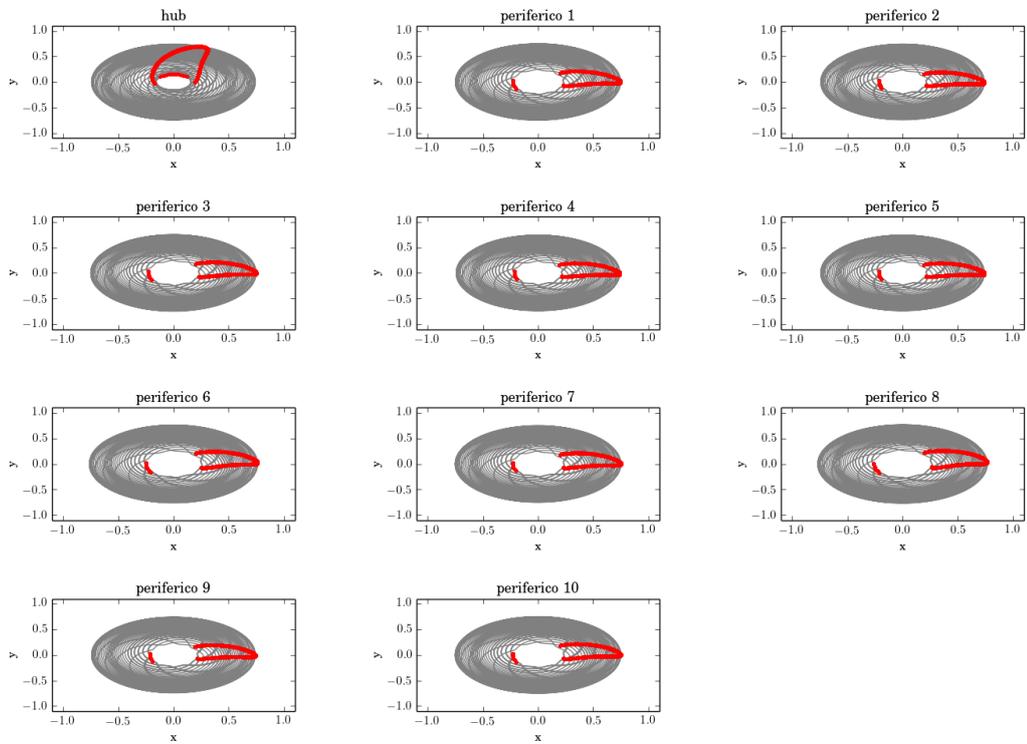
(e) Hub, periferico 9 e periferico 10

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.51 - Seção de Poincaré, construída a partir do nó periférico 1, para o (a) Sistema 1 e o (b) Sistema 2, com constante de acoplamento  $k = 0.7$ .



(a)



(b)

Fonte: Produção do autor.

Entraremos agora na região onde ambos os sistemas se encontram no estado de sincronização global, ou seja, além de os periféricos estarem sincronizados, o oscilador central também estará. Vamos fixar a constante de acoplamento em  $k = 0.8$  e podemos observar que  $r^{direct} = 1$  na Figura 4.23. Lembrando que este índice mede a coesão entre o nó central e os nós periféricos.

Nas Figuras 4.52 e 4.53 temos as fases dos osciladores plotadas em função de si mesmas para o Sistema 1 e 2 respectivamente. Podemos observar que todos os osciladores apresentam indícios de sincronização em ambos os sistemas, pois os gráficos apresentam segmentos de reta, indicando que para um valor de  $\theta_i$ , temos apenas um valor de  $\theta_j$  correspondente. Os pequenos segmentos de reta que aparecem na parte de baixo dos gráficos do *hub* em relação aos periféricos aparecem porque estamos considerando que a fase varia entre  $[-\pi, \pi]$ .

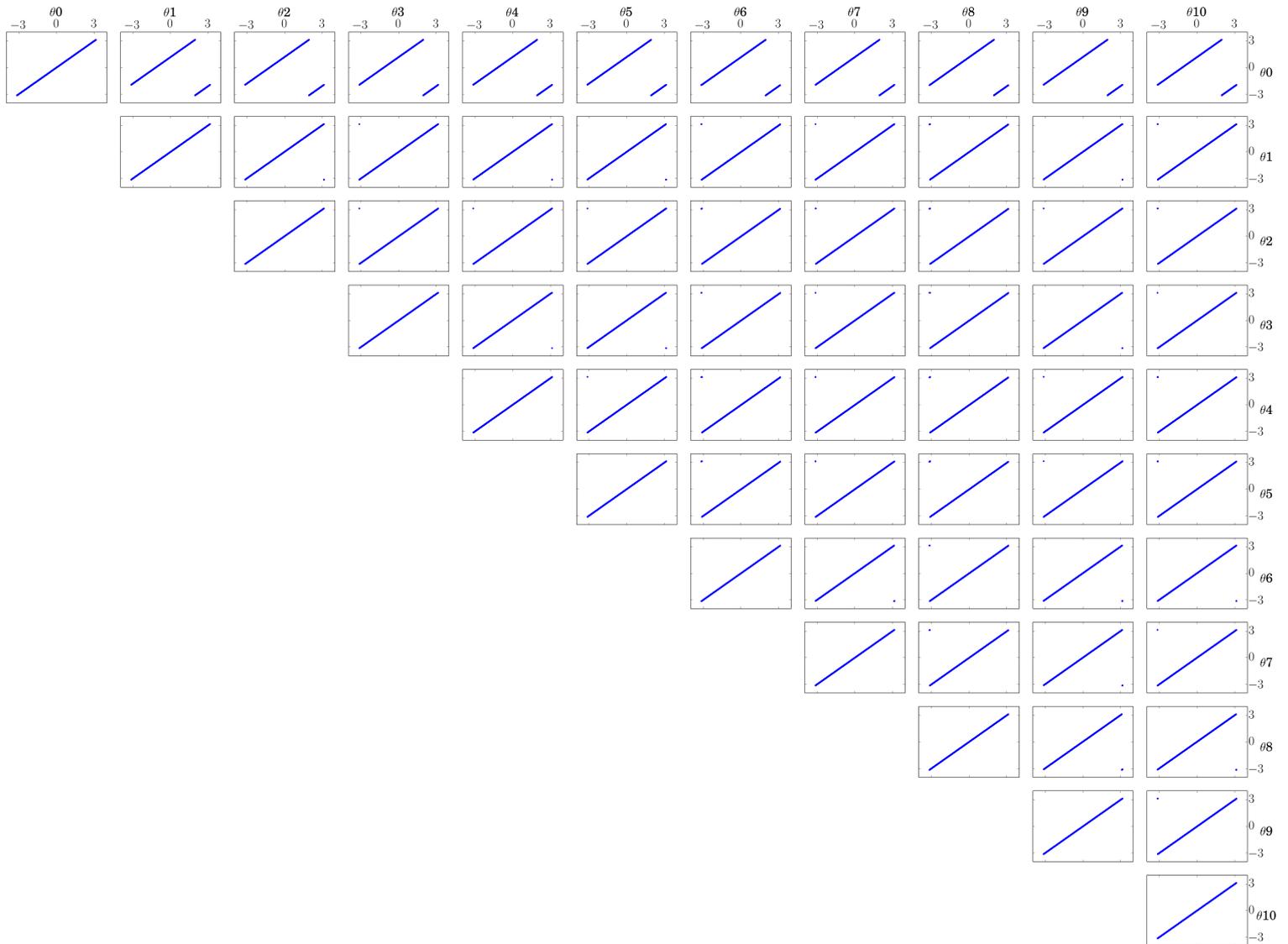
Em 4.54 e 4.55, temos os histogramas dos módulos das diferenças das fases entre um par de osciladores para os dois sistemas. Podemos notar que o valor de todos os módulos da diferença de fase dos nós periféricos em relação a eles mesmos se mantêm em um valor fixo, indicando sincronização. Sabemos no entanto, que o nó central também está sincronizado com os demais nós da rede ( $r^{direct} = 1$ ), mas este possui dois valores fixos para o módulo da diferença de fase entre ele e todos os nós periféricos. Esse valor fixo, que aparece com um menor número de contagens, é devido ao segundo segmento de reta que aparece nas Figuras 4.52 e 4.53. Por exemplo, vamos considerar o gráfico de  $\theta_0$  em relação a  $\theta_5$  na Figura 4.52, quando estamos no último ponto da direita da semi-reta superior temos  $|\theta_0 - \theta_5| \simeq |\pi - 2.0| \simeq 1.14$ , ou seja, estamos na região de máxima contagem na Figura 4.54. Agora, se  $\theta_0$  cresce e estamos considerando fases apenas entre  $[-\pi, \pi]$ , o ponto onde estamos se deslocará para o ponto mais a esquerda a semi-reta inferior e, neste ponto, o módulo da diferença das fases é dado por  $|\theta_0 - \theta_5| \simeq |-\pi - 2.0| \simeq 5.14$ , que dá origem à região com o segundo maior número de contagens no histograma da Figura 4.54.

Na Figura 4.56, temos as séries temporais, as fases em função do tempo, a frequência instantânea e o módulo do parâmetro de ordem  $R$  em função do tempo para ambos os sistemas, que novamente apresentam comportamento semelhante. Pelos gráficos das séries temporais e das fases, podemos ver que apesar de o nó central (vermelho) estar sincronizado com os periféricos (azul), eles não compartilham a mesma fase, mas podemos ver que o sistema apresenta sincronização global pois suas frequências instantâneas são as mesmas. O parâmetro de ordem  $R$  calculado para todo o sistema (preto) também indica que, apesar de todos os osciladores manterem uma distância

fixa entre si, eles não estão todos com a mesma fase, pois  $|R| \neq 1$ . Já para  $R$  calculado apenas para os osciladores periféricos (azul), vemos que todos se encontram a uma distância fixa e possuem fases semelhantes.

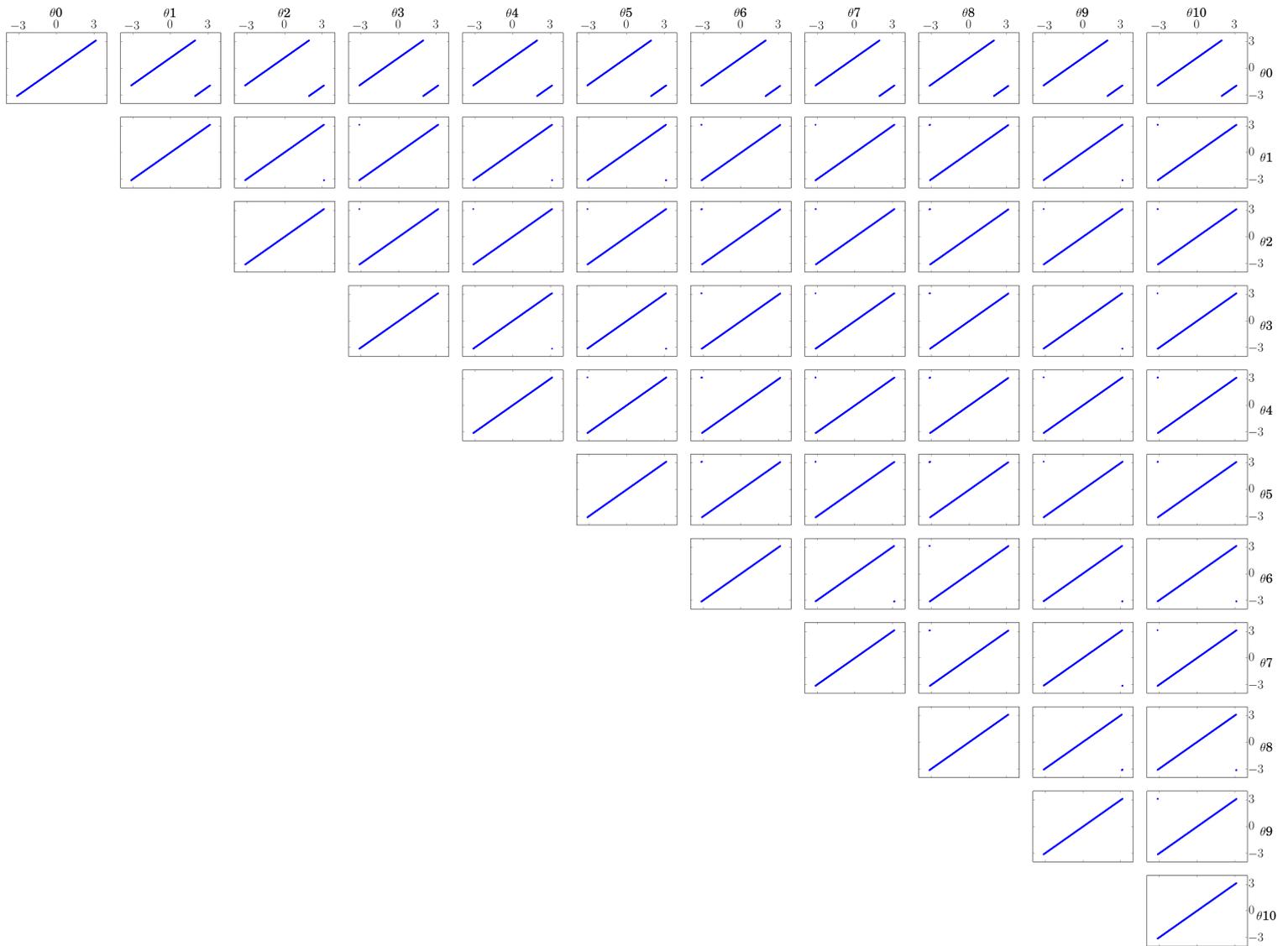
O espaço de fase e a seção de Poincaré em função dos máximos locais da coordenada  $x$  do nó central estão apresentadas nas Figuras 4.57 e 4.58. Podemos observar que agora todos os osciladores dos dois sistemas possuem um movimento periódico, apresentando um único ponto nas suas seções de Poincaré. Na Figura 4.59 temos a seção de Poincaré para os dois sistemas calculada em função do periférico 1. Também podemos notar a ocorrência da sincronização global para os dois sistemas, já que todas essas seções de Poincaré de todos os osciladores são semelhantes. Ou seja, todas possuem apenas um ponto, como a seção de Poincaré do periférico 1, indicando que todos os osciladores estão sincronizados com o este periférico.

Figura 4.52 - Gráfico de Lissajous  $\theta_n, \theta_m$  para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede, para o Sistema 1 e uma constante de acoplamento  $k = 0.8$ . O oscilador central é identificado como 0, os demais são os periféricos. Temos sincronização remota nesta situação.



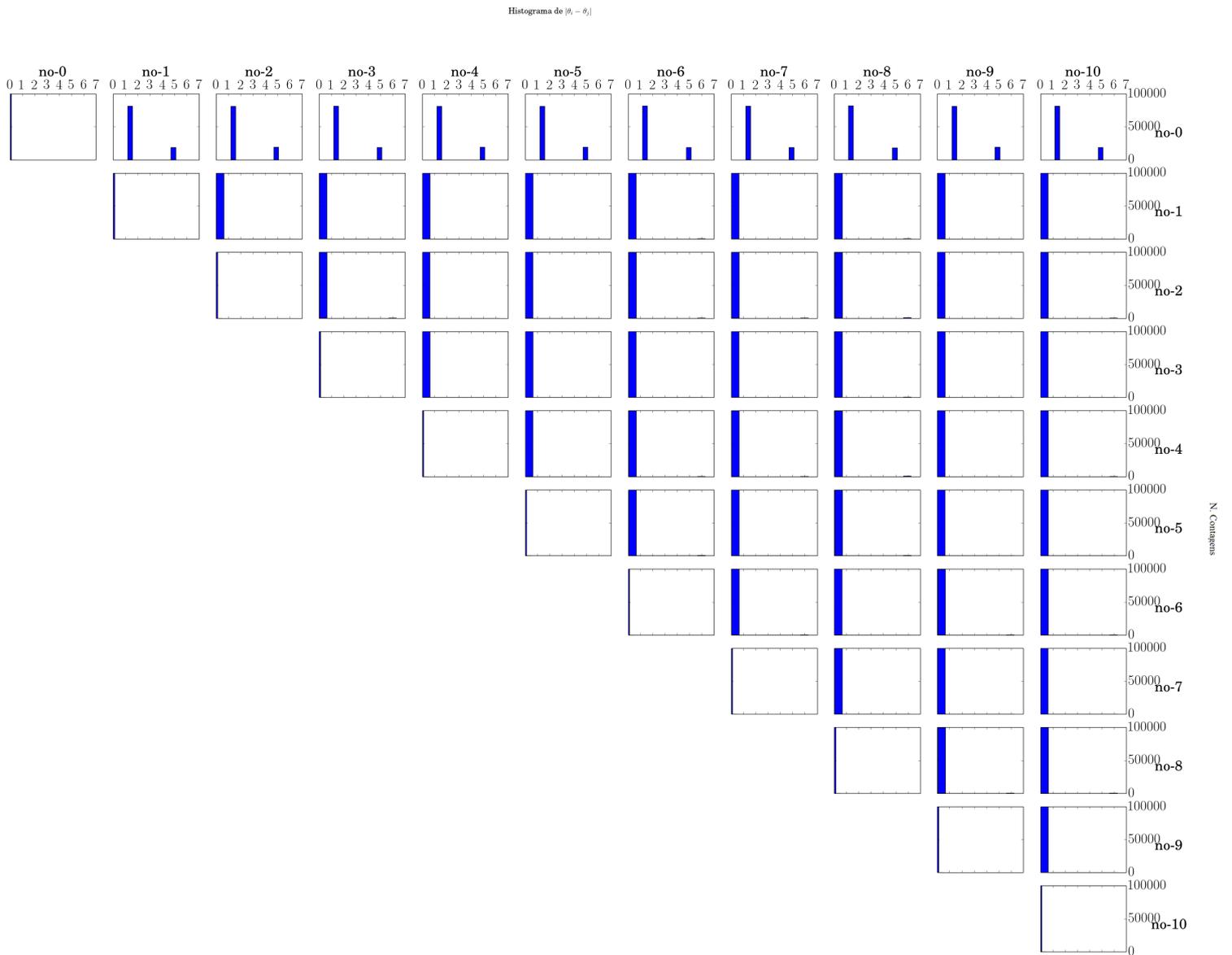
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.53 - Gráfico de Lissajous  $\theta_n, \theta_m$  para todas as combinações dois-a-dois de osciladores na rede, para o Sistema 2 e uma constante de acoplamento  $k = 0.8$ . O oscilador central é identificado como 0, os demais são os periféricos. Temos sincronização remota nesta situação.



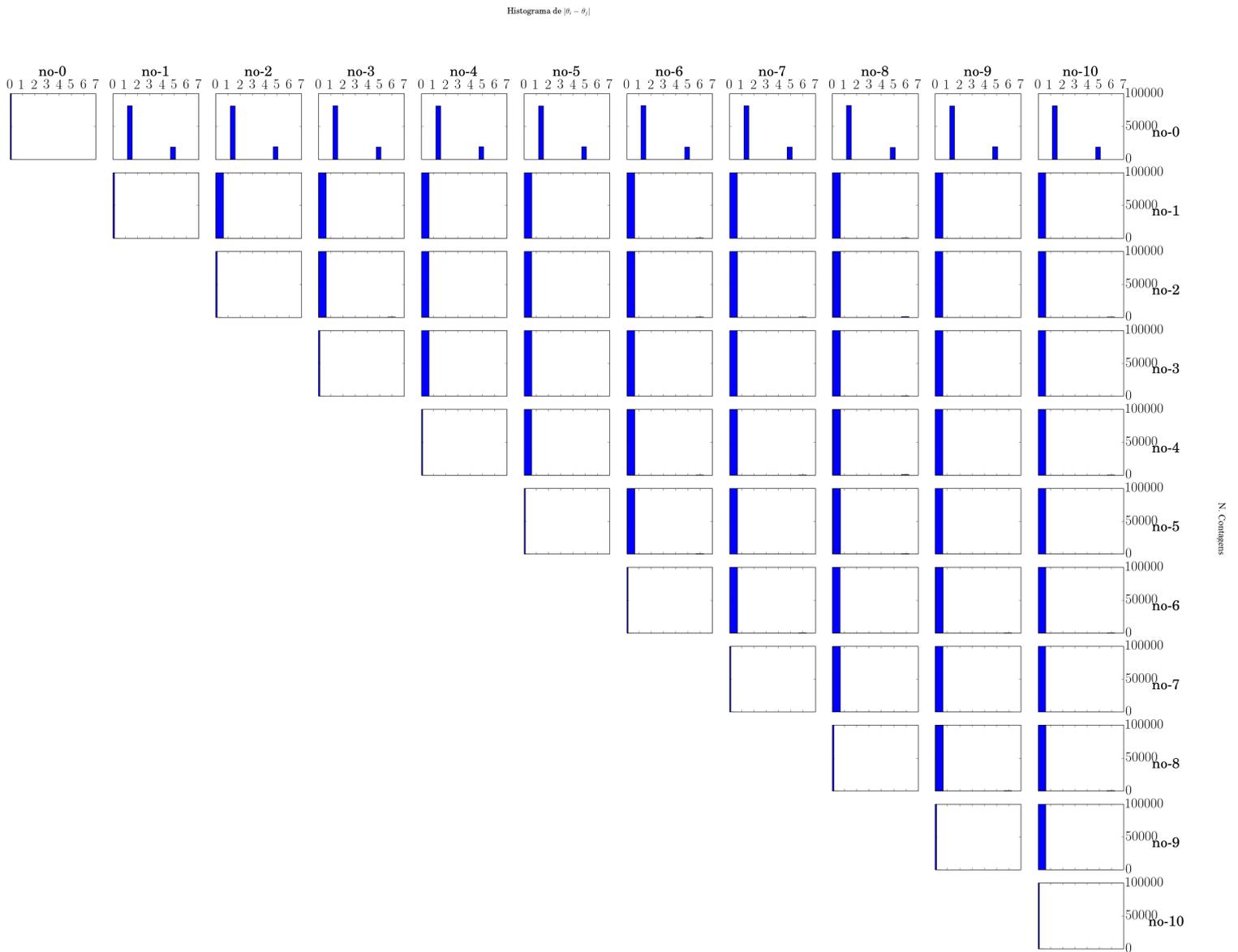
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.54 - Histograma do módulo da diferença de fases entre um par de osciladores para o Sistema 1 e uma constante de acoplamento  $k = 0.8$ . No eixo x, temos o módulo da diferença de fases indo de 0 até  $2\pi$  e no eixo y temos o número de contagens. O oscilador central é identificado como nó-0, os demais são os periféricos.



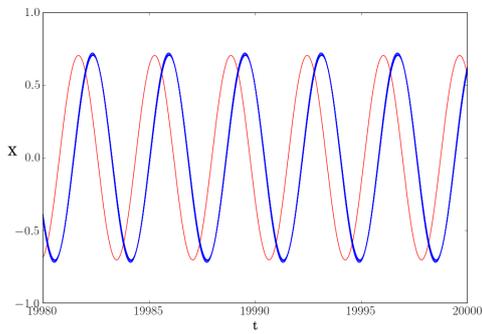
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.55 - Histograma do módulo da diferença de fases entre um par de osciladores para o Sistema 2 e uma constante de acoplamento  $k = 0.8$ . No eixo x, temos o módulo da diferença de fases indo de 0 até  $2\pi$  e no eixo y temos o número de contagens. O oscilador central é identificado como nó-0, os demais são os periféricos.

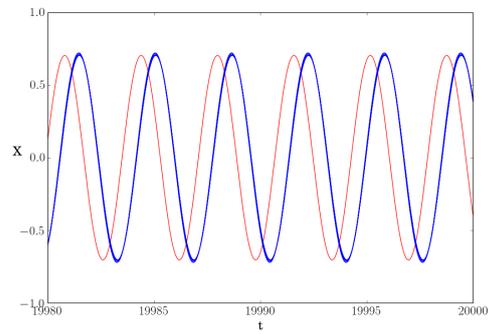


Fonte: Produção do autor.

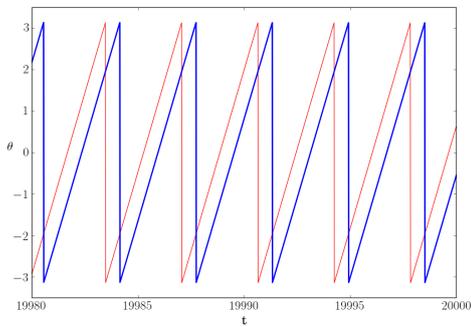
Figura 4.56 - (a)-(b) Série temporal, (c)-(d) fase  $\theta$  e (e)-(f) frequência instantânea  $\dot{\theta}$  em função do tempo . O *hub* aparece em vermelho e periféricos em azul. (g)-(h) Módulo do parâmetro de ordem  $R$  em função do tempo, em preto temos  $R$  calculado para todos os nós, em azul, apenas para os nós periféricos. Constante de acoplamento  $k = 0.8$ . Sistema 1 está à esquerda e Sistema 2 à direita. Como estamos considerando a fase  $\theta$  entre  $[-2\pi, 2\pi]$ , (c) e (d) deveriam ser gráficos descontínuos, as retas verticais nestes gráficos foram plotadas de maneira a deixar o gráfico contínuo e facilitar a visualização.



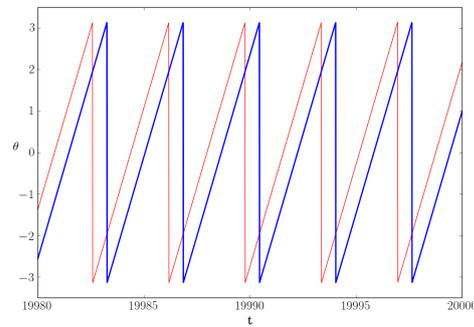
(a) Sistema 1



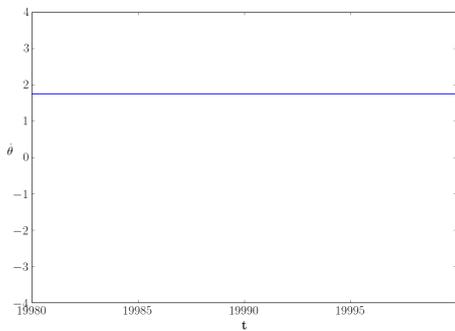
(b) Sistema 2



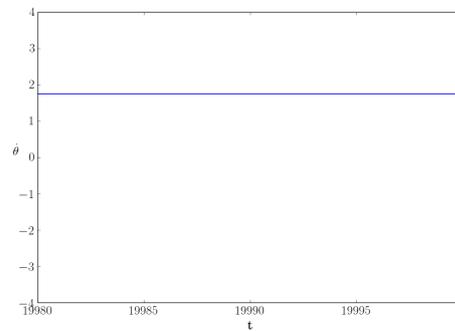
(c) Sistema 1



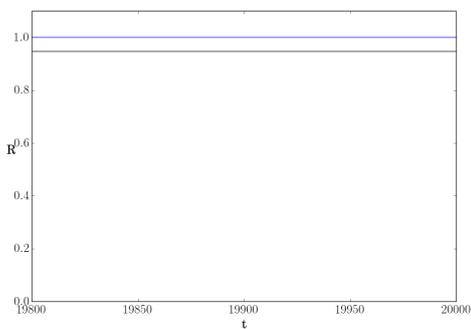
(d) Sistema 2



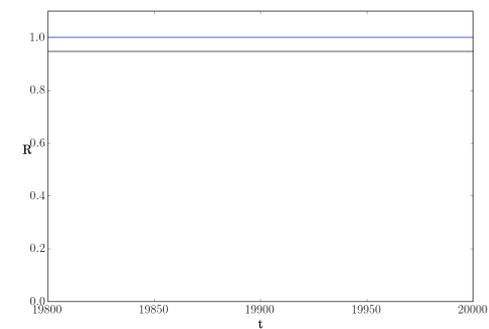
(e) Sistema 1



(f) Sistema 2



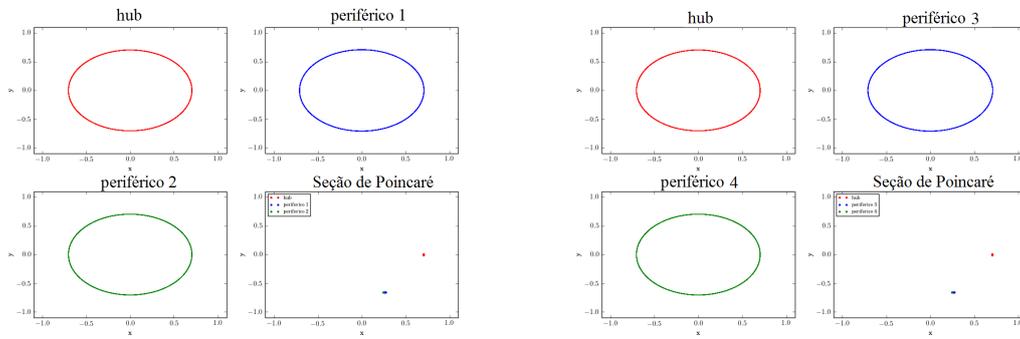
(g) Sistema 1



(h) Sistema 2

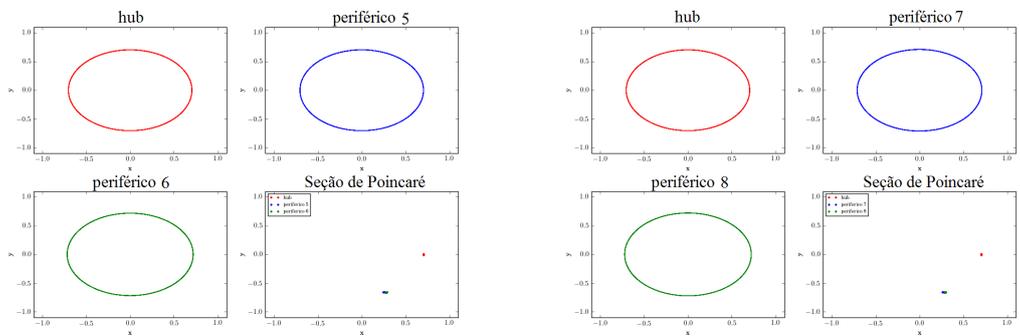
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.57 - Ciclos limites e seção de Poincaré para o Sistema 1 e constante de acoplamento  $k = 0.8$ . Hub em vermelho, periféricos em azul e verde.



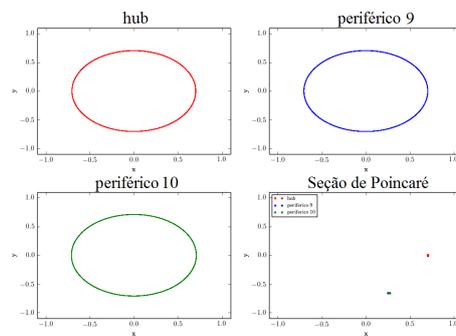
(a) Hub, periférico 1 e periférico 2

(b) Hub, periférico 3 e periférico 4



(c) Hub, periférico 5 e periférico 6

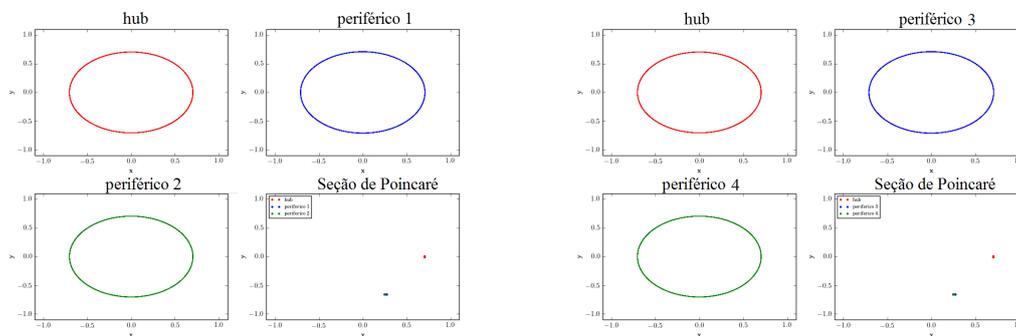
(d) Hub, periférico 7 e periférico 8



(e) Hub, periférico 9 e periférico 10

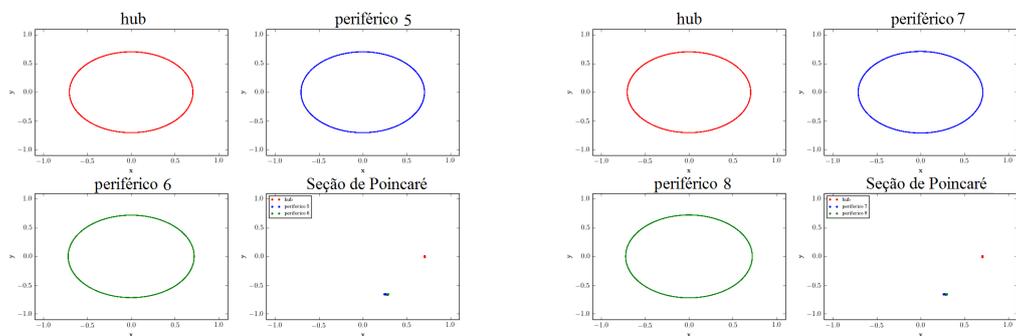
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.58 - Ciclos limites e seção de Poincaré para o Sistema 2 e constante de acoplamento  $k = 0.8$ . Hub em vermelho, periféricos em azul e verde.



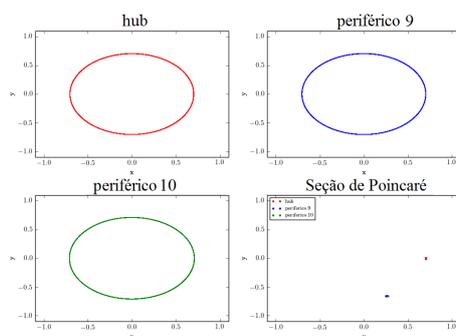
(a) Hub, periférico 1 e periférico 2

(b) Hub, periférico 3 e periférico 4



(c) Hub, periférico 5 e periférico 6

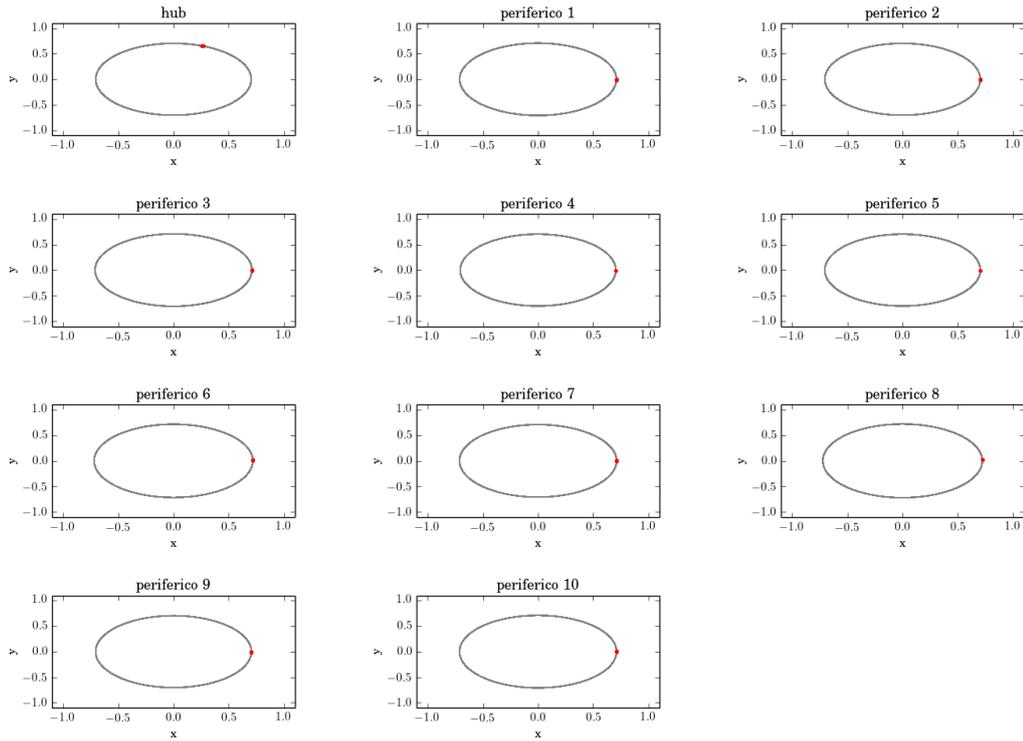
(d) Hub, periférico 7 e periférico 8



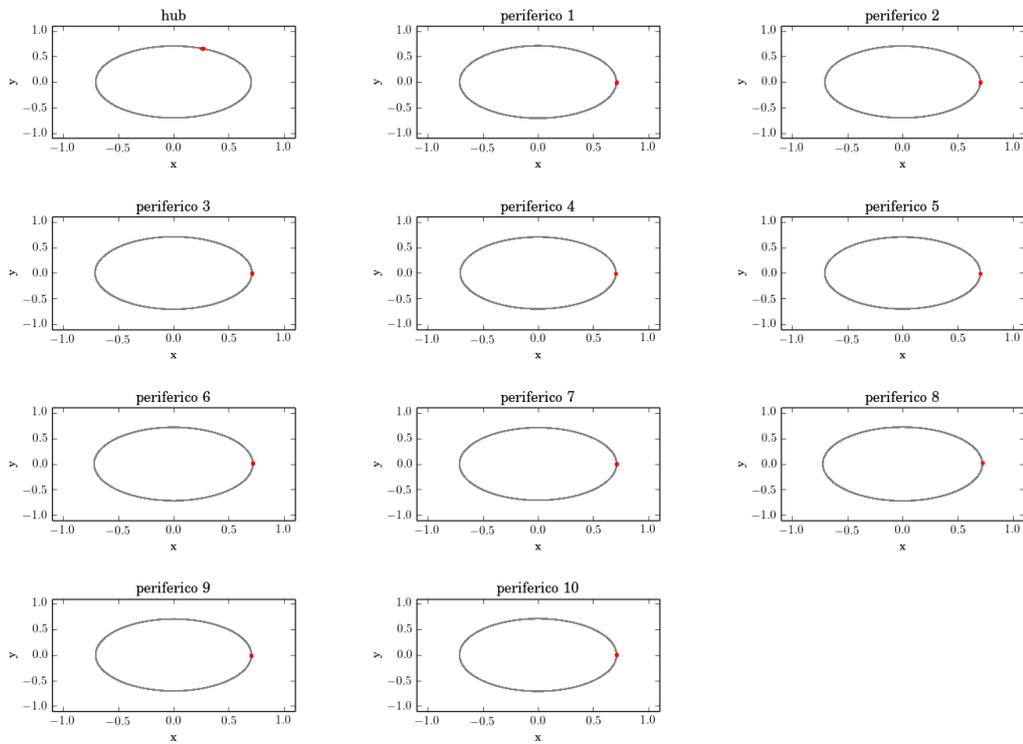
(e) Hub, periférico 9 e periférico 10

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.59 - Seção de Poincaré, construída a partir do nó periférico 1, para o (a) Sistema 1 e o (b) Sistema 2, com constante de acoplamento  $k = 0.8$ .



(a)



(b)

Fonte: Produção do autor.

#### 4.4.1 Conclusões Parciais

Nesta seção, fixamos os valores das frequências naturais dos osciladores e também duas condições iniciais para uma estrela com 11 nós. O sistema com o primeiro conjunto de condições iniciais escolhida foi designado de Sistema 1 e o segundo de Sistema 2. Seus comportamentos foram minuciosamente analisados para quatro valores da constante de acoplamento. Primeiro, para um valor relativamente baixo da constante de acoplamento, foi analisada uma região onde ambos os sistemas ainda não apresentam sincronização e possuem apenas alguns pares de osciladores sincronizados. Após isso, aumentamos a constante de acoplamento e entramos em uma região, que como foi visto na seção anterior, apresenta dependência em relação às condições iniciais. Constatamos que o Sistema 1 apresenta sincronização remota, enquanto nenhum par de osciladores estava sincronizado no Sistema 2. Passamos então para a terceira região, com a constante de acoplamento um pouco maior, onde ambos os sistemas apresentam sincronização remota. Aumentando ainda mais a constante de acoplamento, entramos na região onde há o regime de sincronização remota, ou seja, todos os osciladores de ambos os sistemas se encontram sincronizados. Foi possível observar que ambos os sistemas possuem comportamento idêntico fora do intervalo de constante de acoplamento  $0.575 \lesssim k \lesssim 0.65$ .

#### 4.5 Uso da dinâmica simbólica para a caracterização do sistema

Neste capítulo, fizemos o uso de variáveis de estado e de métricas como o módulo do parâmetro de ordem e do índice de sincronização parcial para a caracterização da dinâmica da rede. Utilizaremos agora a dinâmica simbólica e algumas métricas de redes complexas para tentar detectar as mesmas mudanças de comportamento do sistema que foram encontradas com os métodos convencionais.

O uso da dinâmica simbólica associada ao formalismo de redes complexas já se mostrou muito útil na detecção de janelas periódicas e caos em mapas unidimensionais (LACERDA *et al.*, 2016), como mostrado na Seção 2.4. Utilizaremos aqui a mesma abordagem, dessa vez aplicada para fluxos bidimensionais, na tentativa de detectar mudanças na dinâmica do sistema.

Utilizaremos nesta seção uma rede com  $N = 11$  nós. Primeiro, iremos fixar as condições iniciais e variar as frequências dos nós de maneira a obedecer a mesma regra utilizada nas seções anteriores, Eq. 4.11, ou seja,  $\omega_0 = 2.5$  e  $\omega_n = 1 + \epsilon$ , para  $n = 1, \dots, N - 1$ , onde  $\epsilon$  é um vetor de tamanho  $N - 1$  com distribuição uniforme entre  $(0, 0.05)$ . Após isso, iremos fixar as frequências naturais e iremos variar as

condições iniciais, que serão dadas por uma distribuição uniforme entre  $[-0.5, 0.5]$ .

A caracterização dinâmica do sistema por meio da dinâmica simbólica e de redes complexas se dará da seguinte maneira:

- Integramos o sistema dado por 4.2 e 4.3 utilizando o método Runge-Kutta de ordem 4 com passo de integração 0.01
- Consideraremos apenas as séries temporais da coordenada  $x$  de todos os osciladores, onde  $x_i \in [-1, 1]$ . Utilizaremos os 100 mil valores finais dessa série temporal para a caracterização.
- Transformamos a série temporal  $x$  de cada oscilador em uma série binária. Se  $x_i < 0$ , atribuímos o símbolo 0 e se  $x_i \geq 0$ , atribuímos o símbolo 1. Fazemos isso em toda extensão da série temporal utilizada.
- Definimos uma palavra de tamanho 11. Com ela, caminharemos na série binária, andando de um em um, transformando cada palavra binária de tamanho 11 em seu equivalente decimal.
- A partir da série decimal, criaremos a rede do sistema. Cada valor da série decimal será um nó da rede e as ligações entre os nós são dadas entre os vizinhos da série decimal. Só é permitida uma aresta por par de vértices (FREITAS; MACAU, 2016; YU et al., 2013) e é permitida a existência de autoconexões.
- Serão geradas 20 redes para cada oscilador para cada valor da constante de acoplamento  $k$ . Na Seção 4.5.1 serão utilizadas 20 distribuições de frequências naturais distintas e na Seção 4.5.2 serão utilizadas 20 distribuições de condições iniciais distintas para cada valor de  $k$ .
- A partir dessas redes, calcularemos a média e o desvio padrão das seguintes métricas: densidade, diâmetro, grau médio da rede e média da centralidade *betweenness* normalizada.

Para cada oscilador do sistema, será gerada uma rede (grafo) com número máximo de vértices igual a  $2^{11}$ . O número total de iterações foi de 2.400.000 sendo que as primeiras 400.000 iterações foram descartadas.

### 4.5.1 Caracterização do sistema com condições iniciais fixas

Na Seção 4.2, fixamos as condições iniciais dos osciladores em  $x_n^{inicial} = 0.1$  e  $y_n^{inicial} = 0.5$ , para  $n = 0, \dots, N - 1$ . E variamos as frequências de acordo com a regra de formação 4.11 para  $\epsilon$  com distribuição uniforme entre  $(0, a)$  e estudamos o comportamento do sistema para vários valores de  $a$ . Chegamos à conclusão de que para o sistema em questão, o valor mais apropriado de  $a$  seria de 0.05, ou seja, a diferença máxima entre as frequências naturais dos osciladores periféricos irão diferir de no máximo 0.05.

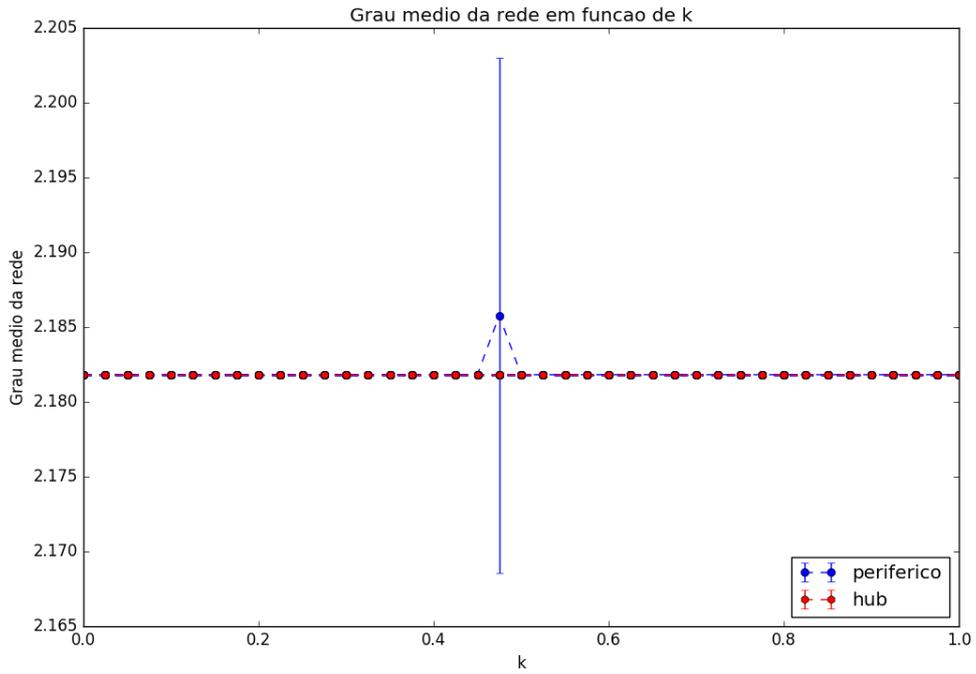
Então, para esses valores fixos de condições iniciais, serão geradas frequências naturais aleatórias seguindo a distribuição mencionada no parágrafo anterior. Faremos isso 20 vezes para cada valor da constante de acoplamento  $k$ , como foi feito na seção 4.2, mas agora, ao invés de calcularmos o módulo do parâmetro de ordem e o índice de sincronização parcial, iremos gerar uma rede para cada oscilador e para cada distribuição de frequência.

Então, para um valor fixo de  $k$ , geramos 20 redes para cada um dos onze osciladores e calcularemos a média e o desvio padrão da densidade, diâmetro, grau médio da rede e média da centralidade *betweenness* normalizada, que são plotados nas Figs 4.60 e 4.61. Esses mesmos valores de condições iniciais e distribuição de frequências naturais, foram utilizados para calcular os índices de sincronização parcial,  $r^{direct}$  e  $r^{indirect}$ , na Figura 4.12(b), onde podemos observar que o sistema entra no regime de sincronização remota em  $k \approx 0.525$  e atinge a sincronização global em  $k \approx 0.75$ . Nas Figs. 4.60 e 4.61, podemos notar que as medidas grau médio e média da centralidade *betweenness* normalizada tem um pico na região  $k \approx 0.5$  com elevado desvio padrão para alguns osciladores periféricos. Já a média da densidade da rede tem um valor menor para alguns osciladores periféricos nesse valor da constante de acoplamento. Não foi possível notar mudança no diâmetro da rede.

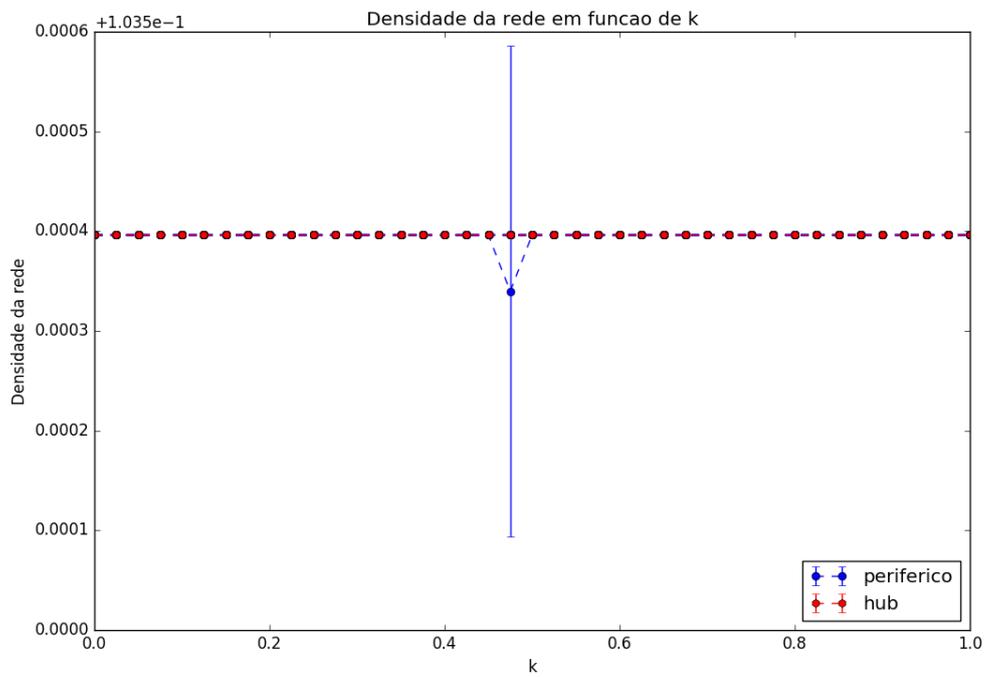
### 4.5.2 Caracterização do sistema com frequências naturais fixas

Na seção 4.3, as frequências naturais foram mantidas fixas 4.12 e as condições iniciais foram variadas aleatoriamente, dadas por uma distribuição uniforme entre  $(-a_{xy}, a_{xy})$ . Foi mostrado que o tamanho desse intervalo de distribuição uniforme tem pouca influência na dinâmica do sistema e foi escolhido  $a_{xy} = 0.5$  para um estudo mais aprofundado do sistema. Iremos utilizar aqui esses mesmos valores para gerar as redes.

Figura 4.60 - Média e desvio padrão do (a) grau médio e (b) densidade das redes geradas a partir das séries temporais dos osciladores, para uma condição inicial fixa e distribuição de frequência dada por 4.11 com  $a = 0.05$ . Em azul estão os valores calculados a partir das redes dos osciladores periféricos, em vermelho estão os valores calculados a partir do das redes do *hub*.



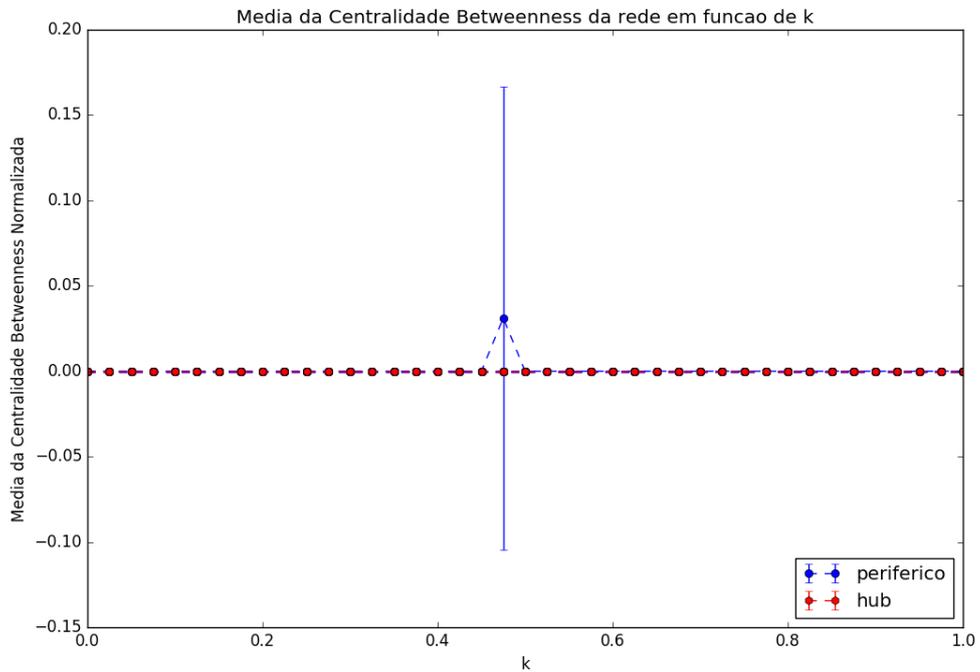
(a)



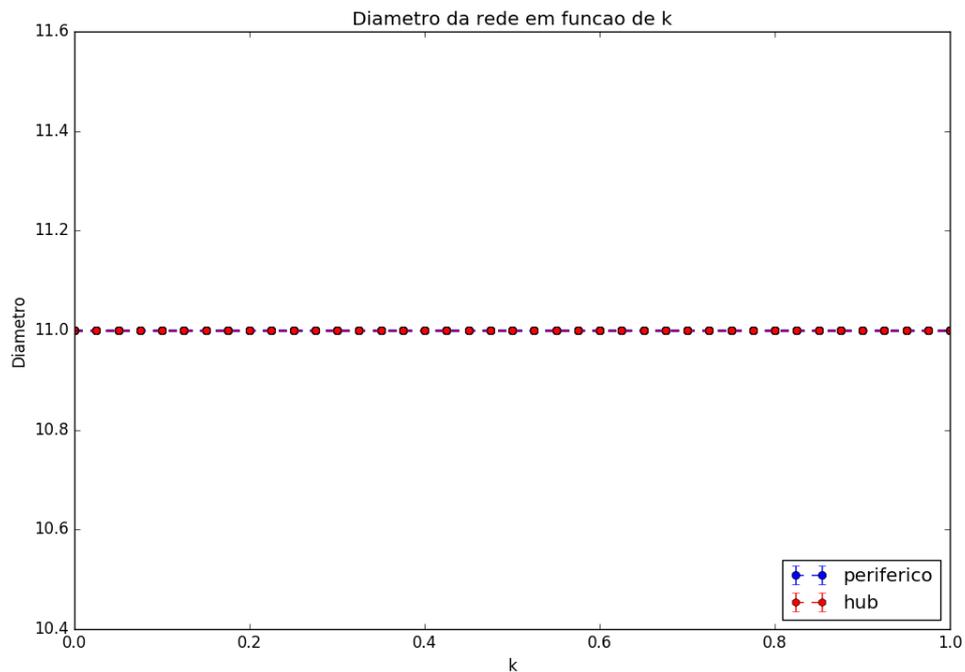
(b)

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.61 - Média e desvio padrão da (a) média da centralidade *betweenness* normalizada e (b) diâmetro das redes geradas a partir das séries temporais dos osciladores, para uma condição inicial fixa e distribuição de frequência dada por 4.11 com  $a = 0.05$ . Em azul estão os valores calculados a partir das redes dos osciladores periféricos, em vermelho estão os valores calculados a partir do das redes do *hub*.



(a)



(b)

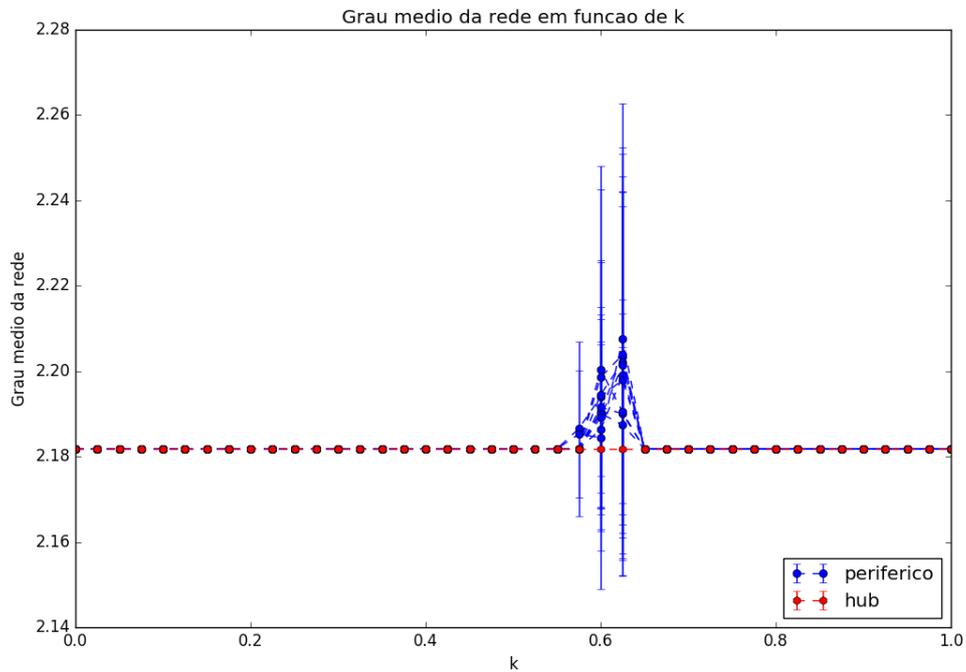
Fonte: Produção do autor.

Para cada valor da constante de acoplamento  $k$ , serão geradas 20 condições iniciais, dando origem a vinte redes distintas para cada um dos onze osciladores. Calculamos então a média e o desvio padrão da densidade, diâmetro, grau médio da rede e média da centralidade *betweenness* normalizada, que estão plotadas nas Figs. 4.62 e 4.63. Estes mesmos valores de frequências naturais e distribuição de condições iniciais foi utilizado no cálculo dos índices de sincronização parcial em 4.16(c), onde podemos notar que o sistema atinge o regime de sincronização remota em  $k \approx 0.5$ , chega na região onde essa sincronização tem dependência em relação às condições iniciais em  $0.575 \lesssim k \lesssim 0.625$  e atinge sincronização global em  $k \approx 0.75$ . Podemos notar nas Figs. 4.62 e 4.63, que para a constante de acoplamento entre  $0.575 \lesssim k \lesssim 0.625$ , temos picos nos valores do grau médio, diâmetro e média da centralidade *betweenness* normalizada e elevado desvio padrão para a maioria dos osciladores periféricos. O gráfico da densidade apresenta uma queda nos seus valores nesse mesmo intervalo de constante de acoplamento  $k$ .

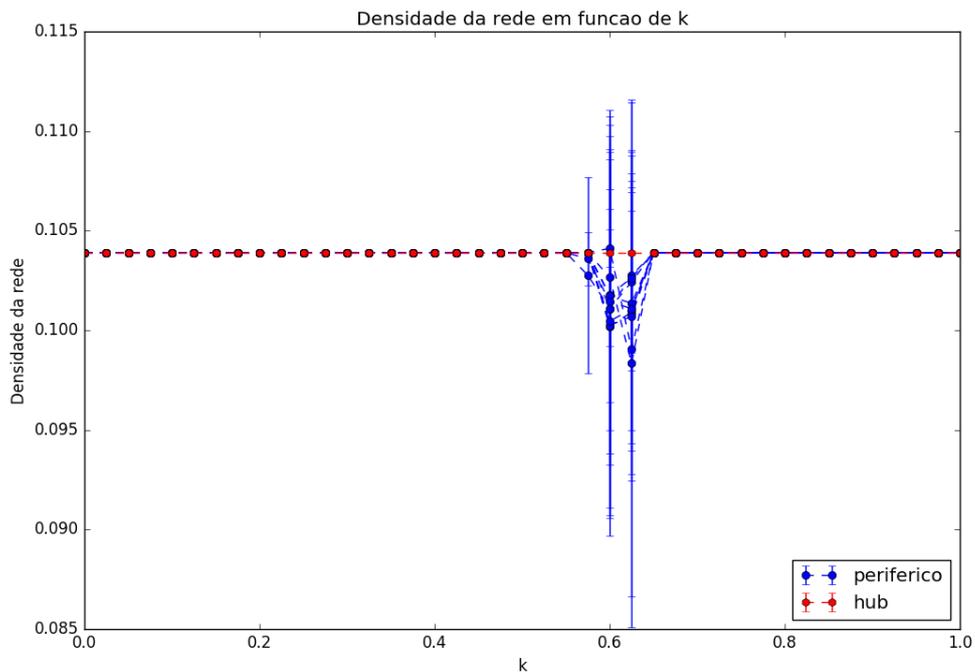
### 4.5.3 Conclusões Parciais

Nesta seção, fizemos o uso da dinâmica simbólica para caracterizar a dinâmica do sistema e comparamos os resultados obtidos com os resultados das seções anteriores. A partir da série temporal  $x$  dos osciladores, foram geradas redes e medidas como grau médio, densidade, média da centralidade *betweenness* normalizada e diâmetro foram calculadas. Primeiro, mantivemos as condições iniciais fixas e variamos as frequências naturais do sistema, onde pudemos notar que as medidas do grau médio, densidade e da média da centralidade *betweenness* normalizada apresentam uma mudança significativa em seus valores médios e alto desvio padrão para uma constante de acoplamento muito próxima à que o sistema entra em sincronização remota. Mantendo as frequências naturais fixas e variando as condições iniciais, notamos que todos os gráficos analisados apresentam mudança significativa de valor médio e alto desvio padrão no mesmo intervalo da constante de acoplamento onde temos a dependência em relação às condições iniciais para a sincronização remota.

Figura 4.62 - Média e desvio padrão do (a) grau médio e (b) densidade das redes geradas a partir das séries temporais dos osciladores, para frequências naturais fixas 4.12 e condições iniciais aleatórias, dadas por uma distribuição uniforme entre  $(-0.5, 0.5)$ . Em azul estão os valores calculados a partir das redes dos osciladores periféricos, em vermelho estão os valores calculados a partir das redes do *hub*.



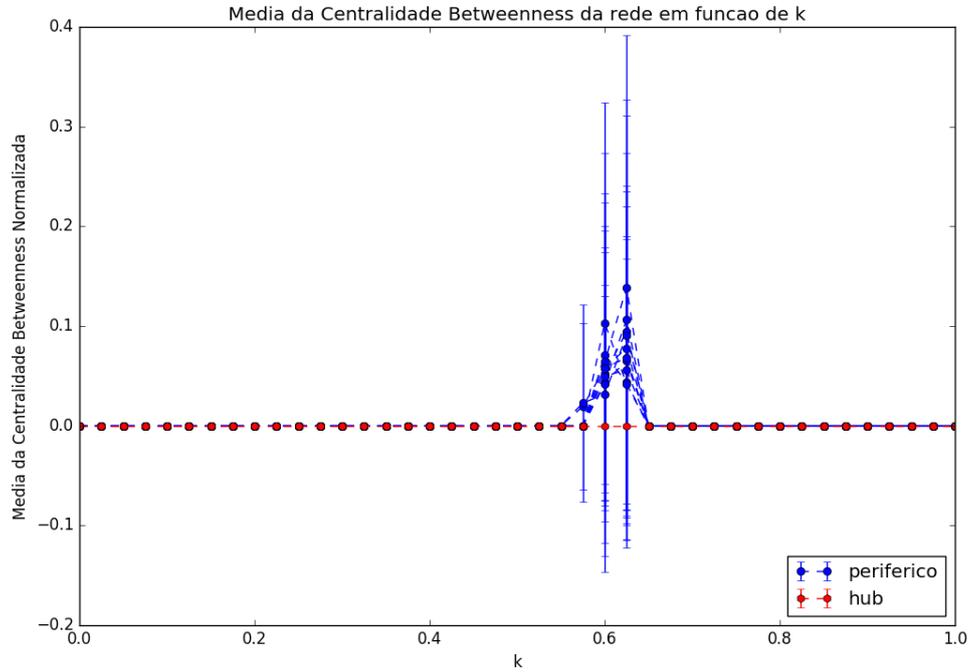
(a)



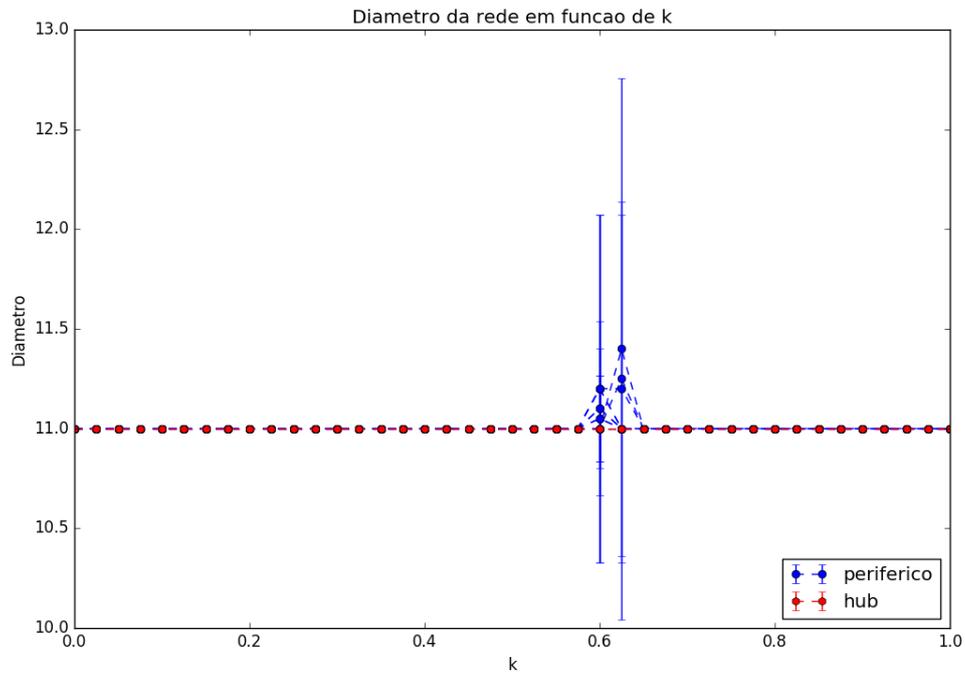
(b)

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.63 - Média e desvio padrão da (c) média da centralidade *betweenness* normalizada e (d) diâmetro das redes geradas a partir das séries temporais dos osciladores, para frequências naturais fixas 4.12 e condições iniciais aleatórias, dadas por uma distribuição uniforme entre  $(-0.5, 0.5)$ . Em azul estão os valores calculados a partir das redes dos osciladores periféricos, em vermelho estão os valores calculados a partir do das redes do *hub*.



(a)



(b)

Fonte: Produção do autor.



## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O fenômeno da sincronização é muito comum na natureza, podendo ser observado nos mais diversos sistemas, como sociais e biológicos. Podemos definir a sincronização como um processo no qual um certo número de sistemas dinâmicos, acoplados ou conduzidos por uma força comum, conseguem coordenar alguma propriedade dinâmica. A sincronização remota é caracterizada pela sincronização de pares de osciladores que não estão conectados por ligações físicas ou qualquer sequência de osciladores sincronizados. Este fenômeno também é comumente encontrado na natureza, como em partes do cérebro. Uma abordagem para modelar o fenômeno da sincronização consiste em considerar cada unidade do sistema a ser estudado como um oscilador. Um dos modelos mais difundidos no estudo da sincronização é o modelo de Kuramoto, que considera cada unidade dinâmica do sistema como um oscilador de fase. Mas, no intuito de modelar a sincronização remota, precisa-se de um modelo de oscilador que tenha, além da fase, a amplitude como variável dinâmica e, por este motivo, foi utilizado o modelo de oscilador de Stuart-Landau neste trabalho.

O uso de redes complexas para modelar fenômenos cujo sistema é composto por um grande número de unidades dinâmicas é muito utilizado com intuito de capturar as características globais deste sistema. A maioria das redes complexas utilizadas para modelar dados experimentais tem a forma de redes livre de escala, onde apenas alguns nós contêm a maioria das ligações. As redes do tipo estrela são uma das principais constituintes das redes livres de escala e o estudo das propriedades podem prover uma compreensão significativa no entendimento da sincronização em redes maiores. Por este motivo, foi utilizado neste trabalho redes do tipo estrela.

Apresentamos inicialmente dois modelos de osciladores, os modelos de Kuramoto e de Stuart-Landau. Foi mostrado que o primeiro é um caso limite do segundo, quando passamos a ter uma amplitude fixa e apenas a fase passa a ser variável dinâmica do sistema. A primeira parte desta pesquisa foi o estudo analítico da dinâmica de uma rede do tipo estrela utilizando o modelo de oscilador de Stuart-Landau. Neste estudo, todos os osciladores periféricos tinham a mesma frequência natural, que diferia apenas da frequência natural do oscilador central. Encontramos de maneira analítica o ponto de equilíbrio do sistema, sendo que este é único, e vimos que neste ponto, o sistema se encontra estacionário, não oscila. Também foi calculada a região no espaço de parâmetros onde este equilíbrio é estável. Mais adiante, foram encontradas as condições para que o sistema entrasse em sincronização global, sendo possível então desenhar o diagrama de bifurcação do sistema. Uma região se destacou

neste diagrama, como não pertencendo nem à região de sincronização e nem à região de equilíbrio estável. Foi mostrado numericamente que é nesta região que o sistema entra em sincronização remota.

Posteriormente, passamos a tratar este sistema numericamente para investigar a influência das condições iniciais e das frequências naturais dos osciladores na sincronização do sistema. Numa primeira abordagem, fixamos as condições iniciais e as frequências naturais dos osciladores periféricos, e variamos apenas a frequência do oscilador central. Foi possível observar que a diferença entre a média das frequências dos osciladores periféricos e frequência natural do oscilador central tem um papel importante na sincronização do sistema, tanto remota quanto global. Se essa diferença é muito pequena, temos a sincronização global do sistema para pequenas constantes de acoplamento entre os osciladores. Já quando essa diferença é grande, é necessária uma constante de acoplamento mais alta para que ocorra a sincronização global. Foi constatado que para surgimento da sincronização remota é necessário um valor intermediário da constante de acoplamento e de diferença de frequências. Após isso, fixamos a frequência do oscilador central e estudamos o quanto as frequências dos osciladores periféricos poderiam diferir umas das outras. Vimos que quanto mais as frequências dos nós periféricos se distanciam, maior é a força de acoplamento necessária para sincronizar remotamente o sistema, até que, para um determinado valor da diferença entre a menor e a maior frequência, a sincronização remota deixa de existir e o sistema apresenta somente o fenômeno da sincronização global.

A maior contribuição deste trabalho surgiu quando mantivemos as frequências naturais dos osciladores fixas e começamos a variar as suas condições iniciais. Observamos o fenômeno da multi-estabilidade, no sentido que o sistema atingia o estado de sincronização remota para uma determinada constante de acoplamento, mas que, ao aumentarmos este acoplamento, para alguns valores de condições iniciais, o sistema perdia totalmente esse estado de sincronização, de maneira que nenhum par de osciladores se encontrava sincronizado. Após aumentarmos mais a constante de acoplamento, o sistema voltava ao estado de sincronização remota para todas as condições iniciais e atingia, para acoplamentos maiores, a sincronização global. Foi mostrado que esse desaparecimento da sincronização para algumas condições iniciais não era resultado de um transiente de longo prazo e que o mesmo ocorre em redes com um maior e um menor número de osciladores periféricos. Foi também observado que os osciladores apresentam um movimento quase-periódico quando o sistema não se encontra sincronizado e quando apresenta sincronização remota. A única exceção ocorre para o oscilador central, que apresenta movimento periódico quando o sistema

tem uma constante de acoplamento suficientemente grande para entrar em sincronização remota mas isso não ocorre devido às condições iniciais utilizadas. Quando o sistema entra em sincronização global, todos os osciladores passam a exibir um movimento periódico. Por fim, foi feito o uso da dinâmica simbólica na tentativa de caracterizar a dinâmica do sistema. Foi possível notar que este método detectou de modo eficiente as mudanças de comportamento apresentadas pelo sistema quando as condições iniciais são variadas. Ele foi capaz de determinar com precisão o intervalo da constante de acoplamento no qual o comportamento do sistema apresenta sensibilidade às condições iniciais, não apresentando sincronização remota para todas as condições iniciais.

### **5.1 Trabalhos futuros**

Almeja-se em pesquisas futuras entender melhor as causas do desaparecimento da sincronização remota para alguns valores de condições iniciais em valores intermediários da constante de acoplamento. Além disso, a bacia de atração nesta região será melhor analisada, na tentativa de determinar se ela é uma bacia fractal ou não. Pretende-se também fazer o uso de redes com outras topologias e utilizar os modelos de Kuramoto com atraso e de Kuramoto-Sakaguchi.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACEBRÓN, J. A.; BONILLA, L. L.; VICENTE, C. J. P.; RITORT, F.; SPIGLER, R. The kuramoto model: a simple paradigm for synchronization phenomena.

**Reviews of modern physics**, APS, v. 77, n. 1, p. 137, 2005. [23](#), [26](#)

ALBERT, R.; BARABÁSI, A.-L. Statistical mechanics of complex networks.

**Reviews of modern physics**, APS, v. 74, n. 1, p. 47, 2002. [3](#)

ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos**: an introduction to dynamical systems. Berlin: Springer-Verlag, 1996. [10](#), [28](#), [34](#)

AMARAL, L. A. N.; SCALA, A.; BARTHELEMY, M.; STANLEY, H. E. Classes of small-world networks. **Proceedings of the national academy of sciences**, National Acad Sciences, v. 97, n. 21, p. 11149–11152, 2000. [3](#)

ANDRONOV, A. A.; KHAIKIN, S. E.; VITT, A. A. **Theory of oscillators**.

Mineola: Dover, 1966. [2](#), [27](#)

ARENAS, A.; DÍAZ-GUILERA, A.; KURTHS, J.; MORENO, Y.; ZHOU, C.

Synchronization in complex networks. **Physics Reports**, Elsevier, v. 469, n. 3, p. 93–153, 2008. [3](#)

AVOLI, M.; CURTIS, M. de. Gabaergic synchronization in the limbic system and its role in the generation of epileptiform activity. **Progress in neurobiology**,

Elsevier, v. 95, n. 2, p. 104–132, 2011. [1](#)

BARABÁSI, A.-L.; ALBERT, R. Emergence of scaling in random networks.

**science**, American Association for the Advancement of Science, v. 286, n. 5439, p. 509–512, 1999. [11](#)

BERGNER, A.; FRASCA, M.; SCIUTO, G.; BUSCARINO, A.; NGAMGA, E.;

FORTUNA, L.; KURTHS, J. Remote synchronization in star networks. **Physical Review E**, APS, v. 85, n. 2, p. 026208, 2012. [2](#), [3](#), [4](#), [29](#), [30](#), [51](#), [67](#), [69](#)

BOCCALETTI, S. The synchronized dynamics of complex systems. **Monograph series on nonlinear science and complexity**, Elsevier, v. 6, p. 1–239, 2008. [1](#)

BOCCALETTI, S.; KURTHS, J.; OSIPOV, G.; VALLADARES, D.; ZHOU, C.

The synchronization of chaotic systems. **Physics reports**, Elsevier, v. 366, n. 1, p. 1–101, 2002. [2](#)

BOCCALETTI, S.; LATORA, V.; MORENO, Y.; CHAVEZ, M.; HWANG, D.-U. Complex networks: structure and dynamics. **Physics reports**, Elsevier, v. 424, n. 4, p. 175–308, 2006. [3](#), [11](#)

BONATTI, I. S.; LOPES, A.; PERES, P. L.; AGULHARI, C. M. **Linearidade em sinais e sistemas**. São Paulo: Editora Blucher, 2016. [45](#)

BUCK, J. Synchronous rhythmic flashing of fireflies. ii. **Quarterly review of biology**, JSTOR, p. 265–289, 1988. [1](#)

BULLMORE, E.; SPORNS, O. Complex brain networks: graph theoretical analysis of structural and functional systems. **Nature Reviews Neuroscience**, Nature Publishing Group, v. 10, n. 3, p. 186–198, 2009. [3](#)

CAMACHO, J.; GUIMERÀ, R.; AMARAL, L. A. N. Robust patterns in food web structure. **Physical Review Letters**, APS, v. 88, n. 22, p. 228102, 2002. [3](#)

CASTRO, R. D.; GROSSMAN, J. W. Famous trails to paul erdős. **The Mathematical Intelligencer**, Springer, v. 21, n. 3, p. 51–53, 1999. [3](#)

DANIELS, B.; DISSANAYAKE, S.; TREES, B. Synchronization of coupled rotators: Josephson junction ladders and the locally coupled kuramoto model. **Physical Review E**, APS, v. 67, n. 2, p. 026216, 2003. [8](#)

DANIELS, B. C. Synchronization of globally coupled nonlinear oscillators: the rich behavior of the kuramoto model. **Ohio Wesleyan Physics Dept., Essay**, v. 7, n. 2, 2005. [9](#), [23](#), [24](#), [25](#), [26](#)

DONGES, J. F.; ZOU, Y.; MARWAN, N.; KURTHS, J. The backbone of the climate network. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 87, n. 4, p. 48007, 2009. [2](#), [3](#)

\_\_\_\_\_. Complex networks in climate dynamics. **The European Physical Journal Special Topics**, Springer, v. 174, n. 1, p. 157–179, 2009. [3](#)

EBEL, H.; MIELSCH, L.-I.; BORNHOLDT, S. Scale-free topology of e-mail networks. **Physical review E**, APS, v. 66, n. 3, p. 035103, 2002. [3](#)

FEIGENBAUM, M. J. Universal behavior in nonlinear systems. **Physica D: nonlinear phenomena**, Elsevier, v. 7, n. 1-3, p. 16–39, 1983. [11](#)

FOLLMANN, R.; MACAU, E. E.; ROSA, E.; PIQUEIRA, J. R. Phase oscillatory network and visual pattern recognition. **Neural Networks and Learning Systems, IEEE Transactions on**, IEEE, v. 26, n. 7, p. 1539–1544, 2015. [3](#), [26](#)

FORTUNA, L.; FRASCA, M. Experimental synchronization of single-transistor-based chaotic circuits. **Chaos: an interdisciplinary journal of nonlinear science**, AIP Publishing, v. 17, n. 4, p. 043118, 2007. 1

FRASCA, M.; BERGNER, A.; KURTHS, J.; FORTUNA, L. Bifurcations in a star-like network of stuart–landau oscillators. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, World Scientific, v. 22, n. 07, p. 1250173, 2012. 4, 33, 37, 38, 40, 41, 61

FREITAS, V.; MACAU, E. Uso de redes complexas para caracterização dinâmica de sistemas não lineares. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 4, n. 1, 2016. 12, 143

GAMBUZZA, L. V.; CARDILLO, A.; FIASCONARO, A.; FORTUNA, L.; GÓMEZ-GARDENES, J.; FRASCA, M. Analysis of remote synchronization in complex networks. **Chaos: an interdisciplinary journal of nonlinear science**, AIP Publishing, v. 23, n. 4, p. 043103, 2013. 3, 4, 30

GAMBUZZA, L. V.; GÓMEZ-GARDEÑES, J.; FRASCA, M. Amplitude dynamics favors synchronization in complex networks. **Scientific reports**, Nature Publishing Group, v. 6, 2016. 4, 30

GIL, S.; MIKHAILOV, A. S. Networks on the edge of chaos: global feedback control of turbulence in oscillator networks. **Physical Review E**, APS, v. 79, n. 2, p. 026219, 2009. 3

GIL, S.; ZANETTE, D. H. Coevolution of agents and networks: opinion spreading and community disconnection. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 356, n. 2, p. 89–94, 2006. 3

GÓMEZ-GARDENES, J.; MORENO, Y.; ARENAS, A. Paths to synchronization on complex networks. **Physical review letters**, APS, v. 98, n. 3, p. 034101, 2007. 67

GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. J. **Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields**. New York: Springer Science & Business Media, 2013. 27

HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. **Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos**. 3. ed. Waltham: Academic press, 2013. 35, 36, 39

HUYGENS, C. Christiaan Huygens' the pendulum clock, or, geometrical demonstrations concerning the motion of pendula as applied to clocks. Iowa State Pr, 1986. 7

IZHIKEVICH, E. M. **Dynamical systems in neuroscience**. Cambridge: MIT press, 2007. 3

JEONG, H.; MASON, S. P.; BARABÁSI, A.-L.; OLTVAI, Z. N. Lethality and centrality in protein networks. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 411, n. 6833, p. 41–42, 2001. 3

JEONG, H.; TOMBOR, B.; ALBERT, R.; OLTVAI, Z. N.; BARABÁSI, A.-L. The large-scale organization of metabolic networks. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 407, n. 6804, p. 651–654, 2000. 3

KISS, I. Z.; ZHAI, Y.; HUDSON, J. L. Emerging coherence in a population of chemical oscillators. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 296, n. 5573, p. 1676–1678, 2002. 8, 26

KURAMOTO, Y. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In: **International symposium on mathematical problems in theoretical physics**. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Haraki, H., 1975. p. 420–422. 3

\_\_\_\_\_. **Chemical oscillations, waves, and turbulence**. New York: Springer Science & Business Media, 2012. 3, 8, 26

LACERDA, J.; FREITAS, V.; MACAU, E. Dynamical characterization of nonlinear systems through complex networks. **Proceeding Series of the International Conference on Nonlinear Science and Complexity**, São José dos Campos, p. 1–4, 2016. 3, 11, 142

LEEUWEN, P. V.; GEUE, D.; THIEL, M.; CYSARZ, D.; LANGE, S.; ROMANO, M.; WESSEL, N.; KURTHS, J.; GRÖNEMEYER, D. Influence of paced maternal breathing on fetal–maternal heart rate coordination. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Acad Sciences, v. 106, n. 33, p. 13661–13666, 2009. 1

LEMONS, D. S.; LANGEVIN, P. **An introduction to stochastic processes in physics**. Baltimore: JHU Press, 2002. 1, 2

LOPPINI, A.; CAPOLUPO, A.; CHERUBINI, C.; GIZZI, A.; BERTOLASO, M.; FILIPPI, S.; VITIELLO, G. On the coherent behavior of pancreatic beta cell clusters. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 378, n. 44, p. 3210–3217, 2014. 1

MARAUN, D.; KURTHS, J. Epochs of phase coherence between el nino/southern oscillation and indian monsoon. **Geophysical Research Letters**, Wiley Online Library, v. 32, n. 15, 2005. 2

MATTHEWS, P. C.; MIROLLO, R. E.; STROGATZ, S. H. Dynamics of a large system of coupled nonlinear oscillators. **Physica D: nonlinear phenomena**, Elsevier, v. 52, n. 2-3, p. 293–331, 1991. 26, 27

MAY, R. M. et al. Simple mathematical models with very complicated dynamics. **Nature**, London, v. 261, n. 5560, p. 459–467, 1976. 11

MIROLLO, R. E.; STROGATZ, S. H. Amplitude death in an array of limit-cycle oscillators. **Journal of Statistical Physics**, Springer, v. 60, n. 1, p. 245–262, 1990. 1, 2

MOKHOV, I. I.; SMIRNOV, D. A.; NAKONECHNY, P. I.; KOZLENKO, S. S.; SELEZNEV, E. P.; KURTHS, J. Alternating mutual influence of el-niño/southern oscillation and indian monsoon. **Geophysical Research Letters**, Wiley Online Library, v. 38, n. 8, 2011. 2

NÉDA, Z.; RAVASZ, E.; BRECHET, Y.; VICSEK, T.; BARABÁSI, A.-L. Self-organizing processes: the sound of many hands clapping. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 403, n. 6772, p. 849–850, 2000. 1

NICOSIA, V.; VALENCIA, M.; CHAVEZ, M.; DÍAZ-GUILERA, A.; LATORA, V. Remote synchronization reveals network symmetries and functional modules. **Physical review letters**, APS, v. 110, n. 17, p. 174102, 2013. 2, 31

OGATA, K.; YANG, Y. **Modern control engineering**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1970. 46

OSIPOV, G. V.; KURTHS, J.; ZHOU, C. **Synchronization in oscillatory networks**. New York: Springer Science & Business Media, 2007. 3

PANTALEONE, J. Synchronization of metronomes. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 70, n. 10, p. 992–1000, 2002. 1

PANTELEY, E.; LORIA, A.; ATI, A. E. On the stability and robustness of stuart-landau oscillators\*\* this article is supported by government of russian federation (grant 074-u01). **IFAC-PapersOnLine**, Elsevier, v. 48, n. 11, p. 645–650, 2015. [3](#), [27](#)

PIKOVSKY, A.; ROSENBLUM, M.; KURTHS, J. **Synchronization**: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge: Cambridge university press, 2003. [1](#), [2](#), [7](#), [8](#), [10](#), [17](#), [18](#), [22](#)

PLUCHINO, A.; LATORA, V.; RAPISARDA, A. Changing opinions in a changing world: a new perspective in sociophysics. **International Journal of Modern Physics C**, World Scientific, v. 16, n. 04, p. 515–531, 2005. [1](#)

PONTRIAGUINE, L.; TER-MKRTCJAN, G. **Equations différentielles ordinaires**. Salt Lake City: Éditions Mir, American Elsevier Publishing Co., 1975. [46](#)

PREMALATHA, K.; CHANDRASEKAR, V.; SENTHILVELAN, M.; LAKSHMANAN, M. Imperfectly synchronized states and chimera states in two interacting populations of nonlocally coupled stuart-landau oscillators. **Physical Review E**, APS, v. 94, n. 1, p. 012311, 2016. [100](#)

PUNETHA, N.; UJJWAL, S. R.; ATAY, F. M.; RAMASWAMY, R. Delay-induced remote synchronization in bipartite networks of phase oscillators. **Physical Review E**, APS, v. 91, n. 2, p. 022922, 2015. [31](#)

SAKAGUCHI, H.; KURAMOTO, Y. A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entertainment. **Progress of Theoretical Physics**, Oxford University Press, v. 76, n. 3, p. 576–581, 1986. [31](#)

SHERMAN, A.; RINZEL, J.; KEIZER, J. Emergence of organized bursting in clusters of pancreatic beta-cells by channel sharing. **Biophysical journal**, The Biophysical Society, v. 54, n. 3, p. 411, 1988. [1](#)

SOLE, R. V.; MONTROYA, M. Complexity and fragility in ecological networks. **Proceedings of the Royal Society of London B: biological sciences**, The Royal Society, v. 268, n. 1480, p. 2039–2045, 2001. [3](#)

STROGATZ, S. **Sync**: the emerging science of spontaneous order. New York: Hyperion, 2003. [1](#), [23](#), [24](#)

- STROGATZ, S. H. From kuramoto to crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. **Physica D: nonlinear phenomena**, Elsevier, v. 143, n. 1, p. 1–20, 2000. 2, 8, 23, 24
- \_\_\_\_\_. **Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering**. Boulder: Westview press, 2014. 11, 19, 20, 21, 22, 28, 38
- STROGATZ, S. H.; MIROLLO, R. E. Stability of incoherence in a population of coupled oscillators. **Journal of Statistical Physics**, Springer, v. 63, n. 3, p. 613–635, 1991. 2
- TESCHE, C. D.; CLARKE, J. Dc squid: noise and optimization. **Journal of Low Temperature Physics**, Springer, v. 29, n. 3, p. 301–331, 1977. 1, 2
- ULLNER, E.; KOSESKA, A.; KURTHS, J.; VOLKOV, E.; KANTZ, H.; GARCÍA-OJALVO, J. Multistability of synthetic genetic networks with repressive cell-to-cell communication. **Physical Review E**, APS, v. 78, n. 3, p. 031904, 2008. 3
- VARELA, F.; LACHAUX, J.-P.; RODRIGUEZ, E.; MARTINERIE, J. The brainweb: phase synchronization and large-scale integration. **Nature reviews neuroscience**, Nature Publishing Group, v. 2, n. 4, p. 229–239, 2001. 1
- VLASOV, V.; MACAU, E. E.; PIKOVSKY, A. Synchronization of oscillators in a kuramoto-type model with generic coupling. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, AIP, v. 24, n. 2, p. 023120, 2014. 31
- WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of small-world networks. **nature**, Nature Publishing Group, v. 393, n. 6684, p. 440–442, 1998. 3
- WINFREE, A. T. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. **Journal of theoretical biology**, Elsevier, v. 16, n. 1, p. 15–42, 1967. 23
- WONG, R.; TRAUB, R.; MILES, R. Cellular basis of neuronal synchrony in epilepsy. **Advances in neurology**, v. 44, p. 583–592, 1985. 1
- YU, X.; JIA, Z.; JIAN, X. Logistic mapping-based complex network modeling. **Applied Mathematics**, Scientific Research Publishing, v. 4, n. 11, p. 1558, 2013. 12, 143



## **PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE**

### **Teses e Dissertações (TDI)**

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

### **Manuais Técnicos (MAN)**

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

### **Notas Técnico-Científicas (NTC)**

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programas de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

### **Relatórios de Pesquisa (RPQ)**

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

### **Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)**

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

### **Publicações Didáticas (PUD)**

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

### **Publicações Seriadas**

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Contam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

### **Programas de Computador (PDC)**

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. Aceitam-se tanto programas fonte quanto os executáveis.

### **Pré-publicações (PRE)**

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.