MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS

AUTORIZAÇÃO PARA PUBLICAÇÃO
AUTHORIZATION FOR PUBLICATION

**PALAVRAS CHAVES/KEY WORDS**

SISTEMA DE MANUTENÇÃO
ALGORITMO DE ITERAÇÃO DE POLÍTICAS
PROCESSO SEMI-MARKOVIANO DE DECISÃO

**AUTORIZADA POR/AUTHORIZED BY**

Marco Antonio Raupp
p. Diretor Geral

**AUTOR RESPONSAVEL / RESPONSIBLE AUTHOR**

Solon V. de Carvalho

**DISTRIBUIÇÃO/DISTRIBUTION**

- [ ] INTERNA / INTERNAL
- [x] EXTERNA / EXTERNAL
- [ ] RESTRITA / RESTRICTED

**REVISADA POR / REVISED BY**

(Vide Obs.)

**CDU/UDC**

62:658.274

**DATA / DATE**

Julho 1987

**PUBLICAÇÃO Nº / PUBLICATION NO**

INPE-4245-PRE/1118

**ORIGEM / ORIGIN**

LAC

**PROJETO / PROJECT**

POPES

**TÍTULO/TITLE**

UM PROBLEMA DE REPARO DE MÁQUINAS COM UM NÚMERO VARIÁVEL DE SERVIDORES DIFERENTES

**Nº DE PAG. / NO OF PAGES**

12

**ULTIMA PAG. / LAST PAGE**

07

**VERSÃO / VERSION**

--

**Nº DE MAPAS / NO OF MAPS**

--

**AUTORES/AUTHORSHIP**

Solon Venâncio de Carvalho
Paulo Renato de Morais

**RESUMO - NOTAS / ABSTRACT - NOTES**

Considera-se um sistema de manutenção que consiste de um número finito de máquinas idênticas trabalhando em paralelo numa linha de produção, um número finito de máquinas de reserva e uma oficina de reparo cum um número finito de servidores diferentes. O sistema é observado em instantes de final de reparo e/ou instantes de quebra de máquinas. Nestes instantes deve-se decidir quais servidores serão alocados até o próximo instante de observação do sistema. A estrutura de custos inclui custos de perda de produção, custos de reparo, custos de espera das máquinas na fila de reparo, custos de ociosidade de servidores alocados e custos de troca de servidores. O objetivo é determinar a política de controle que minimiza o custo médio a longo prazo do sistema.

**OBSERVAÇÕES/REMARKS**

Trabalho aceito para apresentação no VII Encontro Nacional de Engenharia de Produção, a realizar-se de 6 a 9 de outubro de 1987 em Niterói-RJ.

*Dispensado da Revisão Técnica e Revisão de Linguagem.

*ABSTRACT*

*We consider a maintenance system consisting of a finite number of identical machines working in parallel at the production facility, a finite number of spare machines, and a repair facility with a finite number of heterogeneous servers. The system is observed at repair completion epochs and/or machine breakdown epochs. At these epochs a decision has to be made about which servers should be turned on until the next decision epoch. The cost structure includes lost production costs, repair costs, holding costs, idleness costs, and switch-over costs. The objective is to determine the control policy which minimizes the long-run expected average cost per unit time.*

∴

SUMÁRIO

∴

## SUMÁRIO

Considera-se um sistema de manutenção que consiste de um número finito de máquinas idênticas trabalhando em paralelo numa linha de produção, um número finito de máquinas de reserva e uma oficina de reparos com um número finito de servidores diferentes. O sistema é observado em instantes de final de reparo e/ou instantes de quebra de máquinas. Nestes instantes deve-se decidir quais servidores serão alocados até o próximo instante de observação do sistema. A estrutura de custos inclui custos de perda de produção, custos de reparo, custos de espera das máquinas na fila de reparo, custos de ociosidade de servidores alocados e custos de troca de servidores. O objetivo é determinar a política de controle que minimiza o custo médio a longo prazo do sistema.

## 1 - INTRODUÇÃO

Considera-se um sistema de manutenção que consiste de uma linha de produção com M Máquinas, um conjunto de R máquinas de reserva e uma oficina de reparo com c servidores. As máquinas na linha de produção trabalham independentemente em paralelo e todas as máquinas do sistema são idênticas, com tempo de funcionamento até a quebra exponencialmente distribuído com média $1/\lambda$. As máquinas de reserva são usadas para prevenir o sistema contra perda de produção e não estão sujeitas a quebra enquanto estiverem paradas. A linha de produção pode operar incompleta, desde que exista pelo menos uma máquina disponível para produção.

Quando uma máquina quebra, ela é enviada à oficina de reparo e é substituída por uma máquina de reserva (se disponível). Se houver servidor disponível, o reparo é iniciado imediatamente, caso contrário a máquina entra numa fila para reparo. No término do reparo de uma máquina, ela é enviada à linha de produção; se a linha de produção estiver incompleta a máquina começa a trabalhar imediatamente, caso contrário ela é considerada máquina de reserva.

O tempo de reparo de cada máquina é aleatório e exponencialmente distribuído com média $1/\mu_k$ quando o servidor k ($k=1,2,...,c$) o está realizando. Cada servidor pode ser alocado ou desalocado dependendo do número de máquinas quebradas esperando reparo. Por hipótese assume-se que $\mu_1 < \mu_2 < ... < \mu_c$.

A estrutura de custos inclui: a) custo de perda de produção à taxa p.i quando a linha de produção estiver trabalhando com M-i máquinas; b) custo de espera no reparo à taxa h.i quando existem i máquinas quebradas no sis tema; c) custo de reparo à taxa $r_k$ quando o servidor k estiver alocado e realizando um reparo (k=1,2,...c); d) custo de alocação e desalocação de servidor, que consiste em um custo fixo $q_k$ quando o servidor k for alocado e de um custo fixo $d_k$ quando o servidor k for desalocado.

O problema aqui tratado consiste em obter uma política de controle ótima que determine quantos e quais servidores devem ser alocados ou desalocados em cada instante de observação do sistema de modo a minimizar o custo médio a longo prazo. Para a obtenção desta política de custo mínimo o sistema é modelado como um Processo Semi-markoviano de Decisão e é utilizado um Algoritmo de Iteração de Políticas.

Costa (1) estuda um sistema semelhante ao aqui tratado. Este autor considera um sistema de manutenção onde se controla o número de servidores com o objetivo de minimizar o custo médio a longo prazo do sistema. Este sistema consiste numa linha de produção com M máquinas, um conjunto de R máquinas de reserva e uma oficina de reparo composta de um número variável de servidores iguais. O tempo de vida de cada máquina e o tempo de cada reparo são considerados exponencialmente distribuídos. A estrutura de custos é a mesma considerada no presente trabalho. O sistema é observado em instantes de quebra de máquinas e de término de reparo; nestes instantes deve-se decidir quantos servidores serão alocados até o próximo instante de observação do sistema.

O presente trabalho é uma extensão do trabalho de Costa onde os servidores não são necessariamente iguais. Uma outra modificação efetuada no modelo desenvolvido por Costa foi na definição dos estados do sistema, ou seja, nas informações utilizadas para decidir quais servidores alocar em cada instante de observação do sistema. Costa caracteriza um estado pelo número de máquinas quebradas no sistema e pelos servidores já alocados na oficina de reparo. Desta forma, sempre que o sistema atinge um dado estado, seja por quebra de máquinas, seja por término de reparo, a decisão tomada é a mesma. Em outra palavras, todas as alocações e desalocações efetuadas em instantes de final de reparo devem necessariamente ser efetuadas também em instantes de quebra de máquinas, para um mesmo estado observado.

Conjecturou-se que este fato poderia ocasionar um aumento nos custos de alocação e desalocação de servidores que eventualmente prejudicaria o custo mínimo do sistema. Desenvolveu-se então neste trabalho um modelo onde os estados são definidos como em Costa (1), exceto por acrescentar uma diferenciação entre os instantes de quebra de máquinas e os instantes de final de reparo.

## 2 - O MODELO SEMI-MARKOVIANO DE DECISÃO

Observa-se o sistema em instantes de quebra de máquina e em instantes de final de reparo. Nestes instantes o sistema pode ser classificado em um dos estados do espaço de estados finito:

$$I = \{(i,a,\ell) : i=0,1,\ldots,M+R,\ a \in A \text{ e } \ell=0,1\},$$

onde o estado $(i,a,\ell)$ significa que existem $i$ máquinas quebradas no sistema, que a ação $a$ pertencente ao espaço de ações $A$ foi tomada no instante de observação anterior e que o sistema está sendo observado num instante de quebra de máquina, se $\ell=0$, ou num instante de final de reparo se $\ell=1$. Ainda nestes instantes deve-se decidir por uma ação pertencente ao espaço de ações:

$$A=\{(b_1,b_2,\ldots,b_c) : b_k=0,1 \text{ para } k=1,2,\ldots c\},$$

onde $b_k=0$ significa não alocar o servidor $k$ até o próximo instante de observação do sistema e $b_k=1$ significa alocá-lo até o próximo instante de observação.

Para a otimização do sistema através deste modelo utiliza-se o Algoritmo de Iteração de Políticas apresentado em Morais e Carvalho (2). A utilização desse algoritmo requer o cálculo das quantidades definidas a seguir. Dado que o sistema é observado num estado $(i_1,a_1,\ell_1) \varepsilon I$ e uma ação $a \varepsilon A$ foi tomada, sejam:

$P(i_1,a_1,\ell_1;i_2,a_2,\ell_2;a)$ = probabilidade de o sistema estar no estado $(i_2,a_2,\ell_2)$ no próximo instante de decisão,

$\tau(i_1,a_1,\ell_1;a)$ = tempo esperado até o próximo instante de decisão, e

$C(i_1,a_1,\ell_1;a)$ = custo esperado incorrido até o próximo instante de decisão.

Para calcular estas quantidades assume-se que $a_1=(b_1^1,b_2^1,\ldots,b_c^1)$ e $a=(b_1,b_2,\ldots,b_c)$ e define-se o conjunto de índices $\{k_1,k_2,\ldots,k_n\}$, com $n \leq c$, tal que $b_{k_i}=1$; desta forma este conjunto de índices indica quais servidores serão alocados pela ação $a$.

Em seguida, dado que o sistema está no estado $(i_1,a_1,\ell_1) \in I$ e a ação a foi tomada, sejam:

$$M_{i_1} = \begin{cases} M & \text{se } i_1 \leq R \\ M+R-i_1 & \text{se } i_1 > R, \end{cases}$$

$$\lambda_{i_1} = M_{i_1}\lambda,$$

$$\mu_a = (\mu'_1,\mu'_2,\ldots\mu'_n) = (\mu_{k_1},\mu_{k_2},\ldots,\mu_{k_n}),$$

$$r_a = (r'_1,r'_2,\ldots,r'_n) = (r_{k_1},r_{k_2},\ldots,r_{k_n}) \text{ e}$$

$$s_a = (s'_1,s'_2,\ldots,s'_n) = (s_{k_1},s_{k_2},\ldots,s_{k_n}),$$

onde $M_{i_1}$ é o número de máquinas em funcionamento na linha de produção, $\lambda_{i_1}$ é a taxa global de quebra de máquinas e $\mu_a$, $r_a$ e $s_a$ são vetores contendo os dados dos servidores alocados pela ação a.

Assume-se nos cálculos que seguem que quando se aloca um número maior de servidores do que o número de máquinas quebradas no sistema então os servidores mais rápidos executarão os reparos.

A taxa global de reparo é:

$$\rho(i_1,a_1,\ell_1;a) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=\max(1,n-i_1+1)}^{n} \mu'_k & \text{se } n>0 \\ 0 & \text{se } n=0 \end{cases}$$

Neste ponto já é possível obter:

$$\tau(i_1,a_1,\ell_1;a) = [\lambda_{i_1} + \rho(i_1,a_1,\ell_1;a)]^{-1} \text{ e}$$

$$P(i_1,a_1,\ell_1;i_2,a_2,\ell_2;a) = \begin{cases} \dfrac{\rho(i_1,a_1,\ell_1;a)}{\lambda_{i_1} + \rho(i_1,a_1,\ell_1;a)} & \text{se } a_2=a, i_2=i_1-1 \text{ e } \ell_2=1 \\[2ex] \dfrac{\lambda_{i_1}}{\lambda_{i_1} + \rho(i_1,a_1,\ell_1;a)} & \text{se } a_2=a, i_2=i_1+1 \text{ e } \ell_2=0 \\[2ex] 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para calcular $C(i_1,a_1,\ell_1;a)$ faz-se:

$$C(i_1,a_1,\ell_1;a) = B(i_1,a_1,\ell_1;a) + H(i_1,a_1,\ell_1;a) + R(i_1,a_1,\ell_1;a) + O(i_1,a_1,\ell_1;a) + S(a_1,a)$$

onde as parcelas do segundo membro da equação são, respectivamente, os custos esperados de perda de produção, de espera no reparo, de reparo, de ociosidade de servidor e custo de (des)alocação de servidor incorridos até o próximo instante de decisão.

Cada uma destas parcelas pode ser calculada através das expressões:

$$B(i_1,a_1,\ell_1;a) = p(M-M_{i_1})\ \tau(i_1,a_1,\ell_1;a)$$

$$H(i_1,a_1,\ell_1;a) = h\ i\ \tau(i_1,a_1,\ell_1;a)$$

$$R(i_1,a_1,\ell_1;a) = \begin{cases} \tau(i_1,a_1,\ell_1;a) \displaystyle\sum_{k=\max(1,n-i+1)}^{n} r'_k & \text{se } n>0 \\ 0 & \text{se } n=0 \end{cases}$$

$$O(i_1,a_1,\ell_1;a) = \begin{cases} \tau(i_1,a_1,\ell_1;a) \displaystyle\sum_{k=1}^{n-i} s'_k & \text{se } n-i>0 \\ 0 & \text{se } n-i\leq 0 \end{cases}$$

$$S(a_1,a) = \sum_{i\varepsilon\phi} q_i + \sum_{i\varepsilon\Psi} d_i$$

onde $\phi = \{i/b_i^1 = 0 \text{ e } b_i = 1\}$ e $\Psi = \{i/b_i^1 = 1 \text{ e } b_i = 0\}$.

## 3 - RESULTADOS NUMÉRICOS

Seja um sistema de manutenção caracterizado pelos seguintes valores: $M=5$, $R=2$, $c=2$, $\lambda=1$, $\mu_1=2$, $\mu_2=5$, $p=80$, $h=10$, $r_1=150$, $r_2=300$, $s_1=150$, $s_2=300$, $q_1=1$, $q_2=0{,}5$, $d_1=0{,}5$ e $d_2=1$.

Para este exemplo o espaço de estados e o espaço de ações são respectivamente:

$$I = \{(i,a,\ell): i=0,1,\ldots,7,\ a\varepsilon A \text{ e } \ell=0,1\} \text{ e}$$

$$A = \{(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,1)\}.$$

Por simplicidade, as quatro ações do espaço de estados podem ser representadas respectivamente pelos números 1,2,3 e 4. Desta forma a ação 2, por exemplo, significa alocar o servidor 1 e não alocar o servidor 2.

O custo mínimo obtido para este sistema é 340,99, que corresponde à política de controle mostrada a seguir. As políticas de controle podem ser representadas por duas matrizes denominadas $f_o$ e $f_1$. Os elementos $f_\ell(i,j)$ de cada matriz representam a ação prescrita pela política de controle para cada estado $(i,j,\ell)$; neste exemplo tem-se $i=0,1,\ldots 7$, $j=1,2,3,4$ e $\ell=0,1$. Usando esta notação, a política de custo mínimo obtida é :

$$f_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Observando a política de custo mínimo, vê-se que $f_o = f_1$, ou seja, que todas as alocações e desalocações de servidores efetuadas num estado $(i,a,1)$ também são efetuadas nos estados $(i,a,0)$. Isto significa que na política ótima não há distinção entre os instantes de final de reparo e os instantes de quebra de máquinas.

## 4 - CONCLUSÕES

Pelo fato do espaço de estados diferenciar os instantes de final de reparo dos instantes de quebra de máquinas, o modelo aqui desenvolvido engloba dois outros modelos possíveis: um modelo onde o sistema é observado apenas em instantes de final de reparo e um modelo onde o sistema é observado em instantes de final de reparo e em instantes de quebra de máquinas sem diferenciar estes dois tipos de observação. No primeiro caso tem-se $f_o(i,j) = j$ para todo $i \in \{0,1,...,M+R\}$ e $j \in A$ e no segundo caso tem-se $f_o = f_1$.

Para todos os exemplos numéricos testados verificou-se que a política ótima satisfaz $f_o = f_1$. Este fato leva à conjectura de que não é necessário diferenciar os instantes de quebra de máquinas dos instantes de final de reparo já na modelagem do sistema. Leva também à conjectura de que é melhor observar o sistema em instantes de final de reparo e em instantes de quebra de máquinas do que observá-lo apenas em instantes de final de reparo, independentemente dos valores dos custos de alocação e desalocação de servidores.

Finalizando, salienta-se que, apesar de a modificação efetuada na definição de estados do sistema em relação ao modelo de Costa (1) parecer desnecessária, o modelo aqui desenvolvido generaliza aquele modelo, pois considera servidores diferentes.

## BIBLIOGRAFIA

[1] COSTA, S.R.X. "Um problema de determinação de política ótima para sistemas de manutenção com máquinas de reserva e número variável de servidores". Dissertação de Mestrado em Análise de Sistemas e Aplicações. São José dos Campos, Instituto de Pesquisas Espaciais, 1984.

[2] MORAIS, P.R.; CARVALHO, S.V. "Optimization of a Controlled Two-Server Maintenance System". Accepted for presentation at the 11th Triennial Conference on Operations Research, 10-14 August 1987, Buenos Aires, Argentina.

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
**INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**PROPOSTA PARA PUBLICAÇÃO**

☐ DISSERTAÇÃO
☐ TESE
☒ RELATÓRIO
☐ OUTROS

**TÍTULO**

UM PROBLEMA DE REPARO DE MÁQUINAS COM UM NÚMERO VARIÁVEL DE SERVIDORES DIFERENTES

**IDENTIFICAÇÃO**

**AUTOR(ES)**

SOLON VENÂNCIO DE CARVALHO
PAULO RENATO DE MORAIS

**ORIENTADOR**

**CO-ORIENTADOR**

**DIVULGAÇÃO**

☒ EXTERNA ☐ INTERNA ☐ RESTRITA

**EVENTO/MEIO**

☒ CONGRESSO ☐ REVISTA ☐ OUTROS

| LIMITE | DEFESA | CURSO | ORGÃO |
|---|---|---|---|
| __/__/__ | __/__/__ | | |

**REV. TÉCNICA**

NOME DO REVISOR: *

| RECEBIDO | DEVOLVIDO | ASSINATURA |
|---|---|---|
| __/__/__ | __/__/__ | |

**APROVAÇÃO**

NOME DO RESPONSÁVEL: LEON SINAY
Chefe do Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada

APROVADO: ☒ SIM ☐ NÃO
DATA: 05 08 87
ASSINATURA:

**REV. LINGUAGEM**

| Nº | PRIOR. | RECEBIDO | NOME DO REVISOR |
|---|---|---|---|
| | | __/__/__ | * |

| PÁG. | DEVOLVIDO | ASSINATURA |
|---|---|---|
| | __/__/__ | |

**DATILOGRAFIA**

OS AUTORES DEVEM MENCIONAR NO VERSO INSTRUÇÕES ESPECÍFICAS, ANEXANDO NORMAS, SE HOUVER

| RECEBIDO | DEVOLVIDO | NOME DA DATILÓGRAFA |
|---|---|---|
| 16.07.87 | 06/08/87 | Rosa |

Nº DA PUBLICAÇÃO: 4245 PRE/1118 PÁG.:
CÓPIAS: Nº DISCO: LOCAL:

**DIRETOR**

AUTORIZO A PUBLICAÇÃO

☐ SIM
☐ NÃO __/__/__

**OBSERVAÇÕES E NOTAS**

Trabalho aceito para apresentação no VII Encontro Nacional de Engenharia de Produção, 6 a 9 de outubro de 1987, Niterói, RJ.

* Os autores dispensam a revisão técnica e a revisão de linguagem.

LEON SINAY
Chefe do Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada

DATA LIMITE: 17/07/87

APÓS A PUBLICAÇÃO, ESTA FICHA SERÁ ARQUIVADA JUNTAMENTE COM A VERSÃO ORIGINAL

INPE 106