MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21b/2018/02.26.14.54-TDI

DINÂMICA DO SWING-BY: ANÁLISE DAS LIMITAÇÕES PELA APROXIMAÇÃO DAS CÔNICAS CONJUGADAS

Rodolfo Batista Negri

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Alexander Sukhanov, aprovada em 23 de fevereiro de 2018.

URL do documento original:
<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3QKGNNL>

INPE
São José dos Campos
2018

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
Gabinete do Diretor (GBDIR)
Serviço de Informação e Documentação (SESID)
Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970
São José dos Campos - SP - Brasil
Tel.:(012) 3208-6923/6921
E-mail: pubtc@inpe.br

COMISSÃO DO CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (DE/DIR-544):
Presidente:
Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação (CPG)
Membros:
Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (COCST)
Dr. André de Castro Milone - Coordenação-Geral de Ciências Espaciais e Atmosféricas (CGCEA)
Dra. Carina de Barros Melo - Coordenação de Laboratórios Associados (COCTE)
Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia e Tecnologia Espacial (CGETE)
Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação-Geral de Observação da Terra (CGOBT)
Dr. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CGCPT)
Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SESID)
BIBLIOTECA DIGITAL:
Dr. Gerald Jean Francis Banon
Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SESID)
REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:
Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SESID)
Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SESID)
EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:
Marcelo de Castro Pazos - Serviço de Informação e Documentação (SESID)
André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21b/2018/02.26.14.54-TDI

DINÂMICA DO SWING-BY: ANÁLISE DAS LIMITAÇÕES PELA APROXIMAÇÃO DAS CÔNICAS CONJUGADAS

Rodolfo Batista Negri

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Alexander Sukhanov, aprovada em 23 de fevereiro de 2018.

URL do documento original:
<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3QKGNNL>

INPE
São José dos Campos
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Negri, Rodolfo Batista.

N312d Dinâmica do swing-by: análise das limitações pela aproximação das cônicas conjugadas / Rodolfo Batista Negri. – São José dos Campos : INPE, 2018.

xxii + 99 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21b/2018/02.26.14.54-TDI)

Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2018.

Orientadores : Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Alexander Sukhanov.

1. Manobra gravitacionalmente assistida. 2. Flyby. 3. Swing-by. 4. Cônicas conjugadas. 5. Problema circular restrito de três corpos. I.Título.

CDU 621.3.032.21

Esta obra foi licenciada sob uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License.

Aluno (a): *Rodolfo Batista Negri*

Título: "DINÂMICA DO SWING-BY: ANÁLISE DAS LIMITAÇÕES PELA APROXIMAÇÃO DAS CÔNICAS CONJUGADAS"

Aprovado (a) pela Banca Examinadora em cumprimento ao requisito exigido para obtenção do Título de *Mestre* em

Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle

Dr. Mario Cesar Ricci

Presidente / INPE / SJCampos - SP

( ) Participação por Video - Conferência

Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado

Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

( ) Participação por Video - Conferência

Dr. Alexander Sukhanov

Orientador(a) / IKI / Moscou - RU

( ) Participação por Video - Conferência

Dr. Diogo Merguizo Sanchez

Membro da Banca / INPE / São José dos Campos - SP

( ) Participação por Video - Conferência

Dr. Jorge Kennety Silva Formiga

Convidado(a) / UNESP / São José dos Campos - SP

( ) Participação por Video - Conferência

Este trabalho foi aprovado por:

( ) maioria simples

(X) unanimidade

São José dos Campos, 23 de fevereiro de 2018

"A Terra é o berço da humanidade, mas ninguém pode viver no berço para sempre".

Konstantin Tsiolkovsky

"Minha pobreza tal é
que não tenho presente melhor:
trago este papel de jornal
para lhe servir de cobertor
cobrindo-se assim de letras
vai um dia ser doutor".

João Cabral de Melo Neto
em *"Morte e Vida Severina"*, 1967

"Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino. Esses quefazeres se encontram um no corpo do outro. Enquanto ensino continuo buscando, reprocurando. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquiso para constatar, constatando, intervenho, intervindo educo e me educo. Pesquiso para conhecer o que ainda não conheço e comunicar ou anunciar a novidade".

Paulo Freire
em *"Pedagogia da Autonomia - Saberes Necessários à Prática Educativa"*, 1996

A meus pais ***Salete*** *e* ***Silvério***

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a meus pais por me educarem da melhor forma possível, na dedicação e no exemplo. Com os quais aprendi muito da consciência que hoje tenho.

Agradeço ao Bertachini por me orientar, tornando-se nesse tempo que trabalhamos juntos um exemplo do profissional que pretendo ser, ao sempre estar aberto ao diálogo, respeitoso à autonomia do estudante e exercitando as melhores práticas educativas e científicas.

Agradeço ao Sasha que sempre me atendeu com muita atenção, sempre disposto a sanar minhas dúvidas.

Gostaria de agradecer pelo apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) em razão da concessão da bolsa no âmbito do Convênio FAPESP/CAPES, concedida pela FAPESP, processo nº 2016/18613-7, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

Agradeço aos professores e colegas que honraram o papel da educação como instrumento de liberdade, autonomia, curiosidade e realização pessoal.

Agradeço aos produtores e propagadores de conhecimento sem os quais este trabalho seria impossível.

Agradeço a todos trabalhadores e trabalhadoras que mantêm esse Instituto e toda sociedade em funcionamento.

RESUMO

A manobra de *swing-by* é uma técnica utilizada para alterar a energia de uma espaçonave por meio de uma aproximação com um corpo celeste. Esse procedimento foi utilizado milhares de vezes em missões reais. Usualmente, a primeira abordagem para projetar esse tipo de missão é baseada no modelo das Cônicas Conjugadas, o qual divide a manobra em três etapas estudadas pela dinâmica de dois corpos. Esse procedimento leva a um erro na estimação das várias quantidades físicas envolvidas, que dependem da geometria da manobra e do sistema de primários considerado. Portanto, o objetivo deste trabalho é estudar os erros causados por essa aproximação. A comparação dos resultados é feita com as trajetórias obtidas utilizando o modelo mais realista do Problema Circular Restrito de Três Corpos, assumido aqui como fornecendo os "valores reais" correspondentes a manobra. Os resultados aqui apresentados descrevem os efeitos de cada parâmetro relacionado ao *swing-by*. Primeiramente, uma análise dos erros na manobra aplicada à Lua é realizada. O estudo é então generalizado para cobrir diferentes parâmetros de massa, e suas influências são analisadas para se obter uma ideia da quantidade de erro esperada para um determinado sistema de primários. Os resultados aqui apresentados podem ajudar na estimação de erros em uma análise preliminar de missão utilizando a aproximação das Cônicas Conjugadas.

Palavras-chave: Manobra gravitacionalmente assistida. *Flyby*. *Swing-by*. Cônicas conjugadas. Problema circular restrito de três corpos.

SWING-BY DYNAMICS: ANALYSIS OF THE LIMITATIONS OF THE PATCHED-CONIC APPROACH

ABSTRACT

The swing-by maneuver is a technique used to change the energy of a spacecraft by using a close approach in a celestial body. This procedure was used many times in real missions. Usually, the first approach to design this type of mission is based in the patched-conics model, which splits the maneuver into three phases modeled by the two-body dynamics. This approach causes an error in the estimation of the various physical quantities involved, which depends on the geometry of the maneuver and the system of primaries considered. Therefore, the goal of this work is to study the errors caused by this approximation. The comparison of the results are made with the trajectories obtained using the more realistic circular restricted three-body problem, assumed here to give the "real values" for the maneuver. The results shown here describe the effects of each parameter involved in the swing-by. Firstly, an analysis of the errors in a maneuver applied to the Moon is performed. The study is then generalized to cover different mass parameters, and its influence is analysed to give an idea of the amount of the error expected for a given system of primaries. The results presented here may help in estimating errors in the preliminary mission analysis using the patched-conics approach.

Keywords: Gravity-assist maneuver. Flyby. Swing-by. Patched-conics. Circular restricted three-body problem.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

2.1 Sistema de referência xyz, sinódico e centrado no centro de massa. Fonte: Produção do autor. 10
2.2 Sistema de referência XYZ, inercial e centrado no centro de massa. Fonte: Produção do autor. 11
2.3 Representação dos parâmetros que definem um *swing-by* no sistema de referência $X'Y'Z'$ centrado no segundo primário, onde o *swing-by* é realizado. Fonte: Produção do autor. 13

3.1 Curvas de nível para $\frac{dE}{dt}$ no plano z=0 e x=0 próximo a Lua. Fonte: Produção do autor. 19
3.2 Representação tridimensional em cortes de $\frac{dE}{dt}$. Fonte: Produção do autor. 19
3.3 Visualização geral do Sistema Terra-Lua para $\frac{dE}{dt}$ no plano z=0. Fonte: Produção do autor. 20
3.4 Trajetória da espaçonave no sistema Lua-Terra no referencial sinódico xyz. Fonte: Produção do autor. 20
3.5 Trajetória da espaçonave no Referencial Inercial centrado no baricentro Terra-Lua. Fonte: Produção do autor. 21
3.6 Gráfico energia vs tempo. Fonte: Produção do autor. 22
3.7 Curvas de nível de dE/dt e trajetória da espaçonave no sistema sinódico próximo a Lua. Fonte: Produção do autor. 22

4.1 Variação da energia e inclinação obtidas pelo modelo das Cônicas Conjugadas para diferentes valores de v_p, com $r_p = 0.00675$ e $\gamma = 0°$. Fonte: Produção do autor. 26
4.2 Variação da energia e inclinação obtidas pelo modelo das Cônicas Conjugadas para diferentes valores de r_p, com $v_p = 2.6$ e $\gamma = 0°$. Fonte: Produção do autor. 28
4.3 Variação da energia e inclinação obtidas pelo modelo das Cônicas Conjugadas para diferentes valores de γ, com $v_p = 2.6$ e $r_p = 0.00675$. Fonte: Produção do autor. 30
4.4 Variação da energia e inclinação pelo obtidas problema restrito para diferentes valores de v_p, com $r_p = 0.00675$ e $\gamma = 0°$, associado a curvas que indicam o tipo da trajetória e a inclinação antes da manobra, respectivamente. Fonte: Produção do autor. 33

4.5 Variação da energia e inclinação obtidas pelo problema restrito para diferentes valores de r_p, com $v_p = 2.6$ e $\gamma = 0°$, associado a curvas que indicam o tipo da trajetória e a inclinação antes da manobra, respectivamente. Fonte: Produção do autor. 35
4.6 Variação da energia e inclinação obtidas pelo problema restrito para diferentes valores de γ, com $v_p = 2.6$ e $r_p = 0.00675$ associado a curvas que indicam o tipo da trajetória e a inclinação antes da manobra, respectivamente. Fonte: Produção do autor. 37
4.7 Curvas de nível da diferença obtida entre o método das Cônicas Conjugadas e do PCRTC, com $r_p = 0.00675$ e $\gamma = 0°$, para diferentes valores de v_p. Fonte: Produção do autor. 39
4.8 Curvas de nível da diferença obtida entre o método das Cônicas Conjugadas e do PCRTC, com $v_p = 2.6$ e $\gamma = 0°$, para diferentes valores de r_p. Fonte: Produção do autor. 41
4.9 Curvas de nível da diferença obtida entre o método das Cônicas Conjugadas e do PCRTC, com $r_p = 0.00675$ e $v_p = 2.6$, para diferentes valores de γ. Fonte: Produção do autor. 43
4.10 Trajetórias da espaçonave com $\beta = \pm 70°$ para $r_p = 0.009$, $v_p = 2.2$, $\alpha = 230°$ e $\gamma = 30°$, no sistema xyz. Fonte: Produção do autor. 44

5.1 Distribuição dos erros (ΔE_{error}) como uma função de μ. Os erros máximos e mínimos são mostrados em curvas azuis o erro médio ($\overline{\Delta E}_{error}$) em vermelho. As linhas pontilhadas representam alguns valores de μ para alguns sistemas. Fonte: Produção do autor. 48
5.2 Distribuição de erros (ΔE_{error}) como uma função de μ. Os erros médios são mostrados separadamente com o objetivo de clarificar sua variação. Fonte: Produção do autor. 49
5.3 Comparação dos resultados obtidos utilizando as Equações 5.5 e 5.7, para os sistemas apresentados na Tabela 5.1, com os dados vindos da simulação que compara as Cônicas Conjugadas ao Problema Restrito. Fonte: Produção do autor. 51
5.4 Distribuição de ΔEs para diferentes valores de μ e r_p. As curvas coloridas representam a média ($\overline{\Delta E}$), enquando as linhas pretas e vermelhas pontilhadas representam os valores máximos e mínimos, respectivamente. Fonte: Produção do autor. 53

5.5 Distribuição de ΔEs para diferentes valores de μ e N. As curvas coloridas representam a média ($\overline{\Delta E}$), enquando as linhas pretas e vermelhas pontilhadas representam os valores máximos e mínimos, respectivamente. Fonte: Produção do autor. 54
5.6 Distribuição de ΔEs para diferentes valores de μ e γ. As curvas coloridas representam a média ($\overline{\Delta E}$), enquando as linhas pretas e vermelhas pontilhadas representam os valores máximos e mínimos, respectivamente. Fonte: Produção do autor. 55
5.7 Distribuição de ΔEs para diferentes valores de μ e α. As curvas coloridas representam a média ($\overline{\Delta E}$), enquando as linhas pretas e vermelhas pontilhadas representam os valores máximos e mínimos, respectivamente. Fonte: Produção do autor. 62
5.8 Distribuição de ΔEs para diferentes valores de μ e β. As curvas coloridas representam a média ($\overline{\Delta E}$), enquando as linhas pretas e vermelhas pontilhadas representam os valores máximos e mínimos, respectivamente. Fonte: Produção do autor. 63
5.9 ΔVs máximos e mínimos em função de r_p aplicados as luas Galileanas. Fonte: Produção do autor. 65
5.10 ΔVs máximos e mínimos em função de N aplicados as luas Galileanas. Fonte: Produção do autor. 66
5.11 ΔVs máximos e mínimos em função de γ aplicados as luas Galileanas. Fonte: Produção do autor. 68
5.12 ΔV_{PC} para $\beta = 80°$, $N = 1.2$, $r_p = 0.004$ e $\mu = 7.8 \times 10^{-5}$ (Ganímedes-Júpiter) em função de α e γ. Fonte: Produção do autor. 69
5.13 *Swing-by* realizado em M_2 como visto do referencial inercial XYZ. Fonte: Produção do autor. 70
5.14 *Swing-by* realizado em M_2 como visto do referencial pseudo-inercial $X'Y'Z'$, ao reconhecer a alteração de $\vec{V}_2$ na entrada e saída da esfera de influência. Fonte: Produção do autor. 70
5.15 ΔVs máximos e mínimos em função de α aplicados as luas Galileanas. Fonte: Produção do autor. 71
5.16 ΔVs máximos e mínimos em função de β aplicados as luas Galileanas. Fonte: Produção do autor. 72

6.1 Representação dos vetores velocidade. Fonte: Produção do autor. 75
6.2 Erros no semi-eixo maior como uma função da inclinação e distância de apogeu para diferentes órbitas iniciais em torno da Terra. Fonte: Produção do autor. 80

6.3 Erros na excentricidade como uma função da inclinação e distância de apogeu para diferentes órbitas iniciais em torno da Terra. Fonte: Produção do autor. 81
6.4 Erros na inclinação como uma função da inclinação e distância de apogeu para diferentes órbitas iniciais em torno da Terra. Fonte: Produção do autor. 83
6.5 Erros na longitude do nodo ascendente como uma função da inclinação e distância de apogeu para diferentes órbitas iniciais em torno da Terra. Fonte: Produção do autor. 84
6.6 Erros no argumento de perigeu como uma função da inclinação e distância de apogeu para diferentes órbitas iniciais em torno da Terra. Fonte: Produção do autor. 86
6.7 A energia característica calculada pelo problemo restrito após a manobra como uma função da inclinação e distância de apogeu para diferentes órbitas iniciais em torno da Terra. Fonte: Produção do autor. 87

LISTA DE TABELAS

Pág.

4.1 Classificação da manobra segundo o tipo de órbita. Fonte: Produção do autor. 31

5.1 Alguns sistemas que apresentam o parâmetro de massa superior a 1×10^{-5} e os erros esperados utilizando a aproximação das Equações 5.5 e 5.7. . . 50

5.2 Energias obtidas pelo PCRTC, em unidades canônicas, para $\mu = 7.8 \times 10^{-5}$ (Ganímedes-Júpiter), $r_p = 0.004$, $N = 1.1$ e $\beta = 0°$ em diferentes condições de α e γ. K indica energia cinética, U é energia potencial, o subscrito o indica valor referente a saída da esfera de influência e i é referente a entrada na esfera de influência. 56

5.3 Energias obtidas pelo PCRTC, em unidades canônicas, para $\mu = 7.8 \times 10^{-5}$ (Ganímedes-Júpiter), $r_p = 0.004$, $N = 1.1$ e $\alpha = 90°$ em diferentes condições de β e γ. K indica energia cinética, U é energia potencial, o subscrito o indica valor referente a saída da esfera de influência e i é referente a entrada na esfera de influência. 59

SUMÁRIO

Pág.

1 INTRODUÇÃO 1
1.1 Revisão bibliográfica 3
1.2 Objetivos e justificativas 5
1.3 Organização do trabalho 7

2 MODELOS E MÉTODOS 9
2.1 Definindo o problema 9
2.2 O problema restrito 12
2.3 O modelo das cônicas conjugadas 15

3 ANÁLISE PRELIMINAR DA MECÂNICA DE UM *SWING-BY* 17
3.1 Análise do sistema Terra-Lua 18
3.2 Exemplo de *swing-by* 19

4 ANÁLISE DE CADA MODELO E ERROS APLICADA À LUA 23
4.1 Modelo analítico das Cônicas Conjugadas 23
4.1.1 Efeitos da velocidade de pericentro 25
4.1.2 Efeitos da distância de pericentro 27
4.1.3 Efeitos de γ 29
4.2 Modelo numérico do PCRTC e algumas considerações sobre a mecânica do problema 31
4.2.1 Efeitos da velocidade de pericentro 32
4.2.2 Efeitos do raio de pericentro 34
4.2.3 Efeitos de γ 36
4.3 Comparação entre os dois modelos 38
4.3.1 Efeitos da velocidade de pericentro 38
4.3.2 Efeitos do raio de pericentro 40
4.3.3 Efeitos de γ 42

5 ESTUDO GERAL DOS ERROS PARA DIFERENTES PARÂMETROS DE MASSA 45
5.1 Método de comparação 45
5.2 Resultados 46

5.2.1 Análise do parâmetro de massa 47
5.2.2 Análise individual de cada parâmetro 49
5.2.3 *Swing-by* nas luas Galileanas 61

6 ANÁLISE AVANÇADA DE ERROS APLICADA A LUA 73
6.1 Cônicas Conjugadas 73
6.2 Problema restrito 76
6.3 A comparação 77
6.4 Resultados 78

7 CONCLUSÕES 89

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 91

1 INTRODUÇÃO

Baseado, principalmente, nos trabalhos de Galileu Galilei e Johannes Kepler, Isaac Newton demonstrou que os corpos celestes descrevem órbitas cônicas (círculo, elipse, parábola e hipérbole) quando interagem entre si. Foi ele quem formulou O Problema dos N Corpos, que consiste em analisar o problema de N corpos em interação gravitacional mútua. Esse problema possui 6N graus de liberdade. Do problema dos N corpos é possível obter dez integrais de movimento: a conservação de energia e as três componentes da posição inicial do centro de massa, da quantidade de movimento linear do centro de massa e da quantidade de movimento angular do sistema (PRUSSING; CONWAY, 1993). Geralmente, o problema é reduzido para interações menos complexas, como o Problema de Dois Corpos e o Problema de Três Corpos, que possuem grande interesse na astronomia e astronáutica.

O Problema dos Dois Corpos consiste na determinação da dinâmica entre dois corpos de massas M e m sob interação gravitacional mútua em torno do centro de massa do sistema. A partir dele é possível demonstrar que a trajetória de cada corpo deve descrever uma cônica, com o centro de massa em um dos focos. No caso particular em que $M >> m$ (Sistema Terra-Satélite, Sol-Cometa, entre outros), pode-se considerar o centro de massa como o próprio centro geométrico do corpo de massa muito maior (MURRAY; DERMOTT, 1999). Isso reduz o problema para um problema equivalente de um corpo, e a trajetória do corpo menor pode ser analisada sob uma formulação de uma partícula submetida a um campo de força central (GOLDSTEIN, 2011).

Ao se abandonar o Problema dos Dois Corpos e partir para análises mais complexas, as órbitas de cada corpo passam a ser perturbadas, e não mais é possível dizer que os corpos descrevem trajetórias na forma de uma das cônicas. Uma dessas análises mais complexas é conhecida como O Problema de Três Corpos, e, como o nome sugere, trata da interação gravitacional mútua entre três corpos. Dentro do Problema de Três Corpos já não é mais possível obter uma solução geral que descreva o movimento dos três corpos. Porém, é possível obter soluções para alguns casos particulares, como a solução de Euler para o caso colinear e a solução de Lagrange para o caso triangular.

Um outro caso particular, o Problema Restrito de Três Corpos, é de grande interesse prático, tanto para a astronáutica quanto para a astronomia. A partir dele é possível obter explicações e projetar configurações mais complexas. Aqui, o problema original de três corpos tem sua complexidade reduzida ao considerar que um dos três corpos possui massa desprezável se comparada aos outros dois corpos (ditos como dominantes, ou primários). O Problema Restrito de Três Corpos possui vá-

rias formas, tais como: o Problema Circular Restrito de Três Corpos (PCRTC) e o Problema Elíptico Restrito de Três Corpos[1].

Ao se assumir o PCRTC como modelo, a complexidade do problema é reduzida mais uma vez, ao considerar que os dois corpos primários descrevem órbitas circulares, o que é uma boa aproximação, visto que a grande maioria dos sistemas, tais como Sol-planeta e planeta-lua, usualmente têm excentricidades muito pequenas. Ademais, grandes conclusões qualitativas são obtidas por meio dessa abordagem: como a existência dos cinco pontos de Lagrange (MURRAY; DERMOTT, 1999) do sistema, que fornecem explicação para, por exemplo, a configuração dos asteróides troianos de Júpiter. Eles também oferecem meios para o projeto de órbitas especiais, como as órbitas Halo (HOWELL, 1984).

Podem-se levar os conceitos demonstrados até então para casos mais práticos, relacionados a trajetórias e manobras de espaçonaves. Para o cálculo da trajetória de espaçonaves podem-se fazer hipóteses, por exemplo, que diminuam a complexidade da trajetória de uma espaçonave que irá interagir fortemente com vários corpos diferentes. Para definir os limites do que seria interagir fortemente com um corpo, é usado o conceito desenvolvido por Laplace (VALLADO; MCCLAIN, 2001) de esfera de influência. Segundo esta abordagem, pode-se considerar uma órbita simples, cônica, entre a espaçonave e o corpo no qual a espaçonave se encontra dentro de sua esfera de influência. Assim, quando uma espaçonave interage com vários corpos diferentes, é possível usar um método conhecido como Cônicas Conjugadas, que se vale do conceito de esfera de influência para diminuir a complexidade do problema separando um Problema de N Corpos em N Problemas de Dois Corpos.

Mantendo o enfoque levantado para espaçonaves, é de grande interesse o estudo de manobras e transferências orbitais que diminuam sensivelmente o gasto de combustível e o tempo para atingir o objetivo da missão. E é nesse ponto que se encontra este trabalho. No estudo de um tipo específico de manobra conhecida como manobra gravitacionalmente assistida (ou *flyby*, ou *swing-by*, ou *slingshot maneuver*), que se aplica principalmente a missões interplanetárias, a vantagem é a grande economia de combustível e/ou tempo que essa manobra oferece.

[1] Boas discussões sobre o caso elíptico podem ser encontradas em Szebehely e Giacaglia (1964) e Broucke (1969)

1.1 Revisão bibliográfica

O *swing-by*, também conhecido como manobra gravitacionalmente assistida, é uma classe de manobra que tem por objetivo alterar a trajetória e a energia orbital de uma espaçonave por meio da passagem desta por um corpo celeste, que orbita um segundo corpo celeste. De fato, a espaçonave absorve energia do movimento do corpo celeste onde a manobra é executada. O objetivo mais comum é a espaçonave ganhar energia orbital, de forma que seja possível economizar propelente e/ou tempo nas manobras requeridas para realizar uma determinada tarefa para a missão. Também existe a possibilidade da remoção de energia orbital da espaçonave, dependendo da geometria da passagem. Esta última possibilidade pode ser utilizada em alguns tipos de missões, como na situação onde uma espaçonave tem de ser capturada pelo corpo principal do sistema (por exemplo, em uma hipotética missão para Júpiter, pode ser realizada uma manobra em alguma de suas luas para que a espaçonave perca energia e seja capturada por Júpiter). Devido a essas vantagens, o *swing-by* é extensivamente estudado e referências a essa manobra na literatura são amplamente encontradas.

Como argumentado por Wagner e Wie (2015), deve-se lembrar que, até a descoberta dos *swing-bys*, todas as espaçonaves dependiam totalmente de propulsão química efetuada por meio de foguetes para realizar suas viagens espaciais, conforme desenvolvimento feito por pioneiros como Tsiolkovskii e Petroff (1959), Hohmann (1960) e Goddard (1959). Isso tornava o custo proibitivo para viagens além da Lua, Vênus e Marte (CLARKE, 1961; SPENCER et al., 1962; KARMAN, 1962).

Um excelente apanhado histórico do estudo de *swing-bys* é encontrado em Broucke e Prado (1993), que mostram o interesse despertado por esse tipo de interação já na astronomia, aplicado a cometas, por grandes nomes da Mecânica Celeste, tais como d'Alembert (1768), Laplace (1799), Tisserand (1891), U.J. Le Verrier e M.O. Callandreau. Especial menção é feita a Guido von Pirquet, que é tido como um dos primeiros a terem percebido o potencial desse tipo de interação à exploração espacial, com seus primeiros artigos em 1928 (BROUCKE; PRADO, 1993).

No fim dos anos 50 e começo dos 60, houve grandes avanços na área da mecânica orbital, como: o estudo de uma viagem Terra-Vênus-Marte-Terra com duração de um ano por Crocco (1956); da mínima energia requerida para diversas missões espaciais (RUPPE, 1960); um método para calcular uma viagem de reconhecimento a partir da solução do problema de Lambert (BATTIN, 1959); dentre outros (LAWDEN, 1959; BREAKWELL et al., 1961). Minovitch (2010) argumenta que, em 1961,

desenvolveu o método das Cônicas Conjugadas, quando se interessou pelo Problema Restrito de Três Corpos ao ler o livro de Sterne (1960), e tentava desenvolver uma nova abordagem ao problema. Como descrito por Dowling et al. (1991), um dos primeiros estudos sobre o uso de *swing-bys* para aplicações em astronáutica pode ser encontrado em Minovitch (1961).

No fim da década de 60, vários estudos sobre *swing-bys* foram realizados, bem como missões que aplicavam essa técnica em sua viagem interplanetária. Sohn (1964), Sohn (1966) e Hollister e Prussing (1965) propõem o uso de um *swing-by* em Vênus como passo intermediário de uma viagem para Marte. Já Longman e Schneider (1970) consideram o uso das luas de Júpiter para *swing-bys*. Flandro (1966) estudou sequências de *swing-bys* nos planetas do sistema solar exterior, posteriormente servindo como referência para as famosas missões Voyager (KOHLHASE; PENZO, 1977), um dos projetos mais importantes que utilizaram esse tipo de técnica. Pode-se citar outras missões pioneiras, como as sondas Pioneer 10 e 11 (CARLSON; JUDGE, 1974; FIMMEL, 1977; FIMMEL et al., 1980) e Mariner 10 (DUNNE; BURGESS, 1978).

O sucesso dessas missões possibilitou o grande número de missões, nas décadas seguintes, que vieram a empregar essa técnica: Galileo (DIEHL; NOCK, 1979), Cassini-Huygens (HANSEN et al., 2004), Messenger (MCNUTT et al., 2004; MCNUTT et al., 2006), Rosetta (HECHLER, 1997) e *New Horizons* (GUO; FARQUHAR, 2008), para citar algumas. Esse interesse também pode ser notado pelos diversos estudos recentes que propõem missões que utilizam um ou mais *swing-bys*.

Solórzano et al. (2007) estuda uma missão para Netuno por meio de *swing-bys*, enquanto Longuski e Williams (1991a), Weinstein (1992) e Stern (1993) fazem estudos de uma missão para Plutão. Patel et al. (1995) propõem uma missão combinada para os planetas Urano e Netuno, e o planeta-anão Plutão. Algumas outras aplicações são bem conhecidas, como o estudo da cauda geomagnética da Terra (FARQUHAR; DUNHAM, 2012); uma visita ao cometa Halley (BYRNES; DAMARIO, 1982); viagens para o planeta Mercúrio (YEN, 1989; YAMAKAWA et al., 1996; GRARD, 2006; JEHN et al., 2008). Missões para asteróides próximos da Terra (NEAs - *Near Earth Asteroids*) também podem se beneficiar dessa manobra, como mostrado por Penzo (1992) e Perozzi et al. (2001).

Adicionalmente, estudos mais teóricos de *swing-bys* podem ser encontrados em diversas referências. Prado e Broucke (1995) analisam os efeitos do arrasto atmosférico sobre a trajetória durante a realização de um *swing-by*; Penzo e Mayer (1986), Lanoix e Misra (2000), Williams et al. (2003) e Prado (2015) propõem o uso de cabos na

realização de *swing-bys*, conhecido como *Tethered Sling Shot Maneuver*, ou TSSM; Walberg (1985), McRonald e Randolph (1992), Sims et al. (2000), Lewis e McRonald (1992), Lohar et al. (1996), Bonfiglio et al. (2000), Gomes et al. (2013) e Gomes et al. (2013) consideram, em mais detalhes, o uso da atmosfera do planeta durante a aproximação, estudando o que é conhecido como manobras aero-gravitacionalmente assistidas.

Outras contribuições relevantes nesse campo podem ser encontradas em Nock e Uphoff (1979) e Lynam et al. (2011), os quais estudam capturas de espaçonaves por meio do uso dessa manobra em luas planetárias. Strange e Longuski (2002) utilizam um método diferente, ao criar uma forma gráfica para o projeto de manobras gravitacionalmente assistidas. Diferentes técnicas de projeto desse tipo de manobra podem ser encontradas em Petropoulos e Longuski (2004), Vasile e Pascale (2006) e Longuski e Williams (1991b).

A consideração do modelo mais preciso dado pelo Problema Restrito de Três Corpos na aplicação de mapas para trajetórias de *swing-by* é encontrado para o sistema Sol-Júpiter (BROUCKE; PRADO, 1993). Extensões para considerar uma nuvem de partículas também são encontradas na literatura (GOMES; PRADO, 2008).

Um *swing-by* consiste basicamente em um Problema Restrito de Três Corpos, já que tem-se, essencialmente, o corpo onde a manobra é realizada, o corpo orbitado por este, e a espaçonave de massa muito inferior a eles. O principal aspecto de uma manobra pode ser descrito utilizando o modelo das Cônicas Conjugadas, que separa o problema em uma sequência de Problemas de Dois Corpos, como estudado por Broucke (1988), para o movimento plano, e Prado (2000a), para uma manobra tridimensional. Uma primeira tentativa de medir as diferenças entre os resultados obtidos pelas Cônicas Conjugadas e o problema restrito, em termos da variação de energia, é feita por Prado (2007a), que comparou ambas as abordagens aplicadas ao caso do movimento no plano. Formiga e Santos (2016) compara ambos os modelos aplicados ao asteroide triplo $2001SN_{263}$, que deverá ser o objetivo da Missão Aster [2](SUKHANOV et al., 2010; MACAU et al., 2011; SILVA et al., 2013).

1.2 Objetivos e justificativas

O método das Cônicas Conjugadas é empregado por vários analistas como uma primeira aproximação para o cálculo de *swing-bys*, devido a sua simplicidade e capacidade de analisar várias condições distintas. Na maior parte dos casos encontrados

[2]A Missão Aster é uma proposta de missão interplanetária brasileira

no sistema solar, a partir dessa análise, é possível obter trajetórias e configurações suficientemente próximas das que se obteria na realidade, essa é uma das razões de sua extensiva utilização. No entanto, como em qualquer aproximação, existem casos especiais para os quais essa análise não produz resultados satisfatórios. Pode-se citar como exemplo o sistema Terra-Lua que, devido à grande relação de massa entre os corpos, leva a uma grande incerteza associada às aproximações relativas às Cônicas Conjugadas.

Podem-se separar as suposições feitas pelo método das Cônicas Conjugadas em duas principais: i) quando a espaçonave se encontra dentro da esfera de influência do corpo onde a manobra é realizada, apenas a gravidade desse corpo é considerada; ii) o intervalo de tempo que a espaçonave passa dentro da esfera de influência do corpo é suficentemente pequeno, de forma que a velocidade orbital do corpo seja assumida como constante (MINOVITCH, 1961). É esperado que ambas as suposições falhem em casos onde a esfera de influência é suficientemente grande, se comparada à distância entre o corpo onde a manobra é realizada e o corpo orbitado por este, como resultado da grande relação de massa entre ambos. Logo, como consequência dessa grande esfera de influência, tem-se que a influência gravitacional do outro corpo, enquanto a manobra é realizada, não é suficientemente pequena. Assim sendo, o tempo gasto pela espaçonave realizando a manobra não é suficientemente pequeno, implicando em uma alteração da orientação e/ou magnitude da velocidade orbital do corpo onde a manobra é realizada.

Dessa forma, este trabalho pretende analisar manobras de *swing-by* realizadas em alguns corpos do sistema solar, principalmente a Lua, por dois métodos distintos. No primeiro são utilizadas equações analíticas, pelo método das Cônicas Conjugadas, e por modelos númericos, utilizando uma abordagem baseada no Problema Circular Restrito de Três Corpos. Por fim, as duas abordagens serão comparadas e analisadas. O estudo tenderá a dar maior atenção às manobras na Lua por dois motivos: primeiro, como já mecionado, a Lua tem uma esfera de influência muito grande se comparada a distância Terra-Lua (devido a relação de massa entre os dois corpos), o que coloca em dúvida uma abordagem via Cônicas Conjugadas (que é preferível devido a sua menor complexidade), necessitando de uma análise do seu poder de descrição do problema; segundo, pois pretende-se fundamentar estudos posteriores sobre manobras a serem aplicadas à Missão Aster, que provavelmente virá a utilizar *swing-bys* lunares de forma a deixar o sistema Terra-Lua para sua viagem interplanetária.

Para tanto, deve-se expandir o trabalho feito por Prado (2007a) no caso plano para a aplicação em três dimensões. É assumido que uma espaçonave faz uma aproximação com um corpo celeste massivo, porém seu movimento não está restrito ao plano orbital dos primários. Logo, a localização do pericentro precisa de um ângulo extra para para indicar a componente fora do plano da sua posição no espaço. A velocidade no pericentro também necessita de uma variável adicional, a qual pode ser o ângulo que define sua direção no espaço. Portanto, o novo número de parâmetros, que antes eram três (distância do pericentro, magnitude da velocidade e ângulo de aproximação) (BROUCKE, 1988), agora é expandido para cinco.

Dessa forma, a estratégia deste trabalho é definir uma trajetória de *swing-by* no espaço tri-dimensional especificando os cinco parâmetros, para então calcular a variação da quantidade física sob estudo por meio do método das Cônicas Conjugadas e do PCRTC. É assumido que os resultados provenientes do problema restrito representam os valores reais e os resultados adquiridos utilizando o método das Cônicas Conjugadas representam valores estimados. Assim, ao variar os cinco parâmetros, é possível mensurar os efeitos de cada parâmetro nos erros da manobra estimada.

1.3 Organização do trabalho

O capítulo 2 será dedicado a descrever os métodos mais gerais utilizados no trabalho. Primeiramente, o problema será estabelecido, fazendo as definições necessárias para sua correta compreensão. Em seguida, será apresentado o equacionamento necessário relativo a aproximação das Cônicas Conjugadas e do Problema Circular Restrito de Três Corpos, conforme definido em Negri et al. (2017) e Prado (2000b)

O capítulo 3 utilizará o Problema Circular de Três Corpos para realizar uma análise da mecânica de um *swing-by* semelhante a elaborada por Qi e Xu (2015), porém aplicado ao caso tridimensional. E também será apresentado um exemplo de *swing-by* na Lua, fazendo uma pequena análise da dinâmica e como alguns parâmetros se relacionam.

Em seguida, no capítulo 4, serão mostrados mapas de variação de energia e de inclinação para um *swing-by* na Lua. Espera-se que esses mapas possam trazer noções adicionais sobre a mecânica de um *swing-by*, bem como serem utilizados em um projeto preliminar da manobra aplicada à Lua. Em princípio, serão analisados os mapas obtidos por Cônicas Conjugadas, para posteriormente analisar os mapas similares resultantes do Problema Circular Restrito de Três Corpos. Então, enfim, será realizada uma comparação entre os modelos.

No capítulo 5, os resultados serão generalizados para considerar os erros como uma função do parâmetro de massa. Será feita uma análise semelhante a realizada em Negri et al. (2017), porém expandida. O objetivo é proporcionar estimativas dos erros para qualquer sistema de primários; será, então, possível definir com antecedência o uso ou não do modelo das Cônicas Conjugadas, considerando o sistema sob estudo e a precisão requerida pela manobra. Para tanto, os erros são mensurados como uma função de todos os parâmetros que definem a manobra. Depois disso, uma média é tirada sobre todos os valores assumidos para os parâmetros, e um erro global é relacionado a cada parâmetro de massa. Erros mínimos, máximos e médios são mostrados como uma função do parâmetro de massa e plotados em curvas de nível.

A seguir, no capítulo 6, volta-se a um estudo focado na Lua. Porém, utilizando a massa crítica acumulada, pretende-se um estudo mais avançado e direto, capaz de aproximar os resultados de uma aplicação para um projeto preliminar de *swing-bys* na Lua que almejem o escape do sistema Terra-Lua. Para tanto, a partir de uma órbita terrestre anterior a manobra, pretende-se a elaboração de mapas que indiquem ao projetista regiões onde o cálculo do *swing-by* pelas Cônicas Conjugadas produzem resultados dentro de um erro previamente determinado como tolerável.

Por fim, as conclusões do trabalho são apresentadas no capítulo 7.

2 MODELOS E MÉTODOS

Neste capítulo são apresentados os modelos matemáticos e os métodos mais gerais utilizados neste trabalho.

Primeiramente, na seção 2.1, será posto o problema, definindo os sistemas de referência utilizados e como se relacionam. Além disso, serão definidos os cinco parâmetros utilizados para definir univocamente a trajetória da espaçonave, bem como o sistema canônico de unidades, que serão extensivamente utilizados no curso deste trabalho.

Em seguida, na seção 2.2, serão apresentadas as equações de movimento do PCRTC e os procedimentos numéricos adotados para solucionar o problema e obter os dados desejados provenientes do *swing-by*.

Por fim, na seção 2.3, é delineado o modelo e o método adotado para o emprego das Cônicas Conjugadas e as equações que permitem analisar o *swing-by*.

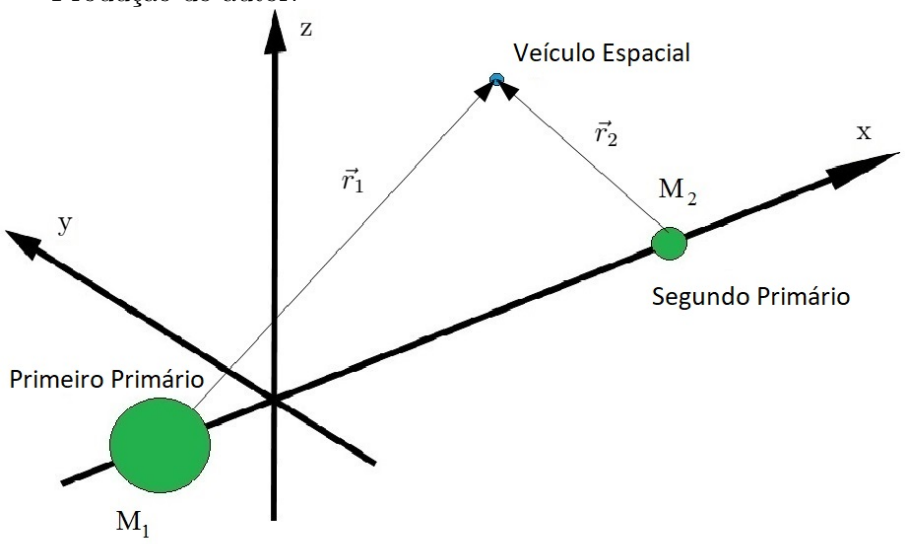
2.1 Definindo o problema

O sistema é composto por três massas pontuais, sendo duas delas M_1 e M_2. O primeiro corpo, M_1, tem a maior massa, enquanto M_2 é o segundo maior corpo em termos de massa. Ambos serão de agora em diante denominados primários, e cada um deles descreve uma órbita circular em torno do centro de massa do sistema. O terceiro corpo é a espaçonave, que possui massa negligenciável se comparada as massas de M_1 e M_2.

Para uma melhor compreensão do problema, e também para auxiliar no equacionamento, é conveniente definir três sistemas de referência. Eles são denominados: sistema sinódico, ou xyz; sistema inercial, ou XYZ; e sistema pseudo-inercial, ou $X'Y'Z'$.

Começando pelo sistema sinódico, xyz, mostrado na Figura 2.1. Esse é o sistema de referência frequentemente utilizado no PCRTC. Como o próprio nome indica, ele é um sistema girante, e possui velocidade de rotação constante representada por n. Ele está centrado no baricentro do sistema. Seu eixo x coincide exatamente com a linha conectando os primários. Enquanto o eixo y se encontra no plano orbital dos primários, perpendicular ao eixo x. Por fim, o eixo z completa o sistema de referência dextrogiro.

Figura 2.1 - Sistema de referência xyz, sinódico e centrado no centro de massa. Fonte: Produção do autor.



Partindo agora para o sistema inercial XYZ, apresentado na Figura 2.2. Ele é um sistema de referência fixo com origem no baricentro, e é defino de tal forma que seus eixos são coincidentes com os eixos do sistema sinódico no tempo inicial (t=0). Pode-se dizer que o sistema xyz está rotacionado por um ângulo θ no eixo z em relação ao sistema XYZ, devido ao seu movimento de rotação. Então, é possível realizar uma rotação no sistema XYZ para obter as coordenadas de posição e velocidade em xyz, como segue:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbb{T}(\theta) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \dot{\mathbb{T}}(\theta) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \mathbb{T}(\theta) \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Como a velocidade angular de xyz é constante, sabe-se que:

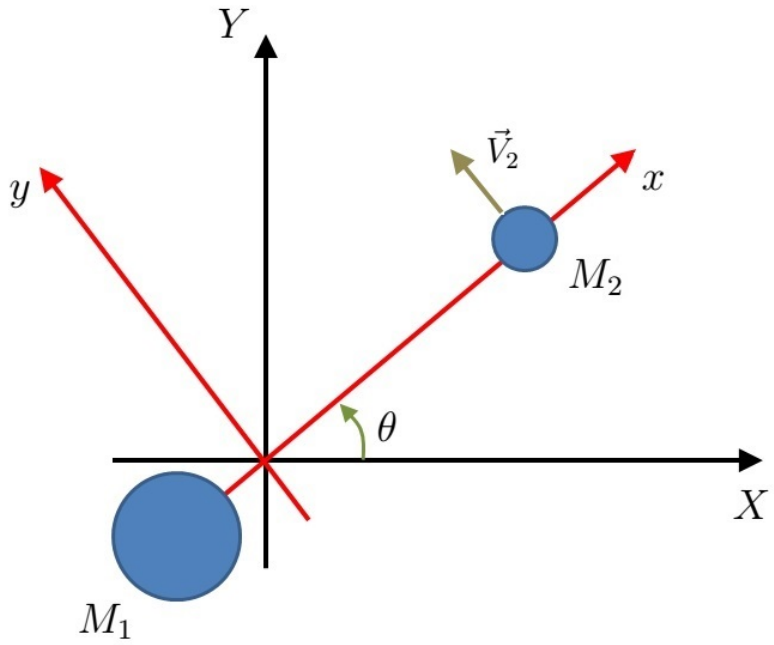
$$\theta = nt, \tag{2.3}$$

onde t representa o tempo.

Quando se utiliza o sistema sinódico xyz, é conveniente utilizar o sistema canônico

de unidades (SZEBEHELY, 1967), em que a unidade de distância é igual a distância entre os primários; a massa do menor primário é definida como o parâmetro de massa $\mu = M_2/(M_1 + M_2)$ (fazendo com que a massa total do sistema seja unitária); a constante gravitacional G também é unitária; a unidade de tempo é definida de tal forma que um período completo de rotação dos primários é de 2π unidades canônicas de tempo; por fim, a velocidade angular n do sistema xyz é unitária e, como decorrência da Equação 2.3, tem-se que: $\theta = t$.

Figura 2.2 - Sistema de referência XYZ, inercial e centrado no centro de massa. Fonte: Produção do autor.



O terceiro sistema de referência a ser apresentado consiste no sistema pseudo-inercial $X'Y'Z'$, conforme mostra a Figura 2.3. Seus eixos apontam para a mesma direção que os eixos do sistema XYZ, todavia o sistema está deslocado e se move junto a M_2, motivo pelo qual o sistema é denominado "pseudo-inercial". Como o *swing-by* ocorre no segundo primário (M_2), esse sistema é conveniente para definir os cinco parâmetros que definem univocamente o *swing-by*.

Esses parâmetros definem a posição e a velocidade da espaçonave no pericentro de sua órbita, e também são apresentados na Figura 2.3, onde: r_p é a distância entre o pericentro e o centro do segundo primário; α e β são ângulos que definem a posição de $\vec{r_p}$ no espaço tridimensional; v_p é a velocidade da espaçonave no pericentro com

respeito a M_2; e γ é o ângulo entre a velocidade $\vec{v_p}$ e a intersecção entre um plano que contém o pericentro e é paralelo ao plano $X'Y'$ e um plano perpendicular ao vetor $\vec{r_p}$ e que contém o vetor $\vec{v_p}$. Portanto, as componentes de posição e velocidade no sistema de referência $X'Y'Z'$ podem ser escritas como (PRADO; FELIPE, 2007):

$$X' = r_p \cos\beta \cos\alpha, \tag{2.4}$$
$$Y' = r_p \cos\beta \sin\alpha, \tag{2.5}$$
$$Z' = r_p \sin\beta, \tag{2.6}$$
$$\dot{X}' = -v_p \sin\gamma \sin\beta \cos\alpha - v_p \cos\gamma \sin\alpha, \tag{2.7}$$
$$\dot{Y}' = -v_p \sin\gamma \sin\beta \sin\alpha + v_p \cos\gamma \cos\alpha, \tag{2.8}$$
$$\dot{Z}' = v_p \cos\beta \sin\gamma. \tag{2.9}$$

A conveniência de se escolher as condições iniciais no pericentro da trajetória de *swing-by* se dá pela conhecida perpendicularidade entre os vetores $\vec{r_p}$ e $\vec{v_p}$, isso exclui a necessidade de um segundo ângulo para descrição de $\vec{v_p}$ no espaço tridimensional, bastando, portando, o ângulo γ.

Por vezes, será útil transferir as coordenadas do sistema $X'Y'Z'$ para o sistema XYZ. Sabe-se que a distância do baricentro até M_2 é de $1-\mu$ unidades canônicas, e que a velocidade de M_2 em relação ao sistema XYZ é V_2. Sabe-se que V_2, devido a M_2 descrever uma órbita circular, tem magnitude $1-\mu$ unidades canônicas. Com o auxílio da Figura 2.2, um pouco de trigonometria e lembrando que $\theta = t$, obtem-se:

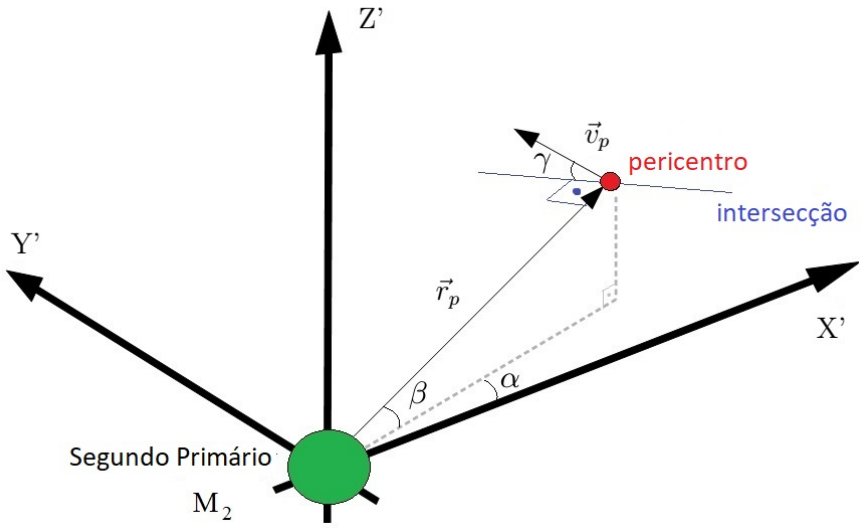
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-\mu)\cos t \\ (1-\mu)\sin t \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{X}' \\ \dot{Y}' \\ \dot{Z}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(1-\mu)\sin t \\ (1-\mu)\cos t \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

2.2 O problema restrito

Primeiramente, é necessário escrever as Equações 2.4 a 2.9 no sistema xyz, sinódico e centrado no centro de massa. Para tanto, é assumido que o instante inicial de simulação se dá em $t = 0$. Isso possibilita que as Equações 2.4 a 2.9 sejam escritas em XYZ, utilizando as Equações 2.10 e 2.11, como:

Figura 2.3 - Representação dos parâmetros que definem um *swing-by* no sistema de referência $X'Y'Z'$ centrado no segundo primário, onde o *swing-by* é realizado. Fonte: Produção do autor.



$$X = 1 - \mu + r_p \cos\beta \cos\alpha, \tag{2.12}$$
$$Y = r_p \cos\beta \sin\alpha, \tag{2.13}$$
$$Z = r_p \sin\beta, \tag{2.14}$$
$$\dot{X} = -v_p \sin\gamma \sin\beta \cos\alpha - v_p \cos\gamma \sin\alpha, \tag{2.15}$$
$$\dot{Y} = 1 - \mu - v_p \sin\gamma \sin\beta \sin\alpha + v_p \cos\gamma \cos\alpha, \tag{2.16}$$
$$\dot{Z} = v_p \cos\beta \sin\gamma. \tag{2.17}$$

Mas, sendo $\theta = t$, e por meio das transformações apresentadas nas Equações 2.1 e 2.2, tem-se as condições iniciais no sistema xyz, como:

$$x = 1 - \mu + r_p \cos\beta \cos\alpha, \tag{2.18}$$
$$y = r_p \cos\beta \sin\alpha, \tag{2.19}$$
$$z = r_p \sin\beta, \tag{2.20}$$
$$\dot{x} = -v_p \sin\gamma \sin\beta \cos\alpha - v_p \cos\gamma \sin\alpha + r_p \cos\beta \sin\alpha, \tag{2.21}$$
$$\dot{y} = -v_p \sin\gamma \sin\beta \sin\alpha + v_p \cos\gamma \cos\alpha - r_p \cos\beta \cos\alpha, \tag{2.22}$$
$$\dot{z} = v_p \cos\beta \sin\gamma. \tag{2.23}$$

Com as condições iniciais escritas no sistema utilizado no PCRTC, agora é apresentado os passos utilizados numericamente para solucionar as equações do movimento[1] do PCRTC. As equações do movimento são (SZEBEHELY, 1967):

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - (1-\mu)\frac{x+\mu}{r_1^3} - \mu\frac{x-1+\mu}{r_2^3}, \tag{2.24}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = y - (1-\mu)\frac{y}{r_1^3} - \mu\frac{y}{r_2^3}, \tag{2.25}$$

$$\ddot{z} = -(1-\mu)\frac{z}{r_1^3} - \mu\frac{z}{r_2^3}; \tag{2.26}$$

onde r_1 e r_2 são, respectivamente, a distância entre a espaçonave e o primeiro e segundo primário, como mostrado na Figura 2.1.

De forma que seja possível encontrar a variação de energia dada pelo problema restrito (ΔE_{RP}), o seguinte algoritimo é utilizado:

a) Das Equações 2.18 até 2.23, e atribuindo valores para α, β, r_p, γ e v_p, as condições iniciais são calculadas;

b) As equações do movimento são integradas para frente no tempo[2] até a espaçonave atingir uma distância r_2 igual a esfera de influência de M_2 (r_{SOI}), cujo raio é dado por (ARAUJO et al., 2008):

$$r_{SOI} = \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^{2/5}. \tag{2.27}$$

c) Uma vez que essa integração é realizada, E_{RP}^{+} é calculada, a energia orbital da espaçonave depois do *swing-by* com respeito ao centro do sistema sinódico, que é descrita pela Equação 2.28 para o PCRTC:

$$E = \frac{1}{2}\left[(\dot{x}-y)^2 + (\dot{y}+x)^2 + \dot{z}^2\right] - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}; \tag{2.28}$$

d) A espaçonave é então posicionada novamente em seu estado inicial e as equações do movimento são integradas para trás no tempo, até r_2 atingir a esfera de influência de M_2 mais uma vez;

[1] Um método de Runge-Kutta de quarta ordem com monitoramento do erro de truncamento local de quinta-ordem foi utilizado para garantir a precisão e ajustar o tamanho de passo.

[2] A espaçonave nunca passa muito próxima ao centro dos corpos, então não é necessária a regularização das equações de movimento para solucionar esse problema.

e) Ao fim dessa integração, a energia antes do *swing-by* é calculada (E_{RP}^{-}).

f) Finalmente, a variação de energia é calculada como:

$$\Delta E_{RP} = E_{RP}^{+} - E_{RP}^{-}. \tag{2.29}$$

2.3 O modelo das cônicas conjugadas

Para a aproximação das Cônicas Conjugadas, o sistema pseudo-inercial $X'Y'Z'$ é mais conveniente para descrever a trajetória da espaçonave enquanto ela realiza a manobra. Ele é assumido como inercial, o que que nenhum movimento de M_2 é levado em consideração. Isso é uma decorrência do fato de se assumir que a manobra se dá em um intervalo de tempo suficientemente pequeno se comparado ao período de translação de M_2 em torno de M_1 (MINOVITCH, 1961).

Outro pressuposto dessa aproximação é que o Problema Restrito de Três Corpos é reduzido a uma sequência de três problemas de dois corpos (espaçonave-primário 1, espaçonave-primário 2 e espaçonave-primário 1 novamente) que podem ser unidos em suas extremidades (MINOVITCH, 1961). Isso significa que os efeitos perturbadores de M_2 na órbita da espaçonave em torno de M_1 e os efeitos perturbadores de M_1 na órbita da espaçonave em torno de M_2 não são considerados nesse modelo.

Portanto, existem três órbitas cônicas. Os pontos onde as órbitas são conectadas são determinados pela esfera de influência (SOI) (ARAUJO et al., 2008) do corpo M_2, que é dada pela Equação 2.27.

Utilizando essa abordagem, a variação de energia para o caso tridimensional é simplesmente calculada pela equação derivada em Prado (2000a), que é:

$$\Delta E_{PC} = -2V_2 v_\infty \cos\beta \sin\alpha \sin\delta, \tag{2.30}$$

onde V_2 é a velocidade de M_2, cujo valor é $1-\mu$ no sistema canônico de unidades, mas o valor real depende do sistema de primários considerado; os ângulos β e α estão de acordo com a Figura 2.3; δ é metade do ângulo de deflexão da trajetória da espaçonave devido a sua passagem por M_2, podendo ser expressa utilizando a mecânica de dois corpos, de acordo com a relação (BROUCKE, 1988):

$$\sin\delta = \frac{1}{1 + r_p v_\infty^2/\mu}, \tag{2.31}$$

onde v_∞ é a velocidade da espaçonave, no infinito, com respeito ao corpo onde a

manobra é realizada (isto é, o sistema $X'Y'Z'$). Da mecânica dos dois corpos, v_∞ é dado por:

$$v_\infty = \left(v_p^2 - \frac{2\mu}{r_p} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.32}$$

Prado (2000a) mostra que as velocidades de saída ($\vec{V}_i$) e entrada ($\vec{V}_o$) da esfera de influência, em relação a um sistema de coordenadas inercial XYZ, podem ser calculadas como:

$$\vec{V}_i = v_\infty \sin\delta \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\alpha \\ \cos\beta\sin\alpha \\ \sin\beta \end{bmatrix} + v_\infty \cos\delta \begin{bmatrix} -\sin\gamma\sin\beta\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha \\ -\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha + \cos\gamma\cos\alpha \\ \cos\beta\sin\gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ V_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.33}$$

$$\vec{V}_o = -v_\infty \sin\delta \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\alpha \\ \cos\beta\sin\alpha \\ \sin\beta \end{bmatrix} + v_\infty \cos\delta \begin{bmatrix} -\sin\gamma\sin\beta\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha \\ -\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha + \cos\gamma\cos\alpha \\ \cos\beta\sin\gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ V_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.34}$$

Com alguma manipulação algébrica, é possível demonstrar que as normas dos vetores $\vec{V}_i$ e $\vec{V}_o$ são:

$$V_i = [v_\infty^2 + V_2^2 + 2v_\infty V_2(\cos\alpha\cos\delta\cos\gamma + \cos\beta\sin\alpha\sin\delta - \cos\delta\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)]^{1/2}, \tag{2.35}$$

$$V_o = [v_\infty^2 + V_2^2 + 2v_\infty V_2(\cos\alpha\cos\delta\cos\gamma - \cos\beta\sin\alpha\sin\delta - \cos\delta\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)]^{1/2}. \tag{2.36}$$

Agora, utilizando as Equações 2.35 e 2.36, é possível calcular a variação de velocidade obtida ao se realizar a manobra de *swing-by*, pela aproximação das Cônicas Conjugadas, como:

$$\Delta V_{PC} = V_o - V_i. \tag{2.37}$$

3 ANÁLISE PRELIMINAR DA MECÂNICA DE UM *SWING-BY*

Neste capítulo é investigada a mecânica do *swing-by* via PCRTC. A intenção é obter uma percepção preliminar do problema. Para tanto, será estudada a variação de energia possível em cada ponto do espaço, similar ao realizado por Qi e Xu (2015). Porém, diferentemente do que foi lá realizado, a manobra se dará fora do plano.

É sabido que a energia E da espaçonave é:

$$E = K + U; \tag{3.1}$$

onde K é a energia cinética e U a energia potencial.

Pode-se escrever, portanto:

$$K = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) = \frac{1}{2}\left[(\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2 + \dot{z}^2\right], \tag{3.2}$$

$$U = -\frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}. \tag{3.3}$$

Logo:

$$E = \frac{1}{2}\left[(\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2 + \dot{z}^2\right] - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}; \tag{3.4}$$

que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + (x\dot{y} - \dot{x}y) - \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right). \tag{3.5}$$

Do PCRTC é conhecida a única integral de movimento, a Constante de Jacobi [1], dada por:

$$C_J = (x^2 + y^2) + 2\left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \tag{3.6}$$

Dessa forma, a equação para a energia torna-se:

$$E = -\frac{C_J}{2} + (x^2 + y^2) + (x\dot{y} - \dot{x}y). \tag{3.7}$$

[1] É uma constante de movimento. É importante dizer que ela não é uma integral de energia, porque no PCRTC nem a energia e nem o momento angular são conservados. A Constante de Jacobi é a única integral do PCRTC, o que significa que o problema não pode ser solucionado de forma fechada para casos gerais.(MURRAY; DERMOTT, 1999, pág. 68)

Tomando a derivada de E no tempo:

$$\frac{dE}{dt} = 2\dot{x}x + 2\dot{y}y + x\ddot{y} - \ddot{x}y, \tag{3.8}$$

e utilizando as Equações 2.24 e 2.25, pode-se chegar a:

$$\frac{dE}{dt} = y(1-\mu)\mu\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right). \tag{3.9}$$

Com a Equação 3.9 é possível realizar uma análise qualitativa de um *swing-by* em três dimensões.

3.1 Análise do sistema Terra-Lua

A seguir realiza-se uma análise do Sistema Terra-Lua, onde o parâmetro de massa μ tem valor de 0.01216 unidades canônicas. Dessa forma, é esperado obter noções qualitativas preliminares de um *swing-by* fora do plano.

A Figura 3.1 mostra a distribuição de dE/dt próximo a Lua no plano $z = 0$ e no plano $x = 0$. Percebe-se que em passagens atrás da Lua (valores negativos de y) a espaçonave ganha energia, enquanto que em passagens à frente da Lua (valores positivos de y) ela perde energia [2]. Pode-se notar que, apesar de haver um termo dependente do corpo M_1 (Terra) na Equação 3.9, a sua influência nas proximidades de M_2 (Lua) é desprezável, já que $r_1 \approx 1$. Logo, nas proximidades da Lua, dE/dt pode ser aproximado como:

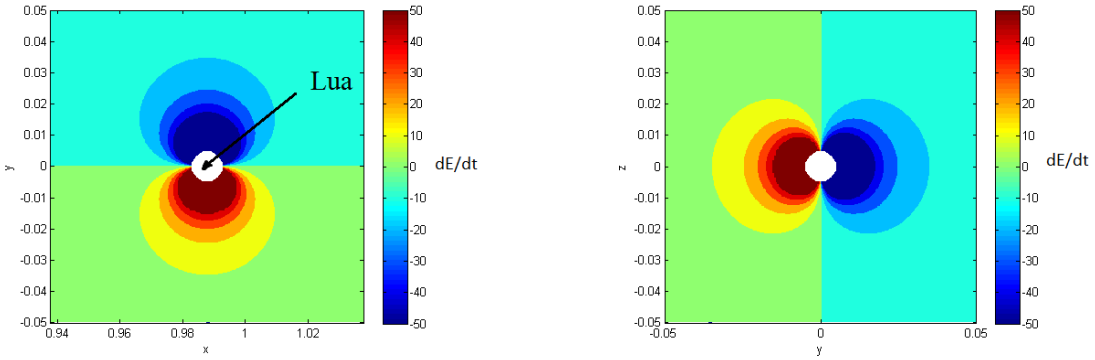
$$\frac{dE}{dt} \approx y(1-\mu)\mu\left(1 - \frac{1}{r_2^3}\right). \tag{3.10}$$

Na Figura 3.2, é apresentada uma Figura tridimensional em cortes da distribuição de dE/dt. Nota-se que no plano $y = 0$ não há variação de dE/dt, o que é esperado, visto que uma espaçonave nessa posição não se aproveita de parte alguma da quantidade de movimento do corpo M_2.

A análise pode ser estendida para um sistema de forma mais ampla, utilizando a Equação 3.9, conforme apresentado na Figura 3.3. Nessa figura, percebe-se claramente que grandes variações de energia se dão somente em regiões próximas dos dois corpos primários.

[2] A partir daqui adota-se a convenção de que sempre que se referir como "à frente" de um corpo celeste, está se referindo a uma região do espaço onde o corpo celeste vem ao encontro da espaçonave. E "atrás" para o oposto.

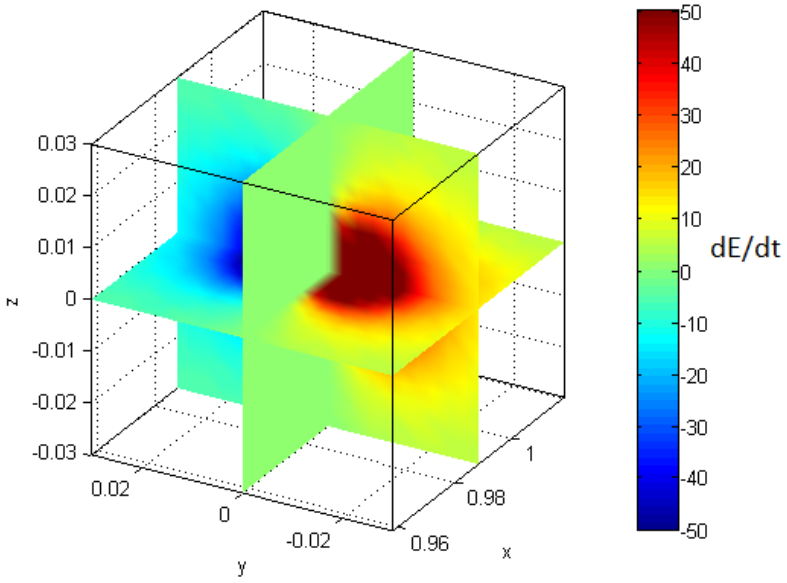
Figura 3.1 - Curvas de nível para $\frac{dE}{dt}$ no plano z=0 e x=0 próximo a Lua. Fonte: Produção do autor.



(a) Plano $z = 0$.

(b) Plano $x = 0$.

Figura 3.2 - Representação tridimensional em cortes de $\frac{dE}{dt}$. Fonte: Produção do autor.



3.2 Exemplo de *swing-by*

Seguindo o trabalho baseado no Sistema Terra-Lua, nessa seção é apresentado um exemplo de *swing-by*. O exemplo mostrado nas Figuras 3.4, 3.5, 3.6 e 3.7 é uma reprodução de um dos resultados de Qi e Xu (2015). Com isso, pretende-se complementar a noção preliminar da dinâmica de um *swing-by*.

Figura 3.3 - Visualização geral do Sistema Terra-Lua para $\frac{dE}{dt}$ no plano z=0. Fonte: Produção do autor.

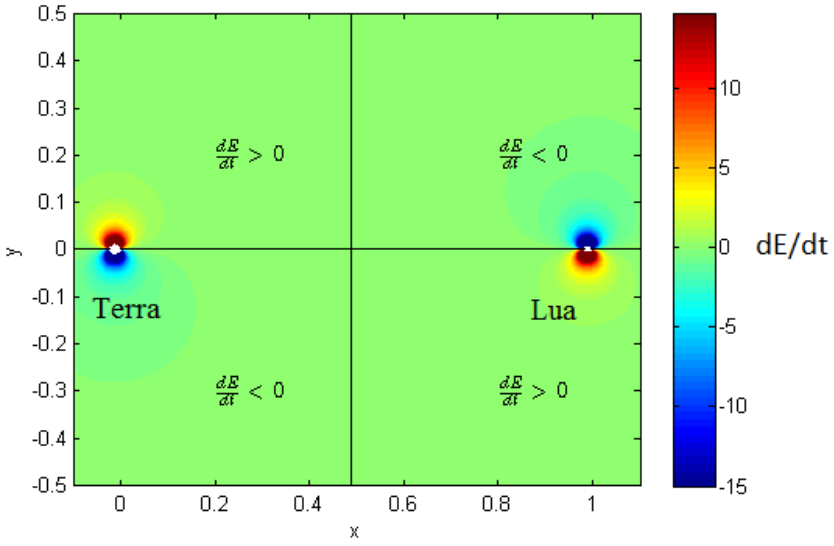
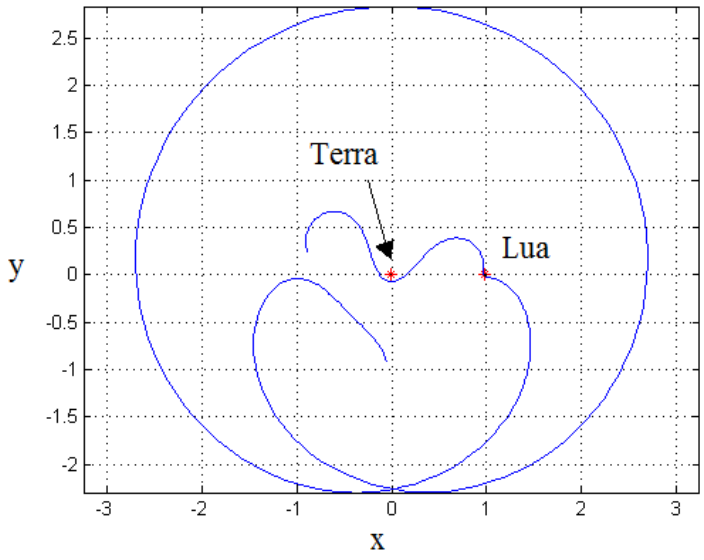


Figura 3.4 - Trajetória da espaçonave no sistema Lua-Terra no referencial sinódico xyz. Fonte: Produção do autor.

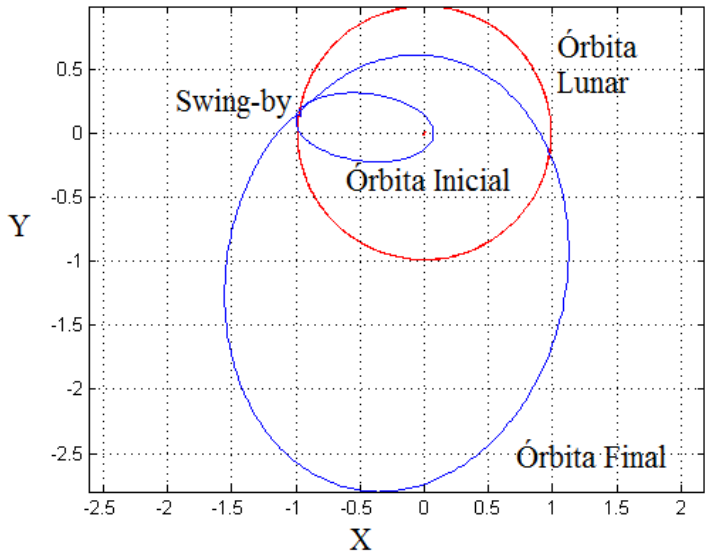


As condições iniciais utilizadas são $(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$=$(-0.8896,0.2511,0,-0.2346,0.6169,0)$ unidades canônicas no sistema xyz. Logo, já que não há componentes nem de posição e nem de velocidade em z, o movimento se dá no plano.

Na Figura 3.4, é mostrada a trajetória no sistema de coordenadas xyz. Nela é possível observar claramente que há duas aproximações entre a espaçonave e os corpos

primários. Notadamente, uma na Terra e outra na Lua.

Figura 3.5 - Trajetória da espaçonave no Referencial Inercial centrado no baricentro Terra-Lua. Fonte: Produção do autor.



A Figura 3.5 representa a trajetória no sistema de coordenadas inercial centrado no baricentro, XYZ. Note a diferença entre a órbita final e a inicial devido ao *swing-by*, passando de uma pequena elipse que intercepta a órbita lunar para uma grande elipse.

As vantagens do *swing-by* ficam ainda mais evidentes ao se olhar para a variação temporal de energia, como na Figura 3.6. Perceba que a energia mantem-se quase que constante por todo o período de tempo, exceto por duas variações bruscas e de grande amplitude. Uma menor, na Terra, havendo uma pequena perda de energia, e uma maior na Lua, havendo um ganho considerável de energia.

A Figura 3.6 fica ainda mais clara ao se observar a Figura 3.7, a qual representa a trajetória da espaçonave, durante o *swing-by* na Lua, sobreposta às curvas de nível de dE/dt. A espaçonave tem sua aproximação com a Lua à frente dela (y positivo), o que explica a inicial perda de energia em seu *swing-by* pela Lua na Figura 3.6. Todavia, a maior parte da trajetória se dá atrás da Lua, explicando o grande ganho de energia constatado a posteriore.

Pode-se fazer a mesma análise para a Terra. De forma não tão clara quanto na Figura 3.7, percebe-se na Figura 3.4 que a maior parte da trajetória da espaçonave

Figura 3.6 - Gráfico energia vs tempo. Fonte: Produção do autor.

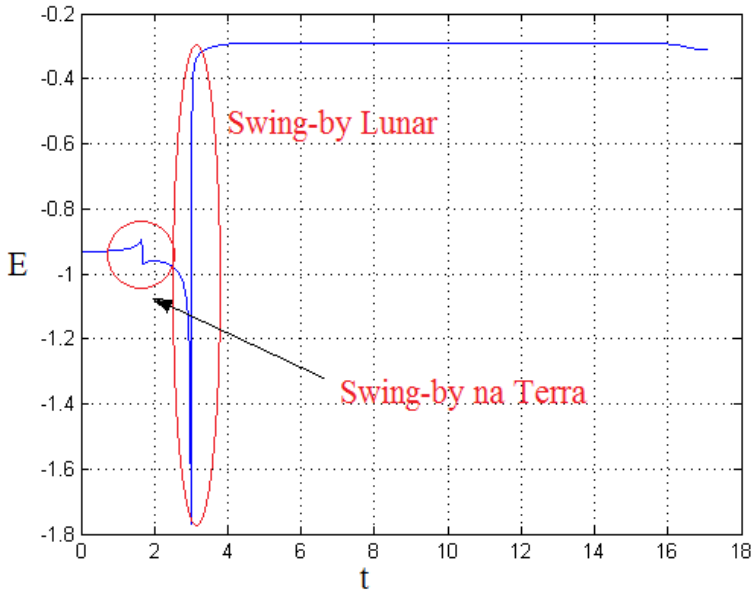
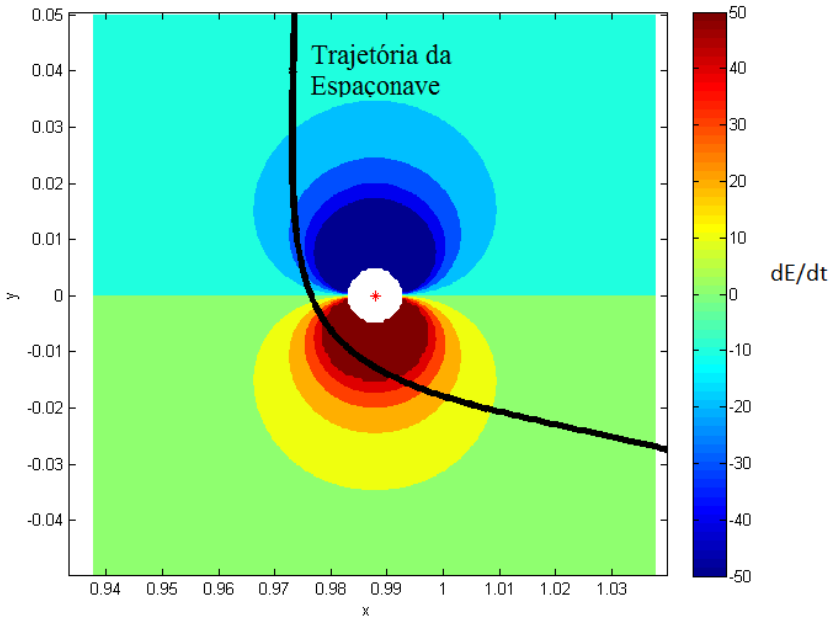


Figura 3.7 - Curvas de nível de dE/dt e trajetória da espaçonave no sistema sinódico próximo a Lua. Fonte: Produção do autor.



em seu *swing-by* na Terra se dá à frente da Terra (valores negativos de y), o que explica a perda líquida de energia ao fim do *swing-by* conforme mostrado na Figura 3.6.

4 ANÁLISE DE CADA MODELO E ERROS APLICADA À LUA

Este capítulo será dedicado a mostrar e analisar os resultados obtidos por ambos os métodos aplicados à Lua, tendo como objetivo adquirir uma noção preliminar de como se dá a dinâmica do *swing-by* em relação a cada um dos métodos, bem como o comportamento geral dos erros de acordo com cada um dos parâmetros r_p, v_p, α, β e γ.

Primeiramente serão mostrados os resultados e particularidades de cada um dos métodos. Posteriormente será feita uma comparação preliminar entre eles, de forma a determinar aspectos gerais onde uma análise analítica via Cônicas Conjugadas, de menor complexidade, é suficientemente adequada para ser aplicada à Lua.

Neste capítulo, além da análise para a energia, que perpassará todo este trabalho, será realizada uma análise da inclinação, conforme já realizado por Felipe e Prado (2000). O método utilizado para cálculo da inclinação em cada um dos modelos será estabelecido logo no início das seções correspondentes ao modelo.

Os resultados consistem, basicamente, de curvas de nível mostran a variação da energia e da inclinação, com β variando de $-90°$ a $90°$ e α de $180°$ a $360°$ [1], em valores selecionados de r_p, v_p e γ.

Como o intuito deste capítulo consiste em adquirir, principalmente, noções qualitativas quanto a cada um dos métodos e dos erros incorridos pela aproximação das Cônicas Conjugadas com a variação dos parâmetros, pouca atenção se dá à quantificação.

Dessa forma, são aplicados os mesmos valores de r_p e v_p utilizados por Felipe e Prado (2000) e alguns valores selecionados de γ, sem maiores critérios para a escolha desses valores. Uma análise mais criteriosa do ponto de vista quantitativo é encontrada no capítulo 6.

4.1 Modelo analítico das Cônicas Conjugadas

Aqui será utilizada a Equação 2.30 para o cálculo da variação de energia. Já para a inclinação, deve-se seguir o procedimento adotado por Felipe e Prado (2000).

[1] Esse intervalo de α foi escolhido de forma a analisar apenas manobras para ganho de energia, já que esse deverá ser o objetivo da Missão Aster.

Da definição de inclinação no Problema de Dois Corpos, sabe-se que:

$$i = \arccos\left(C_Z/C\right), \tag{4.1}$$

onde C representa a quantidade de movimento angular, e o subíndice Z a componente da quantidade de movimento angular na direção do eixo Z.

Felipe e Prado (2000) mostram que na entrada da Esfera de Influência tem-se [2]:

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 V_\infty \sin\beta \sin\delta + \cos\beta \cos\delta \sin\gamma \\ x_2 V_\infty \left(\frac{V_2}{V_\infty} + \cos\alpha \cos\delta \cos\gamma + \cos\beta \sin\alpha \sin\delta - \cos\delta \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma\right) \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Logo, utilizando a Equação 4.2, i_i pode ser calculado como:

$$i_i = \arccos\left(\frac{C_{zi}}{\sqrt{C_{xi}^2 + C_{yi}^2 + C_{zi}^2}}\right). \tag{4.3}$$

O mesmo pode ser feito para as condições de saída:

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix}_o = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 V_\infty \sin\beta \sin\delta - \cos\beta \cos\delta \sin\gamma \\ x_2 V_\infty \left(\frac{V_2}{V_\infty} + \cos\alpha \cos\delta \cos\gamma - \cos\beta \sin\alpha \sin\delta - \cos\delta \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma\right) \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Então, utilizando a Equação 4.4, obtém-se:

$$i_o = \arccos\left(\frac{C_{oz}}{\sqrt{C_{ox}^2 + C_{oy}^2 + C_{oz}^2}}\right). \tag{4.5}$$

Dessa forma pode-se obter a variação da inclinação para a aproximação das Cônicas Conjugadas como:

$$\Delta i_{PC} = i_o - i_i. \tag{4.6}$$

[2] O subíndice "i" indica a entrada na esfera de influência, enquanto "o" indica a saída.

4.1.1 Efeitos da velocidade de pericentro

Aqui serão analisados os efeitos do aumento da velocidade no pericentro na variação da energia e inclinação, para condições iniciais de $r_p = 0.00675$ e $\gamma = 0°$, conforme apresentado pela Figura 4.1. Os valores de v_p selecionados são 2.2, 2.6 e 3.4 unidades canônicas.

Para a energia, observando atentamente as Figuras 4.1(a), 4.1(c) e 4.1(e), percebe-se que há um decréscimo no ganho de energia por conta da manobra conforme há um aumento da velocidade de pericentro, como indica a diminuição da intensidade da cor vermelha das figuras. Essa condição pode ser explicada utilizando a análise de dE/dt feita no capítulo 3, visto que, para maiores velocidades de pericentro, a espaçonave permanece menos tempo realizando a manobra de *swing-by*, acumulando uma menor quantidade de energia; ou seja, um menor ΔE.

Também é interessante notar a simetria radial em torno de $\alpha = 270°$ e $\beta = 0°$, que são os pontos ditos como exatamente "atrás da Lua" ($z = 0$, $x = 1-\mu$ e y negativo), veja a Figura 3.2, no capítulo 3. Mostrando que esta análise é coerente com aquela.

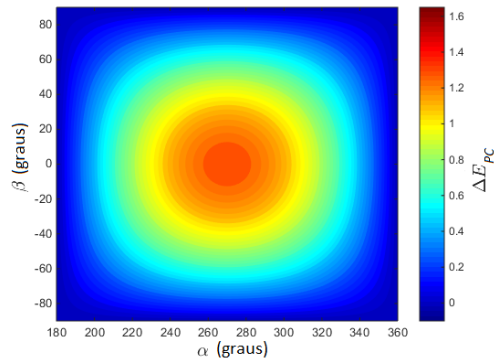
O mesmo fenômeno de diminuição de ΔE com o aumento de v_p pode ser observado para Δi. Constata-se nas Figuras 4.1(b), 4.1(d) e 4.1(f) que, com o aumento de v_p, há uma diminuição de regiões possíveis para grandes mudanças de inclinação, com a cor azul representando a variação máxima em magnitude e a cor laranja representando $\Delta i = 0°$. Além disso, parece haver uma tendência das regiões azuis a serem acumuladas em valores próximos a 260°. Também observa-se uma simetria em $\beta = 0°$.

Algo que pode ser notado em todas as Figuras de Δi é o fato de que, quando $\gamma = 0°$ e o pericentro está no plano ($\beta = 0°$), a espaçonave se mantém no plano. Pois, em geral, $\Delta i = 0°$ e em algumas regiões de $\beta = 0°$, $\Delta i = -180°$, como pode ser visto nas figuras. Da definição de elementos orbitais, Equação 4.1, sabe-se que $\Delta i = -180°$ representa uma mudança no sentido de translação da espaçonave.

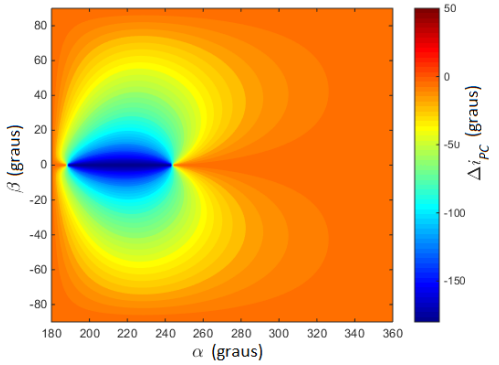
Portanto, a Figura 4.1 indica que a manobra proporciona maiores efeitos para menores valores de v_p, tanto para a inclinação quanto para a energia. No entanto, enquanto um maior ganho de energia proveniente da manobra é na maior parte das vezes desejável, com vistas à economia de combustível, nem sempre pode se dizer o mesmo quanto a inclinação.

O gasto de combustível em manobras para alteração de inclinação são maiores,

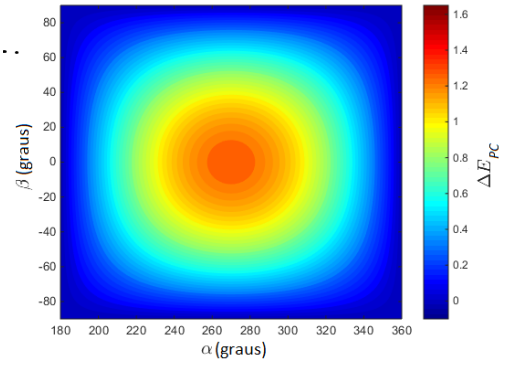
Figura 4.1 - Variação da energia e inclinação obtidas pelo modelo das Cônicas Conjugadas para diferentes valores de v_p, com $r_p = 0.00675$ e $\gamma = 0°$. Fonte: Produção do autor.



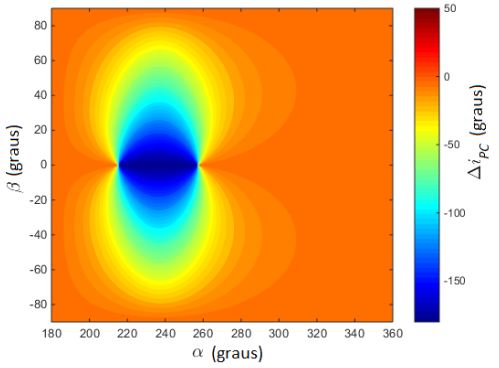
(a) ΔE_{PC}, $v_p = 2.2$



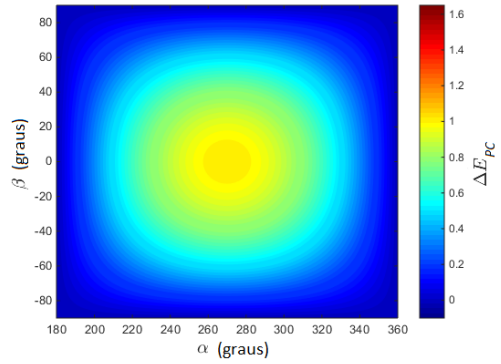
(b) Δi_{PC}, $v_p = 2.2$



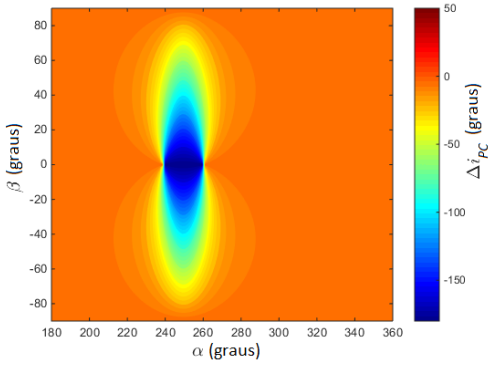
(c) ΔE_{PC}, $v_p = 2.6$



(d) Δi_{PC}, $v_p = 2.6$



(e) ΔE_{PC}, $v_p = 3.4$



(f) Δi_{PC}, $v_p = 3.4$

fazendo com que mudanças imprevistas e indesejáveis da inclinação da trajetória precisem ser evitadas. Portanto, em casos onde não é desejável uma mudança na inclinação da trajetória, especial cuidado deve ser tomado. Já que, apesar de menores valores de v_p proporcionarem maiores ganhos de energia, menores valores de v_p fazem com que haja maiores regiões de α e β para os quais se obtém uma certa variação de inclinação, podendo perder toda a economia de combustível em uma posterior manobra de correção de inclinação.

No entanto, isso deve ser pesado pelo projetista da missão com o fato de que, para maiores valores de v_p, as regiões azuis que indicam maior variação de inclinação (Figura 4.1(f)) estão mais próximas das regiões amarelas, que indicam maior variação de energia (Figura 4.1(e)). Enquanto que para um menor valor de v_p, as regiões azuis estão mais deslocadas para a esquerda (Figura 4.1(b)), mais distantes das regiões vermelhas, as de maiores ganhos de energia (Figura 4.1(a)).

4.1.2 Efeitos da distância de pericentro

Mantendo $v_p = 2.6$ e $\gamma = 0°$ e obtendo figuras para valores de r_p de 0.00476 [3], 0.00675 [4] e 0.009 [5] é possível fazer algumas observações quanto ao efeito da distância do pericentro na manobra, com a ajuda da Figura 4.2.

Similarmente ao que ocorre com v_p, há uma diminuição do ganho de energia com o aumento de r_p, como pode se notar nas Figuras 4.2(a), 4.2(c) e 4.2(e), atentando-se para a diminuição de intensidade das regiões avermelhadas para maiores valores de r_p. Isso ser mais uma vez confirmado com a análise feita de dE/dt, especialmente ao se analisar a Equação 3.10.

Sabendo que y pode ser escrito como:

$$y = r_2 \cos\beta \sin\alpha, \tag{4.7}$$

a Equação 3.10 fica:

$$\frac{dE}{dt} \approx -\cos\beta \sin\alpha(1-\mu)\mu\frac{1}{r_2^2}, \tag{4.8}$$

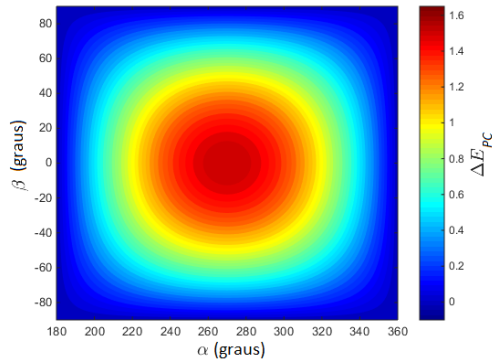
ficando evidente que, com o aumento da distância da espaçonave em relação ao corpo em que realiza a manobra, há uma diminuição na taxa de energia.

[3] Isso é pouco menos que o equivalente a 100 km de altitude acima da Lua, para ser mais exato, cerca de 93 km.

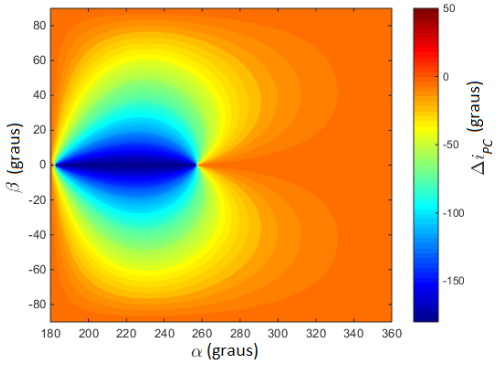
[4] Cerca de 858 km de altitude.

[5] 1723 km de altitude, quase o raio da Lua, que é de 1737.1 km.

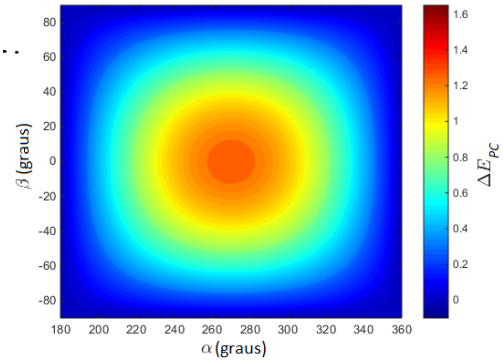
Figura 4.2 - Variação da energia e inclinação obtidas pelo modelo das Cônicas Conjugadas para diferentes valores de r_p, com $v_p = 2.6$ e $\gamma = 0°$. Fonte: Produção do autor.



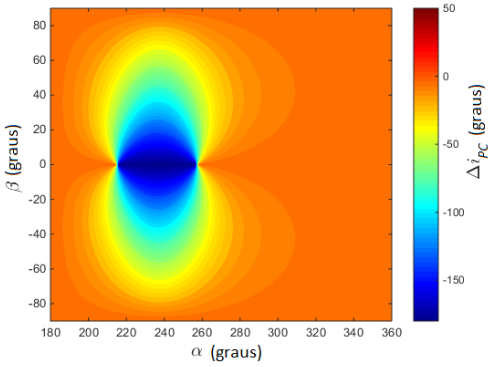
(a) ΔE_{PC}, $r_p = 0.00476$



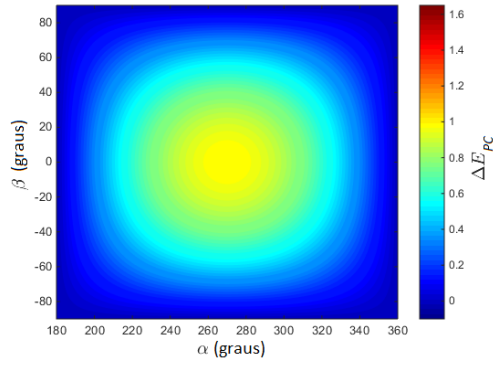
(b) Δi_{PC}, $r_p = 0.00476$



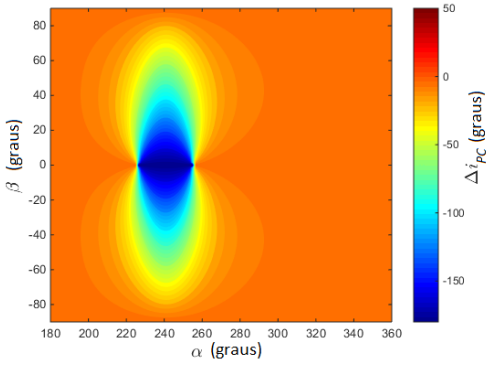
(c) ΔE_{PC}, $r_p = 0.00675$



(d) Δi_{PC}, $r_p = 0.00675$



(e) ΔE_{PC}, $r_p = 0.009$



(f) Δi_{PC}, $r_p = 0.009$

Mais uma vez, assim como visto para v_p, as figuras para variação de energia mantêm sua simetria radial, nota-se também que a região de maior variação de energia se concentra exatamente "atrás da Lua". Como discutido anteriormente, isso é coerente com a análise realizada no capítulo 3. Isso fica mais claro observando a Equação 4.8, que indica valores máximos para $\alpha = 270°$ e $\beta = 0°$.

Ao se observar as Figuras 4.2(b), 4.2(d) e 4.2(f), mais uma vez, similarmente ao que ocorre com v_p, nota-se uma diminuição das regiões com grande variação de inclinação ao se aumentar r_p, assim como um deslocamento dessas regiões para a direita.

Dessa forma, a discussão realizada para v_p também se aplica aqui. Ainda que menores valores de r_p propiciem maiores variações de energia, há uma dominância de regiões para onde se obtém também certa variação de inclinação. Por outro lado, para maiores valores de r_p, regiões de maior variação de inclinação encontram-se mais próximas de regiões de grande variação de energia. Portanto, cabe ao projetista da missão pesar as alternativas e levar em conta a quase certa variação de inclinação para manobras mais próximas à Lua, quando for o caso.

4.1.3 Efeitos de γ

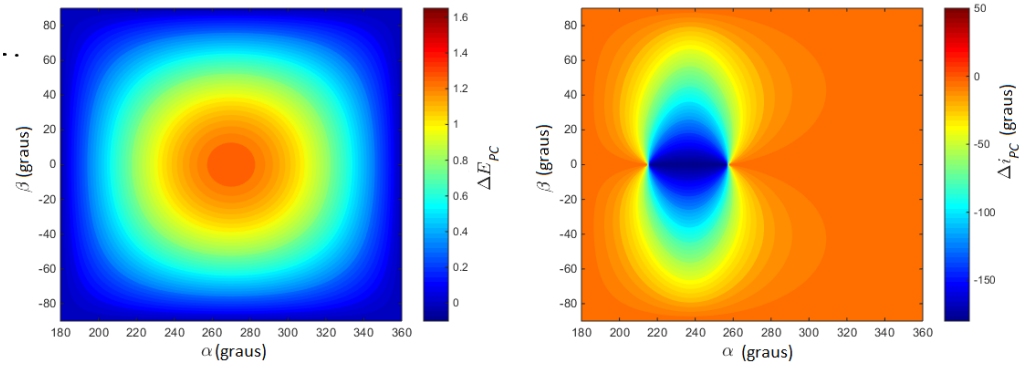
Passando agora para a análise do *swing-by* pelas Cônicas Conjugadas de acordo com a variação do ângulo γ, será fixado os valores $v_p = 2.6$ e $r_p = 0.00675$. Os valores escolhidos para o ângulo γ são 0°, 30° e 60°. A Figura 4.3 mostra os resultados obtidos.

Ao observar as Figuras 4.3(a), 4.3(c) e 4.3(e), referentes a variação de energia, percebe-se que, mesmo para valores de γ difentes de 0°, as curvas de nível permanecem com o mesmo formato e cores muito semelhantes. Assim sendo, as curvas de nível têm os mesmos valores, ou valores muito próximos, evidenciando que a influência de γ sobre a variação de energia é nula, ou quase nula. No entanto, apesar da dificuldade em afirmar a nulidade ou não da influência de γ na variação de energia pela aproximação das Cônicas Conjugadas somente pelas figuras, ao se observar a Equação 2.30 essa dúvida é sanada, ao se notar que a influência de γ em ΔE_{PC} é inexistente.

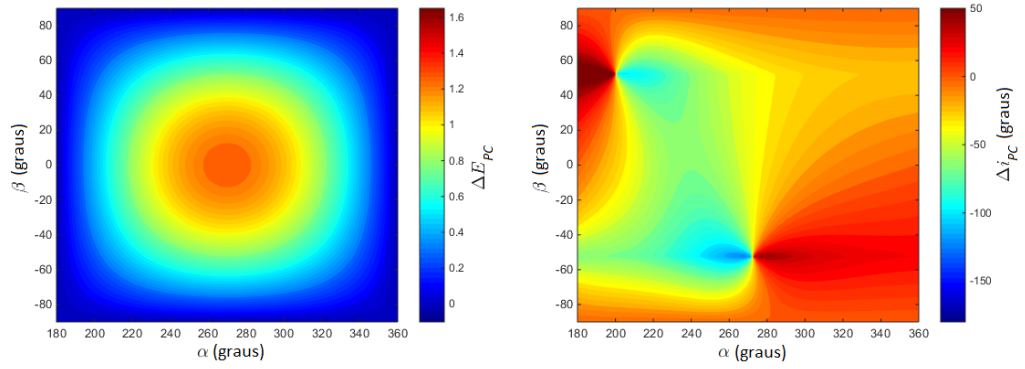
Outra fato importante é que, mesmo com o aumento de γ, a simetria radial já notada para os outros parâmetros, e esperada por conta da análise do capítulo 3, se mantém, indicando a coerência do modelo.

Diferentemente do que ocorre para ΔE, o efeito de gamma sobre Δi é drástico

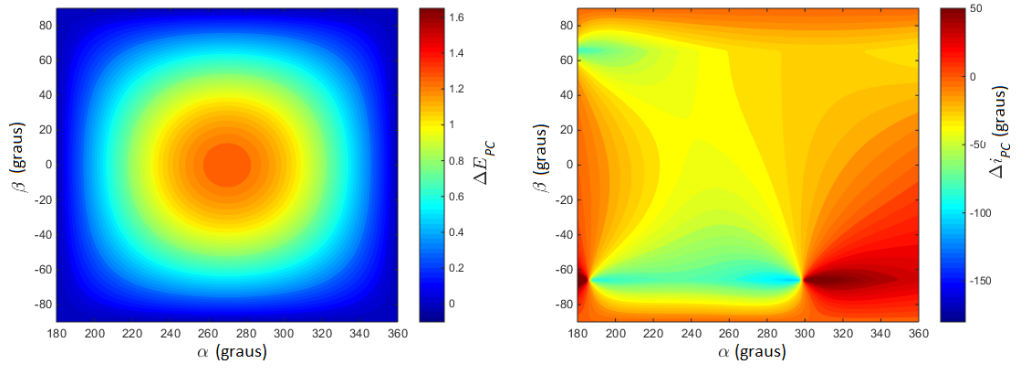
Figura 4.3 - Variação da energia e inclinação obtidas pelo modelo das Cônicas Conjugadas para diferentes valores de γ, com $v_p = 2.6$ e $r_p = 0.00675$. Fonte: Produção do autor.



(a) ΔE_{PC}, $\gamma = 0°$ (b) Δi_{PC}, $\gamma = 0°$



(c) ΔE_{PC}, $\gamma = 30°$ (d) Δi_{PC}, $\gamma = 30°$



(e) ΔE_{PC}, $\gamma = 60°$ (f) Δi_{PC}, $\gamma = 60°$

e evidente, como pode ser observado nas Figuras 4.3(b), 4.3(d) e 4.3(f). Isso leva a crer que a grande influência de γ é na variação de inclinação. Algo a se notar, com o aumento de γ, é o surgimento de variações de inclinação positivas (denotadas principalmente pelas cores avermelhadas nas figuras) e o desaparecimento de grandes variações de inclinação negativas (diminuição das regiões azuladas).

Além disso, quanto a variação de inclinação, é importante observar que o aumento de γ afasta as regiões de grande variação de inclinação (regiões azuis) das regiões com grande variação de energia. Isso é importante, pois indica que espaçonaves que pretendem obter o máximo de variação de energia possível ($\alpha \approx 270°$ e $\beta \approx 0°$), são menos afetadas pela variação de inclinação quanto maior for seu γ; o que é, por vezes, desejável.

4.2 Modelo numérico do PCRTC e algumas considerações sobre a mecânica do problema

Esta seção não se dedicará meramente a mostrar os resultados obtidos por PCRTC em relação a variação de energia e inclinação para diferentes condições iniciais, já que qualitativamente são muito semelhantes aos obtidos pela aproximação das Cônicas Conjugadas, apresentado anteriormente.

Aproveitando da maior precisão do problema restrito, nesta seção serão apresentadas figuras de variação de energia e inclinação associadas a outras curvas que permitam analisar melhor a mecânica do problema e que possam vir a servir como mapas base para um projeto inicial de *swing-by* na Lua.

Tabela 4.1 - Classificação da manobra segundo o tipo de órbita. Fonte: Produção do autor.

		Órbita Depois do *Swing-by*	
		Órbita Fechada ($E < 0$)	Órbita Aberta ($E \geq 0$)
Órbita Antes do *Swing-by*	Órbita Fechada ($E < 0$)	tipo **2**	tipo **1**
	Órbita Aberta ($E \geq 0$)	tipo **3**	tipo **4**

O algoritmo consiste no mesmo procedimento descrito na seção 2.2, com a diferença

que, além do cálculo da energia antes e depois da manobra, também calculou-se a quantidade de movimento angular. Sendo assim, é possível obter a variação de inclinação pelo problema restrito (Δi_{RP}), utilizando a Equação 4.1.

A partir da energia é possível saber o tipo de órbita que a espaçonave descreve em relação a Terra. Com os dados de energia antes e depois da manobra, pode-se classificar a manobra como tipo 1, 2, 3 e 4, de acordo com a Tabela 4.1.

4.2.1 Efeitos da velocidade de pericentro

Aqui, serão analisados os efeitos do aumento da velocidade no pericentro para condições iniciais de $r_p = 0.00675$ e $\gamma = 0°$, representados na Figura 4.4, utilizando o problema restrito.

Nas Figuras 4.4(a), 4.4(c) e 4.4(e) são mostradas as variações de energia para diferentes velocidades de pericentro. Perceba que as curvas de nível de ΔE_{RP} são plotadas em conjunto com outras curvas de nível, que são curvas de nível que classificam as órbitas de acordo com a definição da Tabela 4.1. As linhas pretas definem as curvas de nível de ΔE. A cor cinza indica condições em que ocorrem manobras do tipo 1, a cor amarela manobras do tipo 2, verde clara do tipo 3 e verde escura do tipo 4.

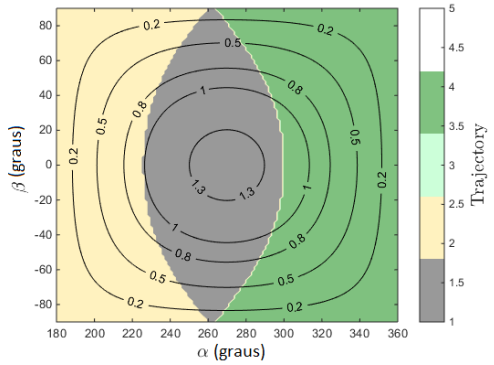
Note que com o aumento da velocidade há uma diminuição nos possíveis ganhos de ΔE, como visto na seção 4.1.1, e que pode ser observado pela diminuição das curvas de nível de $\Delta E_{RP} = 1.3$ da Figura 4.4(a) para a Figura 4.4(c), e completo desaparecimento na Figura 4.4(e). Bem como há uma redução nas áreas que permitem órbitas fechadas antes da manobra, tipo 1 e 2, além de serem deslocadas para a esquerda, desaparecendo completamente para $v_p = 3.4$.

O interesse aqui é que a órbita antes da manobra seja fechada (tipo 1 e 2), pois isso se traduz em um menor gasto de energia em uma trasnferência da Terra para a Lua [6]. No caso em que é realizado apenas uma única manobra gravitacionalmente assistida na Lua, é também de interesse que a órbita depois na manobra seja aberta (tipo 1 e 4), caso o objetivo seja escape do sistema Terra-Lua. Logo, se as duas condições (transferência da Terra para a Lua com mínimo gasto de combustível e escape do sistema Terra-Lua em um único *swing-by*) devem ser encontradas, a preferência se dá para a manobra do tipo 1.

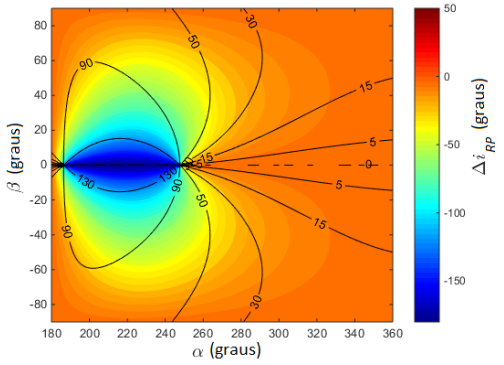
Nas Figuras 4.4(b), 4.4(d) e 4.4(f), representando a variação de inclinação (curvas

[6] Considerando uma transferência impulsiva.

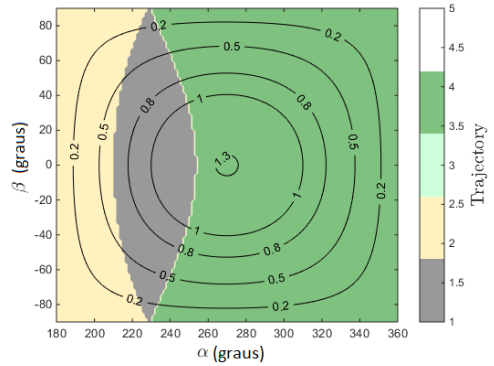
Figura 4.4 - Variação da energia e inclinação pelo obtidas problema restrito para diferentes valores de v_p, com $r_p = 0.00675$ e $\gamma = 0°$, associado a curvas que indicam o tipo da trajetória e a inclinação antes da manobra, respectivamente. Fonte: Produção do autor.



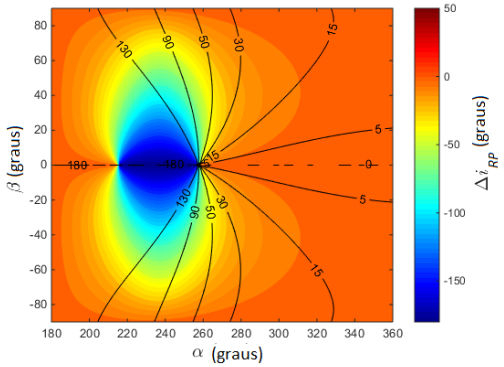
(a) ΔE_{RP}, $v_p = 2.2$



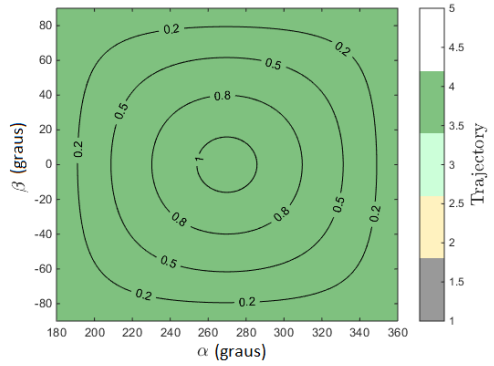
(b) Δi_{RP}, $v_p = 2.2$



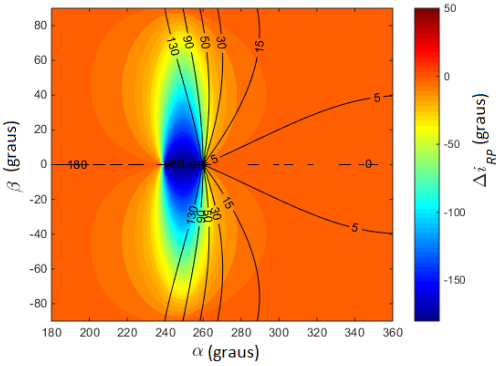
(c) ΔE_{RP}, $v_p = 2.6$



(d) Δi_{RP}, $v_p = 2.6$



(e) ΔE_{RP}, $v_p = 3.4$



(f) Δi_{RP}, $v_p = 3.4$

de nível coloridas) e a inclinação antes da manobra (linhas pretas), é possível ver facilmente, para o movimento no plano ($\beta = 0°$), três condições para diferentes intervalos de α: o movimento da espaçonave era retrógrado ($i = 180°$) e se mantém retrógrado; era retrógrado e se inverte; e se mantém com inclinação de 0°. O mesmo observado na seção 4.1.1.

Tomando a Figura 4.4(d) como exemplo, para valores de α até em torno de 220° a espaçonave aproxima de M_2 em movimento retrógrado (inclinação antes da manobra, linhas pretas, com valores acima de 90°) para o *swing-by* e mantém o movimento retrógrado depois da manobra ($\Delta i_{RP} = 0°$). Entre 220° e 260°, a espaçonave que tinha movimento retrógrado inverte seu sentido de translação em torno do corpo M_1 após a manobra ($\Delta i_{RP} = -180°$). Para valores maiores que 260°, a espaçonave mantém sua inclinação de 0°.

Outro fato a se notar, é o acúmulo de grandes inclinações antes da manobra para valores intermediários de α, conforme v_p cresce. Tome como exemplo a Figura 4.4(f), grandes valores de inclinação antes da manobra se acumulam entre 240° e 290°. Isso indica um aumento de regiões de onde uma espaçonave, que possui uma pequena inclinação antes da manobra, pode atingir. Obviamente, o oposto também é verdadeiro, ou seja, diminuição dos pontos onde uma espaçonave que tinha grande inclinação antes da manobra pode atingir.

Tanto Δi_{RP} quanto ΔE_{RP} apresentam o mesmo comportamento observado na seção 4.1.1, atestando a validade e concordância entre a aproximação das Cônicas Conjugadas e o problema restrito, como esperado.

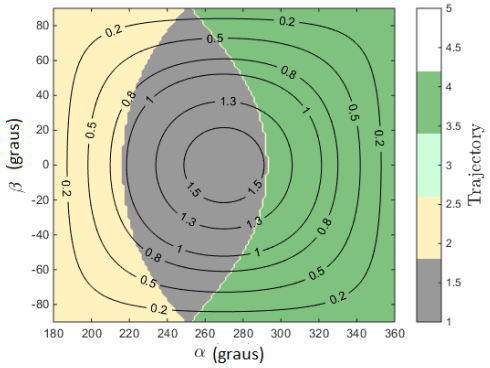
4.2.2 Efeitos do raio de pericentro

Mantendo $v_p = 2.6$ e $\gamma = 0°$ e analisando os efeitos do aumento de r_p no problema restrito foi obtida a Figura 4.5.

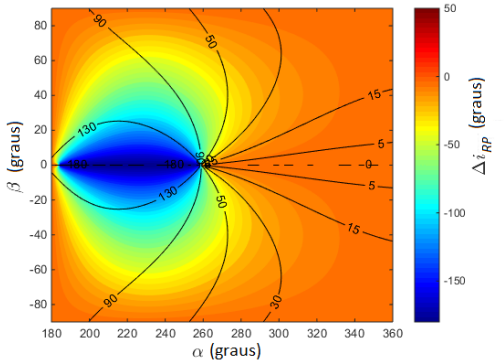
Nas Figuras 4.5(a), 4.5(c) e 4.5(e), relacionadas a energia, pode-se ver que com o aumento do raio de pericentro também são diminuídas e deslocadas para a esquerda as regiões em que manobras do tipo 1 e 2 ocorrem, como visto para o caso de v_p. Também aqui, é observado a diminuição de ΔE com o aumento de r_p, o mesmo observado para v_p, e também esperado pela análise realizada na seção 4.1.2.

Para a inclinação, Figuras 4.5(b), 4.5(d) e 4.5(f), pode-se notar que, para o aumento de r_p, ocorre o mesmo que para o aumento de v_p. Ou seja, diminuição das regiões onde há alguma variação da inclinação, o que também era esperado pela análise realizada

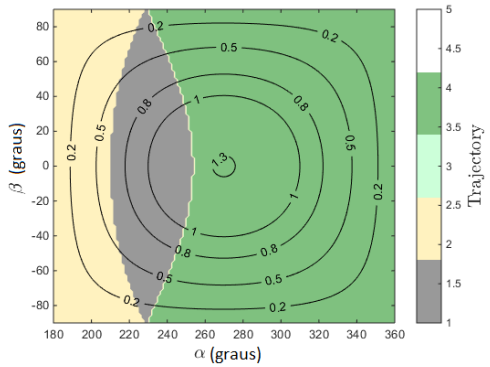
Figura 4.5 - Variação da energia e inclinação obtidas pelo problema restrito para diferentes valores de r_p, com $v_p = 2.6$ e $\gamma = 0°$, associado a curvas que indicam o tipo da trajetória e a inclinação antes da manobra, respectivamente. Fonte: Produção do autor.



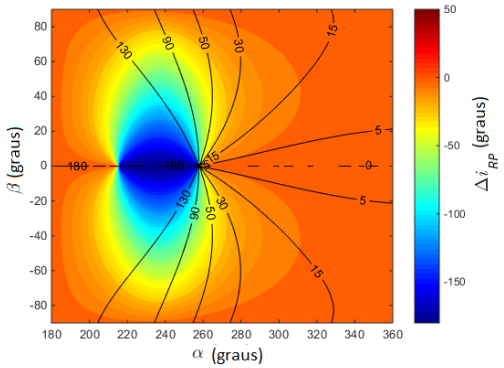
(a) ΔE_{RP}, $r_p = 0.00476$



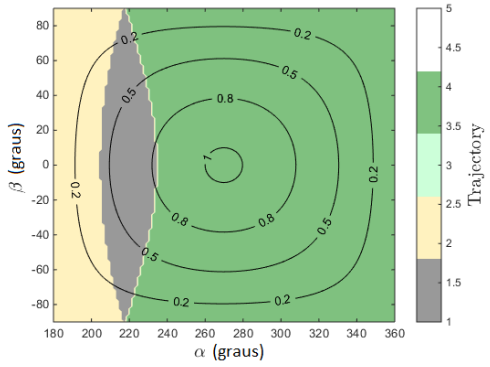
(b) Δi_{RP}, $r_p = 0.00476$



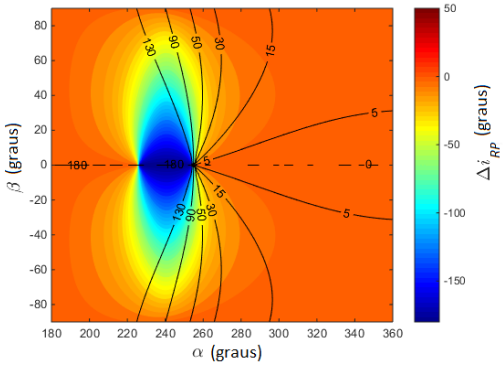
(c) ΔE_{RP}, $r_p = 0.00675$



(d) Δi_{RP}, $r_p = 0.00675$



(e) ΔE_{RP}, $r_p = 0.009$



(f) Δi_{RP}, $r_p = 0.009$

na seção 4.1.2. Além disso, as linhas pretas indicam o mesmo fato observado na seção 4.2.1 para v_p, um acúmulo de grandes inclinações em valores intermediários de α em maiores valores de r_p, como se observa ao se comparar a Figura 4.5(f) a Figura 4.5(b).

4.2.3 Efeitos de γ

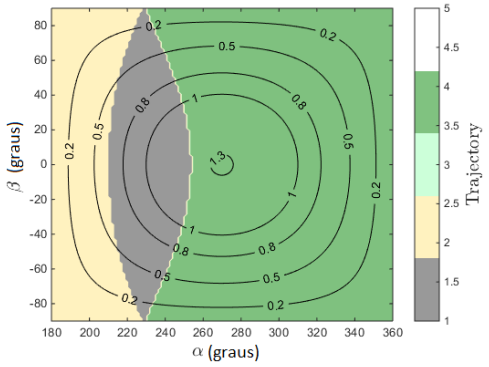
Aqui será testado $v_p = 2.6$ e $r_p = 0.00675$ para valores de γ de 0°, 30° e 60°, produzindo como resultado a Figura 4.6.

Para a energia, perceba nas Figuras 4.6(a), 4.6(c) e 4.6(e) que, diferentemente do que foi explanado na análise via Cônicas Conjugadas, pode-se ver uma pequena diminuição da variação de energia com o aumento de γ. Isso pode ser notado pela pequena diminuiçao da curva de nível de $\Delta E_{RP} = 1.3$ da Figura 4.6(a) para 4.6(c), e posteriormente seu completo desaparecimento na Figura 4.6(e). Isso indica, diferentemente do que foi observado na seção 4.1.3, que γ influe na manobra, mesmo que isso não seja levado em conta na aproximação das Cônicas Conjugadas. O porquê desse comportamento, e maiores discussões relacionadas, serão apresentadas no capítulo 5, onde as evidências lá apresentadas possibilitarão a formulação de uma explicação científica coerente.

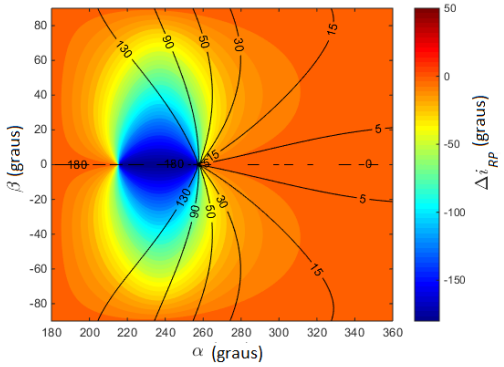
O mesmo que fato foi constatado na análise via Cônicas Conjugadas da seção 4.1.3 para Δi, com o aumento de γ, pode ser notado aqui nas Figuras 4.6(b), 4.6(d) e 4.6(f). Ou seja, com o aumento de γ há o surgimento de regiões avermelhadas, que indicam valores de variação de inclinação maiores que zero, o que não é notado em casos de $\gamma = 0°$. Outro fato observado anteriormente, e aqui também encontrado, é o distanciamento de regiões com grandes variações de inclinação (regiões azuis e vermelhas) da região onde é possível os maiores ganhos de energia ($\alpha \approx 270°$ e $\beta \approx 0°$).

Atentando-se ainda para as linhas pretas das figuras, percebe-se que o aumento de gama também traz a essa região, de maiores ganhos de energia, valores de inclinação antes da manobra próximos de 90°. Portanto, ainda que maiores valores de γ tornem possível à espaçonave realizar a manobra, nessa região, com menores variações em inclinação, as únicas órbitas de transferência que possibilitam essas condições têm inclinações muito elevadas. Logo, isso deve ser avaliado pelo projetista com maior atenção, visto que nesse caso as condições de lançamento e manobras para transferência podem inviabilizar ou aumentar excessivamente o custo da missão.

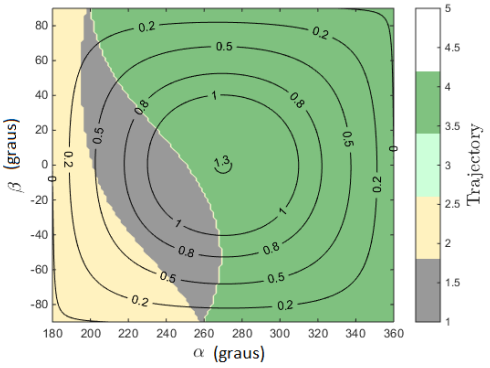
Figura 4.6 - Variação da energia e inclinação obtidas pelo problema restrito para diferentes valores de γ, com $v_p = 2.6$ e $r_p = 0.00675$ associado a curvas que indicam o tipo da trajetória e a inclinação antes da manobra, respectivamente. Fonte: Produção do autor.



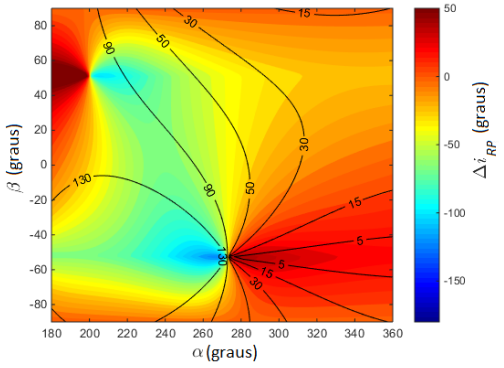
(a) ΔE_{RP}, $\gamma = 0°$



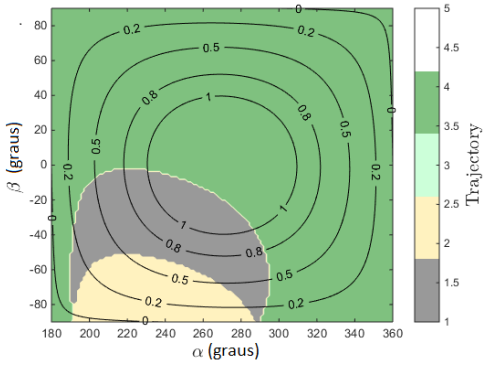
(b) Δi_{RP}, $\gamma = 0°$



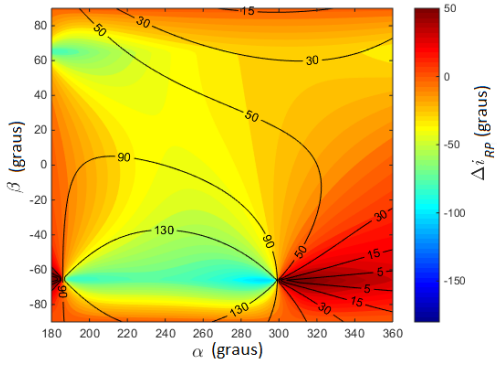
(c) ΔE_{RP}, $\gamma = 30°$



(d) Δi_{RP}, $\gamma = 30°$



(e) ΔE_{RP}, $\gamma = 60°$



(f) Δi_{RP}, $\gamma = 60°$

4.3 Comparação entre os dois modelos

Caso fique evidente que, ao se empregar a aproximação das Cônicas Conjugadas, obtém-se resultados muito semelhantes aos obtidos pelo problema restrito, é possível de elaborar algoritmos de menor complexidade para análise de manobras gravitacionalmente assistidas na Lua. Ou, então, é possível identificar regiões em que os resultados são semelhantes, dando segurança ao uso das Cônicas Conjugadas em condições específicas. Portanto, aqui, são apresentadas figuras obtidas pela comparação dos dois métodos.

As figuras consistem no valor absoluto da diferença entre os resultados obtidos por PCRTC e Cônicas Conjugadas, no intervalo de $[0°, 3°]$ para Δi e $[0, 0.05]$ para ΔE [7]. Colocado matematicamente:

$$\Delta_{error} = |\Delta_{RP} - \Delta_{PC}|. \tag{4.9}$$

4.3.1 Efeitos da velocidade de pericentro

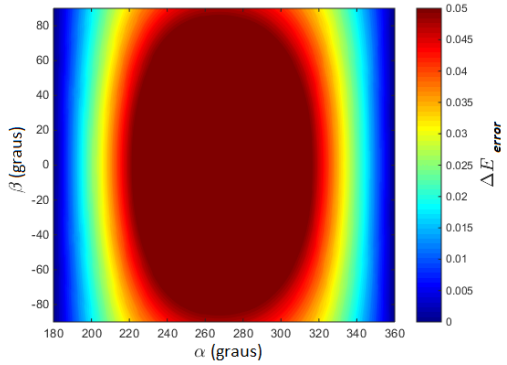
Os erros na variação de energia e variação de inclinação são apresentados na Figura 4.7 para valores de $r_p = 0.00675$ e $\gamma = 0°$, e valores selecionados de $v_p = 2.2$, 2.6 e 3.4.

As Figuras 4.7(a), 4.7(c) e 4.7(e) indicam que há uma aproximação entre os dois métodos na descrição de ΔE com o aumento de v_p. Para $v_p = 2.2$, Figura 4.7(a), há uma grande região com valores de diferença entre os dois métodos acima do limite superior de 0.05, o que desaparece completamente nas outras duas figuras, $v_p = 2.6$ (Figura 4.7(c)) e $v_p = 3.4$ (Figura 4.7(e)). Portanto, quanto maior a velocidade no perilune da manobra, menores serão os erros ocasionados por uma análise via Cônicas Conjugadas.

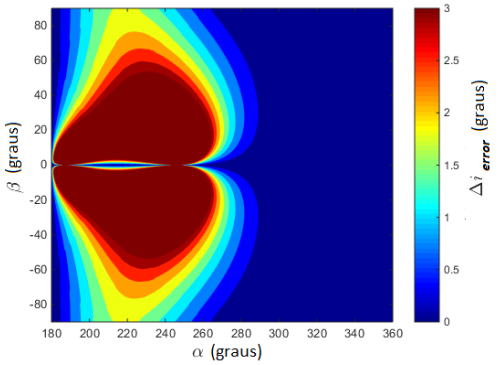
Outra fator que chama a atenção é o formato oblongo das curvas de nível, com simetria em $\alpha = 270°$ e $\beta = 0°$. As mudanças de curvas de nível são notadamente mais acentuadas com a variação de α do que com a variação de β. Isso é especialmente verdade para menores valores de v_p, como pode ser observado comparando a Figura 4.7(a) com a Figura 4.7(e). Portanto, esse comportamento indica que a influência de α na divergência entre os métodos é mais acentuada do que de β; o

[7] Os dois limites superiores foram estabelecidos arbitrariamente, de forma a facilitar a análise das figuras. Ou seja, valores superiores a eles são representados nesse limite.

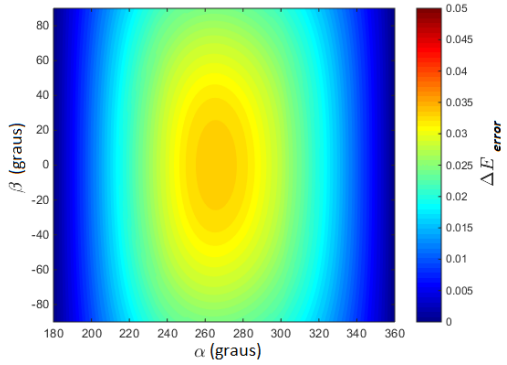
Figura 4.7 - Curvas de nível da diferença obtida entre o método das Cônicas Conjugadas e do PCRTC, com $r_p = 0.00675$ e $\gamma = 0°$, para diferentes valores de v_p. Fonte: Produção do autor.



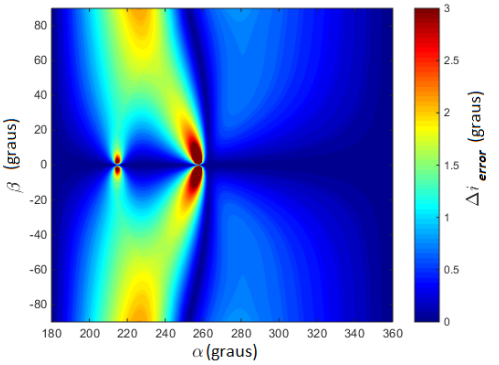
(a) $\Delta E_{comparação}$, $v_p = 2.2$



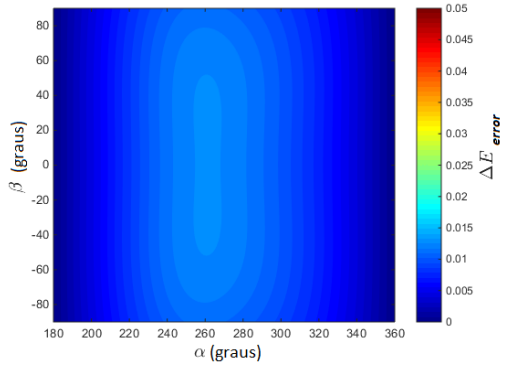
(b) $\Delta E_{comparação}$, $v_p = 2.2$



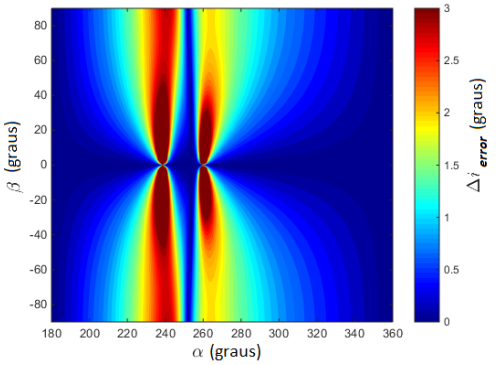
(c) $\Delta E_{comparação}$, $v_p = 2.6$



(d) $\Delta E_{comparação}$, $v_p = 2.6$



(e) $\Delta E_{comparação}$, $v_p = 3.4$



(f) $\Delta E_{comparação}$, $v_p = 3.4$

que é dinamicamente esperado, uma vez que é o ângulo α que determina o distanciamento da espaçonave em relação ao corpo M_1, que nesse caso é a Terra, na entrada e saída da SOI. Em outras palavras, é α quem determina a diferença na energia potencial proveniente de M_1 (Terra), que é levada em conta no problema restrito e desconsiderada nas Cônicas Conjugadas, na entrada e saída da SOI.

Quanto a inclinação, a relação com a variação de v_p aparenta ser inexistente ou complexa demais para qualquer afirmação baseada exclusivamente nesta análise, bastando observar as Figuras 4.7(b), 4.7(d) e 4.7(f). Outro ponto a ser notado nessas figuras é que, ao compará-las com as figuras obtidas para Δi anteriormente, nota-se que a grande diferença entre os métodos toma lugar nos limites das regiões onde, para uma manobra no plano ($\beta = 0°$ e $\gamma = 0°$), haveria inversão do movimento ($\Delta i = \pm 180°$).

Para elucidar, tome como exemplo a Figura 4.7(b) e compare-a a Figura 4.1(b). Note que na Figura 4.7(b) há dois pontos de conexão [8], quando $\beta = 0°$, entre a região superior ($\beta > 0$) e inferior ($\beta < 0$) no limite do intervalo (contornos vermelho-escuros), essas regiões crescem a partir desses pontos para $\beta \neq 0$. Agora, observe a Figura 4.1(b), perceba que os limites de $\Delta i = -180°$ quando $\beta = 0°$ ocorre por volta desses mesmos pontos. Isso indica que os limites da inversão de movimento no plano são pontos críticos, onde grandes diferenças na descrição da inclinação entre os métodos aparecem.

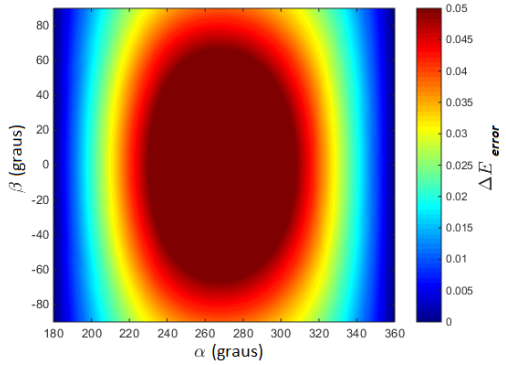
4.3.2 Efeitos do raio de pericentro

Passando a análise para o raio de pericentro, com valores selecionados de $r_p = 0.00476$, 0.00675 e 0.009, e valores fixos de $v_p = 2.6$ e $\gamma = 0°$, a Figura 4.8 foi obtida.

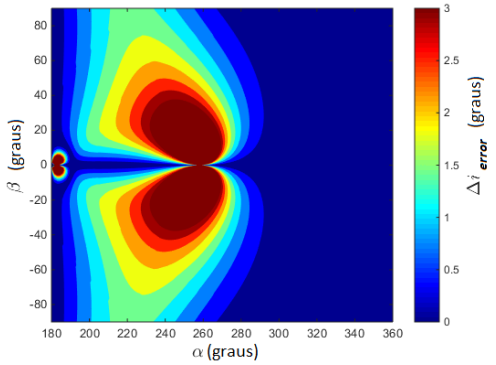
Começando pela variação de energia, a mesma discussão realizada na seção 4.3.1 para v_p se aplica. Veja que ΔE_{error}, Figuras 4.8(a), 4.8(c) e 4.8(e), diminui com o aumento de r_p. Isso era esperado, uma vez que com o crescimento de r_p (e o mesmo se aplica a v_p) espera-se que os efeitos do swing-by sejam menores, fazendo com que a subtração de tais resultados seja de pequena magnitude se comparado a condições que ampliam os efeitos (pequenos valores de r_p e v_p). Além disso, a mesma forma oblonga das curvas de nível é observada, com as mesmas simetrias, mostrando aqui também uma maior influência de α sobre os erros. Ademais, também indica que v_p e r_p não afetam essa dominância de α sobre os erros, uma vez que a aparência das curvas de nível é semelhante. Resta então, uma análise de γ para averiguar se essa

[8] Situam-se em torno de $\alpha = 190°$ e $\alpha = 245°$

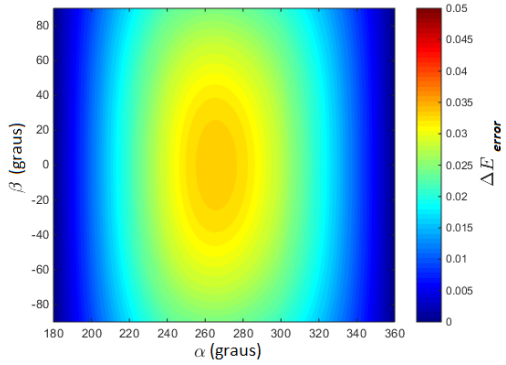
Figura 4.8 - Curvas de nível da diferença obtida entre o método das Cônicas Conjugadas e do PCRTC, com $v_p = 2.6$ e $\gamma = 0°$, para diferentes valores de r_p. Fonte: Produção do autor.



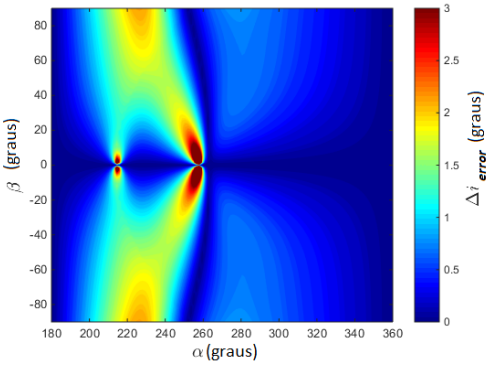
(a) $\Delta E_{comparação}$, $r_p = 0.00476$



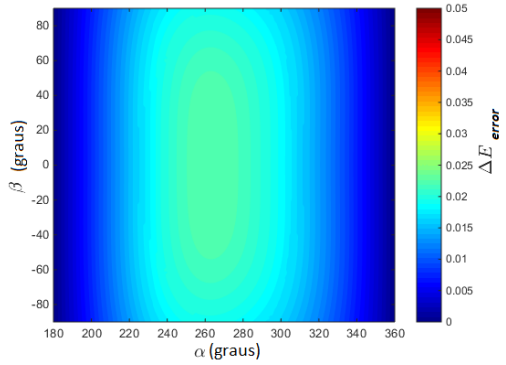
(b) $\Delta E_{comparação}$, $r_p = 0.00476$



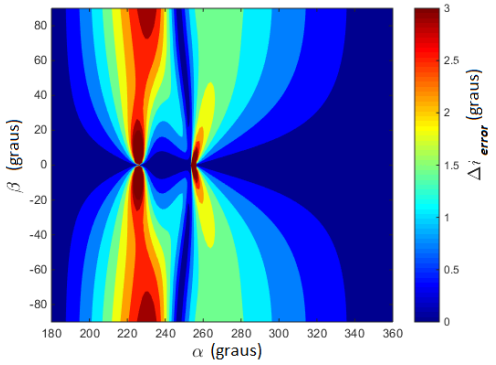
(c) $\Delta E_{comparação}$, $r_p = 0.00675$



(d) $\Delta E_{comparação}$, $r_p = 0.00675$



(e) $\Delta E_{comparação}$, $r_p = 0.009$



(f) $\Delta E_{comparação}$, $r_P = 0.009$

dominância de α se mantém e é verdade para qualquer condição.

Em relação a inclinação, Figuras 4.8(b), 4.8(d) e 4.8(f), as considerações também são semelhantes as feitas para v_p. Ou seja, note que grandes diferenças entre os métodos emergem nos limites da mudança de sentido de trajetória no plano. Sendo assim, o projetista deve tomar especial cuidado com condições na vizinhança de condições que marcam a alteração no sentido de translação da espaçonave. Por outro lado, como pode ser observado nas figuras, e também é verdade para os casos de v_p e γ, condições que produzem um erro igual ou superior a 3° na variação de inclinação não são dominantes, havendo sempre uma maior dominância para erros que não ultrapassam $\approx 1°$.

4.3.3 Efeitos de γ

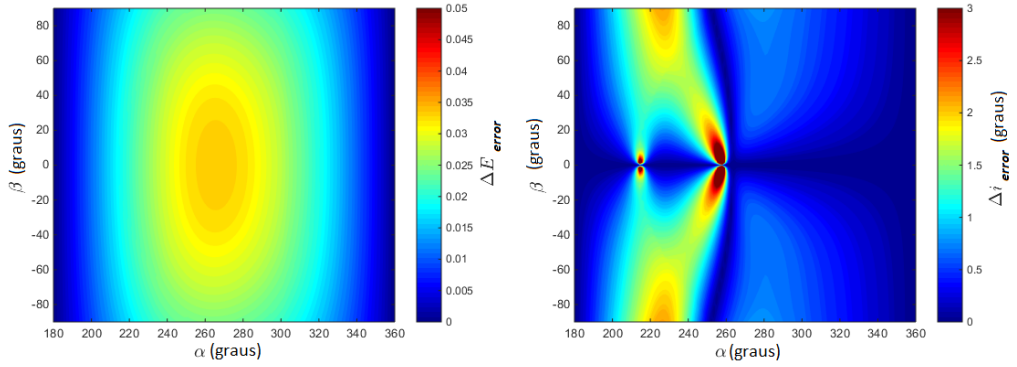
Finalmente, a análise dos erros para valores de $\gamma = 0°$, 30° e 60°, e valores de $r_p = 0.00675$ e $v_p = 2.6$. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 4.9.

Com o aumento de γ, é observado nas Figuras 4.9(a), 4.9(c) e 4.9(e) uma pequena diminuição dos erros de variação de energia, isso é notado pela leve desacentuação da cor amarelada da Figura 4.9(a) para a Figura 4.9(e).

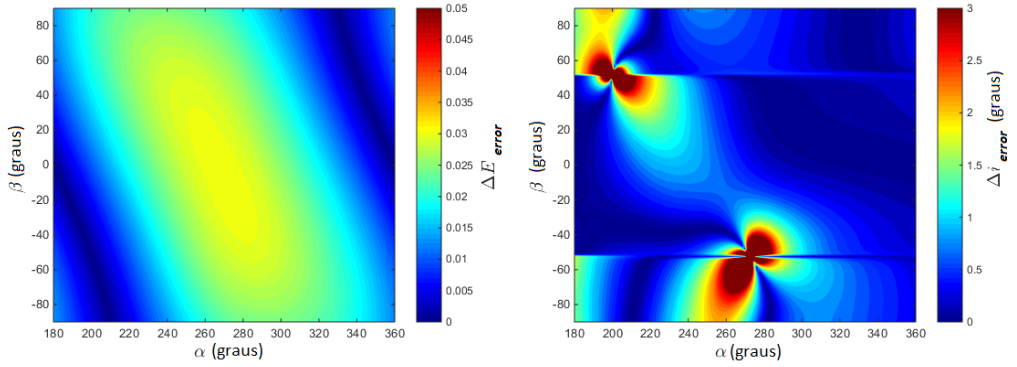
Outro comportamento que chama a atenção, é a inclinação das curvas de nível de formato oblongo de $\Delta E_{comparação}$ para valores diferentes de $\gamma = 0°$, fazendo também com que percam a simetria para α e β constantes, e passando a apresentar uma simetria que é definida por duas retas que são funções de ambos os parâmetros. Assim, diferentemente do que foi observado para v_p e r_p, o ângulo γ afeta a dominância de α sobre os erros em variação de energia.

No entanto, a explicação quanto aos erros de energia teriam origem parcial devido à magnitude do distanciamento da espaçonave em relação a M_1 se mantém, como é evidenciado pela Figura 4.10. A figura apresenta duas trajetórias no sistema xyz para condições de $r_p = 0.009$, $v_p = 2.2$, $\alpha = 230°$ e $\gamma = 30°$, com a única diferença sendo que em uma situação $\beta = 70°$ e em outra $\beta = -70°$. A figura é composta por projeções da trajetória em xy (Figura 4.10(a)), xz (Figura 4.10(b)), zy (Figura 4.10(c)) e a trajetória no espaço (Figura 4.10(d)). No entanto, o que interessa aqui são as figuras correspondentes as projeções em xy e xz; pois, como é perceptível, a trajetória correspondente a β positivo (curva vermelha+azul) apresenta um maior alcance em x. Sendo assim, isso serve de evidência para a argumentação relativa aos maiores erros se deverem a influência não computada de M_1 sobre a espaçonave

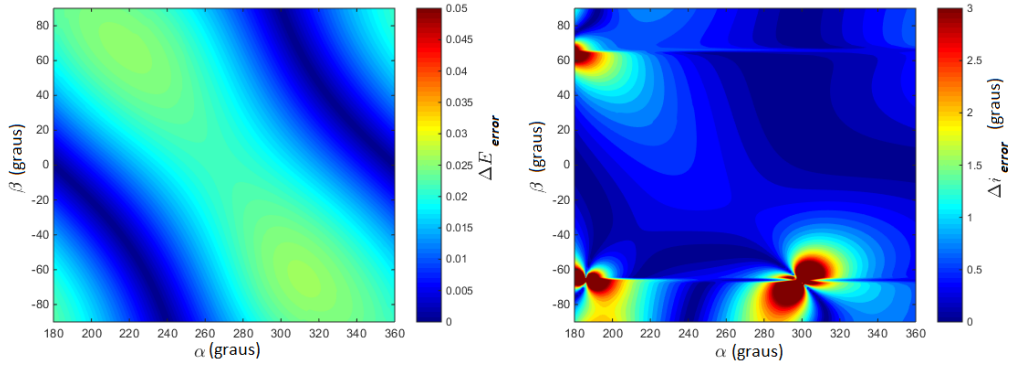
Figura 4.9 - Curvas de nível da diferença obtida entre o método das Cônicas Conjugadas e do PCRTC, com $r_p = 0.00675$ e $v_p = 2.6$, para diferentes valores de γ. Fonte: Produção do autor.



(a) $\Delta E_{comparação}$, $\gamma = 0°$ (b) $\Delta E_{comparação}$, $\gamma = 0°$



(c) $\Delta E_{comparação}$, $\gamma = 30°$ (d) $\Delta E_{comparação}$, $\gamma = 30°$

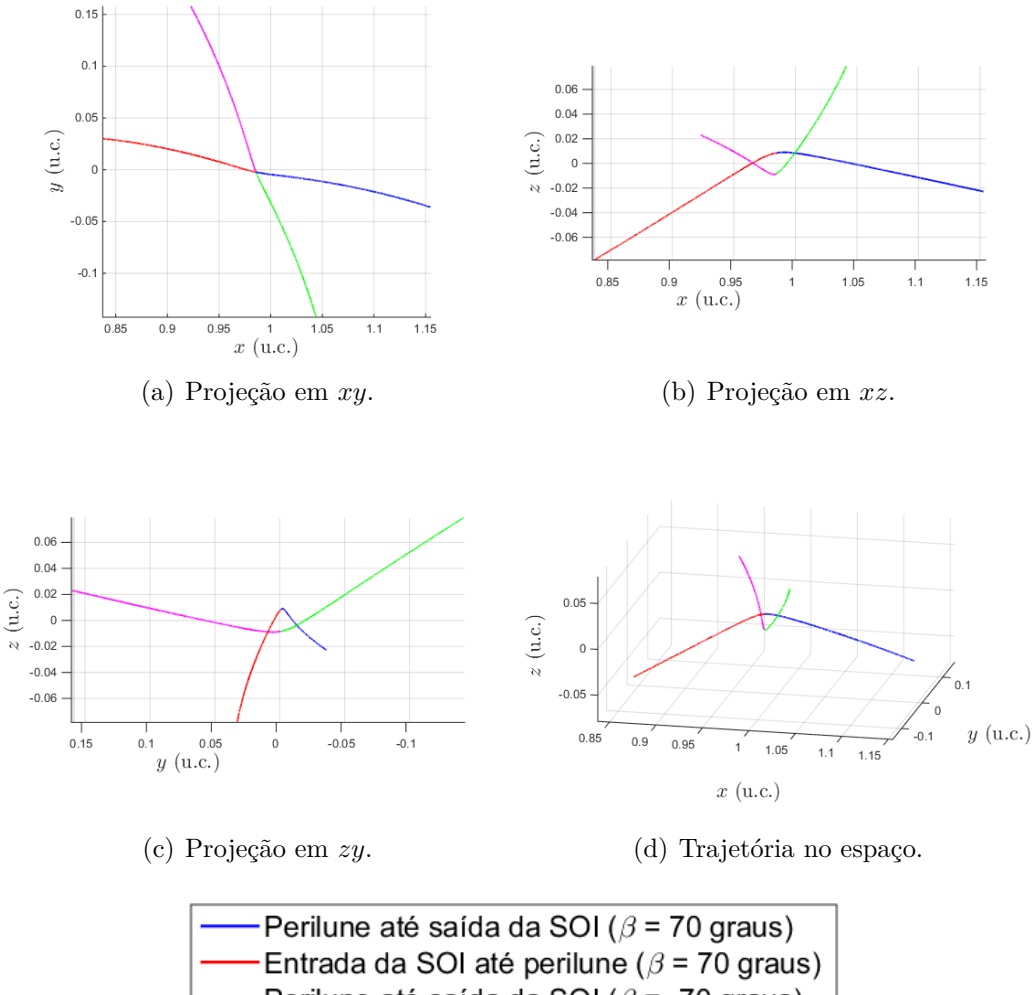


(e) $\Delta E_{comparação}$, $\gamma = 60°$ (f) $\Delta E_{comparação}$, $\gamma = 60°$

antes e depois do *swing-by*.

Por fim, tem-se as Figuras 4.9(b), 4.9(d) e 4.9(f), correspondentes a variação de inclinação. Poucas conclusões das características gerais são possíveis de serem obtidas nessa análise, visto que é dificil obter uma relação de causalidade. No entanto, é possível perceber que aqui os erros também parecem emergir dos, anteriormente nomeados, pontos críticos. Isso é possível de ser notado ao comparar essas figuras às figuras relativas a inclinação da seção 4.1.3 e 4.2.3.

Figura 4.10 - Trajetórias da espaçonave com $\beta = \pm 70°$ para $r_p = 0.009$, $v_p = 2.2$, $\alpha = 230°$ e $\gamma = 30°$, no sistema xyz. Fonte: Produção do autor.



(a) Projeção em xy.

(b) Projeção em xz.

(c) Projeção em zy.

(d) Trajetória no espaço.

5 ESTUDO GERAL DOS ERROS PARA DIFERENTES PARÂMETROS DE MASSA

Utilizando o estudo desenvolvido em Negri et al. (2017) como base, este capítulo pretende passar uma ideia geral sobre a influência do parâmetro de massa na divergência entre o modelo das Cônicas Conjugadas e do problema restrito. É esperado que para maiores parâmetros de massa a divergência entre os métodos aumente.

Além disso, alguns casos do sistema solar são selecionados e analisados, para se fazer um levantamento das particularidades de cada um deles.

5.1 Método de comparação

Antes de tudo, cabe apresentar o método de comparação utilizado para encontrar as diferenças entre ambas as abordagens, que são consideradas como os erros da estimação feita pelo método das Cônicas Conjugadas. Um algoritmo capaz de calcular tanto ΔE_{RP} quanto ΔE_{PC} é desenvolvido. Então, é definida a seguinte equação para o erro:

$$\Delta E_{error} = \Delta E_{RP} - \Delta E_{PC}. \tag{5.1}$$

Esta definição indica que um erro negativo significa que o modelo das Cônicas Conjugadas estima uma variação de energia que é maior que a estimada pelo, mais preciso modelo do PCRTC, enquanto valores positivos siginificam o oposto.

O algoritmo realiza diversos *loops* nos parâmetros μ, r_p, v_p, γ, α e β para analisar cada um desses parâmetros individualmente e também seus efeitos combinados.

O *loop* em v_p é definido de tal forma que o escape de M_2 é garantido, o que significa dizer que existe um limite inferior de valores que v_p pode assumir. A velocidade de escape é calculada utilizando o mínimo valor de r_p utilizado no *loop* de r_p, que será definido como $r_{p(min)}$. Adicionalmente, a velocidade de escape é multiplicada por um fator N. Portanto, os valores de v_p no *loop* são definidos como um produto de N, o qual é efetivamente variado, e a velocidade de escape na distância de $r_{p(min)}$. Dessa forma, N é utilizado para definir as variações de v_p. O resultado é dado por:

$$v_p = N \times \sqrt{\frac{2\mu}{r_{p(min)}}}. \tag{5.2}$$

O intervalo de valores para cada *loop* é mostrado e explicado a seguir:

a) μ: De 1×10^{-5} até 0.1. O valor máximo é escolhido de forma que coincida com o caso mais extremo encontrado no sistema solar, que é para o sistema Plutão-Caronte ($\mu = 0.1043$). O limite inferior é escolhido de forma a garantir que as diferenças entre os métodos não sejam totalmente desprezáveis;

b) r_p: De 0.004 até 0.007 unidades canônicas. O limite inferior foi escolhido para evitar grandes aproximações com o centro de M_2. Isso evita a necessidade de regularização das equações e também mantém coerência com casos práticos, pois valores menores poderiam fazer com que colisões da espaçonave com o corpo onde a manobra é realizada se tornem muito frequentes. O limite superior foi decidido para prevenir que o pericentro seja maior que a esfera de influência, e também para evitar que efeitos do *swing-by* não sejam consideravelmente desprezáveis;

c) N: De 1.1 até 1.4. O valor de 1.1 unidades canônicas é escolhido de forma a assegurar o escape da espaçonave da atração de M_2, e 1.4 é usado para evitar passagens com pequenas variações de energia;

d) α: De 0° até 360°, todos os valores que α pode assumir;

e) β: De -90° até 90°, também todo intervalo possível;

f) γ: Novamente, o intervalo completo, de -180° até 180°.

Após a obtenção de todos os resultados, eles são analisados utilizando figuras. Essas figuras mostram a relação entre ΔE_{error} e cada um dos parâmetros envolvidos na manobra. Para obter uma compreensão geral da distribuição dos dados para cada ponto do espaço cartesiano, é tomada a média que representa a distribuição dos dados para uma dada figura. Essa média é calculada sobre os valores absolutos de ΔE_{error} correspondentes ao ponto, como mostrado abaixo:

$$\overline{\Delta E}_{error} = mean(|\Delta E_{error}|). \tag{5.3}$$

5.2 Resultados

Várias simulações foram feitas para mensurar os erros estimados pelo modelo das Cônicas Conjugadas. Eles são descritos nos próximos tópicos.

5.2.1 Análise do parâmetro de massa

Nesta seção, é examinada a influência do parâmetro de massa (μ) nos erros dos valores estimados pelo modelo das Cônicas Conjugadas. De forma a cumprir essa tarefa, como explicado na seção 5.1, é elaborado um conjunto de *loops* nos parâmetros que definem uma manobra para obter o ΔE_{error} para diferentes condições.

A Figura 5.1 mostra o máximo, o mínimo e a média dos erros, utilizando os intervalos já explicados para cada variável. Na Figura 5.1, é possível constatar que existe um aumento quase que constante no máximo, mínimo e média do erro, quando μ assume valores maiores. Isso está de acordo com o previsto, já que é esperado que, em condições onde o efeito do *swing-by* é mais acentuado, também ocorra o aumento dos erros.

A média, $\overline{\Delta E}_{error}$, é sempre próxima de zero quando comparada aos valores máximos e mínimos. Mas não é uma constante, como mostrado pela Figura 5.2 (de fato, existe um forte aumento junto ao parâmetro de massa). Isso indica que maiores divergências devem ocorrer em apenas algumas poucas condições iniciais críticas, com pequenos erros na maioria dos casos. A Figura 5.2 mostra que o erro médio se expande de 0.002 para em torno de 0.012 unidades canônicas, o que é pequeno se comparado aos erros máximos, os quais apresentam magnitudes próximas de 0.1 unidades canônicas, como observado na Figura 5.1.

Percebe-se nas Figuras 5.1 e 5.2 que, entre $\mu = 0.0001$ e $\mu = 0.01$, as curvas podem ser facilmente aproximadas por uma reta do tipo:

$$\Delta E_{error}(\mu) = b + a\log(\mu) \tag{5.4}$$

Dessa forma, e dos dados obtidos, é possível escrever as seguintes curvas, fazendo uma aproximação entre $\mu = 0.0001$ e $\mu = 0.01$:

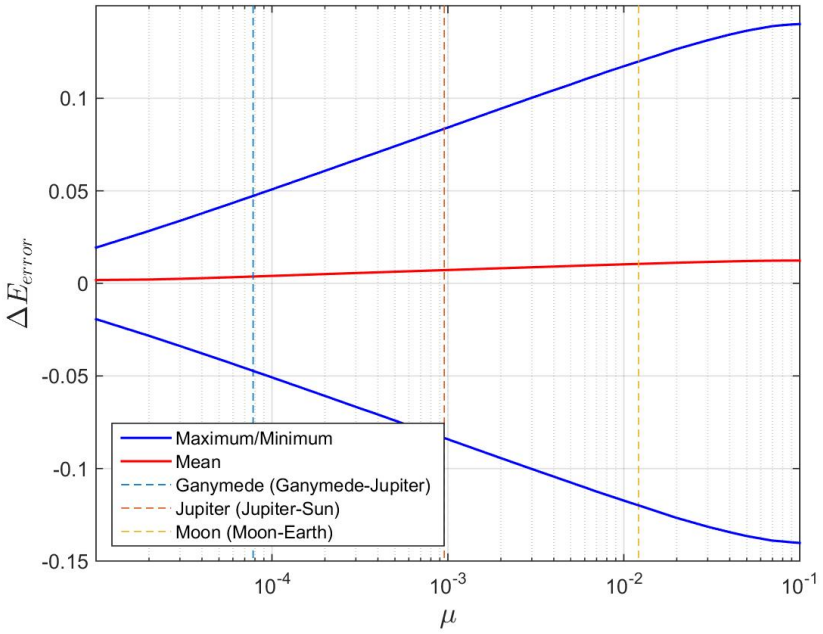
$$\Delta E_{error-mean}(\mu) = 0.0165 + 0.0031\log(\mu), \tag{5.5}$$

$$\Delta E_{error-min}(\mu) = -0.1838 - 0.0333\log(\mu), \tag{5.6}$$

$$\Delta E_{error-max}(\mu) = 0.1838 + 0.0333\log(\mu), \tag{5.7}$$

onde a Equação 5.5 descreve o erro médio, a Equação 5.6 o erro mínimo e a Equação 5.7 o erro máximo. Essas curvas podem ser úteis para se ter uma boa ideia dos erros envolvidos. Para valores menores que $\mu = 1 \times 10^{-4}$ e maiores que $\mu = 0.01$ ocorre

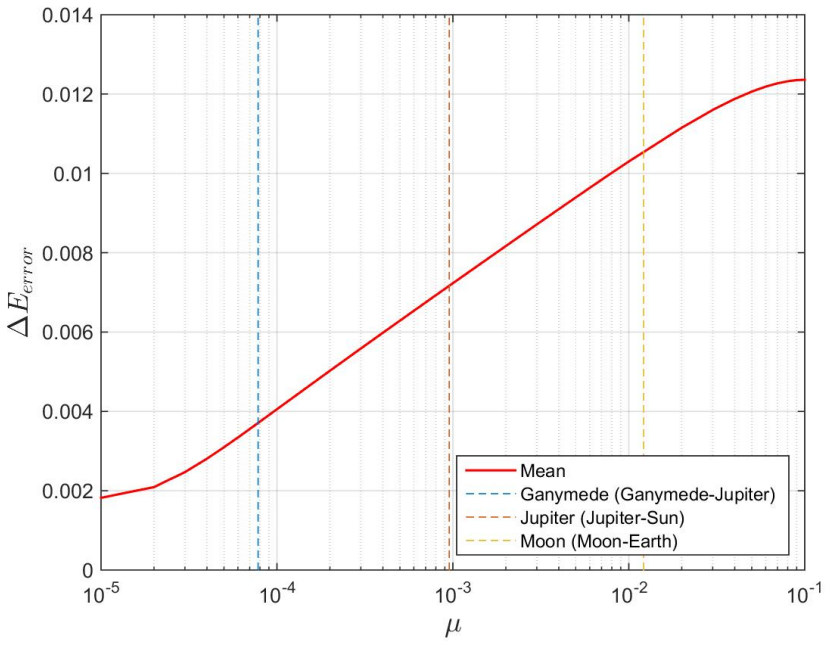
Figura 5.1 - Distribuição dos erros (ΔE_{error}) como uma função de μ. Os erros máximos e mínimos são mostrados em curvas azuis o erro médio ($\overline{\Delta E}_{error}$) em vermelho. As linhas pontilhadas representam alguns valores de μ para alguns sistemas. Fonte: Produção do autor.



uma discrepância entre essas curvas analíticas e os dados. No entanto, o único caso que apresenta $\mu > 0.01$ no sistema solar é o sistema Plutão-Caronte. Já para os casos em que $\mu < 1 \times 10^{-4}$ existe pouco interesse em se determinar os erros envolvidos, já que tendem a ser muito pequenos (ainda assim, para casos entre $\mu = 1 \times 10^{-5}$ e $\mu = 1 \times 10^{-4}$ as Equações 5.6 e 5.7 são boas aproximações). Portanto, em casos em que a análise da limitação do modelo das Cônicas Conjugadas desperta maior interesse, as curvas podem ser ferramentas úteis para se determinar como os erros podem se comportar.

A Tabela 5.1 foi obtida utilizando as Equações 5.5 e 5.7 (a Equação 5.6 não foi utilizada, pois consiste apenas em um espelhamento da equação para $\Delta E_{error-max}$). Ela apresenta alguns sistemas escolhidos que possuem $\mu > 1 \times 10^{-5}$. Para auxiliar na avaliação dos dados da Tabela 5.1, seus dados foram plotados em figuras semelhantes as Figuras 5.1 e 5.2, obtendo então a Figura 5.3. Utilizando a tabela e essas figuras, é possível perceber que, excetuando o caso Plutão-Caronte, a Equação 5.7 (e por consequência, a Equação 5.6) descreve com boa precisão os erros máximos desses sistemas. Porém, para a Equação 5.5, além da discrepância no caso Plutão-Caronte, percebe-se também uma certa discrepância para os sistemas Umbriel-Urano e Ariel-

Figura 5.2 - Distribuição de erros (ΔE_{error}) como uma função de μ. Os erros médios são mostrados separadamente com o objetivo de clarificar sua variação. Fonte: Produção do autor.



Urano. No entanto, a maior utilidade prática dessas equações é transmitir noções preliminares sobre a magnitude de erros possíveis de se encontrar em uma aproximação por Cônicas Conjugadas. E essas discrepâncias não têm grande influência a ponto de descartar seu uso para os casos citados.

5.2.2 Análise individual de cada parâmetro

Agora, este trabalho se dirige a analisar os efeitos do parâmetro de massa combinado com cada um dos parâmetros que definem a manobra de *swing-by*. No entanto, diferentemente do que foi realizado na seção anterior e de forma a buscar uma compreensão tão holística quanto possível do problema, a análise dos erros obtidos pela aproximação das Cônicas Conjugadas é auxiliado por figuras que demonstram as variações de energia obtidas por cada um dos modelos.

Com auxílio das Equações 2.29 e 2.30, além, é claro, da Equação 5.1, as Figuras 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8 são desenvolvidas. As subfiguras são classificadas como: (a), que indicam a variação de energia pelo PCRTC; (b), indicando a variação de energia pela aproximação das Cônicas Conjugadas; (c), que mostram os erros. Cada uma dessas figuras é padronizada como se segue: o logaritmo do parâmetro de massa é mostrado

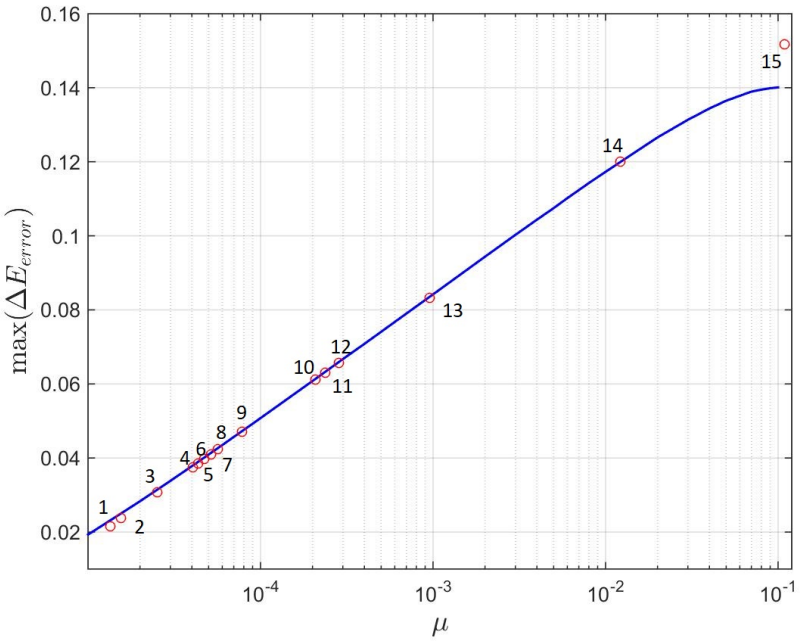
Tabela 5.1 - Alguns sistemas que apresentam o parâmetro de massa superior a 1×10^{-5} e os erros esperados utilizando a aproximação das Equações 5.5 e 5.7.

Sistema	Legenda	μ	$\Delta E_{error-max}$	$\Delta E_{error-mean}$
Umbriel - Urano	1	1.35×10^{-5}	0.0216	0.0014
Ariel - Urano	2	1.56×10^{-5}	0.0237	0.0016
Europa - Júpiter	3	2.53×10^{-5}	0.0307	0.0022
Titânia - Urano	4	4.06×10^{-5}	0.0376	0.0029
Urano - Sol	5	4.36×10^{-5}	0.0386	0.0030
Io - Júpiter	6	4.70×10^{-5}	0.0397	0.0031
Netuno - Sol	7	5.15×10^{-5}	0.0410	0.0032
Calisto - Júpiter	8	5.67×10^{-5}	0.0424	0.0033
Ganímedes - Júpiter	9	7.80×10^{-5}	0.0470	0.0038
Tritão - Netuno	10	2.08×10^{-4}	0.0613	0.0051
Titã - Saturno	11	2.37×10^{-4}	0.0631	0.0053
Saturno - Sol	12	2.86×10^{-4}	0.0658	0.0055
Júpiter - Sol	13	9.54×10^{-4}	0.0832	0.0071
Lua - Terra	14	1.22×10^{-2}	0.1200	0.0106
Caronte - Plutão	15	1.09×10^{-1}	0.1517	0.0135

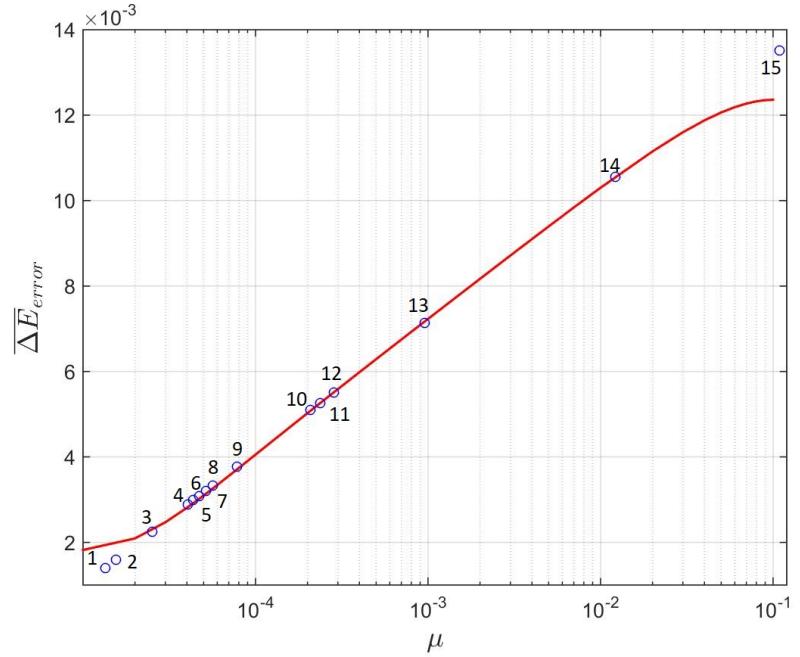
no eixo horizontal; no eixo vertical é apresentado cada um dos parâmetros restantes; as curvas de nível indicam a variação de energia média (para o caso da comparação, $\overline{\Delta E_{error}}$) para o ponto, em unidades canônicas, onde as regiões azuis representam maiores valores e as amarelas são regiões com os menores valores; por fim, a curvas pretas e as curvas vermelhas pontilhadas [1] representam, respectivamente, os valores

[1] As curvas pontilhadas vermelhas e as pretas estão superpostas em quase todas as figuras, devido a simetria do problema (em outras palavras: $max(\Delta E) = -min(\Delta E)$). A excessão é para o parâmetro α, que é precisamente a variável que cria esse tipo de simetria.

Figura 5.3 - Comparação dos resultados obtidos utilizando as Equações 5.5 e 5.7, para os sistemas apresentados na Tabela 5.1, com os dados vindos da simulação que compara as Cônicas Conjugadas ao Problema Restrito. Fonte: Produção do autor.



(a) $\Delta E_{error-max}$



(b) $\Delta E_{error-mean}$

máximos e mínimos.

O primeiro parâmetro a ser analizado é a distância de pericentro (r_p). O resultado esperado é um aumento da variação de energia conforme r_p diminui, porque maiores distâncias de pericentro diminuem os efeitos da manobra, uma vez que a gravidade do corpo M_2 agindo na espaçonave é reduzida com a distância. Isso é exatamente o quantificado nas Figuras 5.4(a) e 5.4(b). Os erros entre os modelos, Figura 5.4(c), segue a mesma tendência. Fica claro, ao se olhar em linhas verticas, que o erro diminui com o aumento da distância de pericentro. Examinando em linhas horizontais, é possível observar que o erro aumenta com o parâmetro de massa, exatamente como previsto na seção 5.2.1. As linhas que indicam os valores máximos e mínimos para o erro confirmam as localizações obtidas para a média.

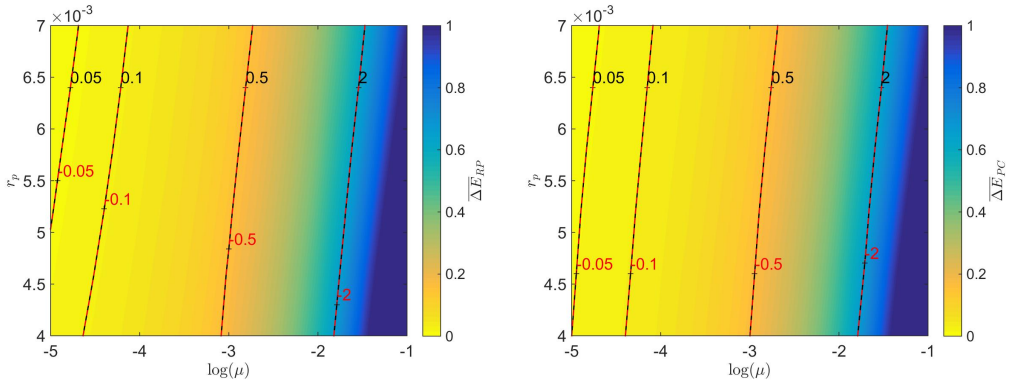
Como próximo passo, a Figura 5.5 apresenta os resultados em relação a velocidade no pericentro (v_p), aqui representada por N, como já discutido. O mesmo comportamento discutido para r_p, quanto aos erros, é notado aqui. Eles aumentam com o parâmetro de massa e reduzem com o aumento da velocidade no pericentro, como mostra a Figura 5.5(c). Isso é esperado, já que ao se aumentar a velocidade no pericentro os efeitos de M_2 sobre a espaçonave são reduzidos, uma vez que uma maior velocidade implica em menores ângulos de deflexão de sua trajetória pelo segundo primário. Outro ponto é que a espaçonave permanece menos tempo sofrendo os efeitos do terceiro corpo no PCRTC, o que ajuda a reduzir os erros dessa aproximação, como já notado por Greenberg et al. (1988).

Além disso, é importante notar nas Figuras 5.5(a) e 5.5(b) que ao seguir em linhas de μ constante, as variações de energia parecem ter um pequeno aumento e depois uma pequena queda conforme N cresce. Isso pode ser explicado com auxílo da Equação 2.30. Perceba que ΔE é diretamente proporcional a v_∞ e $\sin\delta$, e esses, por sua vez, são proporcionais a termos quadráticos de v_p. Logo, essa pode ser a explicação para esse tipo de comportamento.

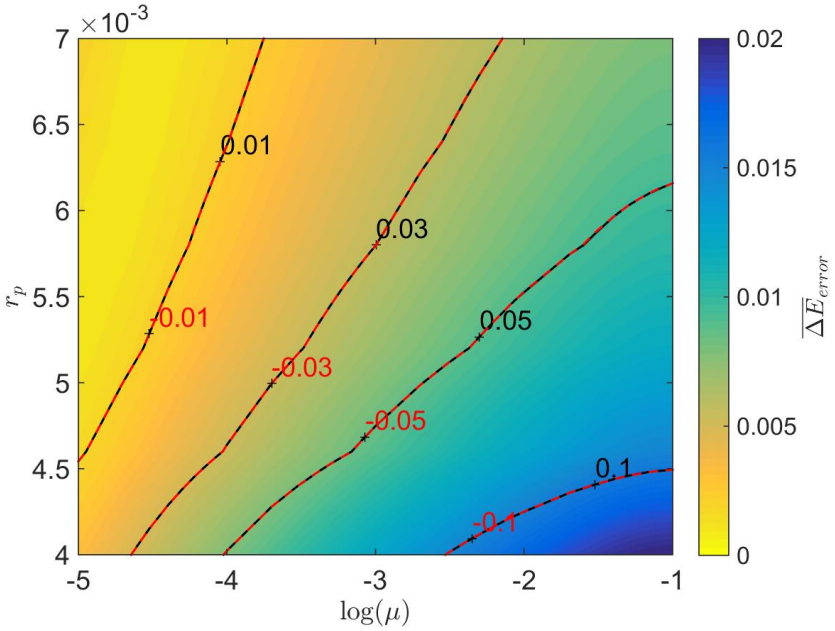
Move-se agora para γ, Figura 5.6. Começando por analisar a variação de energia pelas Cônicas Conjugadas, Figura 5.6(b), nota-se que não existe variação da energia junto a variação de γ. Esse fato é facilmente explicado ao notar que a Equação 2.30 não depende de γ. Logo, ele não influi na variação de energia na aproximação por Cônicas Conjugadas.

No entanto, observando a Figura 5.6(a), γ parece ter algum efeito quando é utilizado o problema restrito. Esse efeito são as maiores variações de energia quando $\gamma = 0°$,

Figura 5.4 - Distribuição de ΔEs para diferentes valores de μ e r_p. As curvas coloridas representam a média ($\overline{\Delta E}$), enquando as linhas pretas e vermelhas pontilhadas representam os valores máximos e mínimos, respectivamente. Fonte: Produção do autor.



(a) ΔE_{RP} (b) ΔE_{PC}

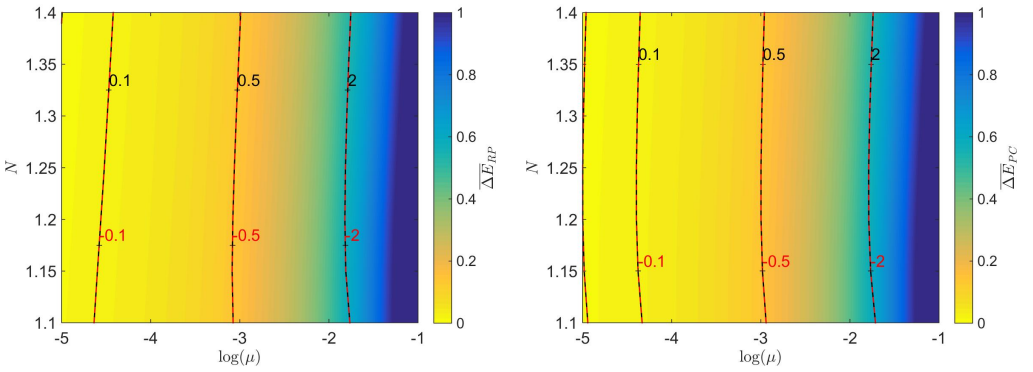


(c) ΔE_{error}

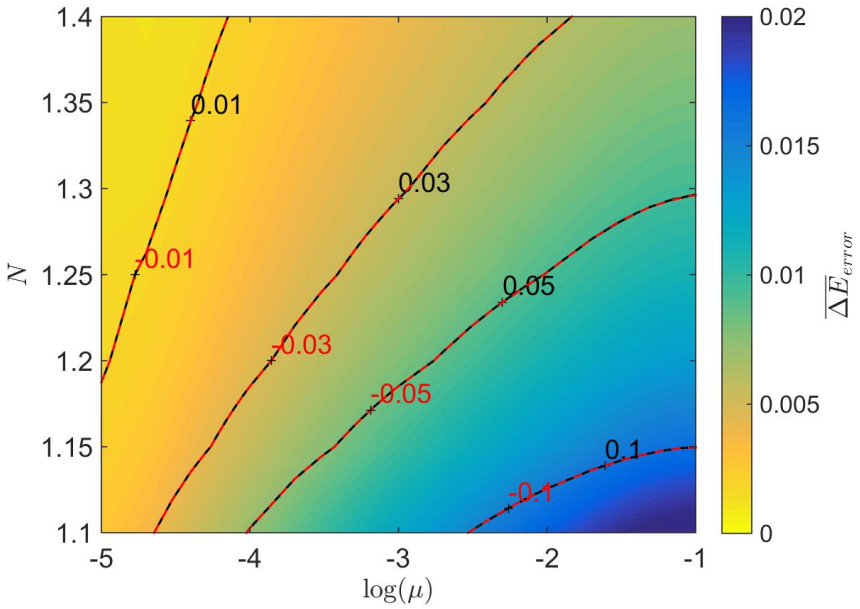
como a figura indica. Para ajudar a explicar esse fato, faz-se uso da Tabela 5.2. Ela apresenta valores de energia obtidos pelo PCRTC para o caso Ganímedes-Júpiter, *swing-by* no plano, em que γ assume valores de 0° e 180°, com α assumindo valores desde 180° a 360°. A tabela confirma o observado na Figura 5.6(a) ao mostrar que $\gamma = 0°$ produz maiores variações de energia.

A explicação começa ao se notar que a variação de energia potencial (ΔU) sempre é positiva para $\gamma = 0°$, enquanto que para 180°, ela é negativa. Sabe-se que a energia

Figura 5.5 - Distribuição de ΔEs para diferentes valores de μ e N. As curvas coloridas representam a média ($\overline{\Delta E}$), enquando as linhas pretas e vermelhas pontilhadas representam os valores máximos e mínimos, respectivamente. Fonte: Produção do autor.



(a) ΔE_{RP} (b) ΔE_{PC}

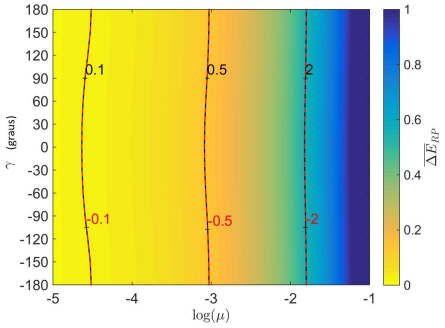


(c) ΔE_{error}

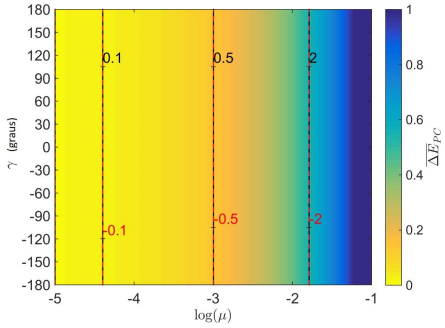
potencial no problema restrito é descrita pela Equação 3.3, mas como a energia potencial antes (U_i) e depois (U_o) da manobra é calculada na esfera de influência de M_2, um ΔU positivo só pode significar que a espaçonave está mais distante de M_1 depois da manobra do que estava antes.

Logo, a explicação para $\gamma = 0°$ favorecer um maior ganho de energia, quando α se encontra entre 180° e 360°, é de que esse valor de γ possibilita que a espaçonave se distancie da atração gravitacional de M_1. Isso faz com que o ganho da manobra se

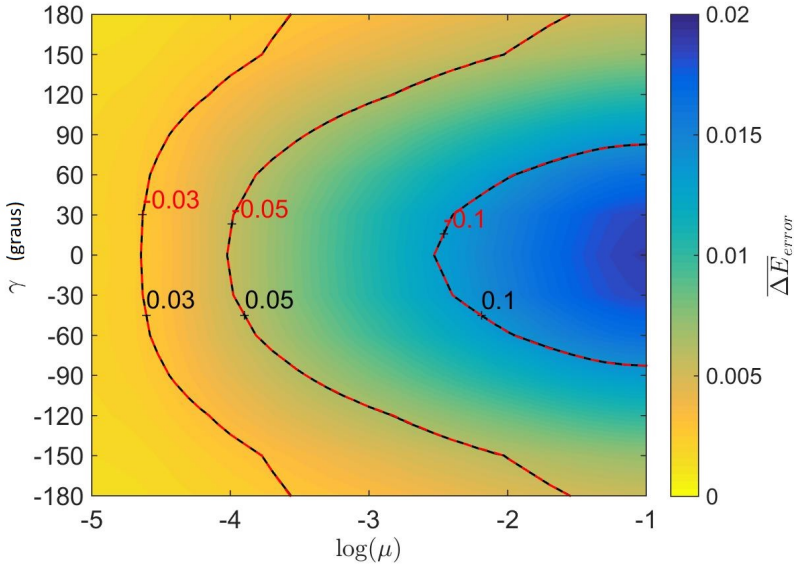
Figura 5.6 - Distribuição de ΔEs para diferentes valores de μ e γ. As curvas coloridas representam a média ($\overline{\Delta E}$), enquando as linhas pretas e vermelhas pontilhadas representam os valores máximos e mínimos, respectivamente. Fonte: Produção do autor.



(a) ΔE_{RP}



(b) ΔE_{PC}



(c) ΔE_{error}

some a esse ganho em energia potencial. Já para α entre 0° e 180° é esperado que $\gamma = 0°$ continue favorecendo uma maior variação de energia, nesse caso negativa, pela razão oposta. Ou seja, a manobra de *swing-by* faz com que a espaçonave perca energia. Esse efeito da manobra é somado ao ΔU negativo que a espaçonave ganha ao ficar mais próxima de M_1. E a sua contraparte, $\gamma = 180°$, se afasta de M_1 e tem um ΔU positivo, amenizando a perda de energia imposta pelo *swing-by*.

Espera-se que o efeito descrito acima seja mais significativo em sistemas onde o parâmetro de massa seja maior. E isso é exatamente o apresentado na Figura 5.6(c), que mantém a coerência da análise.

Tabela 5.2 - Energias obtidas pelo PCRTC, em unidades canônicas, para $\mu = 7.8 \times 10^{-5}$ (Ganímedes-Júpiter), $r_p = 0.004$, $N = 1.1$ e $\beta = 0°$ em diferentes condições de α e γ. K indica energia cinética, U é energia potencial, o subscrito o indica valor referente a saída da esfera de influência e i é referente a entrada na esfera de influência.

α [°]	γ [°]	ΔE	E_o	E_i	ΔU	U_o	U_i	ΔK	K_o	K_i
180	0	0.0000	-0.5913	-0.5913	0.0000	-0.9974	-0.9974	0.0000	0.4061	0.4061
180	180	0.0000	-0.4091	-0.4091	0.0000	-0.9907	-0.9907	0.0000	0.5817	0.5817
190	0	0.0306	-0.5746	-0.6051	0.0076	-0.9937	-1.0013	0.0229	0.4192	0.3962
190	180	0.0264	-0.3971	-0.4236	-0.0064	-0.9942	-0.9878	0.0329	0.5970	0.5642
200	0	0.0602	-0.5555	-0.6158	0.0150	-0.9904	-1.0054	0.0452	0.4348	0.3896
200	180	0.0521	-0.3882	-0.4403	-0.0126	-0.9979	-0.9853	0.0647	0.6097	0.5450
210	0	0.0880	-0.5347	-0.6228	0.0219	-0.9874	-1.0094	0.0661	0.4527	0.3866
210	180	0.0762	-0.3824	-0.4586	-0.0185	-1.0019	-0.9833	0.0947	0.6194	0.5247
220	0	0.1132	-0.5127	-0.6259	0.0282	-0.9850	-1.0132	0.0850	0.4723	0.3873
220	180	0.0981	-0.3801	-0.4782	-0.0239	-1.0059	-0.9820	0.1220	0.6258	0.5038
230	0	0.1349	-0.4902	-0.6251	0.0336	-0.9832	-1.0168	0.1013	0.4930	0.3917
230	180	0.1170	-0.3813	-0.4983	-0.0286	-1.0099	-0.9813	0.1456	0.6286	0.4830
240	0	0.1525	-0.4677	-0.6203	0.0380	-0.9819	-1.0199	0.1145	0.5141	0.3996
240	180	0.1324	-0.3860	-0.5184	-0.0325	-1.0137	-0.9811	0.1650	0.6277	0.4628

Continua

Tabela 5.2 – *Continuação*

α [°]	γ [°]	ΔE	E_o	E_i	ΔU	U_o	U_i	ΔK	K_o	K_i
250	0	0.1655	-0.4461	-0.6116	0.0413	-0.9812	-1.0225	0.1242	0.5351	0.4109
250	180	0.1438	-0.3941	-0.5378	-0.0355	-1.0172	-0.9817	0.1793	0.6231	0.4438
260	0	0.1734	-0.4259	-0.5994	0.0434	-0.9812	-1.0245	0.1301	0.5552	0.4252
260	180	0.1508	-0.4053	-0.5561	-0.0375	-1.0202	-0.9828	0.1882	0.6150	0.4267
270	0	0.1761	-0.4078	-0.5840	0.0441	-0.9818	-1.0259	0.1320	0.5739	0.4419
270	180	0.1531	-0.4193	-0.5725	-0.0383	-1.0228	-0.9845	0.1914	0.6035	0.4120
280	0	0.1734	-0.3924	-0.5659	0.0436	-0.9830	-1.0266	0.1298	0.5905	0.4607
280	180	0.1508	-0.4357	-0.5865	-0.0379	-1.0247	-0.9868	0.1887	0.5890	0.4003
290	0	0.1655	-0.3802	-0.5457	0.0418	-0.9848	-1.0265	0.1237	0.6045	0.4808
290	180	0.1438	-0.4539	-0.5977	-0.0364	-1.0260	-0.9896	0.1802	0.5721	0.3918
300	0	0.1525	-0.3716	-0.5241	0.0386	-0.9871	-1.0258	0.1139	0.6156	0.5017
300	180	0.1324	-0.4734	-0.6058	-0.0338	-1.0266	-0.9928	0.1662	0.5532	0.3870
310	0	0.1349	-0.3667	-0.5017	0.0343	-0.9900	-1.0243	0.1006	0.6232	0.5227
310	180	0.1170	-0.4935	-0.6105	-0.0300	-1.0265	-0.9964	0.1470	0.5329	0.3859
320	0	0.1132	-0.3659	-0.4791	0.0289	-0.9933	-1.0222	0.0843	0.6274	0.5431

Continua

Tabela 5.2 – *Continuação*

α [°]	γ [°]	ΔE	E_o	E_i	ΔU	U_o	U_i	ΔK	K_o	K_i
320	180	0.0981	-0.5137	-0.6118	-0.0253	-1.0256	-1.0003	0.1234	0.5120	0.3886
330	0	0.0881	-0.3691	-0.4571	0.0226	-0.9969	-1.0195	0.0655	0.6278	0.5624
330	180	0.0762	-0.5332	-0.6094	-0.0198	-1.0241	-1.0043	0.0960	0.4909	0.3949
340	0	0.0602	-0.3761	-0.4363	0.0155	-1.0008	-1.0163	0.0447	0.6247	0.5800
340	180	0.0521	-0.5516	-0.6037	-0.0135	-1.0219	-1.0084	0.0656	0.4703	0.4047
350	0	0.0306	-0.3867	-0.4173	0.0079	-1.0048	-1.0127	0.0227	0.6181	0.5954
350	180	0.0264	-0.5683	-0.5947	-0.0069	-1.0192	-1.0123	0.0333	0.4509	0.4176
360	0	0.0000	-0.4006	-0.4006	0.0000	-1.0089	-1.0089	0.0000	0.6083	0.6083
360	180	0.0000	-0.5828	-0.5828	0.0000	-1.0159	-1.0159	0.0000	0.4331	0.4331

Broucke (1988) e Prado (2000a) mostram que a máxima variação de energia é encontrada para $\alpha = 270°$ e a variação mínima para $\alpha = 90°$, além de serem simétricas com respeito a $\alpha = 180°$. Esse comportamento também é esperado devido a análise de dE/dt elaborada no capítulo 3. As Figuras 5.7(a) e 5.7(b) confirmam esse mesmo comportamento, atestando mais uma vez a validade da simulação. Os erros, Figura 5.7(c), seguem a mesma linha, como esperado.

Algo a se notar é que para μ constante há em ΔE_{error} valores mínimos constantes, quando α está entre 180° e 360°, e valores máximos constantes, quando α está entre 0° e 180°. Esse tipo de comportamento é proveniente do problema restrito, e representam um mesmo ponto no espaço, onde $\beta = \pm 90°$ [2].

[2] A variação de α não altera o ponto no espaço.

Para analisar esse tipo de efeito foi elaborada a Tabela 5.3. Ela é semelhante a Tabela 5.2, porém aqui γ é variado de $-180°$ a $180°$ e β é alternado entre $90°$ e $-90°$. Independentemente do valor de α, a espaçonave tem seu pericentro no mesmo ponto do espaço, quando $\beta = 90°$ ou $\beta = -90°$, esse ângulo é importante para definir a direção de $\vec{v_p}$ no espaço. Nesse caso foi adotado $\alpha = 90°$, isso significa que quando $\gamma = 90°$ o vetor $\vec{v_p}$ aponta para a mesma direção de movimento de M_2 ($\vec{V_2}$), e que quando $\gamma = 0°$ ele aponta para a direção negativa de x.

Da tabela, nota-se que quando: $-90° < \gamma < 90°$ a passagem por M_2 resulta em ΔE negativo, $\gamma > \pm 90°$ resulta em valores positivos de ΔE e $\gamma = \pm 90°$ ocasiona $\Delta E = 0$. A explicação é semelhante a elaborada para a Figura 5.6. Utilizando a mesma abordagem que foi feita pela análise da energia potencial chega-se as seguintes conclusões: para $-90° < \gamma < 90°$ a espaçonave fica mais próxima de M_1, daí seu $\Delta E < 0$; quando $\gamma > \pm 90°$ a espaçonave não altera sua distância em relação a M_1, então $\Delta E = 0$; por fim, o caso $\gamma > \pm 90°$ completa o raciocínio.

Atente-se que fazer essa argumentação não equivale a dizer que, quando $\beta > \pm 90°$, $\gamma = 0°$ dá a máxima variação de energia; ou mesmo que quando $\gamma = \pm 90°$ a variação de energia é nula. Isso se aplica somente, como já dito anteriormente, quando $\alpha = 90°$, por arbitrariedade. Essa argumentação foi apenas uma ferramenta para se chegar a conclusão correta, que é: quando se está em $\beta = \pm 90°$, $\vec{v_p}$ alinhado a $\vec{V}2$ fornece $\Delta E = 0$, $\vec{v_p}$ apontando para x negativo sucede em ΔE mínimo, apontando para x positivo resulta em ΔE máximo.

Tabela 5.3 - Energias obtidas pelo PCRTC, em unidades canônicas, para $\mu = 7.8 \times 10^{-5}$ (Ganímedes-Júpiter), $r_p = 0.004$, $N = 1.1$ e $\alpha = 90°$ em diferentes condições de β e γ. K indica energia cinética, U é energia potencial, o subscrito o indica valor referente a saída da esfera de influência e i é referente a entrada na esfera de influência.

α [°]	γ [°]	ΔE	E_o	E_i	ΔU	U_o	U_i	ΔK	K_o	K_i
-180	-90	0.0115	-0.4902	-0.5016	0.0412	-0.9831	-1.0243	-0.0297	0.4930	0.5227
-180	90	0.0115	-0.4902	-0.5016	0.0412	-0.9831	-1.0243	-0.0297	0.4930	0.5227
-150	-90	0.0100	-0.5368	-0.5469	0.0359	-0.9873	-1.0232	-0.0259	0.4505	0.4764

Continua

Tabela 5.3 – *Continuação*

α [°]	γ [°]	ΔE	E_o	E_i	ΔU	U_o	U_i	ΔK	K_o	K_i
-150	90	0.0100	-0.4449	-0.4550	0.0356	-0.9841	-1.0197	-0.0255	0.5392	0.5647
-120	-90	0.0059	-0.5720	-0.5780	0.0209	-0.9958	-1.0167	-0.0150	0.4237	0.4387
-120	90	0.0059	-0.4138	-0.4198	0.0206	-0.9900	-1.0106	-0.0146	0.5762	0.5908
-90	-90	0.0000	-0.5869	-0.5869	0.0000	-1.0065	-1.0065	0.0000	0.4196	0.4196
-90	90	0.0000	-0.4049	-0.4049	0.0000	-0.9997	-0.9997	0.0000	0.5948	0.5948
-60	-90	-0.0059	-0.5780	-0.5720	-0.0209	-1.0167	-0.9958	0.0150	0.4387	0.4237
-60	90	-0.0059	-0.4198	-0.4138	-0.0206	-1.0106	-0.9900	0.0146	0.5908	0.5762
-30	-90	-0.0100	-0.5469	-0.5368	-0.0359	-1.0232	-0.9873	0.0259	0.4764	0.4505
-30	90	-0.0100	-0.4550	-0.4449	-0.0356	-1.0197	-0.9841	0.0255	0.5647	0.5392
0	-90	-0.0115	-0.5016	-0.4902	-0.0412	-1.0243	-0.9831	0.0297	0.5227	0.4930
0	90	-0.0115	-0.5016	-0.4902	-0.0412	-1.0243	-0.9831	0.0297	0.5227	0.4930
30	-90	-0.0100	-0.4550	-0.4449	-0.0356	-1.0197	-0.9841	0.0255	0.5647	0.5392
30	90	-0.0100	-0.5469	-0.5368	-0.0359	-1.0232	-0.9873	0.0259	0.4764	0.4505
60	-90	-0.0059	-0.4198	-0.4138	-0.0206	-1.0106	-0.9900	0.0146	0.5908	0.5762
60	90	-0.0059	-0.5780	-0.5720	-0.0209	-1.0167	-0.9958	0.0150	0.4387	0.4237

Continua

Tabela 5.3 – *Continuação*

α [°]	γ [°]	ΔE	E_o	E_i	ΔU	U_o	U_i	ΔK	K_o	K_i
90	-90	0.0000	-0.4049	-0.4049	0.0000	-0.9997	-0.9997	0.0000	0.5948	0.5948
90	90	0.0000	-0.5869	-0.5869	0.0000	-1.0065	-1.0065	0.0000	0.4196	0.4196
120	-90	0.0059	-0.4138	-0.4198	0.0206	-0.9900	-1.0106	-0.0146	0.5762	0.5908
120	90	0.0059	-0.5720	-0.5780	0.0209	-0.9958	-1.0167	-0.0150	0.4237	0.4387
150	-90	0.0100	-0.4449	-0.4550	0.0356	-0.9841	-1.0197	-0.0255	0.5392	0.5647
150	90	0.0100	-0.5368	-0.5469	0.0359	-0.9873	-1.0232	-0.0259	0.4505	0.4764
180	-90	0.0115	-0.4902	-0.5016	0.0412	-0.9831	-1.0243	-0.0297	0.4930	0.5227
180	90	0.0115	-0.4902	-0.5016	0.0412	-0.9831	-1.0243	-0.0297	0.4930	0.5227

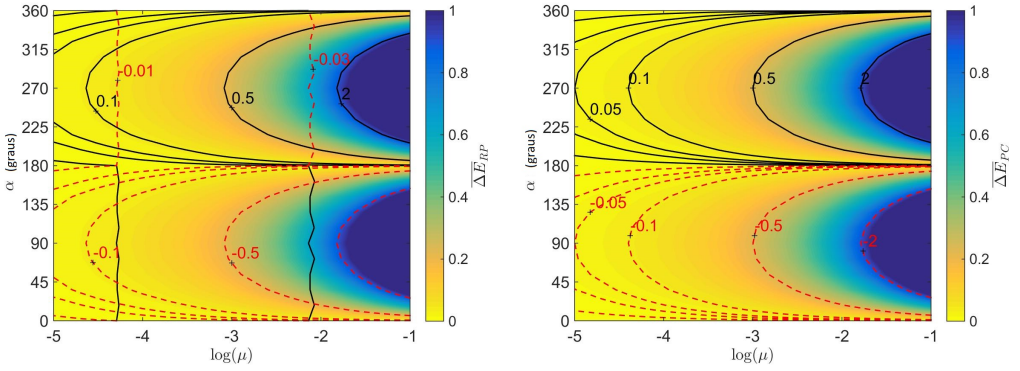
O último parâmetro a ser analisado é o ângulo β, que define a posição da espaçonave fora do plano. Como esperado, pela análise do capítulo 3 e ao atentar-se para a Equação 2.30, quando $\beta = 0°$ a manobra produz máxima variação de energia, como as Figuras 5.8(a) e 5.8(b) representam. Os erros, Figura 5.8(c), seguem essa mesma tendência, como esperado.

Por fim, vale ressaltar que nenhum comportamento inesperado foi apresentado em nenhum dos cinco parâmetros ao se variar μ. A não ser uma acentuação dos seus efeitos para μ maiores. Como era de se esperar.

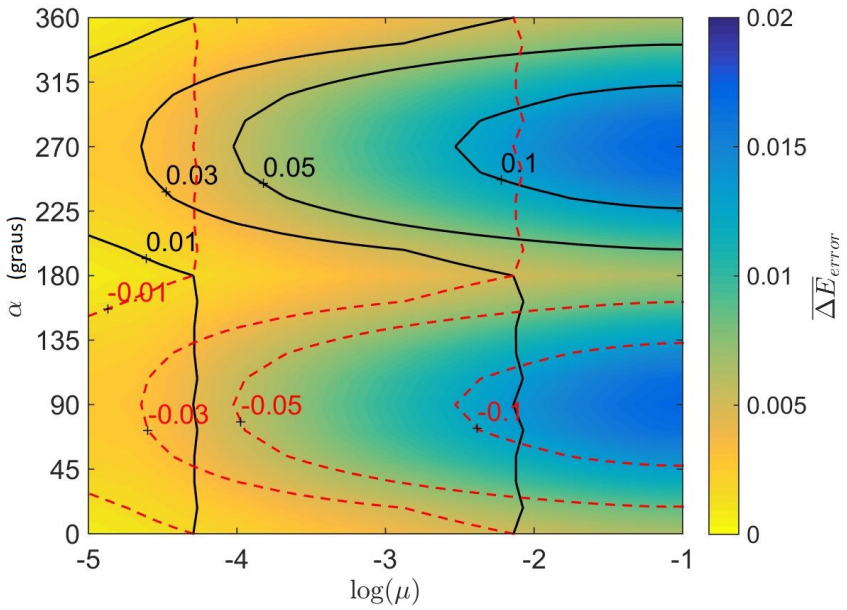
5.2.3 *Swing-by* nas luas Galileanas

Esta seção pretende realizar uma abordagem mais prática, de forma que as noções físicas dos erros envolvidos sejam melhor observadas. Para tanto, adicionalmente a análise feita de ΔE_{error} para μ gerais, e sabendo do interesse recente despertado

Figura 5.7 - Distribuição de ΔEs para diferentes valores de μ e α. As curvas coloridas representam a média ($\overline{\Delta E}$), enquando as linhas pretas e vermelhas pontilhadas representam os valores máximos e mínimos, respectivamente. Fonte: Produção do autor.



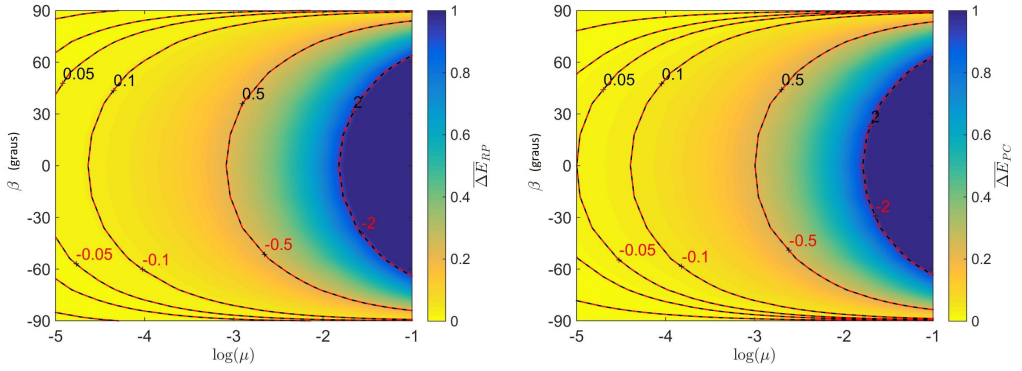
(a) ΔE_{RP} (b) ΔE_{PC}



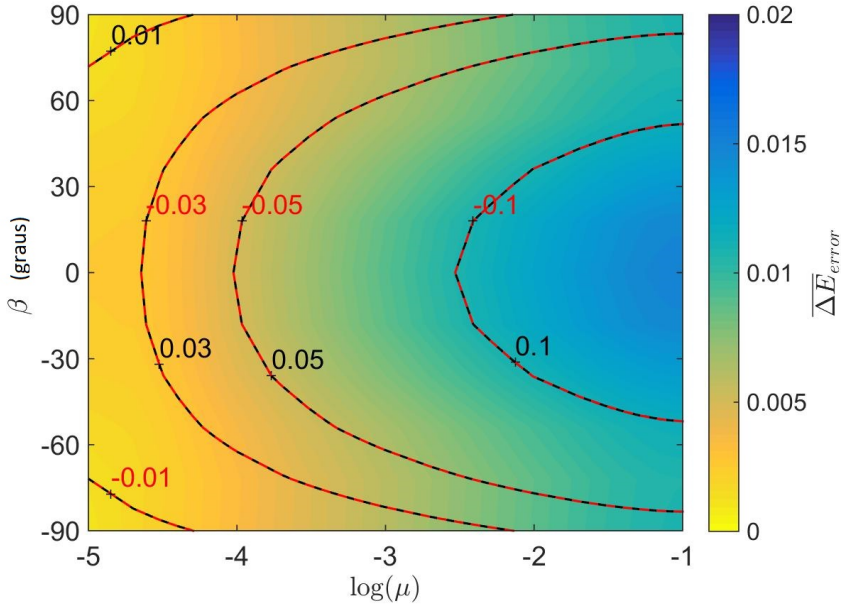
(c) ΔE_{error}

pelo sistema de Júpiter, em missões como: *Europa Mission* (PHILLIPS; PAPPALARDO, 2014), JUICE (GRASSET et al., 2013) e Juno (BOLTON, 2010), este trabalho vai em direção a analisar a razoabilidade do cálculo de *swing-bys* nas luas Galileanas utilizando o modelo das Cônicas Conjugadas. Todavia, diferentemente do que foi feito até aqui, e de forma a reforçar noções práticas da comparação, a análise será feita por ΔVs, em km/s, mensurados no sistema de referência inercial XYZ. Portanto, faz-se as seguintes definições:

Figura 5.8 - Distribuição de ΔEs para diferentes valores de μ e β. As curvas coloridas representam a média ($\overline{\Delta E}$), enquando as linhas pretas e vermelhas pontilhadas representam os valores máximos e mínimos, respectivamente. Fonte: Produção do autor.



(a) ΔE_{RP} (b) ΔE_{PC}



(c) ΔE_{error}

$$\Delta V_{RP} = V_{RP}^{+} - V_{RP}^{-}, \tag{5.8}$$

$$\Delta V_{PC} = V_{PC}^{+} - V_{PC}^{-}, \tag{5.9}$$

$$\Delta V_{error} = \Delta V_{RP} - \Delta V_{PC}, \tag{5.10}$$

onde o índice "PC" representa o modelo das Cônicas Conjugadas, enquanto os outros seguem a mesma convenção encontrada na Equação 2.29.

A obtenção de ΔV_{RP} se dá simplesmente ao se armazenar o tempo e as componentes da velocidade no sistema sinódico xyz, ao fim de cada integração, e realizar a rotação inversa a efetuada nas Equações 2.1 e 2.2. Ou seja, a matriz de rotação $\mathbb{T}$, aqui é:

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.11}$$

Então:

$$V_{RP} = \begin{bmatrix} -\sin t & -\cos t & 0 \\ \cos t & -\sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}. \tag{5.12}$$

Logo:

$$V_{RP} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} - y \\ \dot{y} + x \\ \dot{z} \end{bmatrix}. \tag{5.13}$$

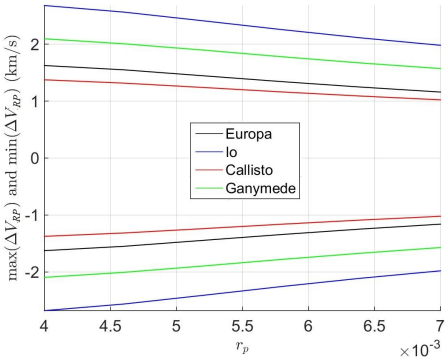
Por fim, utilizando a Equação 2.37 para o cálculo de ΔV_{PC}, é possível adotar um procedimento semelhante ao adotado para ΔE_{error} e obter figuras que possam traduzir a dinâmica do problema. Aqui é escolhido apresentar apenas o valores máximos e mínimos de cada ΔV em função de cada parâmetro.

As Figuras 5.9 até 5.16 mostram os ΔVs máximos e mínimos aplicados as luas Galileanas para todo o conjunto de parâmetros. Nelas, os itens (a) representam

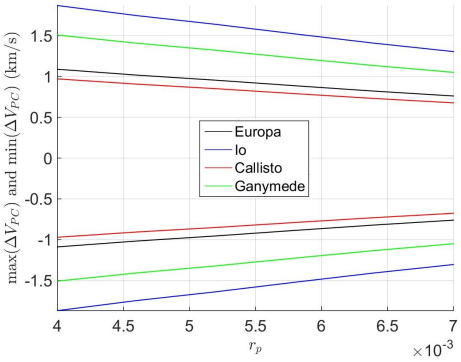
ΔV_{RP}, os itens (b) ΔV_{PC} e, por fim, os itens (c) representam ΔV_{error}.

Começando por analisar o comportamento dos ΔVs sob a influência de r_p, Figura 5.9, percebe-se que o comportamento é semelhante ao encontrado na seção anterior para ΔE_{error}. Ou seja, maiores variações de velocidade, Figuras 5.9(a) e 5.9(b), se dão para pequenos raios de pericentro. O mesmo ocorre com os erros, como se vê na Figura 5.9(c).

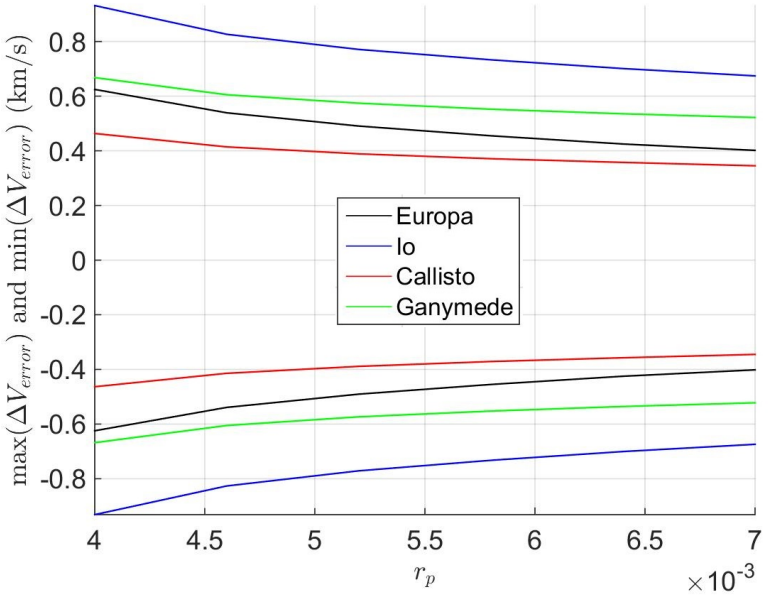
Figura 5.9 - ΔVs máximos e mínimos em função de r_p aplicados as luas Galileanas. Fonte: Produção do autor.



(a) ΔV_{RP}



(b) ΔV_{PC}

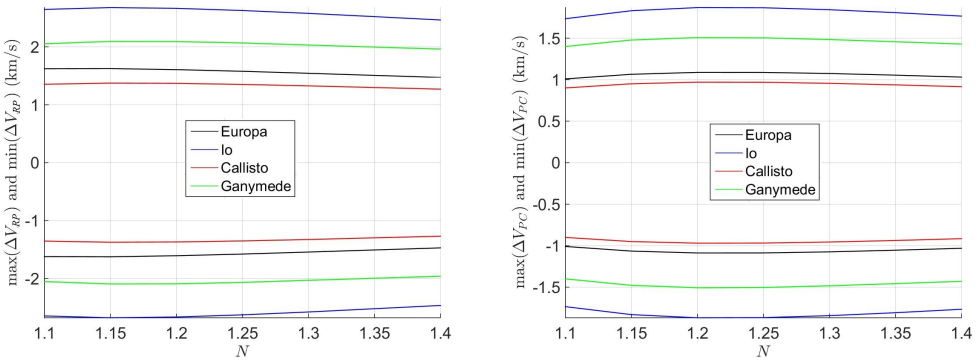


(c) ΔV_{error}

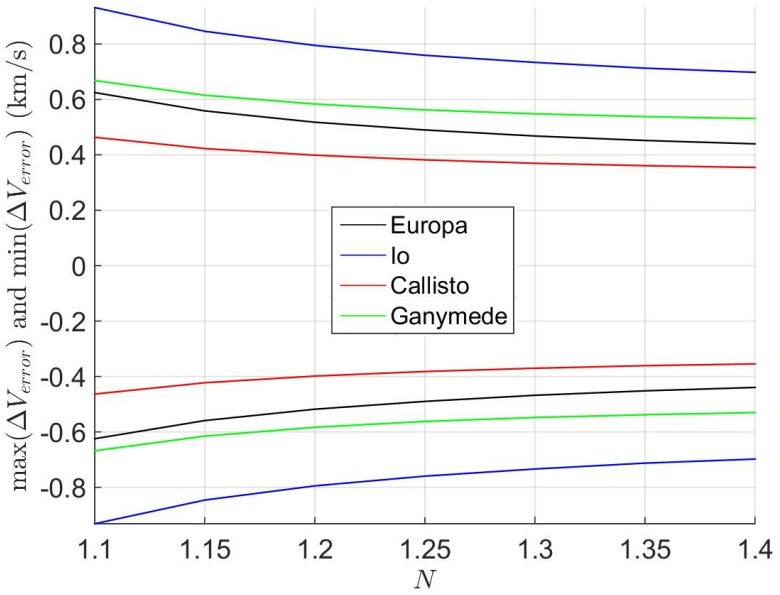
Partindo agora para a análise de v_p por intermédio de N, Figura 5.10. Analisando

as variações de velocidade obtidas pelo PCRTC e pela aproximação das Cônicas Conjugadas, 5.10(a) e 5.10(b), nota-se que parece haver uma região de pico para ΔV. Por exemplo, na Figura 5.10(b), esse pico se dá entre $N = 1.2$ e $N = 1.25$. Esse tipo de comportamento era esperado, pois atentando para as Equações 2.32, 2.35 e 2.36, percebe-se que a Equação 2.37 possui termos quadráticos de v_p. O que torna a relação um pouco mais complexa do que afirmar que ΔV deva aumentar ou diminuir com o crescimento de v_p. Já para a Figura 5.10(c), percebe-se que o ΔV_{error} segue comportamento semelhante ao encontrado na seção anterior para ΔE_{error}, como esperado.

Figura 5.10 - ΔVs máximos e mínimos em função de N aplicados as luas Galileanas. Fonte: Produção do autor.



(a) ΔV_{RP} (b) ΔV_{PC}



(c) ΔV_{error}

Levando nosso estudo para γ, Figura 5.11, e começando por analisar a aproximação das Cônicas Conjugadas, a Figura 5.11(b) mostra que as variações máximas e mínimas por esse método são constantes, o que leva a crer que ΔV_{PC} não depende de γ. Isso não era esperado, já que as Equações 2.35 e 2.36 parecem indicar o contrário. No entanto, como nossa análise se dá por meio de máximos e mínimos, essa figura pode ser mistificadora e cabe tentar falsear [3] o que ela aponta. A Figura 5.12 presta justamente a esse papel. Fixando todos os parâmetros e variando apenas α e γ percebe-se que ΔV_{PC} não é constante com a variação de γ.

Agora, resta explicar a razão da Figura 5.11(b) apresentar esses valores constantes. Isso acontece pois para diferentes condições de outros parâmetros existem diferentes valores de γ que criam o mesmo ΔV máximo e mínimo, e a Figura 5.11(b) acaba por resultar da superposição dessas curvas.

A Figura 5.10(a) mostra que para o problema restrito não há o mesmo tipo de problema. Aqui, a figura indica que há uma clara vantagem no uso de $\gamma = \pm 180°$. Esse mesmo comportamento pode ser notado ao comparar os valores de variação de energia cinética na Tabela 5.2 para $\gamma = 180°$ com os valores para $\gamma = 0°$.

Isso decorre do fato de que, diferentemente do que é feito no modelo das Cônicas Conjugadas, onde o referencial $X'Y'Z'$ é assumido como inercial, o problema restrito leva em conta o que ele realmente é, ou seja, um referencial não inercial. Enquanto a espaçonave realiza o *swing-by*, o corpo M_2 continua em sua órbita realizando seu movimento de rotação em torno do centro de massa do sistema, fazendo com que o vetor velocidade de M_2, $\vec{V}_2$, seja diferente quando a espaçonave sai da esfera de influência de que era quando entrou. A Figura 5.13 ilustra isso.

E é aqui que entra o papel de γ no problema restrito. Quando o ângulo γ assume o valor de $\pm 180°$, ele sempre atua em favor de aumentar os efeitos da manobra sobre ΔV, seja no ganho (quando $180° < \alpha < 360°$) ou na perda (quando $0° < \alpha < 180°$) de energia. Já quando γ assume o valor de $0°$, isso não ocorre.

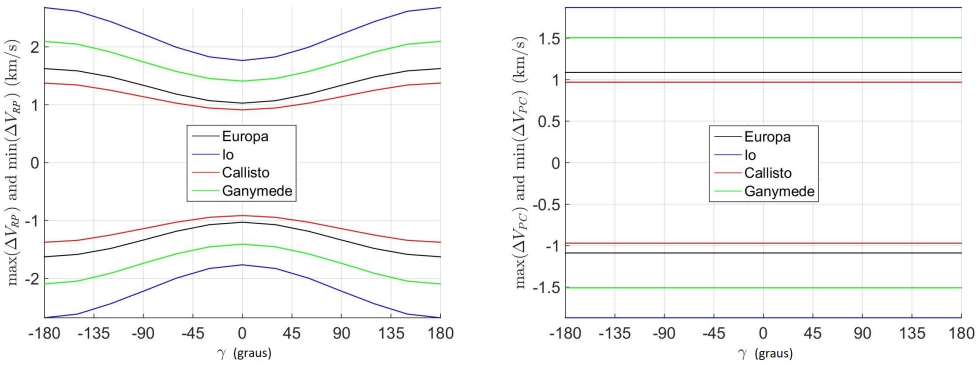
A Figura 5.14 ilustra esse comportamento. Lá é representado um *swing-by* genérico em M_2 para ganho de energia como visto do referencial pseudo-inercial $X'Y'Z'$. Porém agora, diferentemente do que acontece na aproximação das Cônicas Conjugadas, o referencial é reconhecido como não inercial e isso é levado em conta ao alterar o apontamento do vetor velocidade de M_2. Perceba como $\vec{v}_\infty$ atua em favor de $\vec{V}_2$

[3] Entenda "falsear" aqui como desenvolvido por Popper (1957). Ou seja, basta encontrar uma condição que contradiga o afirmado.

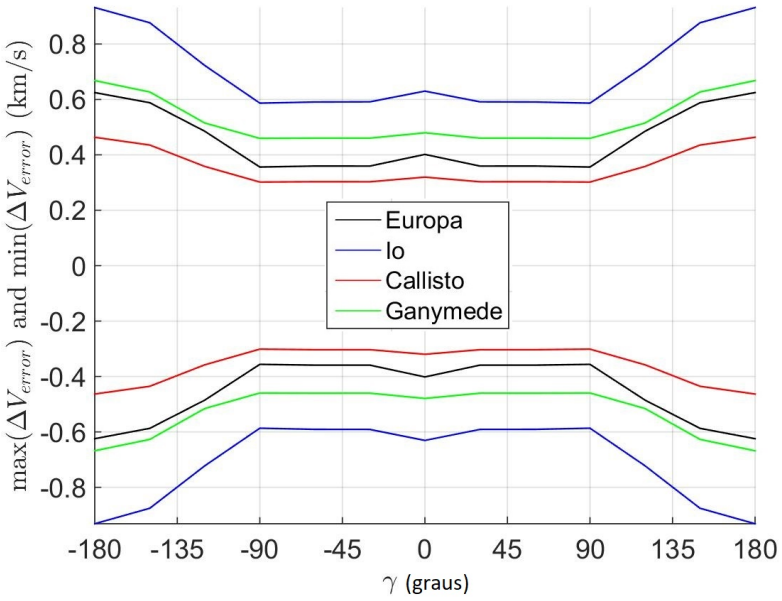
quando $\gamma = 180°$, e o oposto, quando $\gamma = 0°$. Esse mesmo efeito é esperado para *swing-bys* na região de perda de energia, e agora $\gamma = \pm 180°$ deve fazer com que $\vec{v}_\infty$ atue contra $\vec{V}_2$, potencializando a perda de velocidade.

Ainda na análise de γ, resta comentar que a Figura 5.11(c) é coerente com as Figuras 5.11(a) e 5.11(b), atestando sua fidelidade.

Figura 5.11 - ΔVs máximos e mínimos em função de γ aplicados as luas Galileanas. Fonte: Produção do autor.



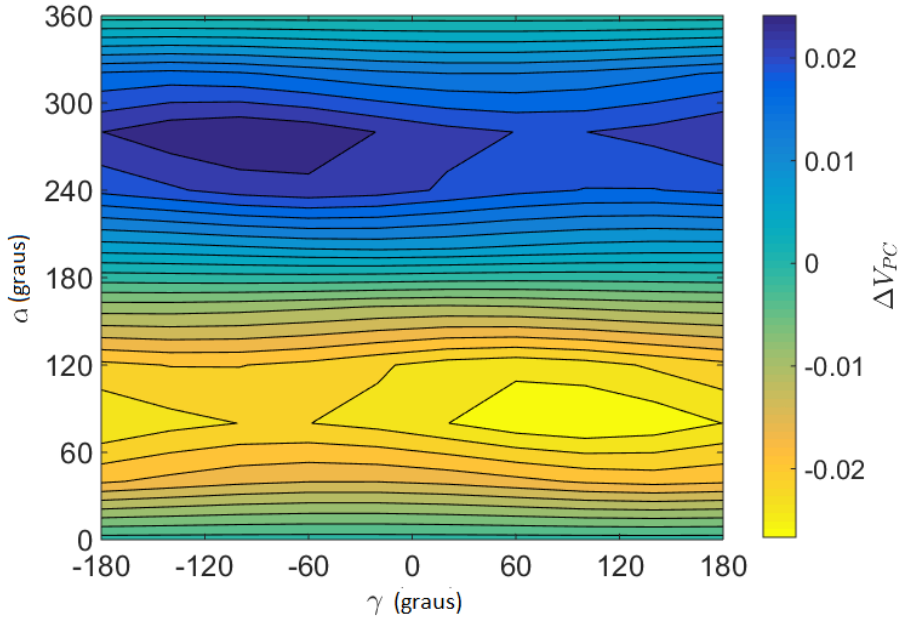
(a) ΔV_{RP} (b) ΔV_{PC}



(c) ΔV_{error}

Quanto ao ângulo α, Figura 5.15, o comportamento é extremamente semalhante ao observado na seção 5.2.2. Percebe-se nas Figuras 5.15(a) e 5.15(b) que as variações

Figura 5.12 - ΔV_{PC} para $\beta = 80°$, $N = 1.2$, $r_p = 0.004$ e $\mu = 7.8 \times 10^{-5}$ (Ganímedes-Júpiter) em função de α e γ. Fonte: Produção do autor.



máximas e mínimas em velocidade ocorrem em regiões esperadas. Máximo em $\alpha = 270°$ e mínimo em $\alpha = 180°$. Além disso, o mesmo comportamento do problema restrito, de apresentar variações negativas onde só se esperaria variações positivas e o inverso, observado na seção 5.2.2, é aqui apresentado. Mais uma vez, a explicação se deve ao ponto do espaço onde $\beta = \pm 90°$, como já explicado. Para o erro da aproximação das Cônicas Conjugadas, Figura 5.15(c), ele é coerente com o observado para as outras duas figuras e a dinâmica do problema.

O último dos parâmetros, β, é apresentado na Figura 5.16. Como esperado, as Figuras 5.16(a) e 5.16(b) indicam maiores variações de velocidade para $\beta = 0°$, que é o caso que permite a manobra no plano dos primários. Além disso, percebe-se que o método das Cônicas Conjungadas, Figura 5.16(b), estima uma variação nula de energia para $\beta = \pm 90°$, isso é decorrente do fato de β causar uma simetria na manobra. Esse mesmo comportamento não é esperado no problema restrito, pelas razões explicitadas nos comentários referentes ao ângulo α, que envolvem $\beta = \pm 90°$, na seção anterior. Os erros, Figura 5.16(c), estão de acordo com o visto nas outras duas figuras apresentadas e indicam sua veracidade.

Por fim, é de suma importância ressaltar a magnitude dos erros em ΔV encontrados e confirmados por todas as Figuras 5.9(c) até 5.16(c). Elas indicam erros de até quase

Figura 5.13 - *Swing-by* realizado em M_2 como visto do referencial inercial XYZ. Fonte: Produção do autor.

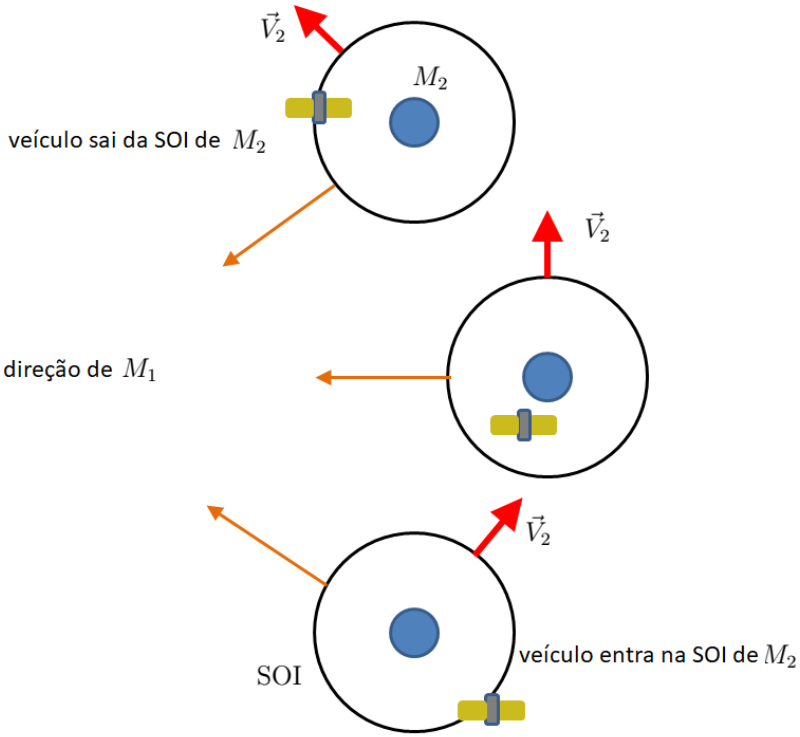
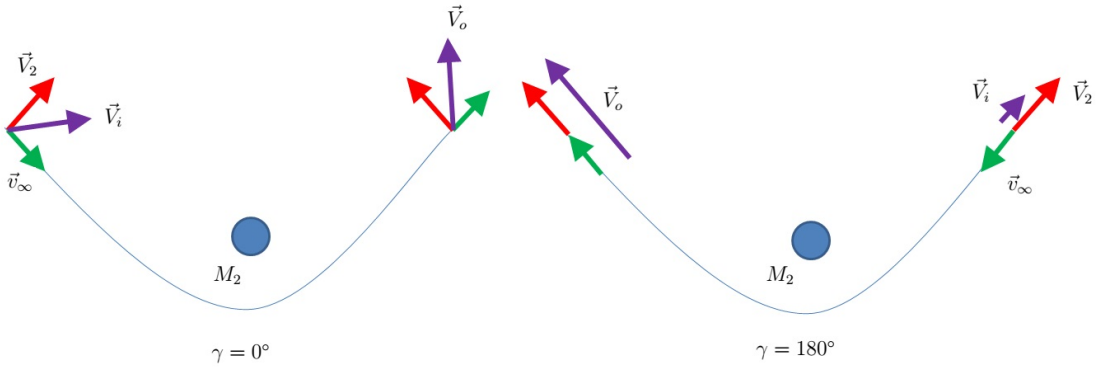
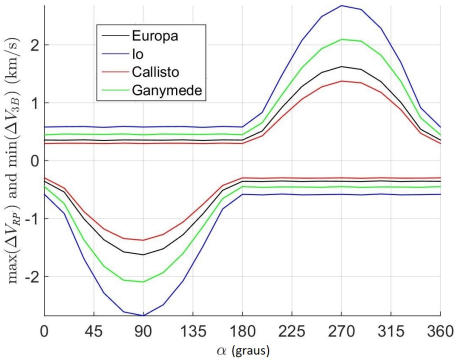


Figura 5.14 - *Swing-by* realizado em M_2 como visto do referencial pseudo-inercial $X'Y'Z'$, ao reconhecer a alteração de $\vec{V}_2$ na entrada e saída da esfera de influência. Fonte: Produção do autor.

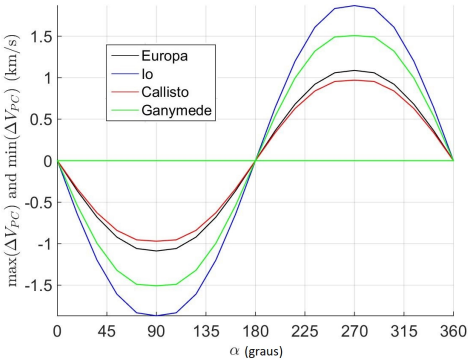


0.9 km/s para o caso Io-Júpiter, correspondente a algo em torno de 50% do valor máximo estimado pelo método das Cônicas Conjugadas. Para Ganímedes-Júpiter e Europa-Júpiter o erro é por volta de 0.6 km/s, chegando a algo próximo de 40%

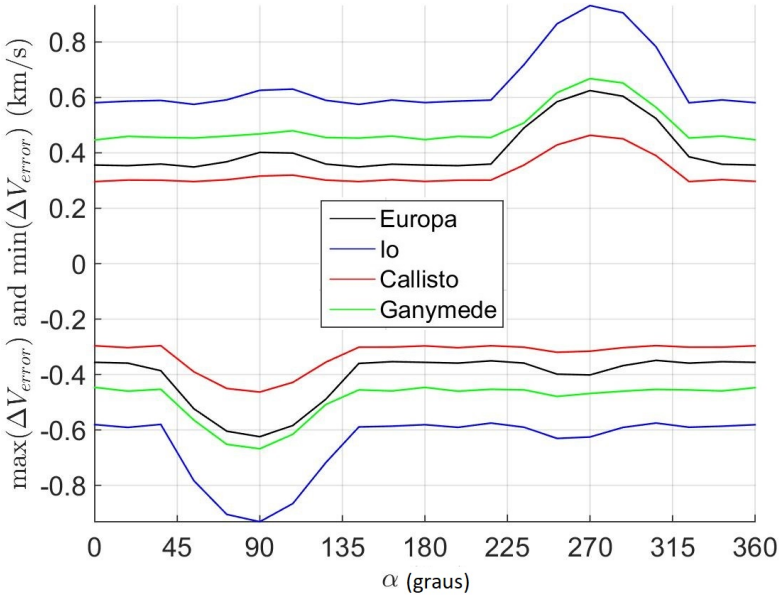
Figura 5.15 - ΔVs máximos e mínimos em função de α aplicados as luas Galileanas. Fonte: Produção do autor.



(a) ΔV_{RP}



(b) ΔV_{PC}

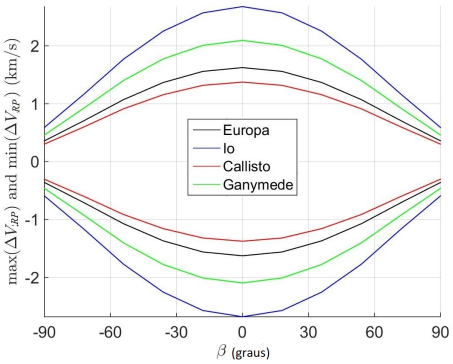


(c) ΔV_{error}

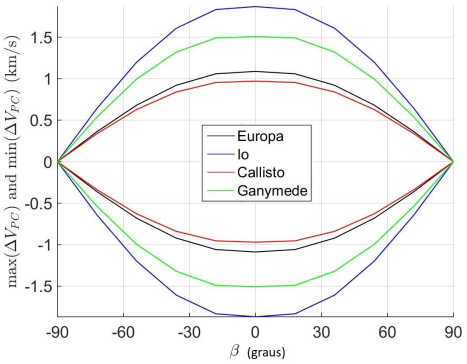
estimado pela aproximação das Cônicas Conjugadas para Ganímedes e de 60% para Europa. Ainda, para Calisto, o erro máximo é um pouco superior a 0.4 km/s, que fica em torno de 40% do estimado pelas Cônicas Conjugadas.

Percebe-se que esses erros são consideráveis. Isso ressalta a importância dessa análise e da limitação das Cônicas Conjugadas ao ser aplicada em sistemas desse tipo.

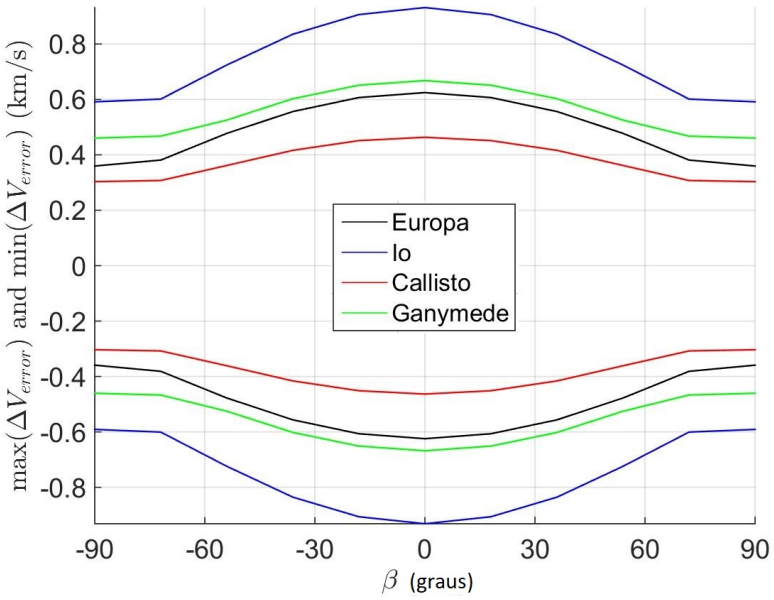
Figura 5.16 - ΔVs máximos e mínimos em função de β aplicados as luas Galileanas. Fonte: Produção do autor.



(a) ΔV_{RP}



(b) ΔV_{PC}



(c) ΔV_{error}

6 ANÁLISE AVANÇADA DE ERROS APLICADA A LUA

Neste capítulo, inspirado pela Missão Aster, volta-se a uma análise dos erros aplicada a Lua. No entanto, com a massa crítica formada até aqui, pretende-se uma abordagem capaz de produzir resultados que tragam uma noção mais direta e simples dos erros associados a abordagem das Cônicas Conjugadas.

Para tanto, abandona-se o método de Cônicas Conjugadas mais generalista utilizada até aqui e passa-se a utilizar a abordagem apresentada na seção 6.1. Esta abordagem não mais calcula o *swing-by* pelos parâmetros no perilune, agora são utilizadas condições correspondentes a órbita antes do *swing-by*. Escolhe-se como essas condições a inclinação i, a distância de perigeu R_P e a distância de apogeu R_a, todos definidos no sistema inercial XYZ, como apresentado na Figura 2.2.

Além disso, pretende-se que o swing-by produza um ganho de energia mínimo para que o veículo espacial escape da atração gravitacional da Terra após a manobra. Portanto, a energia do veículo após a manobra deve ser zero.

Como aqui pretende-se uma abordagem que produza resultados mais facilmente interpretáveis pelo projetista de missão, a energia passa a ser representada pela conhecida energia característica, reconhecidamente denominada por C_3, definida como:

$$C_3 = 2E. \tag{6.1}$$

Por fim, cabe ressaltar que, tendo em vista os objetivos já declarados, os resultados apresentados na seção 6.4 serão apresentados em unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI), ainda que, na solução das equações, mantenha-se a utilização do sistema canônico de unidades.

6.1 Cônicas Conjugadas

Considerando a inclinação i, o apogeu R_a e o perigeu R_p da órbita do veículo antes do *swing-by* e a energia característica C_3 desejada depois da manobra, todos representados no sistema XYZ, o problema pode ser solucionado pela aplicação dos conceitos de Cônicas Conjugadas. O semi-eixo maior da órbita antes da manobra é:

$$a = \frac{R_p + R_a}{2}. \tag{6.2}$$

A equação de conservação da energia fornece:

$$\frac{V_i^2}{2} - \frac{1-\mu}{R_{EM}} = -\frac{1-\mu}{2a}, \tag{6.3}$$

onde V_i é a velocidade na entrada da SOI, $1-\mu$ é o parâmetro gravitacional para a Terra no sistema canônico de unidades e R_{EM} é a distância Terra-Lua, que é unitária no sistema canônico, todos representados no sistema de referência XYZ.

A velocidade V_i na Equação 6.3 pode ser obtida como:

$$V_i = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{a}\right)(1-\mu)}. \tag{6.4}$$

A quantidade de movimento angular do veículo é $C = \sqrt{(1-\mu)p} = R_i V_{ti}$, onde o semi-latus rectum é $p = R_p R_a / a$, R_i é a distância da espaçonave, que pode ser aproximada por $1-\mu$, a distância da Lua no sistema XYZ, e V_{ti} é a velocidade transversal do veículo na entrada da SOI. Portanto:

$$V_{ti} = \frac{(\sqrt{1-\mu})p}{R_i}. \tag{6.5}$$

A componente radial pode ser simplesmente obtida como:

$$V_{ri} = \sqrt{V_i^2 - V_{ti}^2}. \tag{6.6}$$

Consequentemente, ao se considerar uma pequena SOI, as velocidades radial e transversal são, respectivamente:

$$\vec{V}_{ri} = \begin{bmatrix} V_{ri} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{6.7}$$

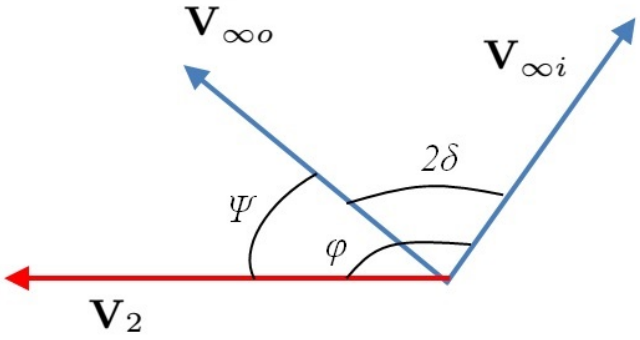
$$\vec{V}_{ti} = \begin{bmatrix} 0 & V_{ti}\cos i & -V_{ti}\sin i \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{6.8}$$

e a velocidade na entrada da SOI é:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{ri} + \vec{V}_{ti}. \tag{6.9}$$

Como já explicado anteriormente, é assumido nas Cônicas Conjugadas que o *swing-*

Figura 6.1 - Representação dos vetores velocidade. Fonte: Produção do autor.



by acontece em um pequeno intervalo de tempo se comparado ao período de M_2, de tal forma que nenhum movimento de M_2 em sua órbita é considerado enquanto a manobra é realizada (MINOVITCH, 1961). Dessa forma, o sistema pseudo-inercial $X'Y'Z'$ é assumido como totalmente inercial. Baseado nesta hipótese, nenhuma mudança de orientação na velocidade de M_2 ocorre entre o começo e o final da manobra. Assim, é possível afirmar que o vetor velocidade da Lua, enquanto a manobra é executada, é constante, e equivale a $\vec{V}_2 = [0\ V_2\ 0]^{\mathrm{T}}$. Então, agora é possível escrever a velocidade na entrada da SOI, representada no sistema $X'Y'Z'$, como:

$$\vec{v}_{\infty i} = \vec{V}_i - \vec{V}_2. \tag{6.10}$$

Considerando a Figura 6.1, o ângulo φ entre $\vec{V}_2$ e $\vec{v}_{\infty i}$ é:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{V}_2.\vec{v}_{\infty i}}{V_2 v_\infty}\right). \tag{6.11}$$

De forma a produzir o C_3 desejado, a magnitude da velocidade na SOI, no sistema XYZ, é calculada como:

$$V_o = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{R_{EM}} + C_3}, \tag{6.12}$$

a qual pode ser utilizada com a lei dos cossenos $V_o^2 = V_2^2 + v_\infty^2 - 2V_2 v_\infty \cos(180° - \Psi)$

para encontrar o ângulo Ψ:

$$\Psi = \arccos\left(\frac{V_o^2 - V_2^2 - v_\infty^2}{2V_2 v_\infty}\right). \tag{6.13}$$

Agora, o ângulo δ pode ser simplesmente computado como $\delta = (\varphi - \Psi)/2$, que em conjunto com a Equação 2.31 produz:

$$r_p = \frac{\mu}{v_\infty^2}\left(\frac{1}{\sin\delta} - 1\right), \tag{6.14}$$

onde r_p é a distância de perilune no sistema $X'Y'Z'$, tornando possível calcular a velocidade v_p de perilune por:

$$v_p = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu}{r_p}}. \tag{6.15}$$

Para obter $\vec{r}_p$ e $\vec{v}_p$ é primeiramente necessário encontrar $\vec{v}_{\infty o}$, o qual pode ser decomposto em dois vetores linearmente independentes, $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_2$:

$$\hat{e}_1 = \frac{\vec{V}_2}{V_2}, \tag{6.16}$$

$$\hat{e}_2 = \frac{\vec{V}_2 \times (\vec{v}_{\infty i} \times \vec{V}_2)}{||\vec{V}_2 \times (\vec{v}_{\infty i} \times \vec{V}_2)||}, \tag{6.17}$$

e:

$$\vec{v}_{\infty o} = v_\infty(\cos\Psi\hat{e}_1 + \sin\Psi\hat{e}_2). \tag{6.18}$$

Finalmente, a posição e velocidade de perilune no sistema $X'Y'Z'$ pode ser representada por:

$$\vec{r}_p = r_p\frac{\vec{v}_{\infty i} - \vec{v}_{\infty o}}{||\vec{v}_{\infty i} - \vec{v}_{\infty o}||}, \tag{6.19}$$

$$\vec{v}_p = v_p\frac{\vec{v}_{\infty i} + \vec{v}_{\infty o}}{||\vec{v}_{\infty i} + \vec{v}_{\infty o}||}. \tag{6.20}$$

6.2 Problema restrito

Aqui é utilizado o mesmo procedimento apresentado na seção 2.2, porém armazena-se a posição e a velocidade na entrada ($\vec{R}_{RP-i}$ e $\vec{V}_{RP-i}$) e na saída ($\vec{R}_{RP-o}$ e $\vec{V}_{RP-o}$)

da SOI no sistema XYZ, que são utilizadas para calcular os parâmetros que se deseja comparar com a aproximação das Cônicas Conjugadas.

Porém, primeiramente, para que a integração seja possível, é necessário transformar os vetores $\vec{r}_p$ e $\vec{v}_p$ do sistema $X'Y'Z'$ para o sistema xyz. Assim, eles são primeiramente transformados do sistema $X'Y'Z'$ para o sistema XYZ pelas Equações 2.10 e 2.11. Lembre-se que, como o sistema canônico de unidades é utilizado para resolver as equações, o tempo t é igual ao ângulo θ na Figura 2.2. Também, como definido previamente, o tempo onde o veículo se encontra no perilune é $t_0 = 0$. Por fim, as condições iniciais no sistema xyz são simplesmente obtidas pelas Equações 2.1 e 2.2.

6.3 A comparação

No método das Cônicas Conjugadas a posição no sistema de referência XYZ na entrada da SOI pode ser aproximada por $\vec{R}_i = \begin{bmatrix} 1-\mu & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Utilizando $\vec{R}_i$, $\vec{V}_i$, $\vec{R}_{RP-i}$ e $\vec{V}_{RP-i}$, e transformando eles para o SI, os elementos orbitais antes da manobra, para cada um dos métodos, pode ser obtido por uma simples transformação.

A comparação fica, então, da forma:

$$a_{error} = a_{RP} - a; \tag{6.21}$$

$$e_{error} = e_{RP} - e; \tag{6.22}$$

$$i_{error} = i_{RP} - i; \tag{6.23}$$

$$\Omega_{error} = \Omega_{RP} - \Omega; \tag{6.24}$$

$$\omega_{error} = \omega_{RP} - \omega; \tag{6.25}$$

onde a é o semi-eixo maior, e a excentricidade, i a inclinação, Ω é a longitude do nodo ascendente e ω é o argumento do perigeu.

Por último, o C_3 para o problema restrito é dado por:

$$C_{3-RP} = V_{RP-o}^2 - \frac{2(1-\mu)}{r_1}, \tag{6.26}$$

que também é transformado de unidades canônicas para SI.

6.4 Resultados

Os resultados obtidos através dos métodos explicados anteriormente são aqui apresentados. O veículo espacial é considerado em diferentes órbitas iniciais em torno da Terra com um conjunto de i, R_a e R_p dentro dos seguintes intervalors: $0° \leq i \leq 180°$, $400,000 \text{ km} \leq R_a \leq 600,000 \text{ km}$ e $10,000 \text{ km} \leq R_p \leq 210,000 \text{ km}$. O *swing-by* é calculado de tal forma que o C_3 depois da manobra seja de 0 km^2/s^2, a energia mínima para o veículo escapar da atração gravitacional terrestre.

As Figuras 6.2 a 6.7 mostram os resultados em curvas de nível. O eixo vertical representa o apogeu do veículo na órbita terrestre R_a, enquanto o eixo horizontal caracteriza a inclinação i. As subfiguras (a) a (f) são padronizadas para valores crescentes do perigeu R_p como se segue: 10,000 km, 50,000 km, 90,000 km, 130,000 km, 170,000 km and 210,000 km. Para cada figura, as curvas de nível em cada subfigura é padronizada do mínimo para o máximo valor obtido para o parâmetro representado em todas as condições estudadas. Isso significa que as mesmas cores em cada subfigura representam os mesmos valores. Regiões amareladas representam valores máximos, enquanto as azuladas representam valores mínimos.

Por vezes, ao se representar apenas as curvas de nível, torna-se difícil a leitura dos resultados representados. Por essa razão as curvas vermelhas são adicionadas as figuras. Também são inseridas linhas vermelhas pontilhadas, as quais têm intenção de representar a curva de erro zero. Por último, as regiões brancas são condições para quais não existem soluções possíveis ou a altitude de perilune é menor que 50 km.

Os primeiros erros a serem estudados são os erros no semi-eixo maior antes da manobra a_{error} (Equação 6.21), Figura 6.2. Fica claro, ao observar cada uma das subfiguras, que com o aumento de R_p há um crescimento em a_{error}. Na Figura 6.2(a) a variação do erro é quase imperceptível. Isso se deve ao fato de que a_{error} alcança valores extremamente maiores quando $R_p = 210,000$ km (Figura 6.2(f)), com a_{error} por voltar de 16,000 km em algumas regiões. Entretanto, ao se atentar para as linhas vermelhas na Figura 6.2(a), também é perceptível uma variação do erro de algo em torno de -9,000 km até 1,000 km, que são valores bem pequenos se comparados a escala do problema.

As linhas vermelhas pontilhadas que indicam erro zero diminuem com o aumento de R_p, até seu completo desaparecimento na Figura 6.2(f). O inverso é verdade para as regiões onde não há solução, que não são encontradas na Figura 6.2(a) e dominam

para $i \leq 30°$ na Figura 6.2(f).

Um fato interessante para se notar é o fato do problema restrito tender a estimar maiores valores de a_{error} (valores positivos) para maiores valores de R_a e de i intermediários, enquanto as Cônicas Conjugadas estimam maiores erros (valores negativos) para menores valores de R_a e $i \cong 0°$. Também, enquanto R_p aumenta, o máximo a_{error} vai da direita para a esquerda, de $90° \leq i \leq 120°$ na Figura 6.2(a) para $60 \leq i \leq 75°$ na Figura 6.2(f).

Para $R_p = 50,000$ km, também é notada a existência de duas regiões nas figuras. Na parte esquerda ($i \lessapprox 60°$) e direita ($i \gtrapprox 120°$) das figuras as linhas são aproximadamente verticais, indicando que a distância de apogeu tem pouco efeito nos erros e a inclinação domina o cenário. Na região intermediária, $60° \lessapprox i \lessapprox 120°$, as linhas são mais inclinadas, indicando que ambas as variáveis influem na determinação dos erros. O mesmo comportamento ocorre para $R_p > 50,000$ km, apenas com um deslocamento das fronteiras entre essas regiões.

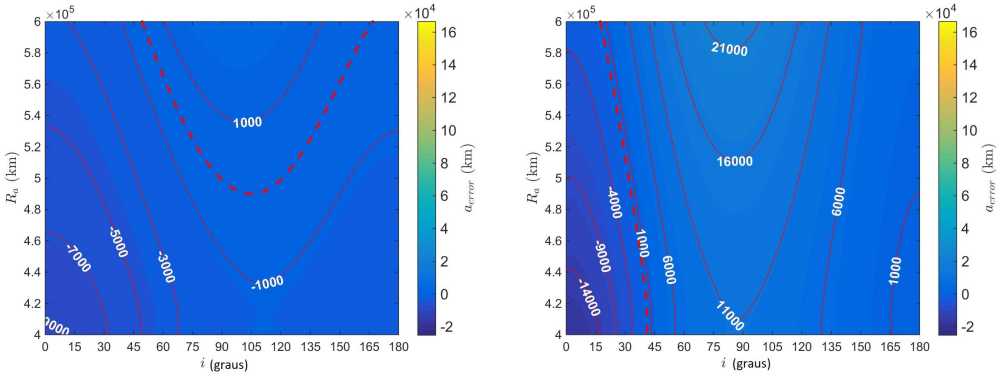
Passando agora para os erros em excentricidade, apresentados na Figura 6.3. Aqui é perceptível, como visto para a_{error}, que em geral e_{error} também aumenta para maiores valores de R_p. Na Figura 6.3(a), e_{error} estende de algo em torno de -0.03 para 0.02, enquanto que para $R_p = 210,000$ km (Figura 6.3(f)), vai de -0.18 até 0.06. Embora exista uma tendência no aumento de e_{error} para maiores R_p, isso não é um comportamento linear, como é claramente visto ao se comparar o intervalo de -0.21 a 0.05 na Figura 6.3(e) com o intervalo de erros encontrado na Figura 6.3(c), -0.13 até 0.09.

As curvas de erro zero, embora cruzem valores bem diferentes de i quando $R_p = 210,000$ km (Figura 6.3(f)), não apresentam o mesmo comportamento nas outras figuras. Os únicos i possíveis para os quais $e_{error} = 0$, nas figuras remanescentes, são valores quase constantes entre 15° e 45°. Isso significa que existe um valor crítico fixo para o qual a inclinação divide erros positivos e negativos, exceto para $R_p = 210,000$ km, quando essa linha tem oscilações.

Os erros em inclinação (veja a Figura 6.4) não apresentam exatamente o mesmo comportamento notado nas Figuras 6.2 e 6.3. Enquanto que para a_{error} e e_{error} há um aumento dos erros para maiores valores de R_p, os erros em inclinação diminuem.

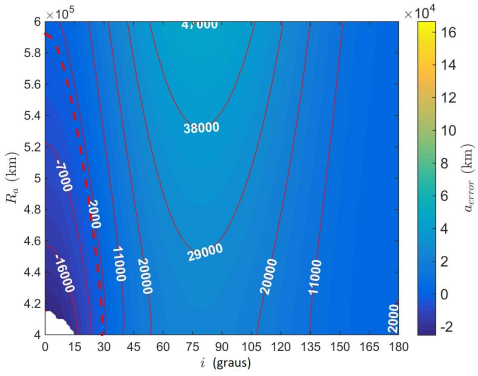
As curvas vermelhas pontilhadas são deslocadas para a esquerda para maiores valores de R_p, isso significa que maiores valores de R_p trazem regiões para as quais o

Figura 6.2 - Erros no semi-eixo maior como uma função da inclinação e distância de apogeu para diferentes órbitas iniciais em torno da Terra. Fonte: Produção do autor.

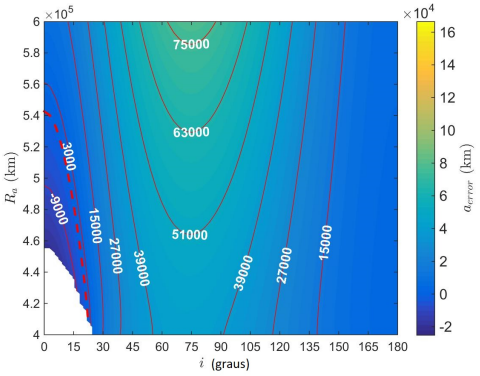


(a) $R_p = 10000$ km

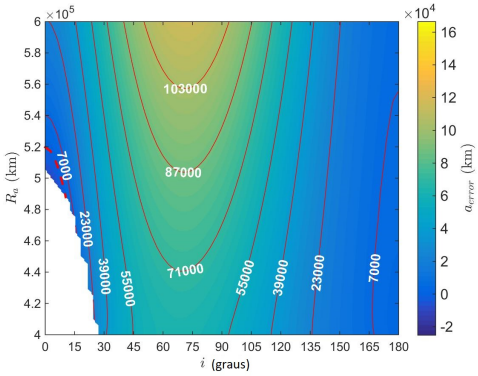
(b) $R_p = 50000$ km



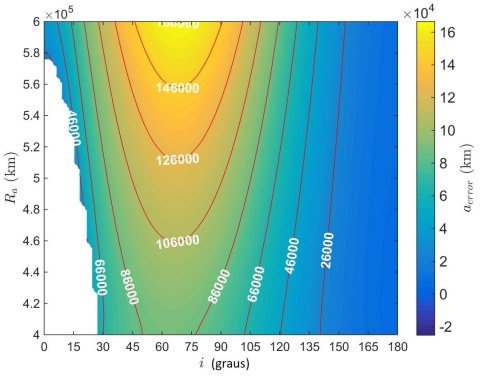
(c) $R_p = 90000$ km



(d) $R_p = 130000$ km

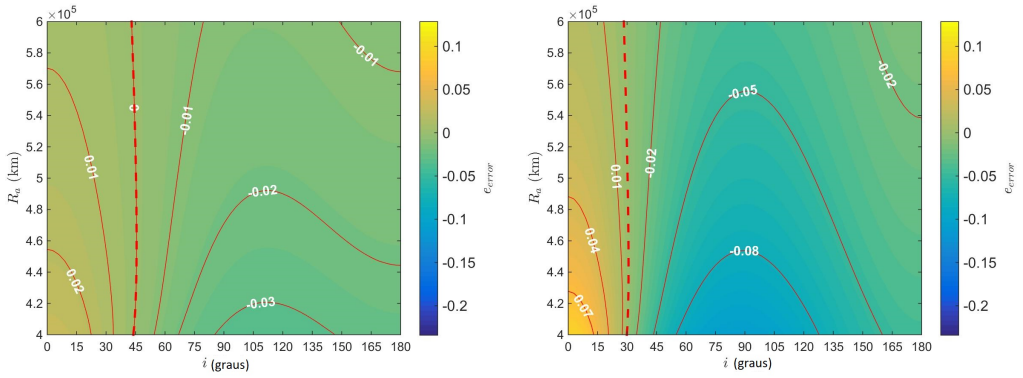


(e) $R_p = 170000$ km



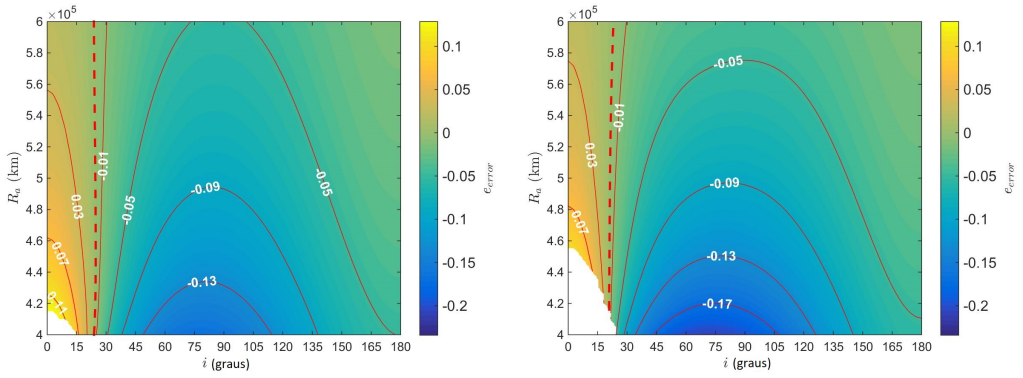
(f) $R_p = 210000$ km

Figura 6.3 - Erros na excentricidade como uma função da inclinação e distância de apogeu para diferentes órbitas iniciais em torno da Terra. Fonte: Produção do autor.



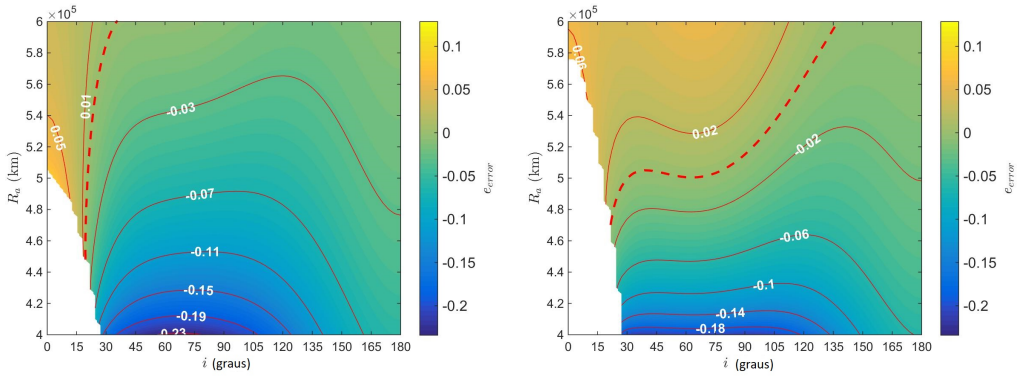
(a) $R_p = 10000$ km

(b) $R_p = 50000$ km



(c) $R_p = 90000$ km

(d) $R_p = 130000$ km



(e) $R_p = 170000$ km

(f) $R_p = 210000$ km

problema restrito estima menores valores de inclinação antes da manobra, já que à direita dessas curvas há dominância de regiões azuladas.

Também é interessante notar que as regiões de grande i_{error} são encontradas, em cada um das subfiguras, para baixos valores de R_a e $i < 90°$. Em outras palavras, maiores i_{error} são observados nos casos onde o veículo apresenta movimento prógrado.

Como notado para a_{error}, os erros em inclinação também apresentam alguma indepedência de R_a para alguns valores de i, tais como $i \lessapprox 10°$ e $i \gtrapprox 80°$ quando $R_p = 50,000$ km (Figura 6.4(b)).

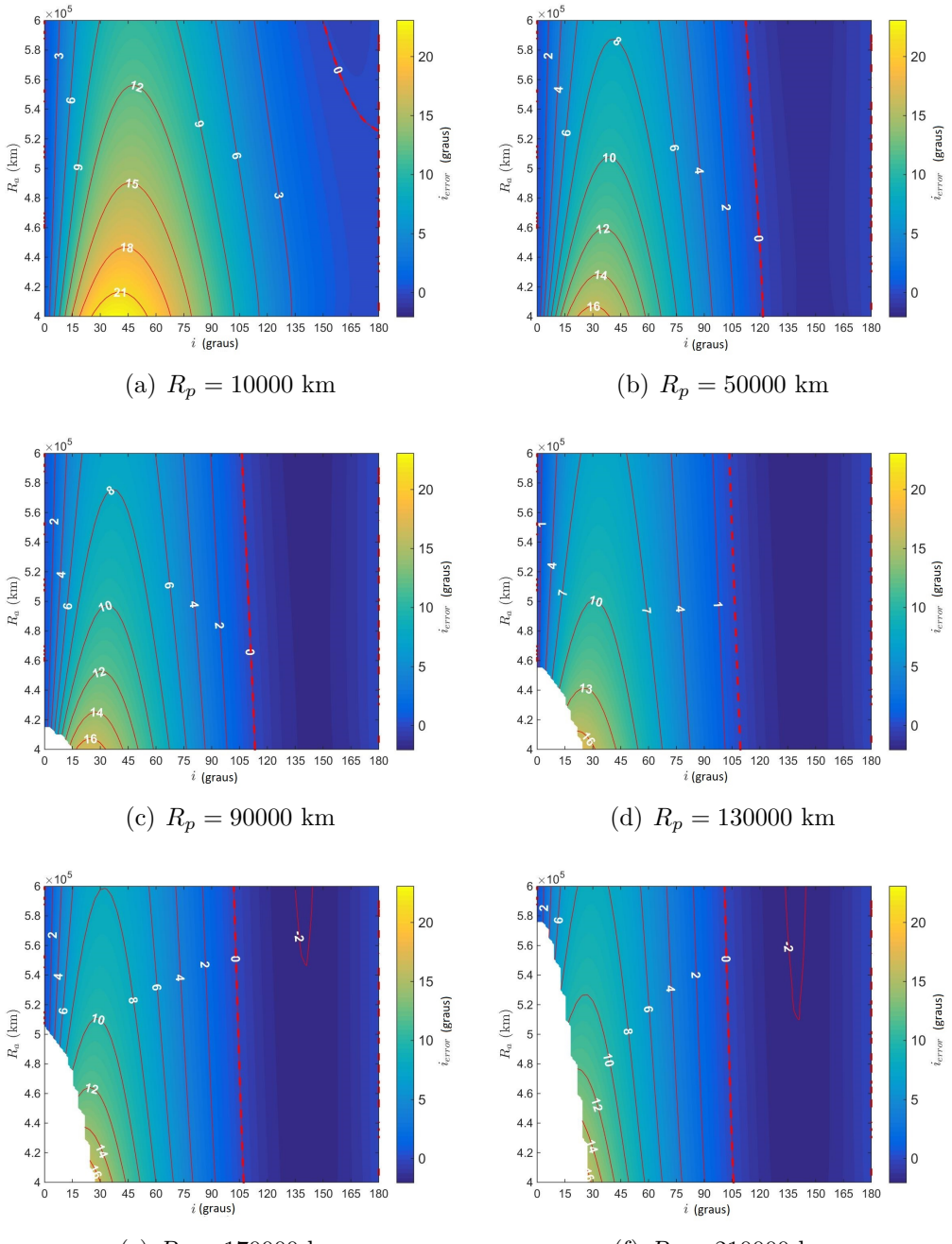
Como próximo passo, os erros em longitude do nodo ascendente são mostrados na Figura 6.5. Nesse caso os erros não são tão elevados, como é perceptível na barra de cores, a qual se estende de $-5°$ até um valor levemente maior que $1°$, o que também indica que, para a maioria dos casos, as Cônicas Conjugadas estimam valores maiores (Ω_{error} negativo). Grandes valores de erros em magnitude são, para a maioria das figuras, concentrados em baixos valores de i e em proximidade as extremidades de R_a (400,000 km e 600,000 km).

Na Figura 6.5(a), $R_p = 10,000$ km, a curva de erro zero aparece em um valor constante de $R_a \approx 450,000$ km, enquanto as outras linhas são aproximadamente constantes. Isso indica uma pequena influência de i sobre Ω_{error}. O mesmo não é verdade nas figuras subsequentes, nas quais a dependência de i é aumentada até um regime de transição para $R_p = 130,000$ km (Figura 6.5(d)), quando uma maior dependência de Ω_{error} sob i começa a tomar lugar, e sendo dominante para $R_p = 170,000$ km (Figura 6.5(e)) e $R_p = 210,000$ km (Figura 6.5(f)).

Outro fato a se notar é que a curva de erro zero desaparece completamente quando $R_p = 130,000$ km, veja Figura 6.5(d). Os valores positivos de Ω_{error} também desaparecem conjuntamente a curva de erro zero, o que implica em não haver mais grupos de valores para os quais o problema restrito estima uma maior longitude de nodo ascendente. Junto a isso, há um aumento das regiões azuladas, revelando que Ω_{error} também cresce em magnitude para maiores valores de R_p.

Os erros no argumento do perigeu são representados na Figura 6.6. Aqui, é claro que o aumento de R_p causa um grande efeito em ω_{error}, esse fato é evidenciado ao se comparar o erro alcançando aproximadamente $\pm 2°$, quando $R_p = 10,000$ km (Figura 6.6(a)), com o erro para $R_p = 210,000$ km (Figura 6.6(f)) indo de $5°$ para aproximadamente $103°$.

Figura 6.4 - Erros na inclinação como uma função da inclinação e distância de apogeu para diferentes órbitas iniciais em torno da Terra. Fonte: Produção do autor.



(a) $R_p = 10000$ km

(b) $R_p = 50000$ km

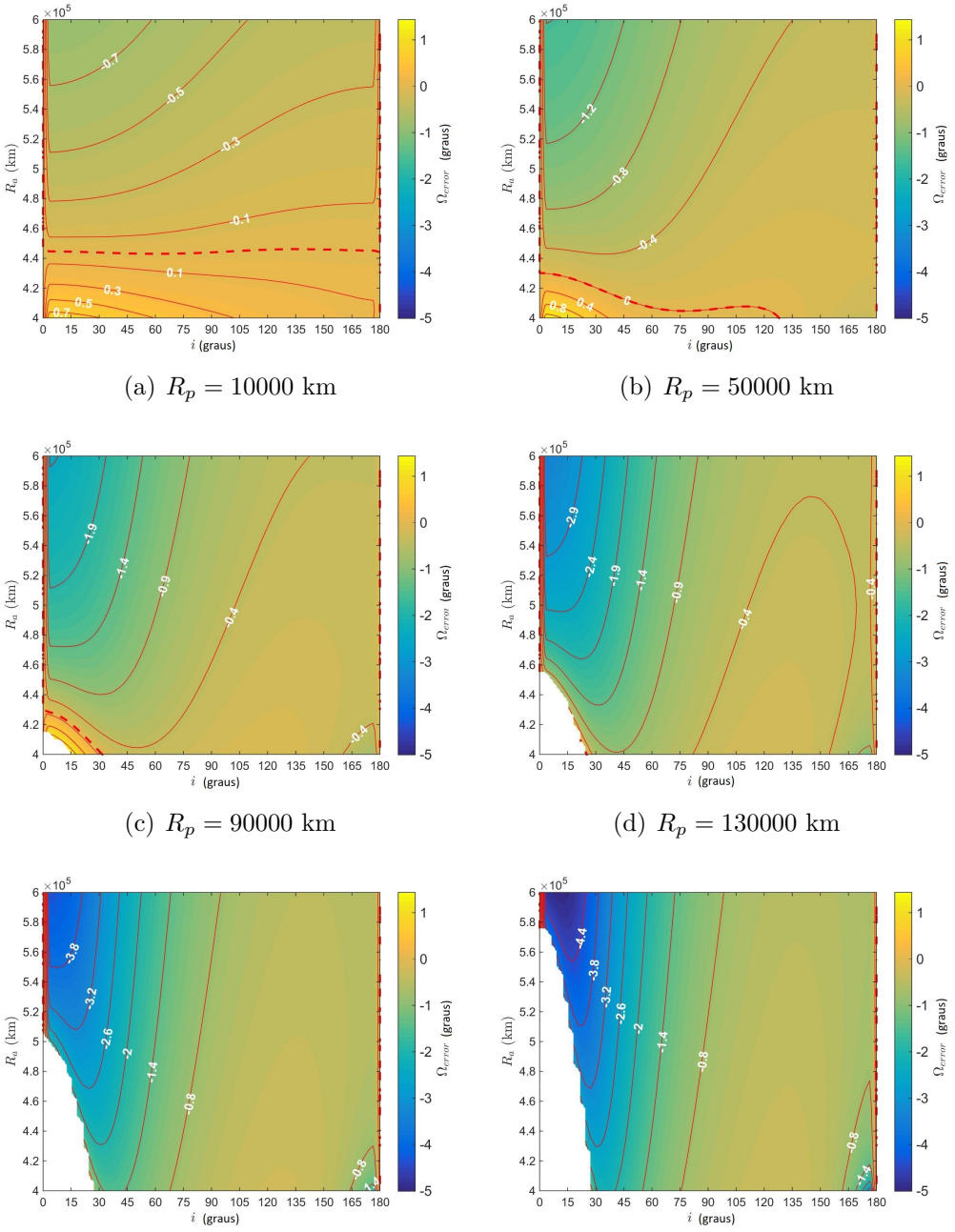
(c) $R_p = 90000$ km

(d) $R_p = 130000$ km

(e) $R_p = 170000$ km

(f) $R_p = 210000$ km

Figura 6.5 - Erros na longitude do nodo ascendente como uma função da inclinação e distância de apogeu para diferentes órbitas iniciais em torno da Terra. Fonte: Produção do autor.



(a) $R_p = 10000$ km

(b) $R_p = 50000$ km

(c) $R_p = 90000$ km

(d) $R_p = 130000$ km

(e) $R_p = 170000$ km

(f) $R_p = 210000$ km

Assim como nos erros em inclinação, ω_{error} apresenta valores maiores para $i < 90°$, órbitas prógradas. As curvas de erro zero desaparecem para $R_p = 170,000$ km ou $R_p = 210,000$ km.

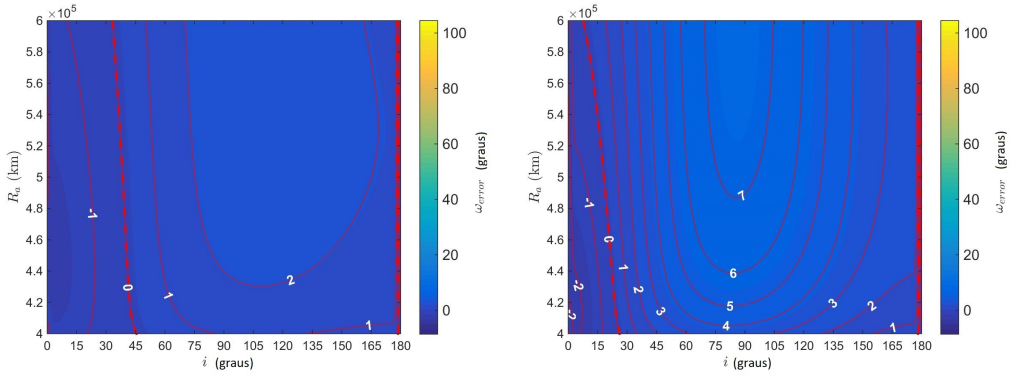
A última e mais importante análise é para a energia característica. A Figura 6.7 mostra os valores obtidos para C_{3-RP}, que é a energia característica depois do *swing-by* obtida após a integração numérica do problema restrito. O C_{3-RP} também pode ser visto como o erro, uma vez que a energia característica escolhida para as Cônicas Conjugadas é $C_3 = 0$ km^2/s^2.

A primeira característica a se notar nas subfiguras é o aumento das regiões azuis e amarelas conforme R_p cresce, evidenciando um aumento de C_{3-RP}. Particularmente interessante é a completa dominância de valores positivos e falta de curvas de erro zero na Figura 6.7(a) ($R_p = 10,000$ km), o que significa um escape subestimado no modelo das Cônicas Conjugadas e nenhuma concordância quanto ao valor de C_3 entre ambos os métodos nessa condição. Esse comportamente desaparece na Figura 6.7(b) ($R_p = 50,000$ km), onde uma concordância entre os métodos é possível para alguns pontos em $R_a < 440,000$ km e $70° < i < 150°$.

O surgimento das curvas de erro zero trazem consigo regiões para as quais $C_{3-RP} < 0$ km^2/s^2, onde não há escape possível da atração gravitacional terrestre. Como exemplo, na Figura 6.7(f) a região entre $i \approx 50°$ e $i \approx 165°$, existem regiões onde as Cônicas Conjugadas estimam condições de perilune que produziriam um escape, mas o problema restrito mostra que não há escape possível para essas mesmas condições de perilune.

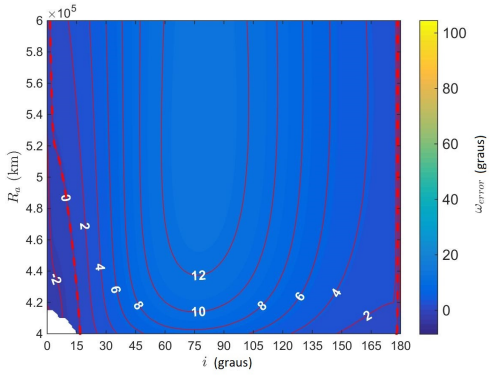
Isso é um fato extremamente relevante, e os resultados mostrados aqui indicam quais órbitas são seguras sob uma análise via Cônicas Conjugadas e quais requerem uma abordagem mais cautelosa e sofisticada. Isso é particularmente verdade quando estudando possíveis escapes do sistema Terra-Lua.

Figura 6.6 - Erros no argumento de perigeu como uma função da inclinação e distância de apogeu para diferentes órbitas iniciais em torno da Terra. Fonte: Produção do autor.

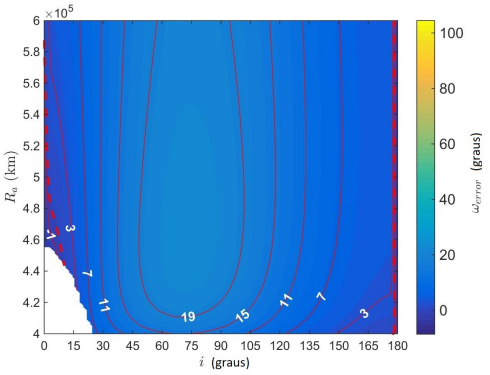


(a) $R_p = 10000$ km

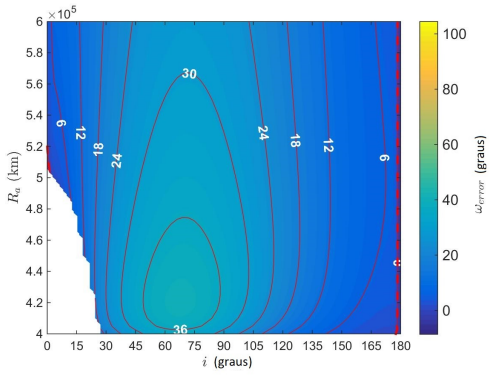
(b) $R_p = 50000$ km



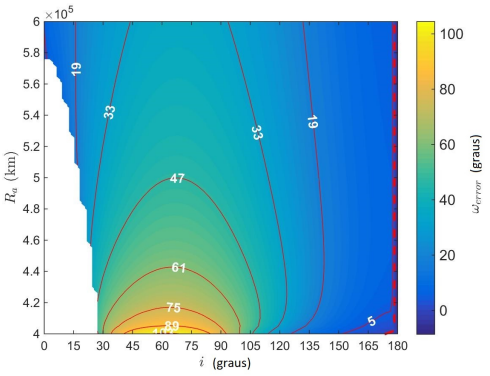
(c) $R_p = 90000$ km



(d) $R_p = 130000$ km

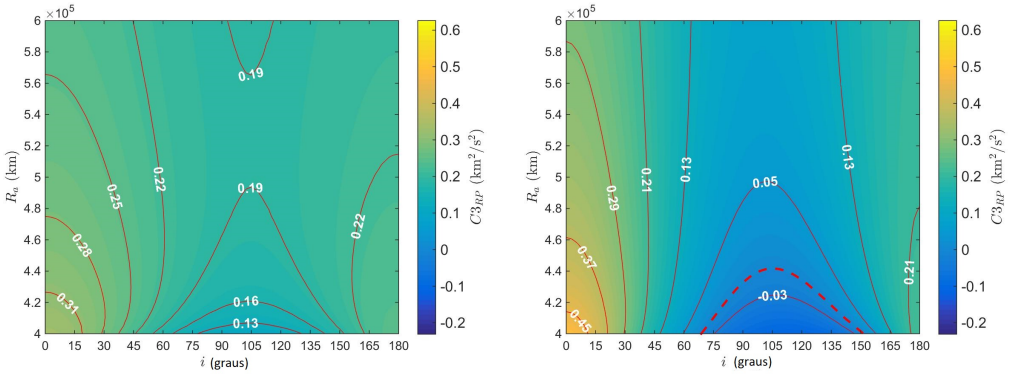


(e) $R_p = 170000$ km



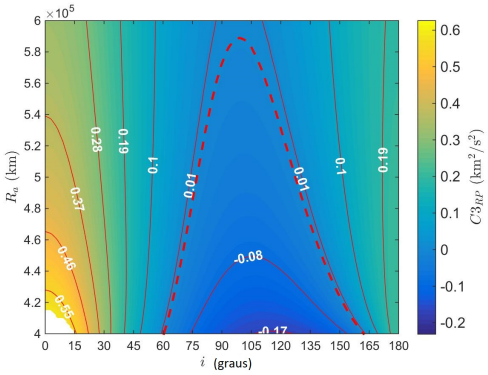
(f) $R_p = 210000$ km

Figura 6.7 - A energia característica calculada pelo problemo restrito após a manobra como uma função da inclinação e distância de apogeu para diferentes órbitas iniciais em torno da Terra. Fonte: Produção do autor.

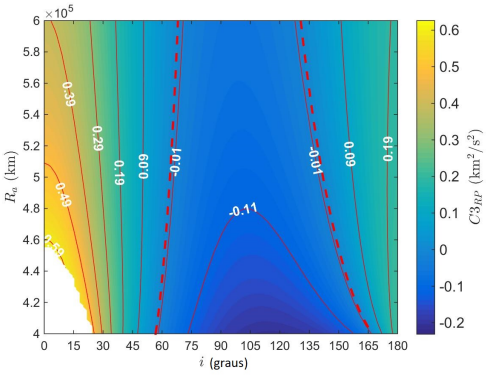


(a) $R_p = 10000$ km

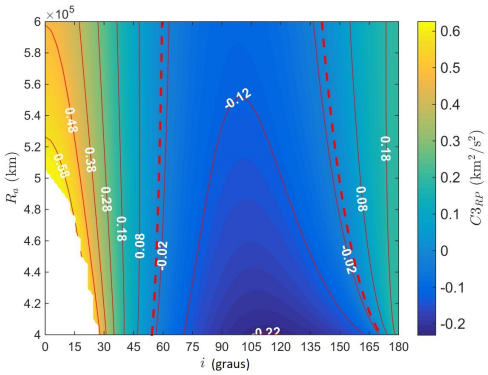
(b) $R_p = 50000$ km



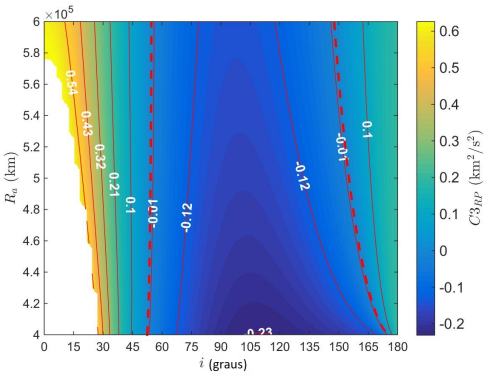
(c) $R_p = 90000$ km



(d) $R_p = 130000$ km



(e) $R_p = 170000$ km



(f) $R_p = 210000$ km

7 CONCLUSÕES

Este trabalho mostrou e analisou os erros provenientes de uma aproximação por Cônicas Conjugadas em diversas quantidades físicas, principalmente a energia, resultantes de um *swing-by* em três dimensões. Isso é muito importante, pois as Cônicas Conjugadas é uma abordagem usual como primeira aproximação para o projeto de um *swing-by*.

Os resultados estimados pelo método das Cônicas Conjugadas foram comparados com o Problema Circular Restrito de Três Corpos, que é considerado como produzindo os "valores reais" para a manobra. Os resultados demonstraram os efeitos de cada parâmetro que define o *swing-by* nos erros.

No capítulo 3 foi realizado um pequeno estudo da taxa de ganho de energia da espaçonave no espaço próximo ao corpo onde a manobra é realizada, semelhante a realizada por Qi e Xu (2015), porém considerando também o movimento fora do plano. Percebeu-se que as maiores taxas, em magnitude, se encontram no plano e em posições onde a espaçonave encontra-se logo atrás ou à frente do sentido de movimento do corpo onde a manobra é realizada. Além disso, um pequeno exemplo de *swing-by* na Lua foi apresentado para elucidar a análise desenvolvida.

Posteriormente, no capítulo 4, foram desenvolvidos mapas de variação de energia e de inclinação aplicados à Lua utilizando ambos os modelos. Assim, eles foram validados, bem como apresentaram concordância com a análise desenvolvida no capítulo 3, além de noções preliminares de como a divergência entre os métodos ocorre. O capítulo culminou em uma análise, em forma de mapa, dos erros que se esperaria obter em uma aproximação por Cônicas Conjugadas na Lua. Os resultados obtidos podem ser proveitosos para auxiliar no projeto preliminar de um *swing-by* na Lua para missões interplanetárias, como a Missão Aster (MACAU et al., 2011).

A seguir, uma análise semelhante a desenvolvida por Negri et al. (2017) foi realizada no capítulo 5, consistindo em um estudo genérico dos erros em energia para diferentes parâmetros de massa, e como eles se relacionam com os parâmetros que definem a manobra. Os resultados confirmaram os resultados obtidos nos capítulos anteriores, como: a diminuição do erro com aumento de r_p e v_p, além de maiores erros em variação de energia para $\beta = 0°$ e $\alpha = 90°$ ou $\alpha = 270°$. Também, em uma análise mais minuciosa para γ, percebeu-se que devido a geometria do problema valores de $\gamma = 0°$ favorecem uma maior variação de energia, e o erro segue a mesma linha.

Ainda no capítulo 5, no final, uma análise da variação de velocidade aplicada as Luas Galileanas foi desenvolvida almejando fornecer uma compreensão mais palpável da magnitude de erros envolvidos, mostrando que as Cônicas Conjugadas podem levar a erros de variação de velocidade de até 60%. Além disso, aproximou o trabalho de uma compreensão holística do problema ao desnudar falhas da aproximação de Cônicas Conjugadas ao assumir o referencial $X'Y'Z'$, preso a M_2, como um sistema inercial.

Por fim, no capítulo 6, sabendo que o sistema Terra-Lua possui o segundo maior parâmetro de massa do Sistema Solar e das motivações relativas a Missão Aster, um estudo mais avançado sobre os erros incorridos da utilização das Cônicas Conjugadas em um projeto preliminar de swing-by é realizada.

Os erros foram mapeados por uma comparação entre elementos keplerianos antes da manobra e a energia característica da espaçonave depois da manobra para iguais condições de perilune. Elas foram obtidas ao se utilizar uma aproximação de Cônicas Conjugadas a partir de uma órbita terrestre antes da manobra, em diferentes condições de perigeu, apogeu e inclinação. Os resultados foram apresentados em mapas que podem ser utilizados como guias para um projetista de missão, indicando regiões que são seguras sob uma análise via Cônicas Conjugadas e quais requerem uma abordagem mais cautelosa e sofisticada

Pode-se dizer que este trabalho como um todo colocou em um contexto mais amplo o trabalho realizado por Felipe e Prado (2000), Prado (2007b) e Greenberg et al. (1988). Ele também está em concordância com conclusões e resultados aí obtidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAUJO, R.; WINTER, O.; PRADO, A. F. B. A.; MARTINS, R. V. Sphere of influence and gravitational capture radius: a dynamical approach. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 391, n. 2, p. 675–684, 2008. 14, 15

BATTIN, R. H. The determination of round-trip planetary reconnaissance trajectories. **Journal of the Aerospace Sciences**, v. 26, p. 545–567, 1959. 3

BOLTON, S. The juno mission. **Proceedings of the International Astronomical Union**, Cambridge University Press, v. 6, n. S269, p. 92–100, 2010. 62

BONFIGLIO, E. P.; LONGUSKI, J. M.; VINH, N. X. Automated design of aerogravity-assist trajectories. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 37, n. 6, p. 768–775, 2000. 5

BREAKWELL, J. V.; GILLESPIE, R. W.; ROSS, S. Researches in interplanetary transfer. **ARS Journal**, v. 31, p. 201–208, 1961. 3

BROUCKE, R. Stability of periodic orbits in the elliptic, restricted three-body problem. **AIAA journal**, v. 7, n. 6, p. 1003–1009, 1969. 2

_____. The celestial mechanics of gravity assist. In: ASTRODYNAMICS CONFERENCE, GUIDANCE, NAVIGATION, AND CONTROL AND CO-LOCATED CONFERENCES, Minneapolis, MN, U.S.A. **Proceedings...** [S.l.]: AIAA, 1988. 5, 7, 15, 58

BROUCKE, R. A.; PRADO, A. F. B. A. Jupiter swing-by trajectories passing near the earth. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 82, n. 2, p. 1159–1176, 1993. 3, 5

BYRNES, D.; DAMARIO, L. A combined halley flyby/galileo mission. In: **Astrodynamics Conference**. [S.l.: s.n.], 1982. p. 1462. 4

CARLSON, R.; JUDGE, D. Pioneer 10 ultraviolet photometer observations at jupiter encounter. **Journal of Geophysical Research**, Wiley Online Library, v. 79, n. 25, p. 3623–3633, 1974. 4

CLARKE, A. C. **The challenge of the spaceship**. [S.l.]: Ballantine Books, 1961. 3

CROCCO, G. A. **One-year Exploration-trip Earth-mars-venus-earth**. [S.l.: s.n.], 1956. 3

D'ALEMBERT, J. L. R. **Opuscules mathématiques ou Mémoires sur différens sujets de géométrie, de méchanique, etc**. [S.l.: s.n.], 1768. 3

DIEHL, R.; NOCK, K. Galileo jupiter encounter and satellite tour trajectory design. In: **American Institute of Aeronautics and Astronautics Conference**. [S.l.: s.n.], 1979. 4

DOWLING, R.; KOSMANN, W.; MINOVITCH, M.; RIDENOURE, R. Gravity propulsion research at ucla and jpl 1962-1964. In: **IAF, International Astronautical Congress, 42 nd, Montreal, Canada**. [S.l.: s.n.], 1991. p. 1991. 4

DUNNE, J. A.; BURGESS, E. The voyage of mariner 10. **National Aeronautics and Space Administration SP**, v. 424, 1978. 4

FARQUHAR, R. W.; DUNHAM, D. A new trajectory concept for exploring the earth's geomagnetic tail. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, 2012. 4

FELIPE, G. de; PRADO, A. F. B. A. Study of the inclination change in three-dimensional swing-by trajectories. In: **PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SPACE TECHNOLOGY AND SCIENCE**. [S.l.: s.n.], 2000. v. 22, p. 1564–1569. 23, 24, 90

FIMMEL, R. O. **Pioneer odyssey**. [S.l.: s.n.], 1977. 4

FIMMEL, R. O.; ALLEN, J. V.; BURGESS, E. Pioneer: first to jupiter, saturn, and beyond. **NASA Special Publication**, v. 446, 1980. 4

FLANDRO, G. Fast reconnaissance missions to the outer solar system utilizing energy derived from the gravitational field of jupiter1. **Earth**, v. 108, p. 6–1, 1966. 4

FORMIGA, J. K. S.; SANTOS, D. P. dos. Orbital maneuvers to reach and explore a triple asteroid. **Computational and Applied Mathematics**, Springer, v. 35, n. 3, p. 893–905, 2016. 5

GODDARD, R. H. Robert h. goddard: An autobiography. Astronautics, 1959. 3

GOLDSTEIN, H. **Classical mechanics**. [S.l.]: Pearson Education India, 2011. 1

GOMES, V. M.; FORMIGA, J.; MORAES, R. V. de. Studying close approaches for a cloud of particles considering atmospheric drag. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi Publishing Corporation, v. 2013, 2013. 5

GOMES, V. M.; PRADO, A. F. B. A. Swing-by maneuvers for a cloud of particles with planets of the solar system. **WSEAS Transactions on applied and theoretical mechanics**, v. 3, n. 11, p. 869–878, 2008. 5

GOMES, V. M.; PRADO, A. F. B. A.; GOLEBIEWSKA, J. Dynamics of space particles and spacecrafts passing by the atmosphere of the earth. **The Scientific World Journal**, Hindawi Publishing Corporation, v. 2013, 2013. 5

GRARD, R. Mercury: The messenger and bepicolombo missions a concerted approach to the exploration of the planet. **Advances in Space Research**, Pergamon, v. 38, n. 4, p. 563, 2006. 4

GRASSET, O.; DOUGHERTY, M.; COUSTENIS, A.; BUNCE, E.; ERD, C.; TITOV, D.; BLANC, M.; COATES, A.; DROSSART, P.; FLETCHER, L. et al. Jupiter icy moons explorer (juice): An esa mission to orbit ganymede and to characterise the jupiter system. **Planetary and Space Science**, Elsevier, v. 78, p. 1–21, 2013. 62

GREENBERG, R.; CARUSI, A.; VALSECCHI, G. Outcomes of planetary close encounters: a systematic comparison of methodologies. **Icarus**, Elsevier, v. 75, n. 1, p. 1–29, 1988. 52, 90

GUO, Y.; FARQUHAR, R. W. New horizons mission design. **Space science reviews**, Springer, v. 140, n. 1-4, p. 49–74, 2008. 4

HANSEN, C. J.; BOLTON, S. J.; MATSON, D. L.; SPILKER, L. J.; LEBRETON, J.-P. The cassini–huygens flyby of jupiter. **Icarus**, Elsevier, v. 172, n. 1, p. 1–8, 2004. 4

HECHLER, M. Rosetta mission design. **Advances in Space Research**, Elsevier, v. 19, n. 1, p. 127–136, 1997. 4

HOHMANN, W. The attainability of heavenly bodies(die erreichbarkeit der himmelskoerper). **NASA**, n. 19980230631, 1960. 3

HOLLISTER, W.; PRUSSING, J. Optimum transfer to mars via venus. In: **Thermophysics Specialist Conference**. [S.l.: s.n.], 1965. p. 700. 4

HOWELL, K. C. Three-dimensional, periodic, halo orbits. **Celestial Mechanics**, Springer, v. 32, n. 1, p. 53–71, 1984. 2

JEHN, R.; COMPANYS, V.; CORRAL, C.; GARCI, D.; SÁNCHEZ, N. et al. Navigating bepicolombo during the weak-stability capture at mercury. **Advances in Space Research**, Elsevier, v. 42, n. 8, p. 1364–1369, 2008. 4

KARMAN, T. V. Introductory remarks on space propulsion problems. In: CASCI, C. (Ed.). **Advances in Astronautical Propulsion**. New York: Pergamon Press, 1962. p. 3–10. 3

KOHLHASE, C.; PENZO, P. Voyager mission description. **Space science reviews**, Springer, v. 21, n. 2, p. 77–101, 1977. 4

LANOIX, E. L.-M.; MISRA, A. K. Near-earth asteroid missions using tether sling shot assist. **Journal of spacecraft and rockets**, v. 37, n. 4, p. 475–480, 2000. 4

LAPLACE, P. S. marquis de. **Traité de mécanique céleste**. [S.l.]: Crapelet, 1799. 3

LAWDEN, D. F. Interplanetary rocket trajectories. **Advances in Space Science**, IV, New York: Academic Press, Inc, v. 1, p. 1–53, 1959. 3

LEWIS, M. J.; MCRONALD, A. D. Design of hypersonic waveriders for aeroassisted interplanetary trajectories. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 29, n. 5, p. 653–660, 1992. 5

LOHAR, F. A.; MISRA, A. K.; MATEESCU, D. Optimal aero-gravity assist with heliocentric plane change. **Acta astronautica**, Elsevier, v. 38, n. 4-8, p. 445–456, 1996. 5

LONGMAN, R.; SCHNEIDER, A. Use of jupiter's moons for gravity assist. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 7, n. 5, p. 570–576, 1970. 4

LONGUSKI, J.; WILLIAMS, S. The last grand tour opportunity to pluto. **Journal of the Astronautical Sciences**, v. 39, p. 359–365, 1991. 4

LONGUSKI, J. M.; WILLIAMS, S. N. Automated design of gravity-assist trajectories to mars and the outer planets. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Springer, v. 52, n. 3, p. 207–220, 1991. 5

LYNAM, A. E.; KLOSTER, K. W.; LONGUSKI, J. M. Multiple-satellite-aided capture trajectories at jupiter using the laplace resonance. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Springer, v. 109, n. 1, p. 59–84, 2011. 5

MACAU, E. E.; WINTER, O. C.; VELHO, H. F. C.; SUKHANOV, A. A.; BRUM, V. de; GIL, A.; FERREIRA, J. L.; HETEM, A.; SANDONATO, G. M.; SFAIR, R. The aster mission: exploring for the first time a triple system asteroid. In: **62nd International Astronautical Congress 2011, IAC 2011**. [S.l.: s.n.], 2011. p. 3669–3677. 5, 89

MCNUTT, R. L.; SOLOMON, S. C.; GOLD, R. E.; LEARY, J. C.; TEAM, M. et al. The messenger mission to mercury: Development history and early mission status. **Advances in Space Research**, Elsevier, v. 38, n. 4, p. 564–571, 2006. 4

MCNUTT, R. L.; SOLOMON, S. C.; GRARD, R.; NOVARA, M.; MUKAI, T. An international program for mercury exploration: Synergy of messenger and bepicolombo. **Advances in Space Research**, Elsevier, v. 33, n. 12, p. 2126–2132, 2004. 4

MCRONALD, A. D.; RANDOLPH, J. E. Hypersonic maneuvering for augmenting planetary gravity assist. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 29, n. 2, p. 216–222, 1992. 5

MINOVITCH, M. **A method for determining interplanetary free-fall reconnaissance trajectories, JPL Tec**. [S.l.: s.n.], 1961. 4, 6, 15, 75

MINOVITCH, M. A. The invention that opened the solar system to exploration. **Planetary and Space Science**, Elsevier, v. 58, n. 6, p. 885–892, 2010. 3

MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar system dynamics**. [S.l.]: Cambridge university press, 1999. 1, 2, 17

NEGRI, R. B.; PRADO, A. F. B. A.; SUKHANOV, A. Studying the errors in the estimation of the variation of energy by the ”patched-conics” model in the three-dimensional swing-by. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Springer, p. 1–16, 2017. 7, 8, 45, 89

NOCK, K.; UPHOFF, C. Satellite aided orbit capture. In: **American Institute of Aeronautics and Astronautics Conference**. [S.l.: s.n.], 1979. 5

PATEL, M. R.; LONGUSKI, J. M.; SIMS, J. A. A uranus-neptune-pluto opportunity. **Acta Astronautica**, Elsevier, v. 36, n. 2, p. 91–98, 1995. 4

PENZO, P. A multi-mission flyby strategy for the near-earth asteroids. In: **Guidance, Navigation and Control Conference**. [S.l.: s.n.], 1992. p. 4374. 4

PENZO, P. A.; MAYER, H. L. Tethers and asteroids for artificial gravity assist in the solar system. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 23, n. 1, p. 79–82, 1986. 4

PEROZZI, E.; ROSSI, A.; VALSECCHI, G. B. Basic targeting strategies for rendezvous and flyby missions to the near-earth asteroids. **Planetary and Space Science**, Elsevier, v. 49, n. 1, p. 3–22, 2001. 4

PETROPOULOS, A. E.; LONGUSKI, J. M. Shape-based algorithm for the automated design of low-thrust, gravity assist trajectories. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 41, n. 5, p. 787–796, 2004. 5

PHILLIPS, C. B.; PAPPALARDO, R. T. Europa clipper mission concept: Exploring jupiter's ocean moon. **Eos, Transactions American Geophysical Union**, Wiley Online Library, v. 95, n. 20, p. 165–167, 2014. 62

POPPER, K. Philosophy of science. **British Philosophy in the Mid-Century (ed. CA Mace). London: George Allen and Unwin**, 1957. 67

PRADO, A. F. B. A. An analytical description of the close approach maneuver in three dimensions. In: **51th International Astronautical Congress**. [S.l.: s.n.], 2000. 5, 15, 16, 58

_____. _____. In: **IAF, International Astronautical Congress, 51 st, Rio de Janeiro, Brazil**. [S.l.: s.n.], 2000. 7

_____. A comparison of the patched-conics approach and the restricted problem for swing-bys. **Advances in Space Research**, Elsevier, v. 40, n. 1, p. 113–117, 2007. 5, 7

_____. A comparison of the "patched-conics approach" and the restricted problem for swing-bys. **Advances in Space Research**, Elsevier, v. 40, n. 1, p. 113–117, 2007. 90

_____. Using tethered gravity-assisted maneuvers for planetary capture. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 38, n. 9, p. 1852–1856, 2015. 4

PRADO, A. F. B. A.; BROUCKE, R. Effects of atmospheric drag in swing-by trajectory. **Acta Astronautica**, Elsevier, v. 36, n. 6, p. 285–290, 1995. 4

PRADO, A. F. B. A.; FELIPE, G. de. An analytical study of the powered swing-by to perform orbital maneuvers. **Advances in Space Research**, Elsevier, v. 40, n. 1, p. 102–112, 2007. 12

PRUSSING, J. E.; CONWAY, B. A. **Orbital mechanics**. [S.l.]: Oxford University Press, 1993. 1

QI, Y.; XU, S. Mechanical analysis of lunar gravity assist in the earth–moon system. **Astrophysics and Space Science**, Springer, v. 360, n. 2, p. 1–15, 2015. 7, 17, 19, 89

RUPPE, H. O. Minimum energy requirements for space travels. In: SPRINGER. **Xth International Astronautical Congress London 1959/X. Internationaler Astronautischer Kongress/Xe Congrés International d'Astronautique**. [S.l.], 1960. p. 181–201. 3

SILVA, A.; PRADO, A.; WINTER, O. Powered swing-by maneuvers around the moon. In: IOP PUBLISHING. **Journal of Physics: Conference Series**. [S.l.], 2013. v. 465, n. 1, p. 012001. 5

SIMS, J. A.; LONGUSKI, J. M.; PATEL, M. R. Aerogravity-assist trajectories to the outer planets and the effect of drag. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 37, n. 1, p. 49–55, 2000. 5

SOHN, R. L. Venus swingby mode for manned mars missions. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 1, n. 5, p. 565–567, 1964. 4

_____. Manned mars trips using venus flyby modes. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 3, n. 2, p. 161–169, 1966. 4

SOLÓRZANO, C.; SUKHANOV, A.; PRADO, A. F. B. A. A study of trajectories to the neptune system using gravity assists. **Advances in Space Research**, Elsevier, v. 40, n. 1, p. 125–133, 2007. 4

SPENCER, D. F.; JAFFE, L. D.; LUCAS, J. W.; MERRILL, O. S.; SHAFER, J. I. Nuclear electric spacecraft for unmanned planetary and interplanetary missions. **Jet Propulsion Lab., TR32-281 (April 1962)**, 1962. 3

STERN, A. The pluto reconnaissance flyby mission. **Eos, Transactions American Geophysical Union**, Wiley Online Library, v. 74, n. 7, p. 73–78, 1993. 4

STERNE, T. E. An introduction to celestial mechanics. **Interscience Tracts on Physics and Astronomy, New York: Interscience Publication, 1960**, 1960. 4

STRANGE, N. J.; LONGUSKI, J. M. Graphical method for gravity-assist trajectory design. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 39, n. 1, p. 9–16, 2002. 5

SUKHANOV, A.; VELHO, H. d. C.; MACAU, E.; WINTER, O. The aster project: Flight to a near-earth asteroid. **Cosmic research**, Springer, v. 48, n. 5, p. 443–450, 2010. 5

SZEBEHELY, V. Theory of orbits academic press new york google scholar. 1967. 11, 14

SZEBEHELY, V.; GIACAGLIA, G. E. On the elliptic restricted problem of three bodies. **The Astronomical Journal**, v. 69, p. 230, 1964. 2

TISSERAND, F. **Traité de mécanique céleste**. [S.l.]: Gauthier-Villars, 1891. 3

TSIOLKOVSKII, K.; PETROFF, A. Three astronautical pioneers-2 ke tsiolkovskii: An autobiography. **Astronautics, May**, 1959. 3

VALLADO, D. A.; MCCLAIN, W. D. **Fundamentals of astrodynamics and applications**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2001. 2

VASILE, M.; PASCALE, P. D. Preliminary design of multiple gravity-assist trajectories. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 43, n. 4, p. 794–805, 2006. 5

WAGNER, S.; WIE, B. Hybrid algorithm for multiple gravity-assist and impulsive delta-v maneuvers. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 38, n. 11, p. 2096–2107, 2015. 3

WALBERG, G. D. A survey of aeroassisted orbit transfer. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 22, n. 1, p. 3–18, 1985. 5

WEINSTEIN, S. Pluto flyby mission design concepts for very small and moderate spacecraft. In: **Guidance, Navigation and Control Conference**. [S.l.: s.n.], 1992. p. 4372. 4

WILLIAMS, P.; BLANKSBY, C.; TRIVAILO, P. Tethered planetary capture: controlled maneuvers. **Acta Astronautica**, Elsevier, v. 53, n. 4, p. 681–708, 2003. 4

YAMAKAWA, H.; KAWAGUCHI, J.; UESUGI, K.; MATSUO, H. Frequent access to mercury in the early 21st century: Multiple mercury flyby mission via electric propulsion. **Acta astronautica**, Elsevier, v. 39, n. 1, p. 133–142, 1996. 4

YEN, C.-W. L. Ballistic mercury orbiter mission via venus and mercury gravity assists. **Journal of the Astronautical Sciences**, v. 37, p. 417–432, 1989. 4