



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

sid.inpe.br/mtc-m21b/2014/06.10.12.28-TDI

**DETECÇÃO DA SINCRONIZAÇÃO DE FASE EM  
SISTEMAS CAÓTICOS POR MEIO DA  
TRANSFORMADA WAVELET COMPLEXA  
DUAL-TREE**

Maria Teodora Ferreira

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada, orientada pelos Drs. Elbert Einstein Nehrer Macau, e Margarete Oliveira Domingues, aprovada em 24 de junho de 2014.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP5W34M/3GESL58>>

INPE  
São José dos Campos  
2014

**PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

**CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE (RE/DIR-204):****Presidente:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

**Membros:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Dr. Amauri Silva Montes - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espaciais (ETE)

Dr. André de Castro Milone - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dr. Joaquim José Barroso de Castro - Centro de Tecnologias Espaciais (CTE)

Dr. Manoel Alonso Gan - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr<sup>a</sup> Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

**BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

**REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Maria Tereza Smith de Brito - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

**EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Maria Tereza Smith de Brito - Serviço de Informação e Documentação (SID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

sid.inpe.br/mtc-m21b/2014/06.10.12.28-TDI

**DETECÇÃO DA SINCRONIZAÇÃO DE FASE EM  
SISTEMAS CAÓTICOS POR MEIO DA  
TRANSFORMADA WAVELET COMPLEXA  
DUAL-TREE**

Maria Teodora Ferreira

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada, orientada pelos Drs. Elbert Einstein Nehrer Macau, e Margarete Oliveira Domingues, aprovada em 24 de junho de 2014.

URL do documento original:

<http://urlib.net/8JMKD3MGP5W34M/3GESL58>

INPE  
São José dos Campos  
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Ferreira, Maria Teodora.

F413d Detecção da sincronização de fase em sistemas caóticos por meio da transformada wavelet complexa dual-tree / Maria Teodora Ferreira. – São José dos Campos : INPE, 2014.

xxvii + 174 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21b/2014/06.10.12.28-TDI)

Tese (Doutorado em Computação Aplicada) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2014.

Orientadores : Drs. Elbert Einstein Nehrer Macau, e Margarete Oliveira Domingues.

1. Sincronização de fase. 2. Transformada wavelet complexa dual-tree. 3. Sistemas caóticos. 4. Análise de séries temporais.  
I.Título.

CDU 517.44:681.3

---

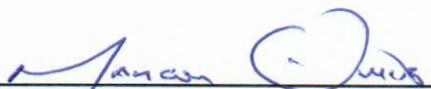


Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de **Doutor(a)** em  
**Computação Aplicada**

Dr. Marcos Gonçalves Quiles



---

Presidente / UNIFESP / São José dos Campos - SP

Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau



---

Orientador(a) / INPE / São José dos Campos - SP

Dra. Margarete Oliveira Domingues



---

Orientador(a) / INPE / SJC Campos - SP

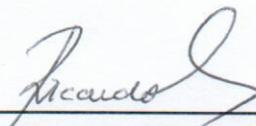
Dr. Joaquim José Barroso de Castro



---

Membro da Banca / INPE / SJC Campos - SP

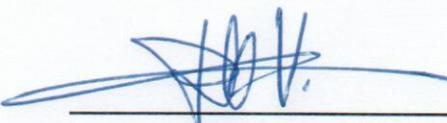
Dr. Ricardo Egydio de Carvalho



---

Convidado(a) / UNESP / Rio Claro - SP

Dr. Ricardo Luiz Viana



---

Convidado(a) / UFPR / Curitiba - PR

*Este trabalho foi aprovado por:*

maioria simples

unanimidade

Aluno (a): **Maria Teodora Ferreira**

São José dos Campos, 24 de Junho de 2014



*“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível.”*

CHARLES CHAPLIN







## AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela força, sabedoria e por iluminar todos os dias de minha vida.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE pela oportunidade de prosseguir meus estudos e por todos os recursos físicos concedidos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pela bolsa de doutorado no Brasil.

Aos professores do curso de Computação Aplicada - CAP por todo conhecimento compartilhado.

Ao meu orientador Dr. Elbert E. N. Macau e minha orientadora Dra. Margarete Oliveira Domingues por todo apoio e orientação.

Ao Prof. Dr. Nick Kingsbury pelo código da *wavelet* DT-CWT utilizado, pelos dois minicursos dados no *Wavelet* e Aplicações WWlet/CNMAC 2012 e pelas discussões que motivaram a aplicação dessa transformada.

Ao Prof. Dr. Epaminondas Rosa Jr. e à Profa. Dra Rosângela Follmann pelos dados experimentais do Plasma e Circuito de Chua.

Ao Prof. Dr. Ezequiel Echer e ao Prof. Dr. Odim Mendes Jr pelos dados experimentais da atividade solar e geomagnética.

Ao Prof. Dr. István Z. Kiss pelos dados experimentais dos osciladores eletroquímicos.

Pela possibilidade de utilização do software *Yet Another Wavelet Toolbox* - YAWTB.

A minha mãe Maria de Lourdes e a meu pai Bernardino Ferreira por todo incentivo, motivação e paciência.

A todos os amigos que me apoiaram e me acompanharam durante este período.

Ao amigo Celso B. N. Freitas pelas colaborações e pelas grandes discussões.

Às amigas Aline P. da Silva e Ângela Cristina de Souza que sempre estiveram do meu lado quando mais precisei.

À amiga Érica Souza Ferreira por todas as noites e finais de semana que estudamos

juntas.

À Rosângela Follmann e Andriana S. L. O. Campanharo, minhas mães em São José dos Campos.

A todos que contribuíram direta e indiretamente para que este trabalho fosse concretizado.

## RESUMO

Neste trabalho é proposto um novo método para calcular a fase de sistemas caóticos e de conjuntos de dados experimentais, a fim de analisar o fenômeno de sincronização de fase. A sincronização de fase ocorre, principalmente, quando se tem um acoplamento fraco entre os sistemas ocasionando um travamento na fase enquanto as amplitudes permanecem não correlacionadas. O método proposto, denominado *wavelet dt-cwt*, é baseado na utilização da transformada *wavelet* discreta complexa *dual-tree*, a qual é uma transformada *wavelet* complexa quase-ortogonal, com algoritmos rápidos, possui boa invariância a deslocamentos e redundância limitada. A aplicabilidade do método *wavelet dt-cwt* é testada em: cinco diferentes experimentos envolvendo o sistema de Rössler; dois experimentos envolvendo o sistema de Lorenz; no Modelo de Kuramoto imerso no Plano e na Faixa de Möebius e, em quatro diferentes conjuntos de dados experimentais. Os resultados obtidos com o método mostram-se eficientes em relação aos métodos já existentes para este fim, devido a seu baixo custo computacional, da ordem de  $2N$  com  $N$  sendo o número de pontos da série temporal, quando comparado com a transformada *wavelet* contínua, a qual apresenta um custo da ordem de  $N^2$ . A eficiência do método proposto também se destaca no fato do mesmo não exigir a reconstrução do atrator no espaço de estado, sendo que, é suficiente apenas uma variável de cada sistema em estudo ou a série temporal experimental; devido a possibilidade de ser aplicado em séries temporais com grande número de pontos; o fato de ser robusto a moderados níveis de ruído aditivo e sua localização acurada nas mudanças de fase.



# DETECTING PHASE SYNCHRONIZATION IN CHAOTIC SYSTEMS BY DUAL-TREE COMPLEX WAVELET TRANSFORM

## ABSTRACT

In this work, it is proposed a method to calculate the phase of chaotic systems and of sets of experimental data in order to analyze the phenomenon of phase synchronization. The phase synchronization mainly occurs when there is a coupling weak between the systems causing a locking in the phases while the amplitudes remain uncorrelated. The proposed method, called *wavelet dt-cwt*, is based on the use of dual-tree complex wavelet transform, which is a quasi-orthogonal complex wavelet transform, with fast algorithms, has good invariance to shifts and limited redundancy. The applicability of the *wavelet dt-cwt* method is tested in: five different experiments involving the system of Rössler; two experiments involving the Lorenz system; the Kuramoto model immersed in the Plan and the Moebius Strip and with and without noise, and four different sets of experimental data. The results show the method is efficient compared with existing methods for this purpose, due to its low computational cost - on the order of  $2N$  with  $N$  being the number of points in the time series - when compared with the continuous wavelet transform, which presents a cost the order of  $N^2$ . The efficiency of the proposed method also stands out in the fact that the same does not require the reconstruction of the attractor in the state space, being that, is sufficient a single variable of each system under study or experimental time series; due to the possibility of being applied in series with a large number of points; the fact that it is robust to moderate levels of additive noise and its accurate location on the phase changes.



## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>	
2.1	Projeção do atrator do sistema de Rössler. . . . .	9
2.2	Projeção do atrator do sistema de Lorenz. . . . .	11
2.3	Grafo do Modelo de Kuramoto. . . . .	13
2.4	Modelo de Kuramoto na Faixa de Möebius. . . . .	15
2.5	Modelo de Kuramoto na Faixa de Möebius sem e com ruído. . . . .	16
2.6	Esquema do experimento do plasma e projeção do atrator. . . . .	17
2.7	Circuito de Chua e esquema do experimento de Chua. . . . .	18
2.8	Série temporal dos índices $R_z$ e $aa$ . . . . .	19
2.9	Configuração experimental dos osciladores eletroquímicos. . . . .	20
3.1	Oscilador auto-sustentado. . . . .	23
3.2	Esquema de acoplamento unidirecional e bidirecional. . . . .	26
3.3	Ciclo limite. . . . .	27
3.4	Fase em sistemas periódicos. . . . .	28
3.5	Regimes de fase entre dois sistemas não idênticos. . . . .	28
3.6	Língua de Arnold e dinâmica da diferença de fase. . . . .	30
4.1	Representação do plano tempo-frequência da TF, TJF e WT. . . . .	35
4.2	Decomposição do sinal usando DWT. . . . .	40
4.3	Esquema da DT-CWT . . . . .	42
5.1	Esquema do método <i>wavelet dt-cwt</i> . . . . .	47
5.2	Esquema da aplicação do método <i>wavelet dt-cwt</i> . . . . .	48
6.1	Rössler desacoplado: espectro de energia <i>wavelet</i> e a fase. . . . .	50
6.2	Experimento $R_1$ : espectro de energia <i>wavelet</i> e a fase usando a variável $x$ . . . . .	52
6.3	Experimento $R_1$ : espectro de energia <i>wavelet</i> e a fase usando a variável $y$ . . . . .	53
6.4	Experimento $R_1$ : diferença de fase. . . . .	55
6.5	Experimento $R_2$ : espectro de energia <i>wavelet</i> e a fase usando a variável $x$ . . . . .	57
6.6	Experimento $R_2$ : espectro de energia <i>wavelet</i> e a fase usando a variável $y$ . . . . .	58
6.7	Experimento $R_2$ : diferença de fase. . . . .	60
6.8	Experimento $R_3$ : espectro de energia <i>wavelet</i> e a fase usando a variável $x$ . . . . .	62
6.9	Experimento $R_3$ : espectro de energia <i>wavelet</i> e a fase usando a variável $y$ . . . . .	63
6.10	Experimento $R_3$ : diferença de fase. . . . .	64
6.11	Experimento $R_3$ : análise da diferença de fase quando $\eta = 0, 17$ . . . . .	66
6.12	Experimento $R_3$ : análise considerando $\eta = 0, 17$ . . . . .	67
6.13	Experimento $R_3$ : Plano Complexo . . . . .	68

6.14	Experimento $R_3$ : análise da diferença de fase e a função <code>unwrap</code> . . . . .	69
6.15	Experimento $R_4$ : espectro de energia <i>wavelet</i> e a fase usando a variável $x$ . . . . .	71
6.16	Experimento $R_4$ : espectro de energia <i>wavelet</i> e a fase usando a variável $y$ . . . . .	72
6.17	Experimento $R_4$ : diferença de fase. . . . .	73
6.18	Experimento $R_4$ : análise da diferença de fase quando $\eta = 0,05$ . . . . .	75
6.19	Experimento $R_4$ : análise da diferença de fase quando $\eta = 0,25$ . . . . .	76
6.20	Experimento $R_5$ : espectro de energia <i>wavelet</i> e as fases usando a variável $x$ . . . . .	78
6.21	Experimento $R_5$ : espectro de energia <i>wavelet</i> e a fase usando a variável $y$ . . . . .	79
6.22	Experimento $R_5$ : diferença de fase. . . . .	80
6.23	Experimento $R_5$ : análise da diferença de fase quando $\eta = 0,5$ . . . . .	81
6.24	Experimento $R_5$ : análise da diferença de fase quando $\eta = 0,9$ . . . . .	82
6.25	Experimento $L_1$ : espectro de energia <i>wavelet</i> e a fase. . . . .	84
6.26	Experimento $L_1$ : fase considerando a utilização da função <code>my-unwrap</code> . . . . .	85
6.27	Experimento $L_1$ : diferença de fase. . . . .	86
6.28	Experimento $L_1$ : análise da série temporal quando $\eta = 4,2$ . . . . .	87
6.29	Experimento $L_2$ : espectro de energia <i>wavelet</i> . . . . .	89
6.30	Experimento $L_2$ : diferença de fase considerando $\eta = 3$ . . . . .	90
6.31	Experimento $L_2$ : diferença de fase considerando $\eta = 5,2$ . . . . .	91
6.32	Experimento $L_2$ : diferença de fase considerando $\eta = 6,4$ . . . . .	91
6.33	Experimento $L_2$ : diferença de fase considerando $\eta = 10$ . . . . .	92
6.34	Experimento $L_2$ : diferença de fase considerando o método arco-tangente. . . . .	93
6.35	MK no plano sem ruído: espectro de energia <i>wavelet</i> e a fase. . . . .	95
6.36	MK no plano sem ruído: diferença de fase. . . . .	96
6.37	MK na Faixa de Möebius sem ruído: espectro de energia <i>wavelet</i> e fase. . . . .	97
6.38	MK na Faixa de Möebius sem ruído: diferença de fase. . . . .	98
6.39	MK na Faixa de Möebius sem ruído: zoom da diferença de fase. . . . .	99
6.40	MK no plano com ruído de $\alpha = 0,30$ : diferença de fase. . . . .	102
6.41	MK no plano com ruído de $\alpha = 0,40$ : diferença de fase. . . . .	103
6.42	MK na Faixa de Möbius com ruído de $\alpha = 0,20$ : diferença de fase. . . . .	105
6.43	MK na Faixa de Möbius com ruído de $\alpha = 0,30$ : diferença de fase. . . . .	106
6.44	Plasma: espectro de energia <i>wavelet</i> . . . . .	108
6.45	Plasma: fase. . . . .	109
6.46	Plasma: diferença de fase. . . . .	110
6.47	Circuito de Chua: espectro de energia <i>wavelet</i> e a fase. . . . .	112
6.48	Circuito de Chua: diferença de fase. . . . .	113
6.49	Índice $R_z$ e $aa$ anual: espectro de energia <i>wavelet</i> . . . . .	114
6.50	Índice $R_z$ e $aa$ anual: análise na escala $J = 1$ . . . . .	115
6.51	Índice $R_z$ e $aa$ anual: análise na escala $J = 2$ . . . . .	116
6.52	Índice $R_z$ e $aa$ anual: análise na escala $J = 3$ . . . . .	117

6.53	Índice $R_z$ e $aa$ mensal: espectro de energia <i>wavelet</i> .	118
6.54	Índice $R_z$ e $aa$ mensal: análise na escala $J = 5$ .	119
6.55	Índice $R_z$ e $aa$ mensal: análise na escala $J = 6$ .	120
6.56	Índice $R_z$ e $aa$ mensal: análise na escala $J = 7$ .	121
6.57	Conjunto I: análise da energia.	123
6.58	Conjunto I: análise da fase.	124
6.59	Conjunto I: diferença de fase.	125
6.60	Conjunto II: análise da energia.	126
6.61	Conjunto II: fase.	127
6.62	Conjunto II: diferença de fase.	128
6.63	Conjunto I e II: análise usando Hilbert.	129
6.64	Conjunto I e II: zoom da fase usando Hilbert.	129
B.1	Gráfico dos coeficientes dos filtros DT-CWT.	152
B.2	Função de escala e função <i>wavelet</i> considerando o filtro <i>Near-Symmetric</i> (13, 19) e Q-Shift (14, 14)	156
C.1	Plano Complexo	160
C.2	Ciclo Trigonométrico	161
D.1	<i>Wavelet</i> de Morlet	166
D.2	Experimento $R_{2a}$ : espectro de energia <i>wavelet</i> .	167
D.3	Experimento $R_{2a}$ : fase	168
D.4	Experimento $R_{2a}$ : diferença de fase.	169



## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
B.1 Coeficientes não-nulos dos filtros <i>Near-Symmetric</i> (13, 19) e <i>Q-shift</i> (14, 14). . . . .	153
B.2 Frequência e período central associados aos filtros <i>Near-Symmetric</i> (13, 19) e <i>Q-shift</i> (14, 14). . . . .	157
D.1 Frequência e período central associado a <i>wavelet</i> de Morlet. . . . .	166



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DT-CWT	–	Transformada <i>Wavelet</i> Complexa <i>Dual-Tree</i>
WT	–	Transformada <i>Wavelet</i>
CWT	–	Transformada <i>Wavelet</i> Contínua
DWT	–	Transformada <i>Wavelet</i> Discreta
MK	–	Modelo de Kuramoto
TF	–	Transformada de Fourier
TJF	–	Transformada Janelada de Fourier
MR	–	Multirresolução
CWT	–	Transformada <i>Wavelet</i> Complexa
TH	–	Transformada de Hilbert



## LISTA DE SÍMBOLOS

$\phi_i$	– fase do sistema $i$
$\Delta\phi_{i,j}$	– diferença de fase entre os sistemas $i$ e $j$
$const$	– constante
$a, b$ e $c$	– parâmetros do sistema de Rössler
$h$	– tamanho do passo de integração
$p, r$ e $d$	– parâmetros do sistema de Lorenz
$\omega_i$	– frequência natural do oscilador $i$ no Modelo de Kuramoto
$\Gamma_{ij}$	– função de interação no Modelo de Kuramoto
$i$ e $j$	– osciladores
$\eta$	– intensidade ou força de acoplamento
$\xi_\alpha$	– ruído não correlacionado
$\alpha$	– intensidade do ruído
$T$	– período
$f_c$	– frequência cíclica
$f_a$	– frequência angular
$\omega_i$	– frequência natural do sistema $i$
$\Omega$	– frequência média observada
$\psi_0$	– <i>wavelet</i> analisadora
$\psi$	– função <i>wavelet</i>
$f(t)$	– série temporal ou sinal
$n$	– fator de translação
$s$	– fator de escala na CWT
$j$	– fator de escala
$\xi$	– frequência central
$\Delta t$	– período de amostragem
$\varphi$	– função de escala
$c_n^j$	– coeficiente de escala
$d_n^j$	– coeficiente <i>wavelet</i>
$h_0$	– filtro passa-baixa
$h_1$	– filtro passa-alta
$\downarrow 2$	– operação de sub-amostragem, <i>dowsampling</i>
$\mathcal{H}$	– transformada de Hilbert
$E_{x,y}^j$	– energia, escala $j$ , variável $x, y$
$\phi_{x,y}^J$	– fase, escala $J$ , variável $x, y$
$E_x$	– energia, variável $x$ do sistema
$E_y$	– energia, variável $y$ do sistema
$\phi_x^J$	– fase, escala $J$ , variável $x$ do sistema
$\phi_y^J$	– fase, escala $J$ , variável $y$ do sistema
$E_{x_1}$	– energia, variável $x$ do sistema 1
$E_{x_2}$	– energia, variável $x$ do sistema 2

$\phi_{x_1}^J$	– fase, escala $J$ , variável $x$ do sistema 1
$\phi_{x_2}^J$	– fase, escala $J$ , variável $x$ do sistema 2
$E_{y_1}$	– energia, variável $y$ , sistema 1
$E_{y_2}$	– energia, variável $y$ , sistema 2
$\phi_{y_1}^J$	– fase, escala $J$ , variável $y$ do sistema 1
$\phi_{y_2}^J$	– fase, escala $J$ , variável $y$ do sistema 2
$\Delta\phi_x^J$	– diferença de fase, escala $J$ , variável $x$ dos sistemas
$\Delta\phi_y^J$	– diferença de fase, escala $J$ , variável $y$ dos sistemas
$\Delta\phi^{\text{arco-tangente}}$	– diferença de fase, método arco tangente
$\Delta\phi_x^{\text{wavelet}}$	– diferença de fase, método <i>wavelet dt-cwt</i> , variável $x$
$\Delta\phi_y^{\text{wavelet}}$	– diferença de fase, método <i>wavelet dt-cwt</i> , variável $y$
$\Delta\phi_{my-unwrap}^{\text{wavelet}}$	– diferença de fase, método <i>wavelet dt-cwt</i> , função <i>my-unwrap</i>
$E_i$	– energia, sistema $i$
$E_i^j$	– energia, escala $j$ , sistema $i$
$\phi_i^J$	– fase, escala $J$ , sistema $i$
$\phi_i^{\text{wavelet}}$	– fase, método <i>wavelet dt-cwt</i> , sistema $i$
$\phi_i^k$	– fase teórica do MK, sistema $i$
$\phi_i^{\text{arco-tangente}}$	– fase, método arco tangente, sistema $i$
$\Delta\phi_{i,j}^w$	– diferença de fase, método <i>wavelet dt-cwt</i> , sistemas $i, j$
$\Delta\phi_{i,j}^k$	– diferença de fase teórica do MK, sistemas $i, j$
$\Delta\phi_{i,j}^t$	– diferença de fase, método arco tangente, sistemas $i, j$
$\Delta\phi_{i,j}^{\text{hilbert}}$	– diferença de fase, Hilbert, sistemas $i, j$
$E_{R_z}^j$	– energia, índice $R_z$ , escala $j$
$E_{aa}^j$	– energia, índice $aa$ , escala $j$
$\phi_{R_z}^j$	– fase, índice $R_z$ , escala $j$
$\phi_{aa}^j$	– fase, índice $aa$ , escala $j$
$E_{x,y,z}^j$	– energia, escala $j$ , osciladores $x, y$ e $z$
$\phi_{x,y,z}^w$	– fase, método <i>wavelet dt-cwt</i> , osciladores $x, y$ e $z$
$\Delta\phi_{x,y,z}^w$	– diferença de fase, método <i>wavelet dt-cwt</i> , osciladores $x, y$ e $z$
$\phi_{x,y,z}^{\text{hilbert}}$	– fase, Hilbert, osciladores $x, y$ e $z$
$\Delta\phi_{x,y,z}^{\text{hilbert}}$	– diferença de fase, Hilbert, osciladores $x, y$ e $z$

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Objetivos e Contribuições . . . . .	3
1.2 Estrutura da Tese . . . . .	4
<b>2 SISTEMAS CAÓTICOS</b> . . . . .	<b>7</b>
2.1 Sistemas Caóticos . . . . .	7
2.1.1 Sistema de Rössler . . . . .	8
2.1.2 Sistema de Lorenz . . . . .	10
2.1.3 Modelo de Kuramoto . . . . .	12
2.1.4 Modelo de Kuramoto no Plano . . . . .	13
2.1.5 Modelo de Kuramoto na Faixa de Möebius . . . . .	14
2.1.6 Modelo de Kuramoto com ruído . . . . .	14
2.2 Dados Experimentais . . . . .	16
2.2.1 Plasma Forçado . . . . .	16
2.2.2 Circuito de Chua . . . . .	17
2.2.3 Atividade solar e atividade geomagnética . . . . .	18
2.2.4 Osciladores Eletroquímicos . . . . .	18
<b>3 SINCRONIZAÇÃO DE FASE EM SISTEMAS CAÓTICOS</b> . . . . .	<b>21</b>
3.1 Introdução . . . . .	21
3.2 Sincronização de fase em sistemas periódicos . . . . .	26
3.3 Sincronização de fase em sistemas caóticos . . . . .	30
<b>4 WAVELET</b> . . . . .	<b>33</b>
4.1 Introdução . . . . .	33
4.2 Transformada Wavelet . . . . .	35
4.2.1 Transformada <i>Wavelet</i> Contínua . . . . .	36
4.2.2 Transformada Wavelet Discreta . . . . .	37
4.3 Transformada <i>Wavelet</i> Complexa <i>Dual-Tree</i> . . . . .	41
<b>5 METODOLOGIA</b> . . . . .	<b>45</b>
5.1 Método <i>Wavelet dt-cwt</i> . . . . .	45
<b>6 RESULTADOS E DISCUSSÕES</b> . . . . .	<b>49</b>

6.1	Sistema de Rössler	49
6.1.1	Sistema Desacoplado	49
6.1.2	Sistema de Rössler em regime de fase coerente	51
6.1.2.1	Experimento $R_1$	51
6.1.3	Sistema de Rössler em regime de fase não coerente	56
6.1.3.1	Experimento $R_2$	56
6.1.3.2	Experimento $R_3$	61
6.1.3.3	Experimento $R_4$	70
6.1.3.4	Experimento $R_5$	77
6.2	Sistema de Lorenz	83
6.2.1	Experimento $L_1$	83
6.2.2	Experimento $L_2$	88
6.3	Modelo de Kuramoto	94
6.3.1	Modelo de Kuramoto sem Ruído	94
6.3.2	Modelo de Kuramoto com Ruído	101
6.4	Dados Experimentais	107
6.4.1	Plasma	107
6.4.2	Circuito de Chua	111
6.4.3	Atividade Solar e Geomagnética	114
6.4.4	Osciladores Eletroquímicos	122
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>131</b>
7.1	Conclusões	131
7.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	133
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>135</b>
	<b>APÊNDICE A</b>	<b>145</b>
A.1	Transformada de Fourier	145
A.2	Transformada Janelada de Fourier	146
A.3	Transformada de Hilbert	147
	<b>APÊNDICE B</b>	<b>149</b>
B.1	Filtros DT-CWT	149
B.2	Construindo a <i>wavelet</i>	154
B.3	Frequência Central da DT-CWT	155
	<b>APÊNDICE C</b>	<b>159</b>
C.1	Números complexos e fase	159

C.2	Funções	162
C.2.1	Função <code>atan2</code>	162
C.2.2	Função <code>unwrap</code>	162
C.2.3	Função <code>my-unwrap</code>	163
<b>APÊNDICE D</b>		<b>165</b>
D.1	Análise comparativa da utilização da CWT versus a DT-CWT	165
<b>APÊNDICE E</b>		<b>171</b>
E.1	Método Arco Tangente	171
E.1.1	Regime de Fase Coerente	171
E.1.2	Regime de Fase Não Coerente	171
E.1.3	Cálculo da Fase no Sistema de Lorenz	172
<b>ANEXO A - Congressos Participados.</b>		<b>173</b>



# 1 INTRODUÇÃO

Muitos sistemas naturais ou artificiais apresentam a capacidade de ajustar seus ritmos devido à presença de uma interação fraca entre eles. Essa coordenação de ritmos é uma manifestação de um fenômeno não-linear chamado de sincronização (PIKOVSKY et al., 2001; ROSENBLUM; PIKOVSKY, 2003; OSIPOV et al., 1997).

O fenômeno de sincronização foi descoberto no século 17 pelo cientista Christiaan Huygens (HUYGENS, 1673), e pode ser entendido como um processo onde dois ou mais sistemas dinâmicos interagem entre si e alteram os seus ritmos fundamentais de modo a adquirirem uma dinâmica ou ritmo comum.

Esse fenômeno ocorre quando dois ou mais elementos estão acoplados ou em sistemas complexos envolvendo centenas de entidades dinâmicas acopladas, dos quais pode-se citar os vaga-lumes machos que se agrupam em árvores durante a noite, e piscam em uníssono na tentativa de atrair as fêmeas (BUCK; BUCK, 1968; BUCK, 1988).

Inicialmente, a sincronização foi estudada em sistemas dinâmicos periódicos, os quais apresentam um atrator do tipo ciclo limite. Nas últimas décadas, esse conceito tem sido ampliado a fim de permitir a compreensão de outros processos do ajuste de ritmos em sistemas dinâmicos caóticos, processo este que seguiu-se à melhor compreensão do próprio conceito sobre o que seria o ritmo no contexto de um sistema dinâmico (BOCCALETTI et al., 2002; HEAGY et al., 1994; PECORA; CARROL, 1990; ROSENBLUM et al., 1996; ROSENBLUM et al., 1997; ROSENBLUM et al., 2001).

Assim, vários tipos de sincronização foram identificados dependendo, em geral, do grau de homogeneidade entre o sistemas e da intensidade da interação de acoplamento presente. Portanto, entre os tipos mais facilmente reconhecidos pode-se citar a *sincronização completa* (PECORA; CARROL, 1990), o que implica na coincidência do estado das variáveis dos sistemas dinâmicos acoplados; *sincronização de atraso* (PIKOVSKY et al., 1997), onde as variáveis de estado coincidem uma com a outra havendo, contudo, um tempo de atraso ou deslocamento entre elas; *sincronização generalizada* (BOCCALETTI et al., 2002), onde existe alguma relação funcional entre as variáveis de estado dos sistemas acoplados, e a *sincronização de fase*, onde apenas as fases dos sistemas sincronizam, enquanto suas amplitudes continuam a evoluir de forma independente (ROSENBLUM et al., 1996).

Neste trabalho, estuda-se a sincronização de fase, que ocorre, principalmente, quando se tem um acoplamento fraco entre sistemas não totalmente idênticos, ocasionando

um “travamento” entre as fases associadas aos sistemas, enquanto as amplitudes permanecem não correlacionadas (PIKOVSKY et al., 2001). Observa-se, aqui, que a análise deste fenômeno exige primeiramente que se consiga associar a cada sistema uma fase, o que nem sempre é uma tarefa simples ou natural, como se descreverá mais adiante.

Com o objetivo de detectar a sincronização de fase entre sistemas dinâmicos, é necessário uma definição clara e não ambígua de *fase*, uma vez que a condição de sincronização de fase é dada por  $\Delta\phi_{ij}(t) = \phi_j(t) - \phi_i(t) < \text{const} < 2\pi$ , em que  $\phi_i(t)$  e  $\phi_j(t)$  denotam as fases dos sistemas  $i$  e  $j$ , respectivamente.

Devido a necessidade de se obter a fase de sistemas dinâmicos, várias técnicas vêm sendo desenvolvidas, incluindo medidas diretas do ângulo do atrator (STONE, 1992), a transformada de Hilbert (QUIROGA et al., 2002; ROSENBLUM et al., 1996; YALCINKAYA; LAI, 1997), a superfície de seção de Poincaré (PIKOVSKY et al., 1997), o método da curvatura ou arco tangente, técnica baseada no travamento da frequência (ROSENBLUM et al., 2002), conjuntos localizados (PEREIRA et al., 2007), plots de recorrência (ROMANO et al., 2005; KURTHS et al., 2006), técnica baseada na análise espectral por meio de mínimos quadrados (FOLLMANN et al., 2011), transformada de Fourier (BRUNS, 2004) e a transformada *wavelet* complexa contínua (HRAMOV; KORONOVSKII, 2004; HRAMOV et al., 2005; KORONOVSKII; HRAMOV, 2004a; KORONOVSKII et al., 2005). Atualmente, a fase pode ser calculada usando a transformada *wavelet synchrosqueezed*, a qual é baseada no algoritmo EMD (HUANG et al., 1998) e na transformada *wavelet* complexa contínua. Para maiores detalhes desta técnica veja (DAUBECHIES; MAES, 1996; DAUBECHIES et al., 2011).

No entanto, nenhuma destas técnicas funcionam adequadamente para todos os tipos de sistemas dinâmicos ou em conjuntos de dados experimentais. A maioria delas são diretamente aplicáveis em sistemas onde a dinâmica se dá em um contexto geométrico de seu espaço de fase no âmbito de uma figura geométrica semelhante a um ciclo limite. Neste contexto a trajetória da projeção do atrator em alguma seção definida em algum espaço de fase gira em torno de um centro de rotação bem definido, situação esta que se define como *coerente*. Contudo, as técnicas que necessitam da projeção do atrator têm sua aplicabilidade dificultada no contexto de conjunto de dados experimentais, devido ao fato de que para utilizá-las é necessário fazer a reconstrução do atrator em um espaço de imersão adequado.

Em particular, as técnicas que utilizam a transformada *wavelet* complexa contínua baseiam-se na *wavelet* complexa de Morlet para obter a fase a partir de uma série

temporal, rendendo bons resultados para sistemas caóticos de Rössler (HRAMOV et al., 2005; KORONOVSKII et al., 2005). No entanto, esta técnica implica um alto custo computacional, da ordem de  $N^2$  em que  $N$  é o número de pontos da série analisada. Neste caso também os resultados podem não ser facilmente aplicáveis, devido à sua redundância, em que uma função de uma variável é transformada em uma função de duas variáveis, quando aplicada a séries temporais com grandes número de pontos, como as de interesse neste trabalho.

Este trabalho surge da necessidade de se ter uma técnica para obter a fase a partir de uma série temporal proveniente de um sistema caótico ou de um conjunto de dado experimental, ou seja que funcione adequadamente para análise de sistemas caóticos e que seja aplicável na análise de séries temporais experimentais.

Assim, aqui propõe-se um método baseado em uma transformada *wavelet* dita eficiente, a Transformada *Wavelet Complexa Dual-Tree* (DT-CWT), para obter a fase de sistemas caóticos e de conjunto de dados experimentais, a fim de analisar o fenômeno de sincronização de fase. Esta transformada tem um desempenho computacional eficiente quando aplicadas à séries temporais com grande número de pontos e é robusta diante de níveis moderados de ruído. A seguir, são descritos os objetivos e as contribuições dadas neste trabalho.

## 1.1 Objetivos e Contribuições

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de uma metodologia, baseada na Transformada *Wavelet Complexa Dual-Tree*, para obter a fase a partir de uma série temporal proveniente de sistemas caóticos ou de conjuntos dados experimentais, para posterior detecção da sincronização de fase.

O método proposto permite calcular a fase e posteriormente analisar o fenômeno de sincronização de fase em sistemas dinâmicos, em especial que apresentem caos e em conjuntos de dados experimentais, nos quais a fase tem definição não trivial, devido à geometria do sistema em seu espaço de fases. Com relação à aplicabilidade do método, o mesmo pode ser utilizado na análise de conjuntos de dados experimentais, mostrando-se robusto com relação a níveis moderados de ruído aditivo e conseguindo capturar com precisão as possíveis mudanças que venham a ocorrer na fase e na diferença de fase.

A seguir, descreve-se como a Tese encontra-se organizada.

## 1.2 Estrutura da Tese

A Tese encontra-se organizada da seguinte forma:

**Capítulo 2:** apresentam-se brevemente conceitos relacionados a sistemas dinâmicos caóticos, bem como os sistemas e os conjuntos de dados experimentais utilizados e analisados neste trabalho.

**Capítulo 3:** descrevem-se conceitos relacionados a sincronização de fase em sistemas caóticos. Inicialmente apresenta-se uma introdução ao fenômeno de sincronização e as formas em que os sistemas podem estar acoplados. Em seguida, descreve-se conceitos relacionados a sincronização de fase em sistemas periódicos e sua extensão para sistemas caóticos.

**Capítulo 4:** apresentam-se conceitos relacionados a teoria *wavelet*. Primeiramente descreve-se uma breve introdução às *wavelets*. Em seguida, explora-se conceitos da transformada *wavelet* contínua e discreta. E, por fim, expõem-se conceitos relacionados à Transformada *Wavelet Complexa Dual-Tree*.

**Capítulo 5:** descreve-se o método *wavelet dt-cwt* proposto para calcular a fase e posteriormente, identificar o fenômeno de sincronização de fase em sistemas caóticos e em conjuntos de dados experimentais.

**Capítulo 6:** apresentam-se e discutem-se os resultados obtidos da aplicação da metodologia proposta em sistemas caóticos e em conjuntos de dados experimentais, com a finalidade de investigar a sincronização de fase.

**Capítulo 7:** focam-se nas conclusões e sugestões para pesquisas futuras.

**Apêndice A:** descreve-se brevemente sobre a transformada de Fourier, a transformada janelada de Fourier e a transformada de Hilbert.

**Apêndice B:** apresentam-se sobre os filtros da DT-CWT utilizados neste trabalho. Em seguida, explora-se como construir as funções de escala e funções *wavelets* a partir dos filtros e, posteriormente é descrito como calcular a frequência central da DT-CWT.

**Apêndice C:** descreve-se um resumo sobre números complexos e fase, as funções do *GNU/Octave* utilizadas neste trabalho e a função `my-unwrap` proposta neste trabalho, a qual foi implementada com o objetivo de tentar corrigir as desvantagens encontradas na função `unwrap`.

**Apêndice D:** apresenta-se um exemplo de um experimento na qual foi utilizada a transformada *wavelet* contínua e o método *wavelet dtcwt* na análise do fenômeno de sincronização de fase.

**Apêndice E** apresenta-se o método arco tangente e sua utilização quando o sistema apresenta regime de fase coerente e não coerente, bem como, descreve-se como calcular a fase quando se analisa o sistema de Lorenz.



## 2 SISTEMAS CAÓTICOS

Neste capítulo descrevem-se conceitos relacionados a sistemas caóticos, apresentando os sistemas estudados bem como os conjuntos de dados experimentais que serão analisados.

Na Seção 2.1 apresentam-se brevemente conceitos relacionados a sistemas dinâmicos caóticos, em especial no contexto dos sistemas de Rössler (Subseção 2.1.1), Lorenz (Subseção 2.1.2), no modelo de Kuramoto imerso no plano e na faixa de Möebius (Subseção 2.1.3).

Os conjuntos de dados experimentais analisados neste trabalho, os quais foram: o Plasma forçado (Subseção 2.2.1), Circuito de Chua (Subseção 2.2.2), a atividade solar e geomagnética (Subseção 2.2.3) e dados de osciladores eletroquímicos (Subseção 2.2.4) são apresentados na Seção 2.2.

### 2.1 Sistemas Caóticos

Uma importante descoberta na área da dinâmica não-linear foi observar que mesmo sistemas com dinâmica simples podem apresentar evoluções complexas, sendo uma delas denominada como *caótica*.

Sistemas dinâmicos caóticos são sistemas dinâmicos determinísticos não-lineares que apresentam comportamento caótico. Esse comportamento, em geral, é caracterizado pelas seguintes propriedades: não-linearidade, sensibilidade com relação às condições iniciais, determinismo subjacente e uma certa manutenção da irregularidade no comportamento do sistema (ALLIGOOD et al., 1997).

A dinâmica destes sistemas tem uma característica essencial: são sensíveis a pequenas perturbações nas condições iniciais. Isto significa que considerando-se dois pontos muito próximos mas diferentes no espaço de fase e seguindo-se sua evolução ao longo do tempo, então observa-se que as duas trajetórias iniciam-se próximas e com o passar do tempo divergem (OTT, 1993). Em outras palavras, mesmo conhecendo o estado de um sistema caótico com uma precisão alta, mas finita, a previsão do estado futuro do sistema é apenas possível para um intervalo de tempo finito. Essa sensibilidade às condições iniciais pertence a qualquer ponto da trajetória, significando que todos os movimentos no espaço de fase, eventualmente em um atrator estranho são susceptíveis à presença de ruído, o que pode ser quantificado considerando o maior expoente de Lyapunov.

Em sistemas tridimensionais caóticos contínuo no tempo pelo menos um dos três expoentes de Lyapunov associados à trajetória do sistema é positivo, o que corresponde a haver uma sensibilidade do sistema às variações das condições iniciais, podendo existir outros de valor enquanto existe um que é negativo, correspondendo a propriedade do atrator capturar estados próximos e, e um expoente é exatamente zero, o que corresponde a deslocamentos ao longo da trajetória.

A seguir, apresentam-se três sistemas dinâmicos caóticos, os quais serão utilizados neste trabalho. Na Subseção 2.1.1 é descrito o sistema de Rössler e em 2.1.2 o sistema de Lorenz. Já em 2.1.3 explora-se o Modelo de Kuramoto.

### 2.1.1 Sistema de Rössler

Um exemplo de sistema dinâmico caótico é o sistema de Rössler o qual foi proposto por Otto E. Rössler (RÖSSLER, 1976) em meados de 1976 a partir das equações de Lorenz na tentativa de criar um modelo simples e que apresentasse comportamento caótico.

Matematicamente, esse sistema é descrito pelas equações

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - c)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Neste sistema os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  são responsáveis por regular a dinâmica do sistema, sendo que o parâmetro  $a$  descreve a dinâmica do atrator no espaço de estado permitindo que o sistema apresente um regime de fase coerente ou não coerente. Para a resolução desse sistema, utilizou-se o método Runge-Kutta de quarta ordem com passo de integração  $h = 0,01$ , a condição inicial foi considerada como  $x(0) = y(0) = z(0) = 1$  e os parâmetros  $b = 0,4$  e  $c = 8,5$ .

Quando a projeção do atrator no espaço de estado rotaciona ao redor de um ponto fixo  $(x_0, y_0)$  no plano de coordenadas  $(x, y)$ , o sistema é dito ter um regime de fase coerente, como pode ser visto na Figura 2.1(a). No entanto, em um sistema dinâmico caótico tem-se a possibilidade da trajetória do sistema não rotacionar continuamente ao redor do ponto fixo  $(x_0, y_0)$ , como pode ser visto na Figura 2.1(b), onde ocorre algum retorno mais rápido da órbita. Neste caso o sistema é dito ter um regime de fase não coerente e apresenta um atrator no espaço de fase chamado de “funil”. Uma possível solução para encontrar um centro de rotação, neste caso, é utilizar a

projeção do atrator sobre o eixo das derivadas, conforme proposto por (CHEN et al., 2001) e ilustrado na Figura 2.1(c).

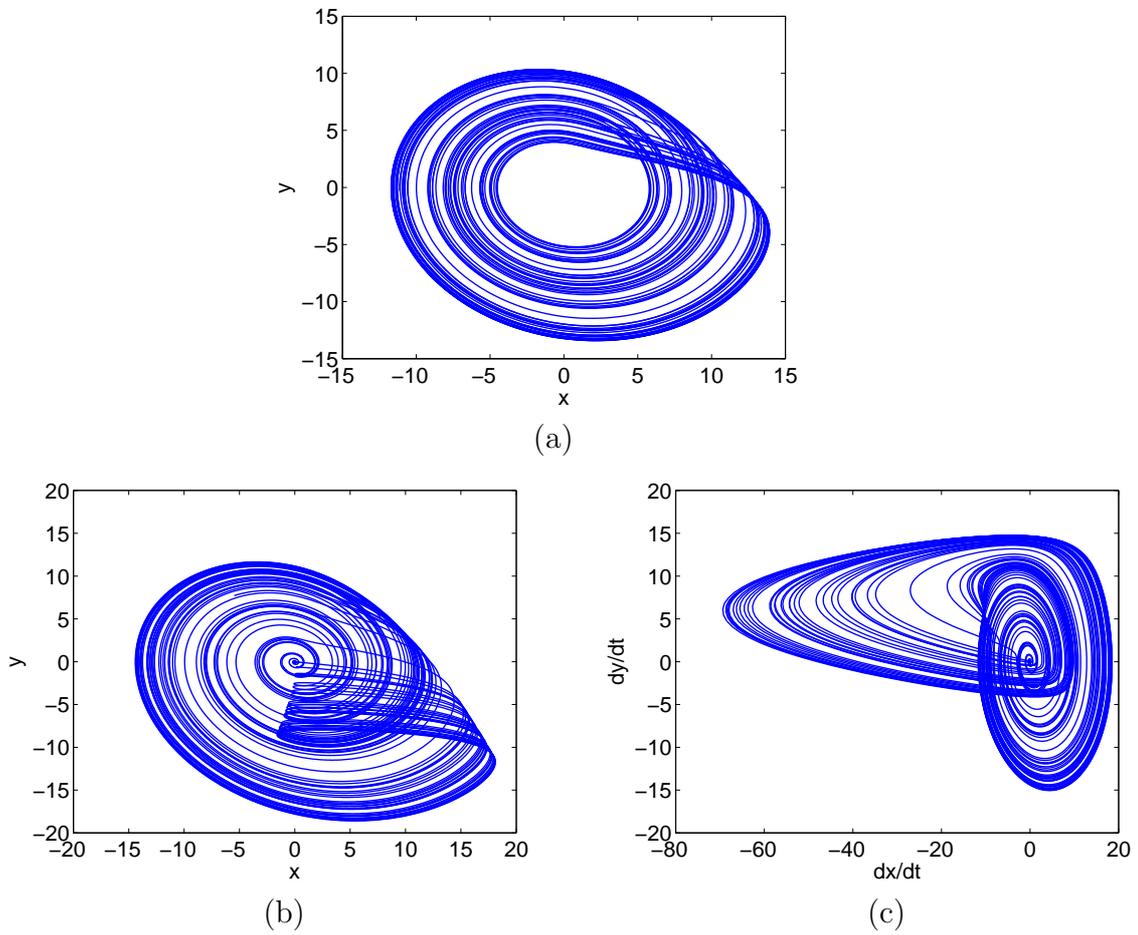


Figura 2.1 - Projeção do atrator do sistema de Rössler considerando regime de fase em (a) coerente com  $a = 0,16$ ; (b) não coerente com  $a = 0,2925$  e em (c) não coerente com  $a = 0,2925$  considerando a projeção sobre o eixo das derivadas.

### 2.1.2 Sistema de Lorenz

O sistema de Lorenz foi introduzido por Edward Lorenz em 1963, onde as equações são um modelo extremamente simplificado para modelar a convecção do fluido térmico. Seus estudos eram motivados pela tentativa de compreender os fundamentos da previsão do tempo (LORENZ, 1963).

Esse sistema é um sistema não-linear, tridimensional, determinístico que exibe comportamento caótico e apresenta um atrator estranho, sendo gerado por três equações diferenciais não-lineares dadas por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p(y - x) \\ \dot{y} &= r x - y - x z \\ \dot{z} &= x y - d z\end{aligned}\tag{2.2}$$

em que  $p$  é o número de *Prandtl* e  $r$  é o número de *Rayleigh*. Todos os parâmetros  $p$ ,  $r$  e  $d$  são maiores que zero e o sistema exibe comportamento caótico quando  $r = 28$ . Neste trabalho considera-se  $p = 10$  e  $d = \frac{8}{3}$ . Para a resolução desse sistema, utilizou-se o método Runge-Kutta de quarta ordem com passo de integração  $h = 0,01$  e a condição inicial foi considerada como  $x(0) = y(0) = z(0) = 5$ . Note que o sistema de Lorenz apresenta uma simetria de  $(x, y)$  para  $(-x, y)$  nas equações e, assim, o atrator pode ser projetado sobre um novo plano  $(u, z)$ , em que  $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

A Figura 2.2 ilustra a projeção do atrator do sistema de Lorenz em diferentes planos de coordenadas sendo em (a)  $(x, y)$ ; (b)  $(x, z)$ ; (c)  $(y, z)$  e em (d)  $(u, z)$ .

A seguir, na seção 2.1.3, explora-se o Modelo de Kuramoto, o qual foi imerso no plano e na faixa de Möebius.

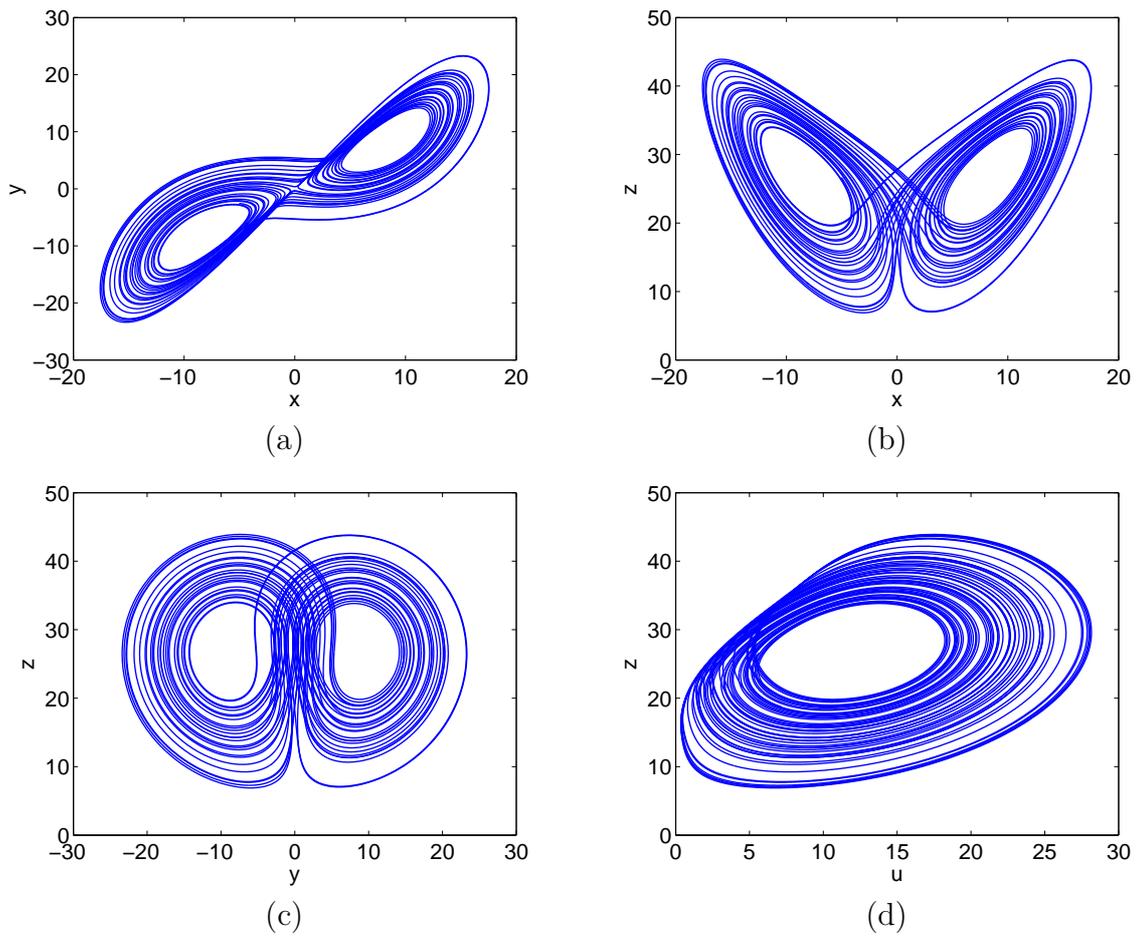


Figura 2.2 - Projeção do atrator do sistema de Lorenz no plano em (a)  $(x, y)$ ; (b)  $(x, z)$ ; (c)  $(y, z)$  e em (d)  $(u, z)$ .

### 2.1.3 Modelo de Kuramoto

Yoshiki Kuramoto, por volta de 1975 (KURAMOTO, 1975; KURAMOTO, 2003), mostrou que a dinâmica de qualquer sistema de osciladores quase idênticos fracamente acoplados e que exibem uma forma de ciclo limite no espaço de fase, podem ser descritos pela seguinte equação

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j), \quad (2.3)$$

com  $i = 1, \dots, N$ , sendo que a função de interação  $\Gamma_{ij}$  determina a forma de acoplamento entre o oscilador  $i$  e o oscilador  $j$ . Esta é uma equação geral, permitindo qualquer tipo de acoplamento e mesmo com a simplicidade deste modelo, as funções de interação  $\Gamma_{ij}$  podem ser difíceis de analisar.

Kuramoto continuou a trabalhar com o seu modelo e assumiu que cada oscilador afeta os outros, cenário onde este tipo de interação é chamado de acoplamento global. Ele considerou que as interações foram igualmente ponderadas e dependia apenas da forma senoidal sobre a diferença de fase, resultando em funções de interação da forma

$$\Gamma_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j) = \frac{\eta}{N} \sin(\phi_i - \phi_j), \quad (2.4)$$

produzindo as equações que regem o que veio a ser conhecido como o Modelo de Kuramoto (MK).

Neste trabalho, assume-se que para cada oscilador  $i = 1, \dots, N$ , com  $N = 3$ , o MK é descrito pela equação

$$\dot{\phi}_i = \omega_i - \eta \sum_{j=1}^N A_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j), \quad (2.5)$$

em que  $\phi_i$  é a variável de fase do  $i$ -ésimo oscilador, assumindo valores em  $\mathbb{R}$ , o qual pode ser visto como um ângulo na circunferência unitária. As frequências naturais, também conhecidas como frequências angulares, dos osciladores são dadas pelos parâmetros  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in \mathbb{R}^N$ . A constante  $\eta \in \mathbb{R}$  é a intensidade de acoplamento, o qual ajusta a intensidade da influência entre osciladores vizinhos. O grafo de acoplamento é construído a partir da matriz de adjacência  $A_{N \times N} = (A_{ij})$ , com  $A_{ii} = 0$ ;  $A_{ij} = 1$ , se o oscilador  $i$  é influenciado pelo oscilador  $j$ ; e  $A_{ij} = 0$ , caso contrário. A topologia de conexão dos osciladores é considerada  $1 \leftrightarrow 2, 3 \rightarrow 1$

e  $3 \rightarrow 2$ , conforme ilustrado na Figura 2.3, onde as setas indicam uma ligação entre os osciladores, bem como a direção de influência das ligações. A seta  $\leftrightarrow$  significa um acoplamento bidirecional entre os osciladores 1 e 2 e a seta  $\rightarrow$  significa um acoplamento unidirecional entre 3 e 1 e entre 3 e 2.

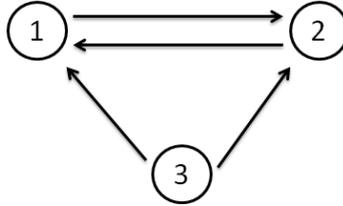


Figura 2.3 - Grafo representando a topologia da conexão dos osciladores do MK. A topologia apresenta um acoplamento bidirecional entre os osciladores 1 e 2 e um acoplamento unidirecional entre os osciladores 3 e 1 e entre os osciladores 3 e 2.

As frequências naturais e condições iniciais são consideradas como  $\omega = (1, 1.05, 1.5)$  e  $\phi_0 = \left(0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ , respectivamente. A intensidade de acoplamento  $\eta = 0,475$  foi empiricamente fixada para estudar dois tipos diferentes de regime de sincronização. Para a simulação numérica usou-se o Método Adams-Bashforth-Moulton (BURDEN; FAIRES, 2011) na integração numérica, com passo fixo de tamanho  $h = 0,01$  e  $N = 2^{18}$  pontos.

A fim de analisar diferentes configurações do MK, o mesmo foi considerado imerso no Plano e na Faixa de Möebius, sem e com ruído, conforme apresenta-se a seguir.

#### 2.1.4 Modelo de Kuramoto no Plano

Neste caso, a transformação das variáveis de fase  $\phi$  da Equação 2.5 no plano  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  é considerada notando  $\phi$  como ponto no círculo unitário com este ângulo, isto é,

$$\begin{aligned} x &= \cos \phi \\ y &= \sin \phi. \end{aligned} \tag{2.6}$$

### 2.1.5 Modelo de Kuramoto na Faixa de Möebius

Em relação a faixa de Möebius (KÜHNEL, 2005) a parametrização usual é dada por meio das equações

$$\begin{aligned}x(u, v) &= \left(1 + \frac{1}{2}v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \cos u \\y(u, v) &= \left(1 + \frac{1}{2}v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \sin u \\z(u, v) &= \frac{1}{2}v \sin\left(\frac{u}{2}\right),\end{aligned}\tag{2.7}$$

em que  $0 \leq u \leq 2\pi$ ,  $-1 \leq v \leq 1$ , e considera-se  $u \in \mathbb{R}$  e o conjunto  $u$  igual para  $\phi$  a partir do MK.

Além disso, escolheu-se  $v = \cos \tilde{\phi}$ , onde  $\tilde{\phi}$  é um oscilador auxiliar, com  $\tilde{\phi}(t) = \tilde{\omega}(t)$ , onde  $\tilde{\omega}$  é uma frequência natural irracional. Desse modo, as órbitas definidas como estas são densas na faixa de Möebius, o qual pode ser vista como uma analogia da propriedade de transitividade topológica para atratores caóticos (HIRSCH et al., 2012).

A frequência natural irracional para os osciladores auxiliares foi considerada como  $\tilde{\omega} = \left(\frac{\sqrt{3}}{10}, \frac{\pi}{20}, \frac{\sqrt{2}}{10}\right)$ , o qual é aproximadamente equivalente a  $(0, 173, 0, 157, 0, 141)$  e dez vezes mais lento do que os osciladores padrões.

A Figura 2.4(a) mostra esquematicamente duas linhas constantes dessa parametrização e na Figura 2.4(b,c) apresenta-se um exemplo da construção descrita acima aumentando o tempo de integração final.

### 2.1.6 Modelo de Kuramoto com ruído

O MK imerso no plano e na faixa de Möebius são considerados sem ruído e com diferentes intensidades de ruídos.

Um ruído não correlacionado  $\xi_\alpha$  com intensidade  $\alpha$  é adicionado a série temporal depois da integração numérica, em cada variável de estado do sistema. O ruído é gerado como  $\xi_\alpha = \alpha \tilde{\sigma} \mathcal{N}$  em que  $0 \leq \alpha \leq 1$ ;  $\tilde{\sigma}$  é o desvio padrão da série temporal perturbada; e  $\mathcal{N}$  são números aleatórios escolhidos a partir de uma distribuição normal padrão.

Foi considerada a intensidade de ruído  $\alpha = 0, 10$  até  $\alpha = 2$ , com incremento de 0, 10.

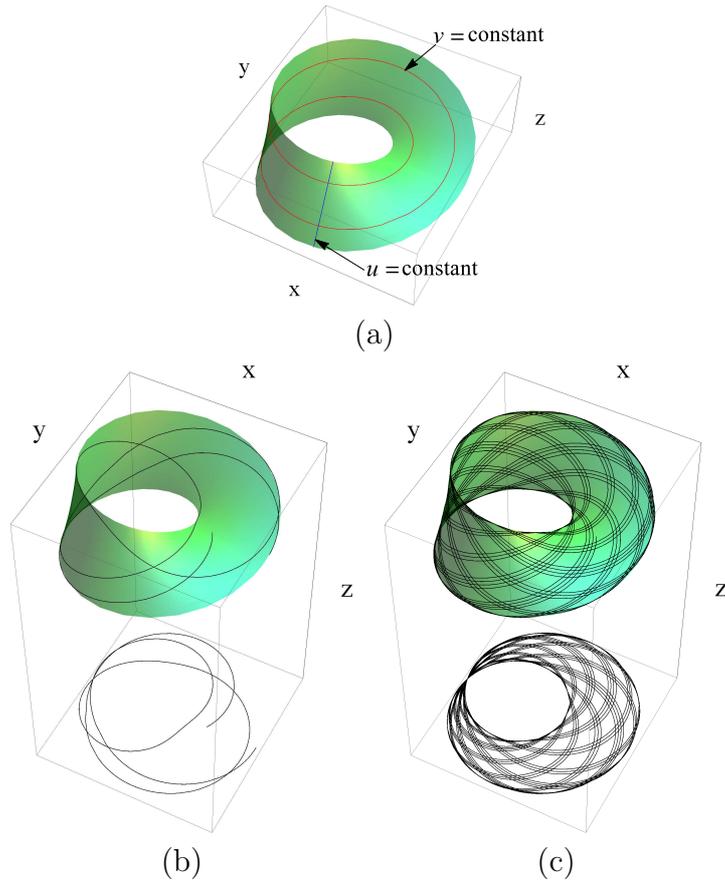


Figura 2.4 - Modelo de Kuramoto na Faixa de Möebius. Em (a) indica duas curvas dadas pela linha constante de parametrização de acordo com a equação 2.7; a órbita de um oscilador desacoplado combinado com um oscilador auxiliar irracional, com tempo de integração final em (b)  $t_f = 4\pi$  e em (c)  $t_f = 40\pi$ . Uma projeção no plano  $(x, y)$  é também mostrada.

A Figura 2.5 apresenta as órbitas desses três osciladores considerando a intensidade de ruído em (a)  $\alpha = 0$ ; em (b)  $\alpha = 0,10$  e em (c)  $\alpha = 0,20$ .

Na próxima Seção apresentam-se os conjuntos de dados experimentais que serão analisados.

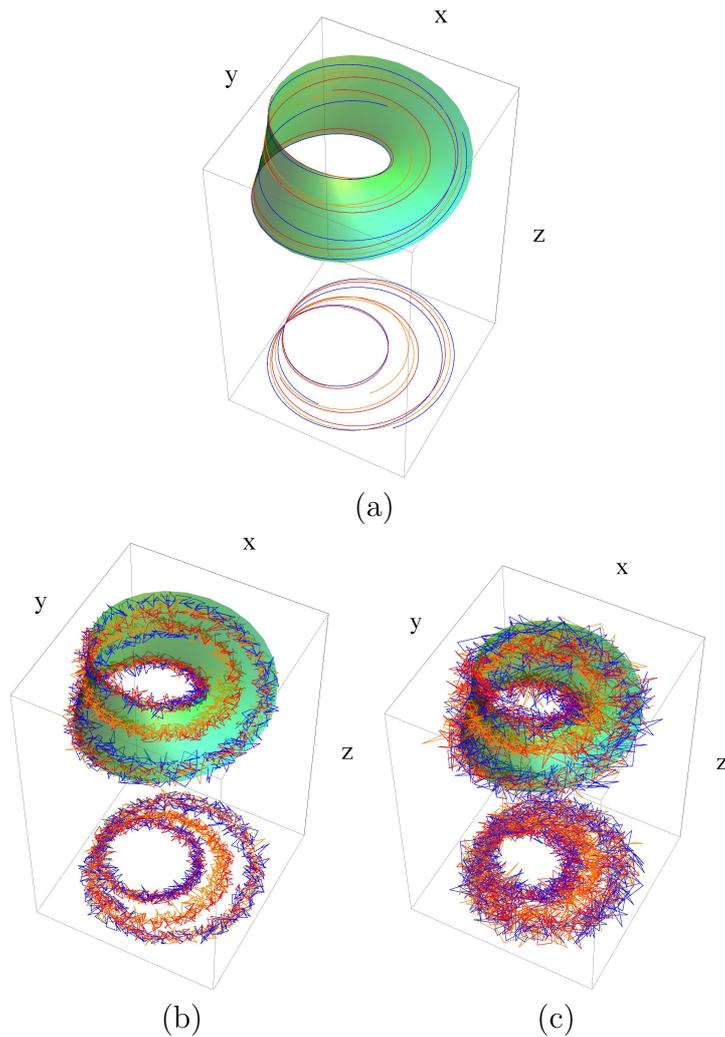


Figura 2.5 - Órbita dos osciladores 1 (em azul), 2 (em laranja) e 3 (em vermelho) como descritas nesta subseção, com intensidade de ruído em (a)  $\alpha = 0$ ; em (b)  $\alpha = 0,10$  e em (c)  $\alpha = 0,20$ . As projeções no plano  $(x, y)$  são também mostradas.

## 2.2 Dados Experimentais

Neste trabalho analisaram-se quatro conjuntos de dados experimentais, a saber: plasma forçado (Subseção 2.2.1), o circuito de Chua (Subseção 2.2.2), índices da atividade solar e atividade geomagnética (Subseção 2.2.3) e dados de osciladores eletroquímicos (Subseção 2.2.4).

### 2.2.1 Plasma Forçado

Neste experimento consideram-se dados de um dispositivo caótico de plasma, sujeito a ação de um gerador de ondas periódicas. Este experimento inclui um plasma

desmagnetizado produzido num envelope cilíndrico com uma região capilar central e com um diâmetro maior nas suas extremidades, onde estão situados os elétrodos (tubo *Geissler*). O tubo é preenchido com gás hélio espectroscopicamente puro. O ânodo e o cátodo do tubo estão ligados a uma corrente contínua de alta tensão, de valor  $850\text{ V}$ , por meio de um resistor de corrente  $R = 30\text{ k}\Omega$ . Em paralelo com o resistor  $R$ , um capacitor  $C = 3,5\text{ pF}$  corta a alta voltagem e um transformador eleva a baixa amplitude do sinal regulando-a à onda seno a partir de um gerador de função. A saída do sinal é fornecida por um sensor de corrente. Para maiores detalhes sobre este experimento veja (TICOS et al., 2000). A Figura 2.6 ilustra em (a) um esquema do experimento do plasma (adaptado (TICOS et al., 2000)) e em (b) a projeção do atrator em coordenadas cartesianas.

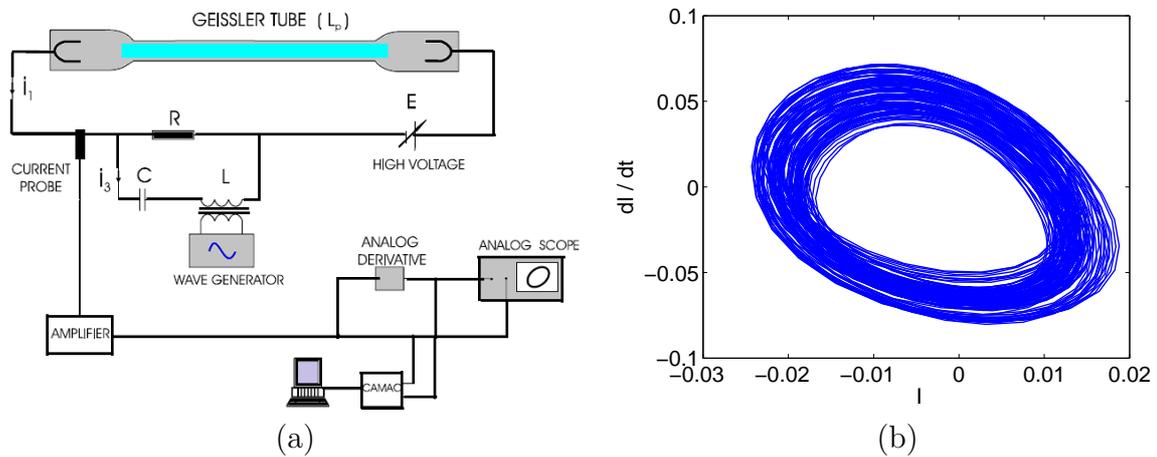


Figura 2.6 - Em (a) representação esquemática do experimento do plasma. Adaptado de (TICOS et al., 2000). Em (b) a projeção do atrator do plasma em coordenadas cartesianas.

### 2.2.2 Circuito de Chua

O circuito de Chua (CHUA et al., 1993; KENNEDY, 1992) é um circuito oscilatório simples que exhibe uma variedade de bifurcações e caos. O circuito, conforme mostrado na Figura 2.7(a), contém três elementos lineares de armazenamento de energia (um indutor linear  $L$  e dois capacitores lineares  $C_1$  e  $C_2$ ), um resistor linear  $R$ , e um único resistor não linear  $N_R$ . Neste experimento, dois circuitos de Chua são acoplados através de um resistor com resistência  $R_\eta$ , o qual é utilizado para controlar a interação entre os dois circuitos de Chua acoplados. A variável analisada é a voltagem através do capacitor  $C_1$ , para ambos os circuitos. Para maiores detalhes deste

experimento veja (CHUA et al., 1993; KENNEDY, 1992).

A Figura 2.7 ilustra em (a) o circuito de Chua desacoplado e em (b) uma representação deste experimento composto por dois circuitos de Chua acoplados.

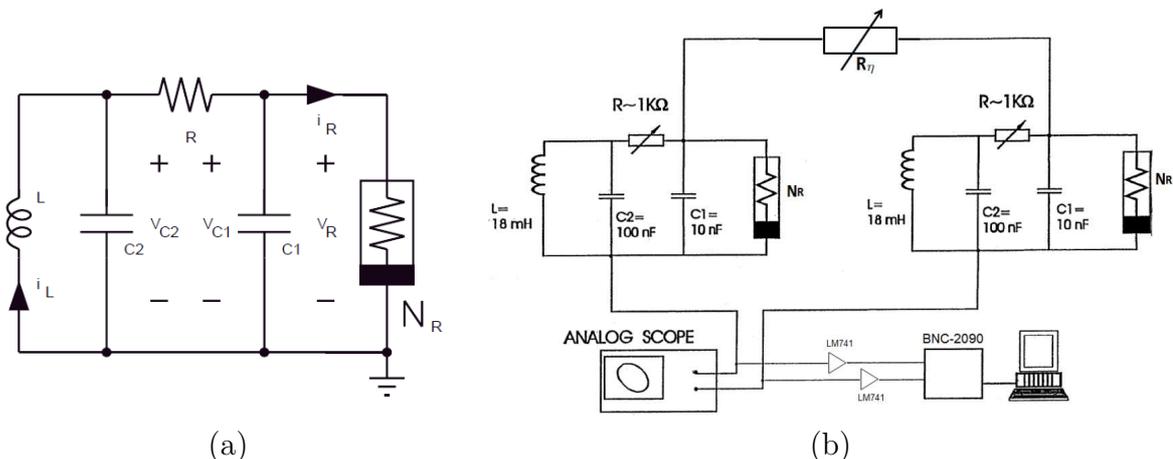


Figura 2.7 - Em (a) o circuito de Chua desacoplado e em (b) uma representação deste experimento composto por dois circuitos de Chua acoplados.

### 2.2.3 Atividade solar e atividade geomagnética

Neste conjunto de dados experimentais explora-se a análise do número de manchas solares, denotada por  $R_z$ , e a atividade geomagnética, denotada por  $aa$  (para detalhes e outras bibliografias veja (ECHER et al., 2004)).

Dois tipos de conjuntos de dados experimentais são considerados: um conjunto de dados anual e outro mensal. No conjunto anual tem-se um ponto por ano, sendo analisado os anos de 1868 até 2000 e apresentando  $N = 133$  pontos. No conjunto mensal analisaram-se os anos de 1868 a 2012, em que para cada ano tem-se 12 pontos referente aos 12 meses do ano. Assim, são 145 anos vezes 12 meses então tem-se  $N = 1740$  pontos. A Figura 2.8 ilustra a série temporal do índice  $R_z$  e  $aa$  considerando o conjunto de dados em (a) anual e em (b) mensal.

### 2.2.4 Osciladores Eletroquímicos

Neste conjunto de dados experimentais analisa-se a sincronização de fase em um situação formada por três osciladores eletroquímicos caóticos acoplados.

Uma célula eletroquímica padrão consistindo de uma matriz de níquel (Goodfel-

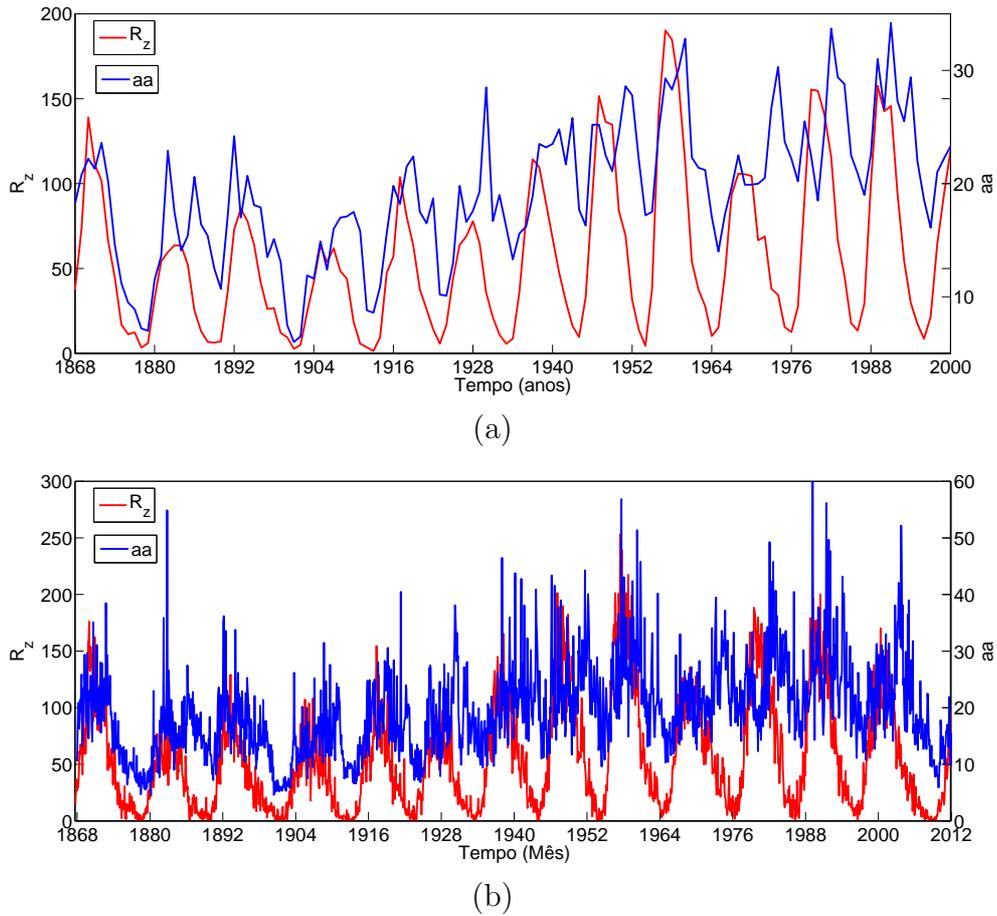


Figura 2.8 - Série temporal dos índices  $R_z$  e  $aa$  considerando o conjunto de dados em (a) anual e em (b) mensal.

low Ltd Cambridge, 99,98%, 1,0 mm de diâmetro), um elétrodo de referência  $Hg/Hg_2SO_4$  saturado em  $K_2SO_4$ , e um contra elétrodo de platina ( $Pt$ ) são utilizados no experimento, conforme ilustra a Figura 2.9(a). Para maiores informações e detalhes deste experimento veja (WICKRAMASINGHE; KISS, 2011).

Neste caso analisaram-se dois conjuntos de dados, os quais são compostos por  $N = 200.500$  pontos e classificados como: conjunto  $I$  tendo três osciladores fracamente acoplados e no conjunto  $II$  três osciladores fortemente acoplados. Na Figura 2.9(a)  $Ref$  denota o elétrodo de referência  $Hg/Hg_2SO_4$  saturado em  $K_2SO_4$ ,  $C$  o elétrodo de  $Pt$ ;  $R_{ind}$  os resistores individuais e  $R$  os resistores acoplados. Em 2.9(b) ilustra-se a topologia de acoplamento implementada aos três osciladores. Nos itens (c) e (d) ilustra-se um intervalo da série temporal dos osciladores  $x$ ,  $y$  e  $z$  do conjunto  $I$  e do conjunto  $II$ , respectivamente.

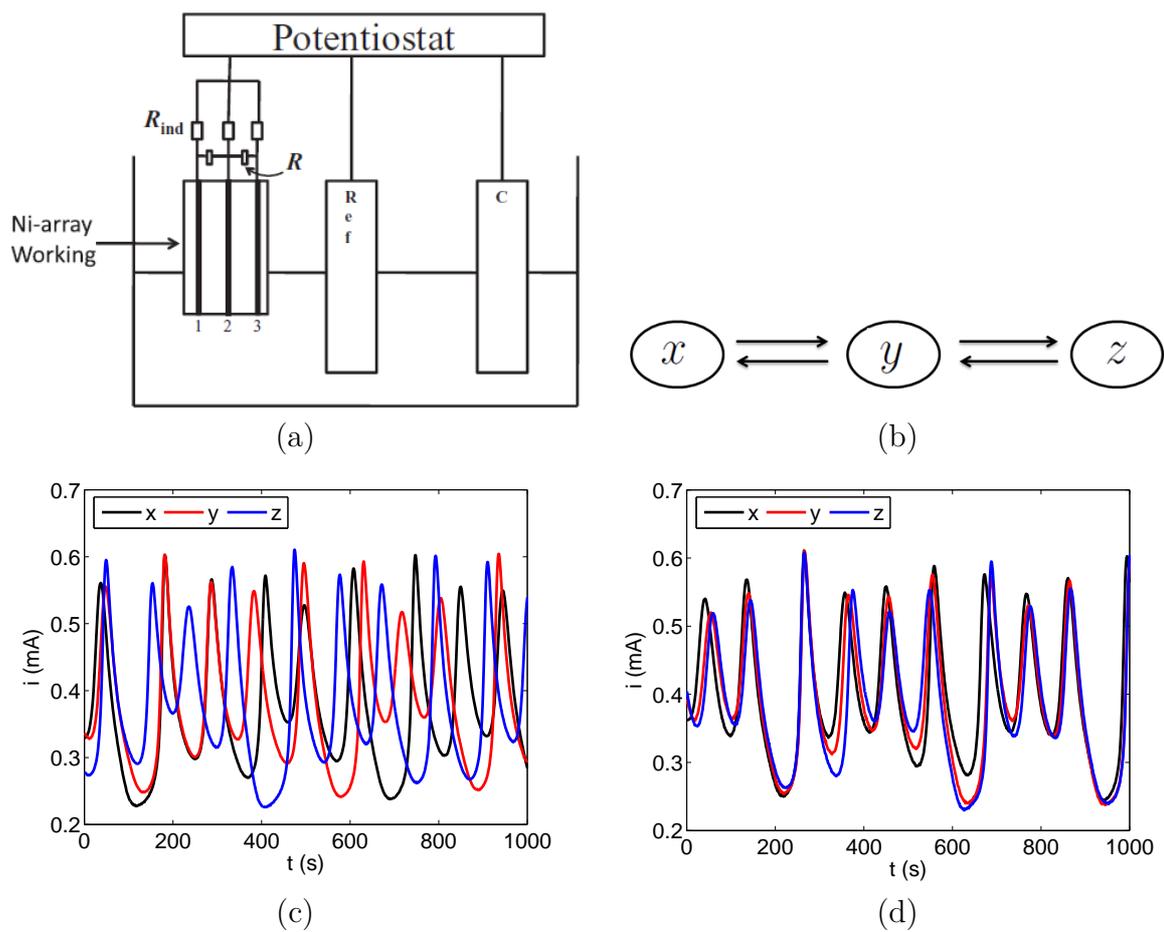


Figura 2.9 - Configuração experimental, para maiores detalhes veja (WICKRAMASINGHE; KISS, 2011). Em (a) diagrama da célula eletroquímica; (b) a topologia de acoplamento dos três osciladores; (c) um intervalo da série temporal dos osciladores  $x$ ,  $y$  e  $z$  do conjunto  $I$  e em (d) um intervalo da série temporal dos osciladores  $x$ ,  $y$  e  $z$  do conjunto  $II$ .

### 3 SINCRONIZAÇÃO DE FASE EM SISTEMAS CAÓTICOS

Neste capítulo descrevem-se conceitos relacionados aos fenômeno de sincronização. Na Seção 3.1 apresenta-se uma introdução ao fenômeno de sincronização. A sincronização de fase em sistemas periódicos é descrita na Seção 3.2 e na Seção 3.3 é explorada a capacidade de sistemas dinâmicos caóticos também apresentarem este fenômeno.

#### 3.1 Introdução

A sincronização é um processo em que dois ou mais sistemas interagem entre si e alteram seus ritmos de modo a adquirirem uma dinâmica comum (PIKOVSKY et al., 2001; ROSENBLUM; PIKOVSKY, 2003; OSIPOV et al., 1997). Este fenômeno pode também ser entendido como um ajuste mútuo na dinâmica dos sistemas em estudo, o qual resulta no travamento de suas frequências. Assim, considerando dois ou mais sistemas acoplados e tendo uma certa intensidade ou “força” de interação entre eles, depois de um certo tempo, pode ocorrer um ajuste mútuo nas frequências de cada sistema e o sistema acoplado ser conduzido a uma frequência comum.

O relato científico mais antigo conhecido sobre sincronização foi de Christian Huygens por volta de 1657 quando ele estudava o movimento de dois pêndulos oscilando, os quais estavam pendurados sobre um mesmo suporte de madeira. Huygens, inventor do relógio de pêndulo, estava observando dois relógios, que ele tinha recentemente construído, o qual estavam suspensos lado a lado. Ele notou que os dois pêndulos estavam oscilando em sincronia, onde suas oscilações coincidiam e os pêndulos sempre moviam-se em direções opostas, suspeitando assim, que os relógios deviam de alguma forma serem influenciados uns pelos outros (HUYGENS, 1673). A primeira menção desta descoberta encontra-se na carta de Huygens a seu pai, na qual ele descreve sobre a *simpatia de dois relógios*.

Historicamente, na metade do século 19, William Strutt relatou o fenômeno de sincronização em sistemas acústicos. Em 1920 W. H. Eccles e J. H. Vicent descobriram propriedades de sincronização em um gerador de tríodo. Edward Appleton e Balthasar van der Pol mostraram que a frequência de um gerador pode ser travada, ou sincronizada e, Dutchman relatou a primeira observação de sincronização em uma população grande de vaga-lumes (PIKOVSKY et al., 2001).

O fenômeno de sincronização pode ser encontrado em várias situações do cotidiano, tais como em redes de células marcapasso do coração (GLASS, 2001), plateias que

frequentemente batem palmas em sincronia, vaga-lumes do sudeste asiático que piscam em sincronia (BUCK; BUCK, 1968; BUCK, 1988), cigarras que saem do estado de ninfa juntas (STROGATZ, 1997), grilos que gorjeiam em uníssono (STROGATZ; STEWART, 1993) e mulheres cujo ciclo menstrual tornam-se sincronizados (STROGATZ, 1997). Alguns exemplos físicos, são encontrados nas oscilações de tensão de supercondutores que são observadas nas junções de Josephson e as oscilações de neutrinos no Universo, as quais também podem apresentar o fenômeno de sincronização (PIKOVSKY et al., 2001).

A sincronização é um fenômeno essencialmente não linear e que ocorre em osciladores auto-sustentados. Entende-se por um oscilador auto-sustentado como sendo um sistema ativo que contém uma fonte de energia interna que é transformada em movimento oscilatório. Um exemplo simples de um oscilador auto-sustentado é o relógio de pêndulo, conforme ilustrado na Figura 3.1. Matematicamente, tal oscilador é descrito por sistemas dinâmicos autônomos não-lineares, os quais são sistemas que não dependem explicitamente do tempo e apresentam alguma relação não-linear entre suas variáveis de estado.

Para analisar o fenômeno de sincronização é necessário determinar o ritmo dos sistemas em estudo, ou seja seu período  $T$  e a sua frequência  $f$ . Usualmente o ritmo é caracterizado pelo número de ciclos oscilatórios por unidade de tempo, ou pela frequência cíclica

$$f_c = \frac{1}{T}, \quad (3.1)$$

onde  $T$  é o período. No estudo de sincronização, a frequência angular

$$f_a = 2\pi f_c = \frac{2\pi}{T} \quad (3.2)$$

é muitas vezes mais conveniente.

A Figura 3.1 ilustra o exemplo de um sistema formado por um oscilador auto-sustentado, o relógio de pêndulo. A oscilação do ângulo  $\alpha$  ao longo do tempo  $t$  e o período  $T$  associado a este sistema é também ilustrado.

Um fator importante é que a sincronização ocorre quando dois ou mais sistemas encontram-se acoplados e ajustam seus ritmos. Aqui, indica-se os índices 1 e 2 representando o sistema 1 e o sistema 2, respectivamente.

Considerando dois sistemas, tem-se que eles podem ser classificados como idênticos ou não-idênticos de acordo com a frequência natural  $\omega_i$  de cada sistema  $i$ . Se a

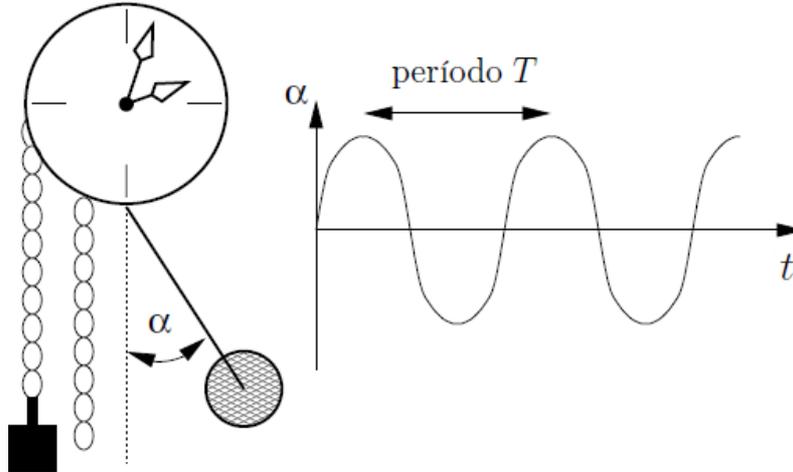


Figura 3.1 - Um sistema formado por um oscilador auto-sustentado, o relógio de pêndulo, e a oscilação do ângulo  $\alpha$  ao longo do tempo  $t$ , bem como o seu período  $T$ . Adaptado de (PIKOVSKY et al., 2001).

frequência natural do sistema 1, denotada por  $\omega_1$ , for igual a do sistema 2, denotada por  $\omega_2$ , ou seja,  $\omega_1 = \omega_2$ , então os sistemas são ditos idênticos, e se  $\omega_1 \neq \omega_2$  então os sistemas são considerados não-idênticos. Assim, dois sistemas não idênticos, que quando desacoplados, apresentam períodos diferentes, quando acoplados podem ajustar seus ritmos e começarem a oscilar com um período comum. Este fenômeno é conhecido como travamento da frequência, em que dois sistemas não idênticos, tendo suas frequências naturais diferentes, quando acoplados podem começar a oscilar com uma frequência comum.

Se os sistemas vão sincronizar ou não, isto depende de dois fatores: a intensidade de acoplamento, denotada por  $\eta$ , e a diferença de suas frequência naturais, denotada por  $\Delta\omega$ . A intensidade de acoplamento, também chamada de força de acoplamento, descreve quão fraco ou quão forte é a interação entre os dois sistemas. A diferença da frequência natural,  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ , quantifica o quão diferente são os sistemas quando desacoplados.

Existem vários tipos de sincronização descritos na literatura. A sincronização completa entre os sistemas ocorre quando a intensidade do acoplamento é muito forte e os sistemas são idênticos. Neste caso, as variáveis de estado do sistema, por exemplo a variável  $x$ , tendem a se tornarem idênticas e isto influencia não apenas as frequências médias, mas também as amplitudes caóticas. Como um resultado, essas variáveis podem coincidir (ou quase coincidir), ou seja,  $x_1(t) \cong x_2(t)$ . Um outro tipo de sincronização em sistemas caóticos é a sincronização com atraso, quando as variá-

veis de estado coincidem uma com a outra depois de um atraso  $\tau$  no tempo, ou seja,  $x_1(t + \tau) = x_2(t)$ . A sincronização generalizada é introduzida para sistemas do tipo condutor-resposta (mestre - escravo), e significa que há alguma relação funcional  $\mathcal{F}$  entre as variáveis de estado dos sistemas caóticos acoplados, isto é,  $x_2(t) = \mathcal{F}[x_1(t)]$ .

Um tipo mais específico de sincronização, a qual é estudada neste trabalho, é a sincronização de fase. Esse tipo de sincronização acontece quando dois, ou mais sistemas caóticos estão fracamente acoplados e desenvolvem sincronismo entre suas fases, enquanto suas amplitudes continuam a evoluir de forma independente (PECORA; CARROL, 1990; ROSENBLUM et al., 1997; ROSENBLUM et al., 2001). Neste caso, a intensidade do acoplamento entre os sistemas é relativamente fraca e surge o “travamento da fase” dos sistemas, enquanto suas amplitudes continuam a evoluir de forma não correlacionada (PECORA; CARROL, 1990; ROSENBLUM et al., 1997; ROSENBLUM et al., 2001).

A sincronização de fase é reportada em vários sistemas dinâmicos naturais e explorada em experimentos laboratoriais, tais como em sistemas neurais (LACHAUX et al., 1999; LACHAUX et al., 2000), redes complexas (ARENAS et al., 2008), sistemas ecológicos (BUCK, 1988; POST; FORCHHAMMER, 2002), matrizes de laser (SUGAWARA et al., 1994), na astronomia (BJÖRCK et al., 1996), na comunicação (KOCAREV; PARLITZ, 1995), sistemas eletromecânicos (CARROLL; PECORA, 1993; GE; LIN, 2003), sistemas biológicos (WINFREE, 1967), sistemas climáticos (VIEIRA, 1999) e em conjunto de dados fisiológicos (QUIROGA et al., 2002), tais como no sistema cardíaco (MICHAELS et al., 1987) e no sistema cardiorrespiratório (IATSENKO et al., 2013; SCHÄFER et al., 1999).

Para investigar a ocorrência dessa forma de sincronização, primeiramente, uma variável fase, denotada por  $\phi$ , deve ser definida e calculada para ambos os sistemas em estudo.

Em seguida, a sincronização de fase entre dois sistemas 1, 2 ocorre se a diferença entre as fases  $\phi_{1,2}(t)$  é limitada por alguma constante, ou seja, é necessário verificar a condição de sincronização de fase dada por

$$\Delta\phi_{12}(t) \equiv |\phi_2(t) - \phi_1(t)| \leq \text{const} < 2\pi, \quad (3.3)$$

em que  $\phi_1(t)$  é a fase do sistema 1 e  $\phi_2(t)$  é a fase do sistema 2.

Nota-se que a diferença de fase no estado síncrono não é necessariamente constante,

mas pode oscilar em torno de um valor constante. Assim, no regime síncrono a diferença de fase é limitada, caso contrário, cresce infinitamente.

A seguir, descreve-se sucintamente sobre as formas de acoplamento possíveis entre dois sistemas.

### Formas de Acoplamento

O estudo do fenômeno de sincronização está relacionado com a interação (comunicação) entre dois ou mais sistemas. Essa interação entre os sistemas é descrita por uma função de acoplamento. O acoplamento pode ser entre dois sistemas ou de um sistema por uma forçante externa. Basicamente, os sistemas podem estar acoplados de duas formas: unidirecionalmente ou bidirecionalmente.

Quando a evolução de um dos sistemas acoplados permanece inalterada tem-se o acoplamento unidirecional ou também chamado de acoplamento condutor-resposta (mestre - escravo). Neste tipo de acoplamento um sistema denominado condutor atua sobre os demais, chamados de resposta, sem reciprocidade, conforme a representação ilustrada na Figura 3.2(a). Em (PIKOVSKY et al., 2001) apresenta-se como exemplo de ações unidirecionais os relógios biológicos que regulam os ritmos circadianos de células e os organismos controlados pelos ritmos periódicos provenientes da rotação da Terra em torno de seu eixo e ao redor do sol.

Matematicamente, pode-se escrever um sistema acoplado unidirecionalmente por meio das equações

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mathcal{F}(x_1) \\ \dot{x}_2 &= \mathcal{F}(x_2) + \eta(x_1 - x_2) \end{aligned} \tag{3.4}$$

em que  $x_1$  é o sistema condutor,  $x_2$  é o sistema resposta,  $\eta$  determina a intensidade ou força de acoplamento entre os sistemas,  $x_1$  e  $x_2$  são as variáveis do sistema e  $\mathcal{F}$  é a dinâmica própria do sistema.

Ao contrário, quando ambos os sistemas estão conectados, de modo em que eles se influenciam mutuamente em seus comportamentos, tem-se o chamado acoplamento bidirecional. Neste caso, os sistemas se influenciam mutuamente, conforme representado na Figura 3.2(b). Pode-se escrever um sistema acoplado bidirecionalmente

por meio das equações

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mathcal{F}(x_1) + \eta(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= \mathcal{F}(x_2) + \eta(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

A Figura 3.2 mostra um esquema de um acoplamento unidirecional em (a) e de um acoplamento bidirecional em (b) por meio das variáveis  $x$  de dois sistemas, denotadas por  $x_1$  e  $x_2$ .

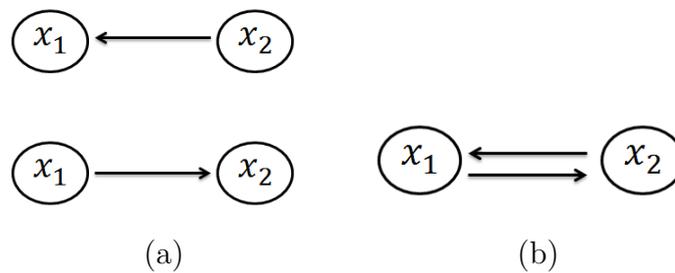


Figura 3.2 - Esquema ilustrando duas formas possíveis de acoplamento: em (a) acoplamento unidirecional e em (b) bidirecional. As setas indicam o sentido da influência entre os dois sistemas.

### 3.2 Sincronização de fase em sistemas periódicos

Primeiramente o fenômeno de sincronização foi investigado em sistemas periódicos, nos quais as oscilações são periódicas, isto é, repetem-se depois de um período  $T$ .

Nestes sistemas, a dinâmica das oscilações no espaço de fase (o gráfico das variáveis  $y$  versus  $x$  é chamado o retrato ou espaço de fase do sistema) corresponde a uma curva fechada, chamada ciclo limite, conforme ilustrado na Figura 3.3. Nota-se da Figura 3.3(a) que a curva fechada (curva em negrito) no espaço de fase atrai todas as trajetórias de sua vizinhança, e por isso é chamada de ciclo limite. As mesmas trajetórias são mostradas considerando o tempo  $t$  versus a variável  $x$  do sistema no item (b).

Uma característica comum notável de tais sistemas periódicos é a capacidade de se tornarem sincronizados (ROSENBLUM; PIKOVSKY, 2003). Esta habilidade é baseada na existência de uma variável especial denominada fase. Entende-se a fase como sendo uma quantidade que cresce  $2\pi$  dentro de um ciclo oscilatório, proporcional à

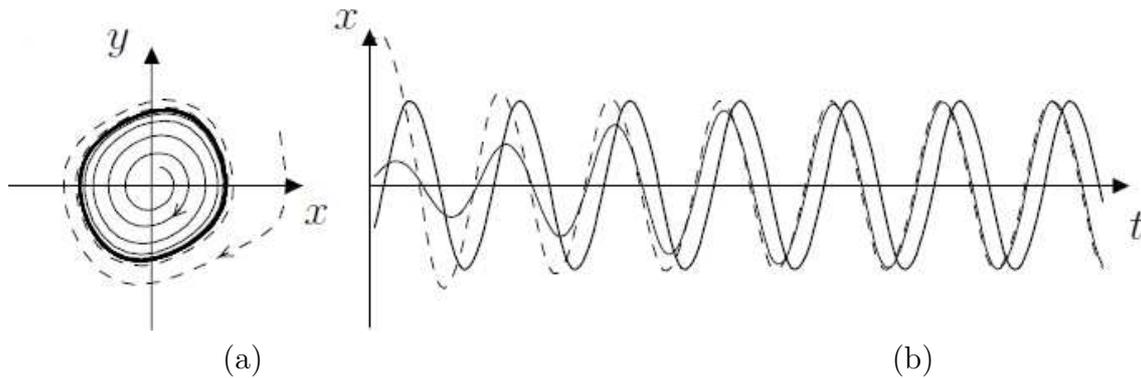


Figura 3.3 - Em (a) ciclo limite e em (b) tempo  $t$  versus a variável  $x$  do sistema. Adaptado de (PIKOVSKY et al., 2001).

fração do período  $T$ , conforme pode ser visualizado na Figura 3.4.

A fase pode também ser interpretada explorando a imagem do ciclo limite e o ponto de fase no plano em coordenadas polares, conforme ilustrado na Figura 3.4 à direita. O ponto de fase gira, por exemplo, no sentido anti-horário com uma determinada velocidade angular, de modo que durante o período de oscilação  $T$  faz uma rotação em torno da origem e a fase  $\phi(t)$  aumenta por um fator de  $2\pi$ . Assim, a fase  $\phi$  pode ser introduzida como uma variável ao longo do ciclo limite, de tal forma que ela cresce monotonicamente na direção do movimento e ganha  $2\pi$  durante cada rotação. Matematicamente, a fase deve obedecer à equação

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0, \quad (3.6)$$

em que  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  é a frequência natural do sistema.

A fase  $\phi$  corresponde à variável que parametriza o movimento ao longo do ciclo limite estável, isto é, ao longo da direção onde não há contração nem expansão do volume no espaço de estado de um sistema dinâmico autônomo de tempo contínuo. Esta direção no espaço de fase corresponde ao expoente de Lyapunov de valor zero. Nota-se que, pequenas perturbações (por exemplo por meio de uma forçante periódica externa ou outro sistema acoplado) podem causar grandes desvios da fase, contrariamente à amplitude, que é apenas ligeiramente perturbada. A principal consequência deste fato é que a fase pode ser facilmente ajustada (travada), e como resultado, o sistema pode ser sincronizado (ROSENBLUM; PIKOVSKY, 2003).

A fase não fornece nenhuma informação nova ao sistema, mas sua vantagem torna-se

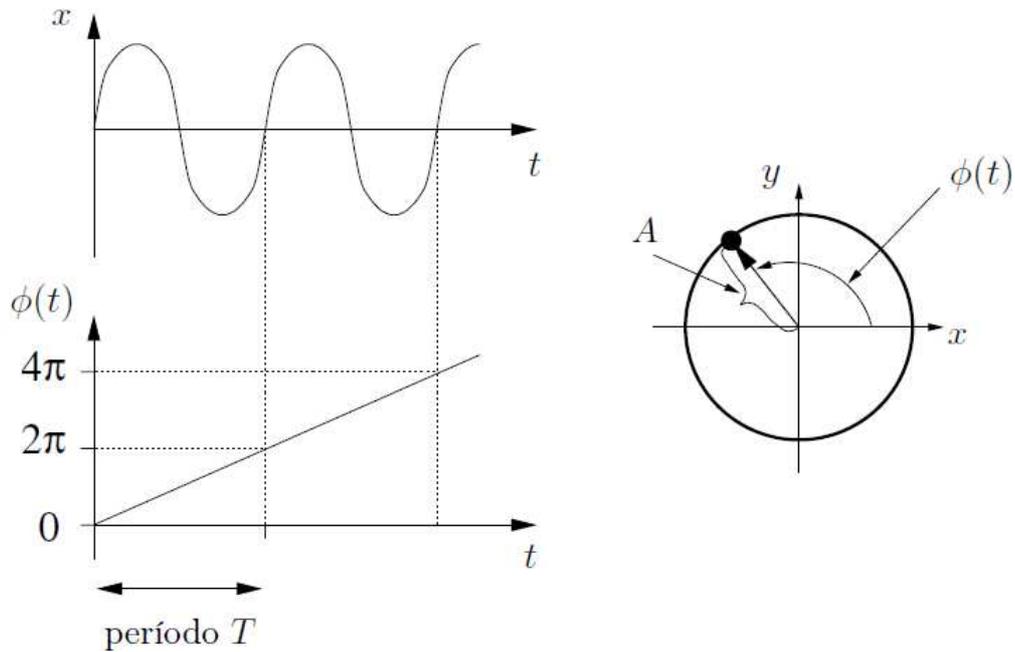


Figura 3.4 - A fase de um sistema periódico cresce de maneira uniforme no tempo e acumula  $2\pi$  em cada período. Na parte superior da figura ilustra-se o tempo  $t$  versus a variável  $x$  do sistema e, na parte inferior o tempo  $t$  versus a fase  $\phi$  e o período  $T$  do sistema. À direita da figura apresenta-se a rotação do ponto de fase ao longo do ciclo limite sendo que suas coordenadas polares correspondem a fase  $\phi$  e a amplitude  $A$  da oscilação. Adaptado de (PIKOVSKY et al., 2001).

evidente se a diferença de fase,  $\Delta\phi$ , é considerada. Caso  $\phi_2 - \phi_1 \approx 0$ , diz-se que os sistemas estão em fase, conforme ilustra-se na Figura 3.5(a); se  $\phi_2 - \phi_1 \approx \pi$  diz-se que os sistemas estão em anti-fase, conforme ilustra-se na Figura 3.5(b).

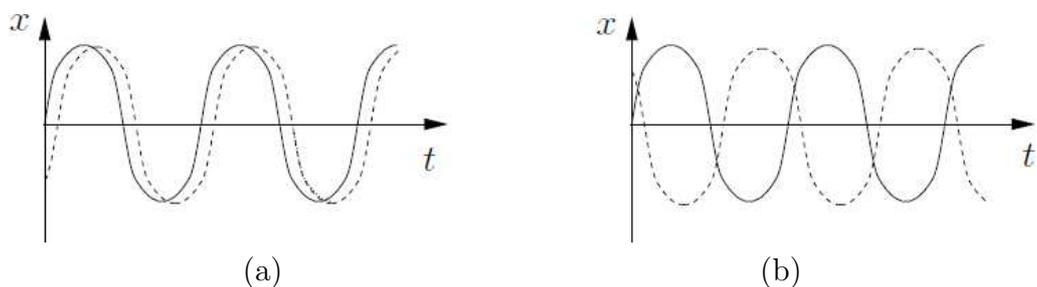


Figura 3.5 - Em (a) a variável  $x$  de dois sistemas não idênticos encontram-se em fase e em (b) em anti-fase. A variável  $x$  é denotada por linha contínua para um sistema e por linha tracejada para o outro sistema. Adaptado de (PIKOVSKY et al., 2001).

É importante ressaltar que a sincronização não aparece como a igualdade entre as fases dos sistemas, mas como o aparecimento de uma diferença de fase constante  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \text{const}$ , sendo que  $\phi_2$  é a fase obtida da análise do sistema 2 e  $\phi_1$  é a fase obtida da análise do sistema 1.

A sincronização é também muitas vezes descrita em termos de bloqueio (travamento) na fase, onde o movimento não-sincrônico corresponde a um crescimento ilimitado da diferença de fase, enquanto que, no estado síncrono a diferença de fase é limitada.

A diferença de fase pode apresentar épocas em que é quase constante, e outras épocas em que, a diferença de fase muda de forma relativamente rápida por um fator de  $2\pi$ . Essa mudança rápida que aparece praticamente como um salto muitas vezes é chamada de deslizamento de fase (do inglês, *phase slips*).

Na Figura 3.6, ilustra-se a diferença de fase em (b) para diferentes valores de intensidade de acoplamento  $\eta$ . Os valores de  $\eta$  são indicados em (a), por meio dos pontos 1 – 5, dentro e fora da região de sincronização dada pelo gráfico da língua de Arnold (frequência  $\omega$  para diferentes intensidades de  $\eta$ ). No estado síncrono, referente aos pontos 1 e 2, a diferença de fase é constante, conforme visto nas linhas 1 e 2 em (b), sendo zero no centro da língua e diferente de zero caso contrário. Do lado de fora da língua de Arnold, a dinâmica da fase são intermitentes, ou seja, a diferença de fase aparece como uma sequência de saltos rápidos (deslizamentos) intercalados com épocas de comportamento quase síncrono, conforme pode ser visto no ponto 3 e na diferença de fase dada pela linha 3. Afastando-se da fronteira da língua, a dinâmica da fase tende ao crescimento uniforme, conforme ilustrado pelos pontos e curvas 4 e 5. A transição para a borda direita da língua ocorre de forma semelhante, apenas a diferença de fase agora diminui.

Portanto, uma possível condição para verificar se dois sistemas estão sincronizados em fase é analisar

$$|n\phi_2 - m\phi_1| < \text{const} \quad (3.7)$$

com  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

A seguir, explora-se o fato de que o fenômeno de sincronização de fase foi também detectado e analisado em sistemas dinâmicos caóticos acoplados (BOCCALETTI et al., 2002; CARROLL; PECORA, 1991; HEAGY et al., 1994; PECORA; CARROL, 1990; ROSENBLUM et al., 1996; ROSENBLUM et al., 1997).

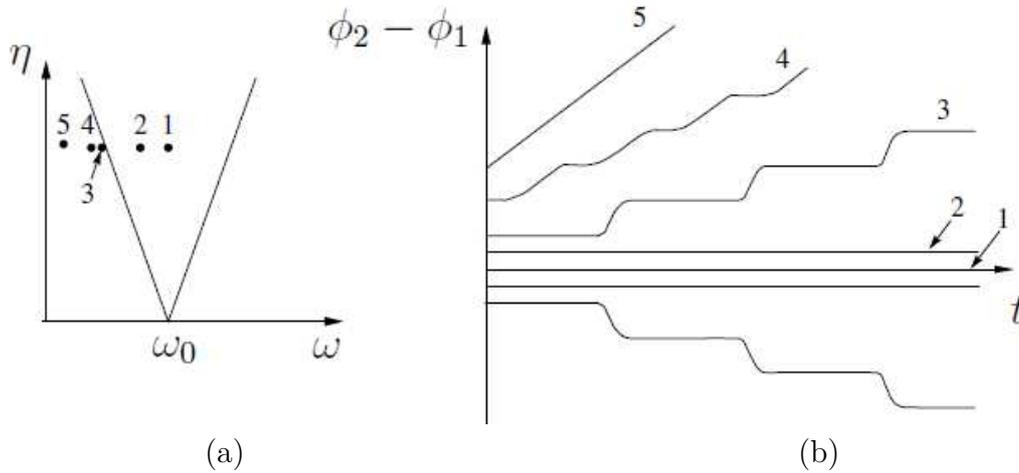


Figura 3.6 - Em (a) a língua de Arnold e em (b) a diferença de fase ao longo do tempo. Adaptado de (PIKOVSKY et al., 2001).

### 3.3 Sincronização de fase em sistemas caóticos

Existem sistemas naturais oscilatórios que apresentam um comportamento caótico e, tais sistemas quando acoplados, são também capazes de apresentar o fenômeno de sincronização.

Neste caso, como caracterizar o ritmo de um sistema caótico? Como o processo é irregular, não consegue-se definir seu período conforme definido para sistemas periódicos. Em vez disso, pode-se determinar um tempo entre dois eventos semelhantes nas séries temporais, por exemplo, entre dois máximos da variável  $x$  do sistema.

Assim, a frequência média observada do sistema pode ser calculada como:

$$\Omega = \lim_{t \rightarrow \infty} 2\pi \frac{N_t}{t} \quad (3.8)$$

em que  $N_t$  é o número de interseções da trajetória da fase com a seção de Poincaré, durante o tempo de observação  $t$ . No caso mais simples pode-se, por exemplo, considerar  $N_t$  como o número de máximos presentes em uma das variáveis do sistema dentro do intervalo  $t$ .

Com o cálculo das frequências médias pode-se descrever o comportamento coletivo das interações em sistemas caóticos, da mesma forma como para sistemas periódicos. A ideia principal da sincronização de fase em sistemas caóticos é que essa frequência pode ser travada por uma força externa periódica ou pelo acoplamento com um outro sistema caótico.

A condição para verificar se dois sistemas estão sincronizados em fase é a mesma apresentada na Equação 3.7 dada para sistemas periódicos.

Outros cálculos podem ser realizados, a partir da fase, com o objetivo de medir a sincronização de fase em sistemas caóticos. Como por exemplo, em (MORMANN et al., 2000) calcula-se a coerência média da fase e, em (TASS et al., 1998) propõem-se dois índices de sincronização. Em (QUIROGA et al., 2002) descreve-se a sincronização usando várias medidas lineares e não-lineares e em (LACHAUX et al., 1999) apresenta-se uma medida, denominada *phase-locking statistics (PLS)*, a qual é utilizada para quantificar a estabilidade da diferença de fase.

O problema reside em como calcular a fase de sistemas caóticos. A fase pode ser obtida facilmente para sistemas periódicos e para sistemas caóticos que apresentam atratores que espiralam em torno de algum ponto fixo em uma projeção bidimensional, como no caso do atrator do sistema de Rössler mostrado na Fig. 2.1(a).

Quando se consideram sistemas dinâmicos caóticos não se tem uma definição precisa de fase e, em contraste com o caso de sistemas periódicos, o crescimento da fase de um sistema caótico não é necessariamente uniforme (maiores detalhes em (PIKOVSKY et al., 2001)).

De modo geral, é difícil obter a fase de sistemas caóticos que apresentam atratores do tipo “funil”, como no caso do atrator do sistema de Rössler mostrado na Fig. 2.1(b); ou calcular a fase a partir de séries temporais provenientes de conjunto de dados experimentais.

Existem alguns métodos para a obtenção da fase em sistemas caóticos. Um deles é construir um mapa de Poincaré para o sistema caótico em estudo e, em seguida, para cada parte da trajetória entre duas seções transversais com esta superfície, definir a fase como uma função linear no tempo, de modo que a fase acumula  $2\pi$  com cada retorno à superfície da seção de Poincaré, ou seja,

$$\phi_P(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n \quad (3.9)$$

em que  $t_n \leq t < t_{n+1}$  e sendo  $t_n$  o tempo do  $n$ -ésimo cruzamento da superfície secante. Porém existe uma ambiguidade na escolha da seção de Poincaré e, conseqüentemente, essa ambiguidade reflete-se na definição da fase.

Uma outra forma de calcular a fase de sistemas caóticos pode ser obtida por meio do conceito de sinal analítico baseado na transformada de Hilbert (ROSENBLUM; PI-

KOVSKY, 2003). Para uma descrição da transformada de Hilbert veja o Apêndice A.

Uma outra maneira usual de se obter a fase é por meio da função arco-tangente. Neste caso, se a projeção do atrator for encontrada, pode-se introduzir a fase como sendo um ângulo entre uma certa direção de referência fixa (na projeção) e o vetor traçado desde a origem até o ponto para o qual quer-se determinar a fase.

Atualmente, a transformada *wavelet* contínua tem sido utilizada para obtenção da fase de um sistema. Koronovskii e Hramov (2004b) apresenta um método baseado no cálculo de uma família de fases para um sistema caótico usando uma transformada *wavelet* contínua. Já em (POSTNIKOV, 2007; POSTNIKOV, 2009) utiliza-se a transformada *wavelet* contínua com *wavelet* analisadora de Morlet para calcular a fase de sistemas caóticos de Rössler e o conceito de fase *wavelet* ou sincronização tempo-escala em sistemas caóticos é explorado. Em (QUYEN et al., 2001) apresenta-se uma comparação direta entre o uso da transformada de Hilbert e da transformada *wavelet* contínua no cálculo da fase.

No Capítulo 5 apresenta-se o método *wavelet dt-cwt* proposto neste trabalho para calcular a fase de sistemas caóticos e de conjuntos de dados experimentais.

## 4 WAVELET

Neste capítulo apresentam-se conceitos relacionados a teoria das *wavelets*. Primeiramente, descreve-se uma introdução às *wavelets* (Seção 4.1). Em seguida, na Seção 4.2, apresenta-se sucintamente a transformada *wavelet* em suas formas contínua e discreta. Na Seção 4.3 explora-se a transformada *wavelet* complexa *dual-tree*, a qual é utilizada neste trabalho para obter a fase de sistemas caóticos e de conjuntos de dados experimentais.

### 4.1 Introdução

A maioria das observações e simulações de processos naturais são registradas a partir de uma série temporal. Atualmente, encontram-se na literatura várias técnicas de análise de séries temporais, sendo que cada uma possui suas vantagens e desvantagens.

Uma técnica bastante conhecida é a Transformada de Fourier (TF) a qual utiliza funções bases senoidais (senos e cossenos) para analisar uma série temporal no domínio da frequência (veja Apêndice A). Uma desvantagem desta transformada é a sua inviabilidade na investigação de fenômenos provenientes de séries temporais não-estacionárias ou mesmo séries que sofrem variações bruscas de frequência (FARGE, 1992). Outra técnica conhecida é a chamada Transformada Janelada de Fourier (TJF), a qual é uma versão da TF que utiliza janelas fixas no tempo, sendo que, essa transformada não consegue-se capturar variações de altas e baixas frequências simultaneamente (veja apêndice A).

Devido às características encontradas na TF e da TJF uma possível solução é encontrar uma técnica que possua janelas móveis, no tempo ou no espaço, que se dilatam ou se comprimem para capturar baixas e altas frequências presentes na série temporal a ser analisada. Essa técnica é conhecida como Transformada *Wavelet* (do inglês, *Wavelet Transform* - WT) e foi originalmente empregada na análise de sinais sísmicos na Geofísica (MORLET, 1983; MALLAT, 1989).

O termo *wavelet* associa-se a ideia de “ondas pequenas”, as quais são ondas localizadas, isto é, ondas que crescem e decaem em um período limitado de tempo. As *wavelets* são um conjunto de funções com forma de pequenas ondas geradas por translações  $\psi_n(t) = \psi_0(t - n)$  e escalonamentos  $\psi^s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi_0\left(\frac{t}{s}\right)$  de uma função *wavelet*, denotada por  $\psi_0(t)$  e denominada *wavelet* analisadora. Os parâmetros são  $s, n \in \mathbb{R}$ ,  $s \neq 0$ , em que  $n$  representa o deslocamento no tempo/espaço, e  $s$  o fator

de escala. Quando  $s > 0$  temos a dilatação e  $s < 0$  a contração da *wavelet*  $\psi_0(t)$ .

Assim, as *wavelets* podem ser construídas por meio da equação

$$\psi_n^s(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi_0\left(\frac{t-n}{s}\right). \quad (4.1)$$

O fator  $\frac{1}{\sqrt{|s|}}$  é chamado de constante de normalização da energia de cada *wavelet* de forma a manter a mesma energia da *wavelet* analisadora, ou seja, a soma das energias de todas as *wavelets* resulta na energia total da transformada.

As funções *wavelets* podem ser complexas ou reais, simétricas ou assimétricas, com funções definidas explicitamente ou não. Dois requisitos importantes devem ser satisfeitos para uma função ser considerada uma *wavelet*. O primeiro requisito é conhecido como *condição de admissibilidade* e é dado por  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$ . Essa condição garante que a função *wavelet* assuma uma forma do tipo onda e assegura a existência da transformada *wavelet* inversa. O segundo requisito é que a *wavelet* apresente energia unitária, ou seja  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1$ , garantindo o suporte compacto, ou um rápido decaimento de amplitude (*e-folding time*) e, possibilitando a sua localização espacial. Assim, as funções *wavelet* possuem a propriedade básica de dupla localização: em frequência e em tempo, com uma relação intrínseca entre elas, arbitrada pelo princípio da Incerteza de Heisenberg.

Esses dois requisitos acima descritos são equivalente a dizer que  $\psi(t)$  é quadraticamente integrável, ou seja, que a *wavelet* pertence ao conjunto das funções de quadrado integrável  $L^2(\mathbb{R})$  dentro do conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ , para maiores informações veja (DAUBECHIES, 1992). Isso também sugere que  $\psi(t)$  tende a oscilar acima e abaixo do eixo  $t$  e que tem sua energia localizada em uma certa região, já que ela é finita.

Há vários tipos de *wavelet* analisadora, sendo que cada tipo possui uma melhor ou pior localização nos domínios da frequência e/ou do tempo. É necessário escolher a *wavelet* analisadora conveniente de acordo com a série temporal estudada e os objetivos almejados, para detalhes veja (DOMINGUES et al., 2005).

Morlet (1983) propôs uma das primeiras *wavelet* de interesse na análise de sinais. Em sua investigação de sinais geofísicos na exploração de petróleo, utilizou uma *wavelet* complexa formada por uma onda plana modulada por uma função gaussiana, para maiores detalhes veja o Apêndice D.

A seguir, apresenta-se sucintamente sobre a Transformada *Wavelet*, descrevendo brevemente suas formas contínua e discreta.

## 4.2 Transformada Wavelet

Quando se aplica uma transformada em uma série temporal deseja-se mapear a série em um outro domínio, sem no entanto, mudar o conteúdo da informação presente na mesma. As transformações são importantes em análise de séries temporais porque no domínio transformado algumas propriedades relevantes da série ficam mais evidentes.

Devido as limitações da TF e da TJF surge a necessidade de uma transformada que possibilite uma análise com janelas flexíveis e cuja largura e altura variam no plano tempo-frequência. Assim surge a Transformada *Wavelet* (do inglês, *Wavelet Transform* - WT), que ao contrário das funções de bases senoidais utilizadas na TF ou da janela fixa, utilizada na TJF, utiliza uma família de funções *wavelets*.

A Figura 4.2 ilustra um esquema do plano tempo-frequência, ou seja,  $t$  versus  $f$  das transformadas de Fourier, Janelada e *Wavelet*.

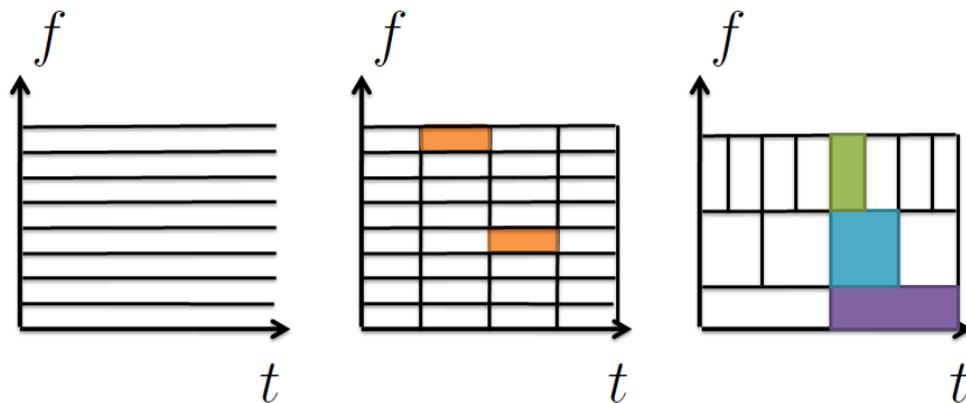


Figura 4.1 - Ilustração esquemática do plano tempo-frequência, ou seja,  $t$  versus  $f$  das três transformadas, TF, TJF e WT.

A WT é uma transformada linear que pode ser utilizada na análise de séries temporais não estacionárias para extrair informações das variações na frequência ao longo do tempo e para detectar estruturas temporalmente e/ou espacialmente localizadas (GRAPS, 1995).

Desde seu surgimento até os dias atuais, a WT tem sido aplicada com grande sucesso em diversos campos da ciência, tais como na codificação de imagens (ANTONINI et al., 1992), em sistemas biológicos (ARNEODO et al., 1996; BOLES, 1998), processamento de sinais (COIFMAN et al., 1992), turbulência (FARGE et al., 1996), redução de ruído em imagem (PORTILLA et al., 2003), computação gráfica (STOLLNITZ et al., 1995), classificação de imagens (XIAOOU; STEWART, 2000) e em muitas outras aplicações.

Quando os parâmetros de escala  $s$  e translação  $n$  são contínuos, tem-se a chamada Transformada *Wavelet* Contínua, a qual transforma um sinal unidimensional no tempo em uma representação bi-dimensional (tempo, escala) que pode ser altamente redundante. A fim de se obter uma descrição mais eficiente para a WT, a Transformada *Wavelet* Discreta foi introduzida, na qual os valores dos parâmetros são discretizados.

A seguir, apresenta-se brevemente sobre essas duas formas da Transformada *Wavelet*.

#### 4.2.1 Transformada *Wavelet* Contínua

A Transformada *Wavelet* Contínua (do inglês, *Continuous Wavelet Transform* - CWT) é uma ferramenta que permite decompor a série temporal em diferentes componentes frequenciais.

A CWT em  $L^2(\mathbb{R})$  pode ser definida como

$$\mathcal{W}_n^s = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left( \frac{t-n}{s} \right) dt. \quad (4.2)$$

em que  $f(t)$  é a série temporal,  $s, n \in \mathbb{R}$ ,  $s \neq 0$  e  $(*)$  denota o complexo conjugado. O termo  $\frac{1}{\sqrt{s}}$  é um fator de normalização da energia do sinal.

Similarmente à TF, em *wavelet* tem-se o espectrograma, mais conhecido como *escalograma*, o qual representa as amplitudes quadradas do módulo dos coeficientes *wavelet* e são interpretados como a distribuição de energia da série temporal no tempo  $t$  e escala  $s$ .

O espectro *wavelet* global é a integração no tempo do escalograma, ou seja,

$$S_\psi(s) = \int \mathcal{W}_n^s(s, t) dt. \quad (4.3)$$

A amplitude do coeficiente *wavelet* está associada à regularidade local da série tem-

poral analisada, sendo que quanto menor é a suavidade local da série, maior é a amplitude dos coeficientes *wavelet* nessa região.

A seguir, descreve-se sobre a Transformada *Wavelet* Discreta.

#### 4.2.2 Transformada Wavelet Discreta

Na Transformada *Wavelet* Discreta (do inglês, *Discrete Wavelet Transform* - DWT) os parâmetros de dilatação e translação não variam continuamente, como no caso da CWT, mas sim discretamente.

Dependo da aplicação, os valores dos parâmetros  $s, n$  podem ser considerados em uma grade discreta, fixando um passo de dilatação  $s_0 > 1$  e um passo de translação  $n_0 \neq 0$ . Assim, a família de *wavelets*, para  $j, k \in \mathbb{Z}$  podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\psi_k^j(t) &= \frac{1}{\sqrt{s_0^j}} \psi\left(\frac{t - k n_0 s_0^j}{s_0^j}\right) \\ \psi_k^j(t) &= s_0^{-j/2} \psi(s_0^{-j}t - k n_0)\end{aligned}\tag{4.4}$$

Note que isso corresponde a  $s = s_0^j$  e  $n = k n_0 s_0^j$  indicando que o parâmetro de translação  $n$  depende da taxa de dilatação escolhida.

Se assumir dilatações binárias e translações unitárias, isto é,  $s_0 = 2$  e  $n_0 = 1$ , a função *wavelet* torna-se

$$\psi_k^j(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k)\tag{4.5}$$

e constitui uma base ortonormal para  $L^2(\mathbb{R})$ . Dessa forma, tem-se uma amostragem diádica que é mais adequada para cálculos computacionais.

A DWT apresenta quatro características atrativas importantes, a saber: boa compressão da energia do sinal, reconstrução perfeita com filtros de suporte pequeno, pouca redundância, e um custo computacional baixo (da ordem de  $N$  operações).

Um conceito importante referente a DWT é a análise multirresolução, a qual é brevemente descrita a seguir.

#### Análise Multirresolução

A ferramenta de análise multirresolução (MR), desenvolvido por [Mallat \(1989\)](#), tem como objetivo decompor a série temporal  $f(t)$  em termos de funções base, como por

exemplo, a função escala  $\varphi(t)$ .

Uma MR de  $L^2(\mathbb{R})$  é construída usando espaços de imersão  $V^j \supset V^{j+1}$  tendo como funções base  $\varphi^j$ , as quais são uma base de Riesz (DAUBECHIES, 1990; MALLAT, 1989; CASTILHO et al., 2012). A união destes espaços é dada por  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V^j = L^2(\mathbb{R})$ ; a intersecção é  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V^j = \{0\}$  e suas funções apresentam propriedades de escala  $f(t) \in V^j \Leftrightarrow f(2t) \in V^{j+1}$ ,  $\forall j \in \mathbb{Z}$  e de invariância do deslocamento  $f(t) \in V^0 \Leftrightarrow f(t-n) \in V^0$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

Uma propriedade importante na MR é a existência de uma função de escala  $\varphi$ , ou seja,  $\exists \varphi \in V^0 \mid \{\varphi(t-k)\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , e que é uma base de Riesz de  $V^0$ . A função de escala  $\varphi$  é usada para construir bases *wavelets* sendo que a MR requer uma base para cada espaço  $V^j$ . Em outros subespaços  $V^{j \neq 0}$  define-se

$$\varphi_k^j(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) \quad (4.6)$$

em que o índice  $j$  denota a escala e  $k$  indica o deslocamento inteiro.

A diferença entre dois espaços  $V^j$  e  $V^{j+1}$  é chamado o espaço detalhe  $\mathcal{D}^j$ , onde as funções *wavelets* são bases de Riesz, como descrito em (MALLAT, 1989; MALLAT, 2008). O espaço  $\mathcal{D}^j$  contém as informações necessárias para ir de  $V^j$  para  $V^{j+1}$  e são extraídas da série temporal original usando a função *wavelet*  $\psi(t)$ .

Considerando que a série temporal  $f(t)$  pode ser representada de uma forma multi-escala, tem-se que a função de escala  $\varphi$  e sua função *wavelet* associada  $\psi$  são dadas por meio da equação

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^j \varphi_n^j(t) + \sum_{j,n \in \mathbb{Z}} d_n^j \psi_n^j(t) \quad (4.7)$$

em que  $c_n^j$  são os coeficientes de escala, e  $d_n^j$  são os coeficientes *wavelet*.

Os coeficientes podem ser descritos pelas equações

$$\begin{aligned} c_n^j &= \int f(t) \varphi_n^j(t) dt \\ d_n^j &= \int f(t) \psi_n^j(t) dt. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Estes coeficientes são geralmente calculados usando um algoritmo eficiente baseado em convoluções da série temporal analisada  $f(t)$  com um filtro passa-baixa de tempo

discreto  $h_0$  e um filtro passa-alta  $h_1$  e por meio de operações de sub-amostragem  $\downarrow 2$ . Isto é chamado o algoritmo de Mallat (MALLAT, 1989; MALLAT, 2008) e é a própria DWT.

Os coeficientes  $c_n^j$  e  $d_n^j$  estão associados aos filtros  $h_0$  e  $h_1$ , respectivamente e, apresentam uma relação de escala dada por

$$c_n^j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_0(k) c_{n-k}^{j-1}, \quad d_n^j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_1(k) c_{n-k}^{j-1},$$

em que uma possibilidade é escolher  $h_1(k) = (-1)^k h_0(1-k)$ . Portanto, as seguintes relações podem ser obtidas

$$\begin{aligned} \varphi_n^j(t) &= \sum_n h_0(n) \varphi_n^{j-1}(t), \\ \psi_n^j(t) &= \sum_n h_1(n) \varphi_n^{j-1}(t). \end{aligned} \tag{4.9}$$

A Figura 4.2 ilustra um esquema da decomposição em três escalas ( $J_{\max} = 3$ ) de uma dada série temporal real  $f(t)$  por meio da DWT. A série temporal  $f(t)$  é analisada independentemente e simultaneamente usando os filtros  $h_0$  e  $h_1$ , os quais juntos constituem um banco de filtros. Depois da filtragem, as séries temporais obtidas são decimadas (sub-amostragem) por um fator de 2 (sub-amostrar um sinal de entrada por um fator de 2, denotado como  $\downarrow 2$ , refere-se a extrair uma amostra a cada duas, de modo que o sinal de saída terá a metade do número de amostras do sinal de entrada). O resultado será dois coeficientes na escala  $j = 1$  dados respectivamente pelas seguintes convoluções (denotada por  $*$ )

$$c^1 = [x * h_0] \downarrow 2, \quad d^1 = [x * h_1] \downarrow 2.$$

Nas escalas  $j = 2$  e  $J_{\max} = 3$  tem-se

$$\begin{aligned} c^2 &= [h_0 * c^1] \downarrow 2, & d^2 &= [h_1 * c^1] \downarrow 2, \\ c^3 &= [h_0 * c^2] \downarrow 2, & d^3 &= [h_1 * c^2] \downarrow 2. \end{aligned}$$

O uso de banco de filtros proporciona uma forma conveniente para construção de funções de escala  $\varphi$  e funções *wavelets*  $\psi$  com propriedades desejáveis tal como suporte compacto no tempo e rápido decaimento na frequência, a fim de garantir



*Dual-Tree*, a qual apresenta propriedades atrativas da TF, incluindo uma magnitude suave, não oscilante, e quase invariante ao deslocamento, com *aliasing* reduzido e *wavelets* direcionais em altas dimensões (SELESNICK et al., 2005).

Essa transformada é a base do método *wavelet dt-cwt*, proposto neste trabalho no Capítulo 5, que tem como objetivo calcular a fase de sistemas caóticos e de conjuntos de dados experimentais.

### 4.3 Transformada *Wavelet* Complexa *Dual-Tree*

A Transformada *Wavelet* Complexa *Dual-Tree* (do inglês, *Dual-Tree Complex Wavelet Transform* - DT-CWT) é uma transformada construída utilizando-se dos fundamentos teóricos provenientes da teoria matemática e da teoria de banco de filtros.

Nick Kingsbury em 1998 construiu essa transformada *wavelet* complexa quase-ortogonal com banco de filtros e algoritmos rápidos, conforme pode ser visto em (KINGSBURY, 1998).

As principais características desta transformada são: o baixo custo computacional quando comparada a CWT com *wavelet* analisadora de Morlet, a possibilidade de uma reconstrução perfeita com filtros de suporte pequeno, sua boa invariância a deslocamentos e sua redundância limitada de 2 : 1 em uma série temporal unidimensional. Maiores detalhes sobre essas características são discutidas em (SELESNICK et al., 2005).

Na prática, a DT-CWT emprega duas DWT reais. A primeira DWT, também denominada banco de filtro superior ou árvore superior, esta associada com os filtros passa-baixa  $\bar{h}_0$  e passa-alta  $\bar{h}_1$ . Ela calcula o coeficiente *wavelet* real  $\bar{d}^j$  o qual será utilizado como a parte real dos coeficientes *wavelet* complexo  $\mathbf{d}^j$ . A segunda DWT, também denominada banco de filtro inferior ou árvore inferior, é composta de filtros passa-baixa  $\underline{h}_0$  e passa-alta  $\underline{h}_1$ . Similarmente, ela calcula  $\underline{d}^j$ , a qual contribui para a parte imaginária de  $\mathbf{d}^j$ .

Assim, o coeficiente *wavelet* complexo  $\mathbf{d}^j$  pode ser escrito como

$$\mathbf{d}^j = \bar{d}_n^j + \iota \underline{d}_n^j. \quad (4.10)$$

A Figura 4.3 apresenta um esquema da decomposição da série temporal  $f(t)$  em três escalas  $j = 1$ ,  $j = 2$  e  $J_{max} = 3$  utilizando-se a DT-CWT.

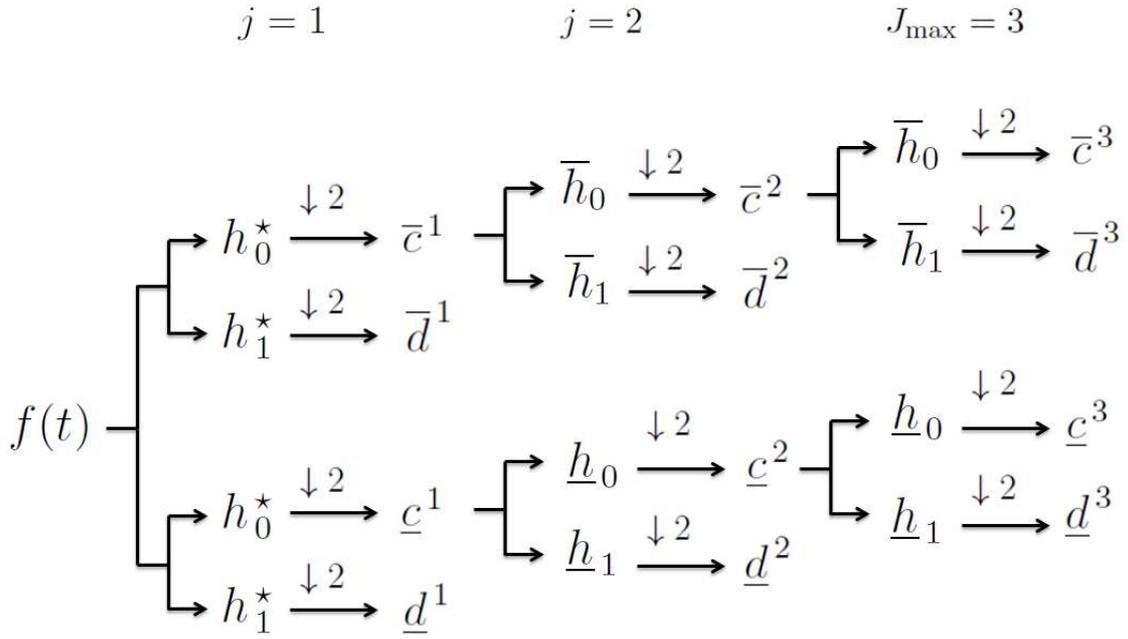


Figura 4.3 - Representação esquemática da decomposição da série temporal  $f(t)$  em três escalas  $j = 1$ ,  $j = 2$  e  $J_{max} = 3$  utilizando-se a DT-CWT.

A notação  $\star$  é incluída nos filtros utilizados na primeira escala, isto é,  $h_0^\star$  e  $h_1^\star$  os quais são filtros diferentes dos utilizados nas demais escalas e são iguais para ambas as DWT's. Nesta representação,  $J_{max} = 3$ , as saídas desejáveis, neste trabalho, desta DT-CWT são

$$[\bar{d}^1, \bar{d}^2, \bar{d}^3; \underline{d}^1, \underline{d}^2, \underline{d}^3] = [\Re\{\mathbf{d}^1\}, \Re\{\mathbf{d}^2\}, \Re\{\mathbf{d}^3\}; \Im\{\mathbf{d}^1\}, \Im\{\mathbf{d}^2\}, \Im\{\mathbf{d}^3\}].$$

Essa transformada tem também como saída usual os coeficientes de escala complexos  $\mathbf{c}^{J_{max}}$ , que não são usados neste trabalho.

Note que, devido a sub-amostragem, em cada escala de decomposição  $j$  o número de pontos na série temporal é reduzido por um fator de 2. Assim, quando  $j = 1$ , tem-se  $\frac{N}{2}$  pontos; em  $j = 2$ , tem-se  $\frac{N}{4}$  pontos e assim sucessivamente.

A fim de satisfazer as condições de reconstrução perfeita da série temporal, os filtros são construídos de modo que a *wavelet* complexa  $\boldsymbol{\psi}(t) := \bar{\psi}(t) + \imath \underline{\psi}(t)$  seja aproximadamente analítica.

Um fator importante é que  $\underline{\psi}(t)$  é aproximadamente o par de Hilbert de  $\bar{\psi}(t)$ , em outras palavras  $\underline{\psi}(t) \approx \mathcal{H}\{\bar{\psi}(t)\}$ , em que  $\mathcal{H}$  denota a transformada de Hilbert (KINGS-

BURY, 1999; KINGSBURY, 2000; KINGSBURY, 2001).

A DT–CWT tem a importante propriedade de quase invariância a deslocamentos, a qual pode ser entendida de duas diferentes formas. Primeiro, desde que as *wavelets* real e imaginária são um par de Hilbert uma da outra, os coeficientes *wavelet* real e imaginário interpolam um o outro. Segundo, desde que utilizam-se de duas DWT’s, o efeito de decimação por dois em cada escala é diminuído, o qual reduz a quantidade de *aliasing* (SELESNICK et al., 2005).

Quando a DT–CWT é aplicada em uma série temporal real, a saída dos bancos de filtros superior e inferior, conforme ilustrado na Figura 4.3, será as partes real e imaginária dos coeficientes complexos, e pode-se armazená-los separadamente. No entanto, se a DT–CWT é aplicada a uma série temporal de valor complexo, então a saída de ambos os bancos de filtros superior e inferior serão complexos, e não é correto classificá-los como as partes real e imaginária.

Considerando uma série temporal real de  $N$  pontos, tem-se  $2N$  coeficientes complexos, mas  $N$  desses coeficientes são os complexo conjugado dos outros  $N$  coeficientes. No caso de uma série temporal de valor complexo de  $N$  pontos resulta em  $2N$  coeficientes complexos. Portanto, para ambos os sinais de entrada real e complexo, a DT–CWT é duas vezes expansiva (SELESNICK et al., 2005).

Quando as duas DWT’s reais são ortonormais e o fator de  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  é incluído, é válido na DT–CWT o teorema da conservação de energia de Parseval: a energia do sinal de entrada é igual à energia no domínio *wavelet*

$$\sum_{j,n} (|\bar{d}_n^j|^2 + |d_n^j|^2) = \sum_n |f(t)|^2. \quad (4.11)$$

Na inversa da DT–CWT a parte real e a parte imaginária são cada uma invertidas. Assim, a inversa de cada uma das duas DWT’s reais são usadas obtendo-se duas séries temporais reais. A média destas duas séries são então utilizadas para obter a série temporal reconstruída. A série temporal original  $f(t)$  pode também ser reconstruída a partir de ambas as partes real ou imaginária sozinha; no entanto, tal inversa não apresenta todas as vantagens de uma transformada *wavelet* analítica.

A DT–CWT é de fácil implementação devido ao fato de não haver nenhum fluxo de dados entre as duas DWT’s reais, sendo assim, elas podem cada uma serem implementadas usando softwares existentes para a DWT.

Deve notar-se que a DT-CWT requer a construção de filtros novos. Primeiramente, é necessário um par de conjuntos de filtros escolhidos de modo que as *wavelets* correspondentes formem aproximadamente um par de Hilbert. Os filtros existentes para transformadas *wavelets* não devem ser usados para implementar ambas as árvores da DT-CWT. Por exemplo, pares de filtros *wavelets* de Daubechies não satisfazem a condição  $\underline{\psi}(t) \approx \mathcal{H}\{\overline{\psi}(t)\}$ . Se a DT-CWT é implementada com filtros não satisfazendo esta condição, então não será obtida a vantagem de *wavelets* analíticas.

Há várias abordagens para a construção de filtros para a DT-CWT, as quais conforme exposto em (SELESNICK et al., 2005), devem seguir as seguintes propriedades desejáveis: atraso de metade da amostra, reconstrução perfeita, suporte finito, momentos nulos e filtros de fase linear.

No Apêndice B, apresenta-se uma condição simples que deve ser verificada entre os filtros utilizados na DT-CWT, que é a condição de atraso de metade da amostra, conforme descrito em (SELESNICK et al., 2005). Neste mesmo Apêndice descrevem-se sobre os filtros *Q-shift* e questões de implementação no uso dos filtros na DT-CWT.

## 5 METODOLOGIA

Neste capítulo apresenta-se o método *wavelet dt-cwt* desenvolvido neste trabalho.

No Apêndice E descreve-se o método arco tangente, o qual foi utilizado neste trabalho a fim de comparar os resultados obtidos por meio do método proposto.

Na Seção 5.1 explora-se o método *wavelet dt-cwt*, o qual baseia-se na DT-CWT, para calcular a fase de sistemas caóticos e conjunto de dados experimentais, a partir de séries temporais.

### 5.1 Método *Wavelet dt-cwt*

Nesta seção, apresenta-se como aplicar o método *wavelet dt-cwt* proposto, o qual baseia-se no uso da DT-CWT (descrito no Capítulo 4, na Seção 4.3), para calcular a fase de sistemas caóticos e de conjuntos de dados experimentais, a partir de séries temporais.

Primeiramente, para aplicar o método *wavelet dt-cwt* é necessário escolher:

- o filtro na primeira escala de decomposição, neste caso, usou-se o filtro bi-ortogonal **Near-Symmetric (13,19) tap filters** descritos no Apêndice B.
- o filtro nas demais escalas de decomposição, neste caso utilizou-se o filtro **Q-Shift (14,14) tap filters** descritos no Apêndice B.
- quantos níveis de decomposição a série temporal será decomposta. Supondo uma série temporal com  $N = 2^L$ , pode-se decompor a série em  $\mathcal{L} = L - 6$  escalas. Isso garante que não haverá os efeitos de borda e a condição de admissibilidade da *wavelet* será satisfeita.

A série temporal  $x$  é analisada em  $j$  níveis de decomposição, com  $j = 1, \dots, \mathcal{L}$ . Em cada nível de decomposição  $j$ , o coeficiente *wavelet* complexo  $\mathbf{d}^j$  é obtido por meio da análise DT-CWT. Como a DT-CWT é uma transformada decimada, na escala  $j$  a dimensão do vetor contendo os coeficientes  $\mathbf{d}^j$  é igual a  $N^j = 2^{L-j}$ , em que  $N^j$  denota o número de pontos  $N$  na escala  $j$ .

A energia  $E^j$  para cada escala  $j$  é calculada como o módulo ao quadrado do coefi-

ciente *wavelet* complexo  $\mathbf{d}^j$  por meio da equação

$$E^j(n) = \left| \mathbf{d}^j(n) \right|^2. \quad (5.1)$$

Em seguida, calcula-se o espectro de energia global  $\mathbb{E}^j$  por meio da equação

$$\mathbb{E}^j = \sum_n E^j(n). \quad (5.2)$$

Posteriormente, procura-se a escala  $J$  a qual apresenta a energia global máxima do sistema utilizando-se a condição

$$\mathbb{E}^J = \max_j \mathbb{E}^j. \quad (5.3)$$

Depois de encontrada a escala  $J$ , a fase é calculada nesta escala  $J$ , denotada por  $\phi^J$  e dada por

$$\phi^J(t) = \text{atan2}(\underline{d}^J, \bar{d}^J). \quad (5.4)$$

em que  $\underline{d}^J$  é a parte imaginária do coeficiente *wavelet* complexo na escala  $J$  e  $\bar{d}^J$  é a parte real do coeficiente *wavelet* complexo na escala  $J$ . Para informações da função arco-tangente de dois argumentos, `atan2`, veja o Apêndice C.

A Figura 5.1 ilustra um esquema do método para calcular a fase de uma série temporal genérica, denotada por  $x$ , usando o método *wavelet dt-cwt* proposto.

Considera-se, agora, a aplicação do método descrito acima a dois sistemas caóticos não-idênticos acoplados denotados por sistema 1 e sistema 2. Seja a série temporal da variável  $x$  do sistema 1, denotada por  $x_1$  e a série temporal da variável  $x$  do sistema 2, denotada por  $x_2$ . Ambas as séries temporais foram obtidas resolvendo-se o sistema de equações por meio de algum método numérico. No caso de conjunto de dados experimentais, as séries temporais são provenientes do experimento realizado. Com o objetivo de calcular a fase de ambos os sistemas, ambas as séries temporais,  $x_1$  e  $x_2$ , são analisadas individualmente pelo método *wavelet dt-cwt* proposto, descrito acima.

Considerando-se dois sistemas, encontra-se a escala de máxima energia,  $J_1$  e  $J_2$ , para cada sistema, respectivamente. Quando as escalas de máxima energia,  $J_1$  e  $J_2$ , são diferentes, ou seja,  $J_1 \neq J_2$  convencionou-se escolher a escala  $J = \min(J_1, J_2)$ . Esta escolha baseia-se em testes realizados e no fato de que o número de pontos  $N$

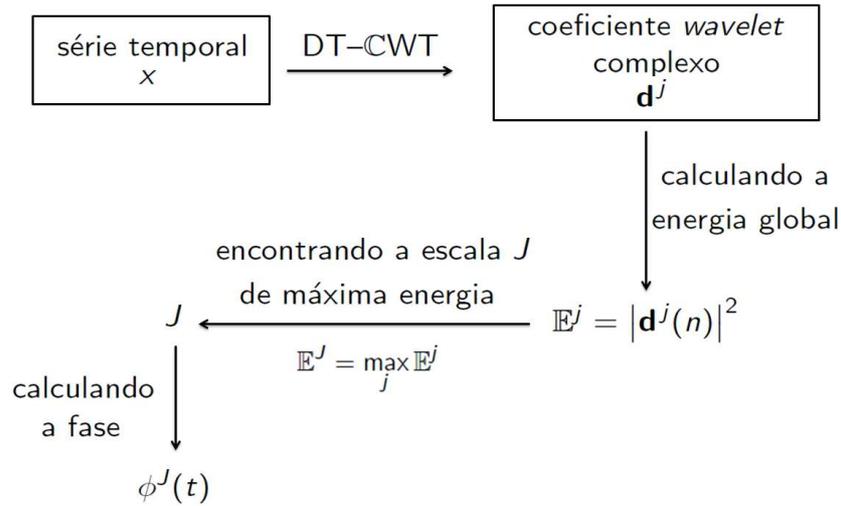


Figura 5.1 - Esquema do método *wavelet dt-cwt* para calcular a fase de uma série temporal genérica, denotada por  $x$ .

na série temporal da fase  $\phi(t)$  é proporcional a escala, isto é,  $N = 2^{L-J}$  e a série temporal da fase com maior número de pontos é escolhida. Depois de encontrada a escala  $J$ , a fase de cada sistema,  $\phi_1^J$  e  $\phi_2^J$  é calculada nesta escala.

Com o objetivo de analisar o fenômeno de sincronização de fase entre os sistemas, a diferença de fase é calculada por meio da equação

$$\Delta\phi_{12}^J = \phi_2^J - \phi_1^J, \quad (5.5)$$

e a condição de verificação para a sincronização de fase, dada pela equação 3.3, é avaliada.

A Figura 5.2 ilustra a aplicação do método *wavelet dt-cwt* em duas séries temporais,  $x_1$  e  $x_2$ .

Quando as escalas de máxima energia não encontram-se bem definidas ou situam-se em escalas com baixa resolução temporal (poucos coeficientes *wavelet*), é feita uma análise da energia ao longo do tempo. Desta análise, verifica-se a evolução temporal da energia e calcula-se a fase na escala com maior energia ao longo do tempo.

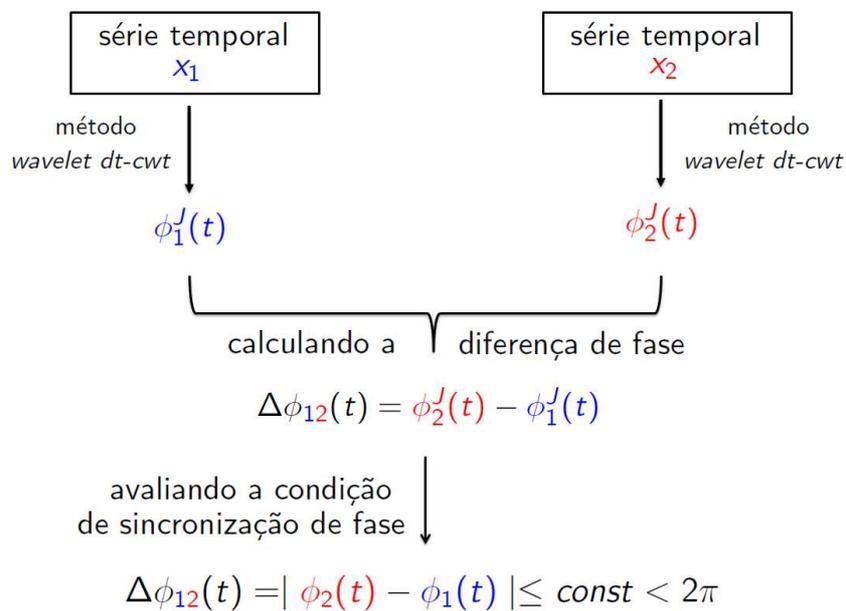


Figura 5.2 - Esquema representando o método *wavelet dt-cwt* sendo aplicado em duas séries temporais  $x_1$  e  $x_2$ .

## 6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo exploram-se os resultados obtidos da aplicação da metodologia proposta com o objetivo de analisar a sincronização de fase em sistemas dinâmicos caóticos e em conjuntos de dados experimentais.

Na Seção 6.1 apresentam-se os resultados obtidos considerando o sistema de Rössler. Utilizando o sistema de Rössler consideram-se cinco experimentos denotados por  $R_i$  com  $i = 1, \dots, 5$ . O que diferencia os experimentos um dos outros são: se os sistemas estão em regime de fase coerente ou não coerente; a forma de acoplamento - bidirecional ou unidirecional e, por meio de qual variável os sistemas estão acoplados. Na aplicação do método *wavelet dt-cwt* nos experimentos  $R_i$  consideram-se tanto a análise utilizando a variável  $x$  de cada sistema quanto a variável  $y$ , a fim de analisar a aplicabilidade do método em qualquer uma das duas variáveis.

Já os resultados da análise do sistema de Lorenz são explorados na Seção 6.2. Para este sistema consideram-se dois experimentos, denotados por  $L_1$  e  $L_2$ , os quais diferenciam-se pelos parâmetros utilizados.

Na Seção 6.3 apresentam-se os resultados obtidos da análise do Modelo de Kuramoto. O Modelo de Kuramoto foi analisado considerando sua imersão no plano e na faixa de Möebius, sem e com a adição de ruído.

Os resultados da análise dos conjuntos de dados experimentais são explorados na Seção 6.4.

### 6.1 Sistema de Rössler

Nesta seção apresentam-se os resultados obtidos da aplicação da metodologia proposta em experimentos envolvendo o sistema de Rössler.

A análise utiliza como entrada para o método *wavelet dt-cwt* a variável  $x$  de cada sistema. A fim de estudar a aplicabilidade do método em qualquer uma das variáveis do sistema, a variável  $y$  de cada sistema também foi analisada.

#### 6.1.1 Sistema Desacoplado

Nesta subseção tem-se uma análise do sistema de Rössler desacoplado, o qual foi descrito no Capítulo 2 na Subseção 2.1.1.

A Figura 6.1 ilustra o espectro de energia *wavelet*, denotado por  $E^j$ , e a fase, deno-

tada por  $\phi^J$ , obtidos da análise do sistema de Rössler considerando em (a,b) regime de fase coerente e em (c, d) regime de fase não coerente. Nota-se que, para ambos os regimes, coerente e não coerente, e utilizando ambas as variáveis do sistema,  $x$  e  $y$ , a escala de máxima energia encontrada é a escala  $J = 9$  e, a fase é calculada nesta escala. A fase, para ambos os regimes, cresce uniformemente ao longo do tempo indicando assim que o método foi capaz de calcular corretamente a mesma.

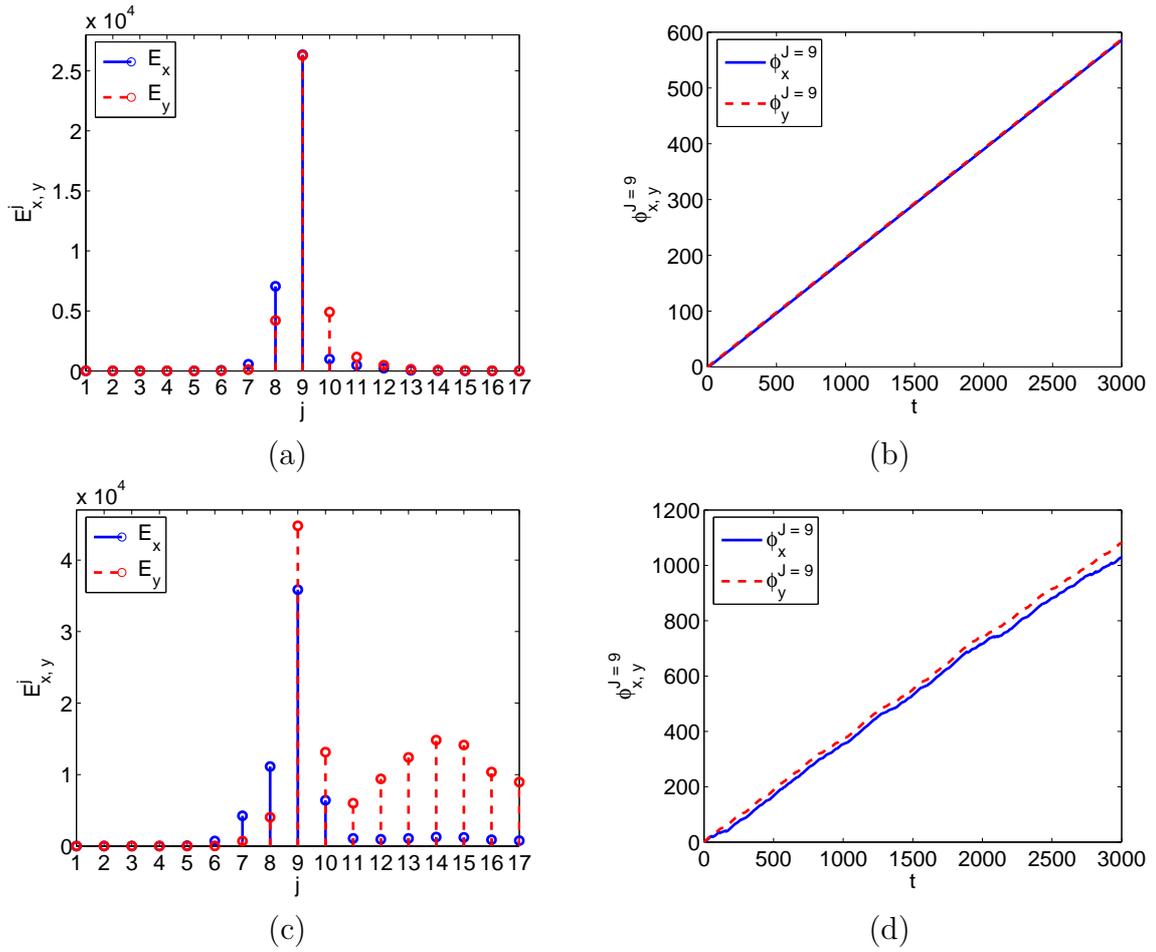


Figura 6.1 - Espectro de energia *wavelet*  $E_{x,y}^j$  e a fase  $\phi_{x,y}^{J=9}$  obtidos da análise do sistema de Rössler desacoplado em regime de fase coerente em (a,b) e não coerente em (c,d). Aqui, a notação  $E_x$  e  $E_y$  representa a energia calculada utilizando as variáveis  $x$  e  $y$  do sistema, respectivamente. Já,  $\phi_x^{J=9}$  e  $\phi_y^{J=9}$  indica a fase calculada utilizando as variáveis  $x$  e  $y$  do sistema, respectivamente e considerando a escala de máxima energia  $J = 9$ .

## 6.1.2 Sistema de Rössler em regime de fase coerente

Nesta subseção apresentam-se os resultados obtidos da análise de um experimento, denominado Experimento  $R_1$ , o qual considera dois sistemas de Rössler não-idênticos em regime de fase coerente acoplados bidirecionalmente por meio da variável  $y$  do sistema.

### 6.1.2.1 Experimento $R_1$

Neste experimento consideram-se dois sistemas de Rössler não-idênticos em regime de fase coerente acoplados bidirecionalmente por meio da variável  $y$  do sistema, e descritos por meio do seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2} y_{1,2} - z_{1,2} \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2} x_{1,2} + 0,16 y_{1,2} + \eta (y_{2,1} - y_{1,2}) \\ \dot{z}_{1,2} &= 0,4 + z_{1,2} (x_{1,2} - 8,5)\end{aligned}\tag{6.1}$$

em que  $\omega_1 = 0,98$  e  $\omega_2 = 1,02$  são as frequências fundamentais do sistema 1 e 2, respectivamente. Para a resolução do sistema utilizou-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem com condição inicial do sistema 1 sendo  $(0, 1, 0)$  e do sistema 2 sendo  $(-5, 4, 5)$  e passo de integração de  $0,01$ . A série temporal foi considerada com  $N = 2^{23}$  pontos.

Neste experimento três diferentes intensidades de acoplamento  $\eta$  são consideradas, a saber, um acoplamento fraco no valor de  $\eta = 0,01$ , um médio de  $\eta = 0,035$  e um forte de  $\eta = 0,05$ .

A Figura 6.2 mostra o espectro de energia *wavelet* e a fase obtidas da análise utilizando a variável  $x$  e considerando as três intensidades de acoplamento estudadas. A Figura 6.3 mostra o espectro de energia *wavelet* e a fase obtidas da análise utilizando a variável  $y$  e considerando as três intensidades de acoplamento estudadas. Nota-se que para ambos os casos, utilizando a variável  $x$  ou  $y$ , conforme ilustrado em Fig. 6.2 e Fig 6.3, a escala de máxima energia é  $J = 9$  e a fase é calculada considerando esta escala.

A diferença de fase entre os sistemas é mostrada na Figura 6.4 considerando o método *wavelet* proposto utilizando a variável  $x$  (notação  $\Delta\phi_x^{J=9}$ ) em (a) e, utilizando a variável  $y$  (notação  $\Delta\phi_y^{J=9}$ ) em (b). Na Figura 6.4(c) ilustra-se a diferença de fase considerando o método arco-tangente (notação  $\Delta\phi^{\text{arco-tangente}}$ ) e em (d) o método *wavelet* proposto utilizando ambas as variáveis e comparado com o método arco-

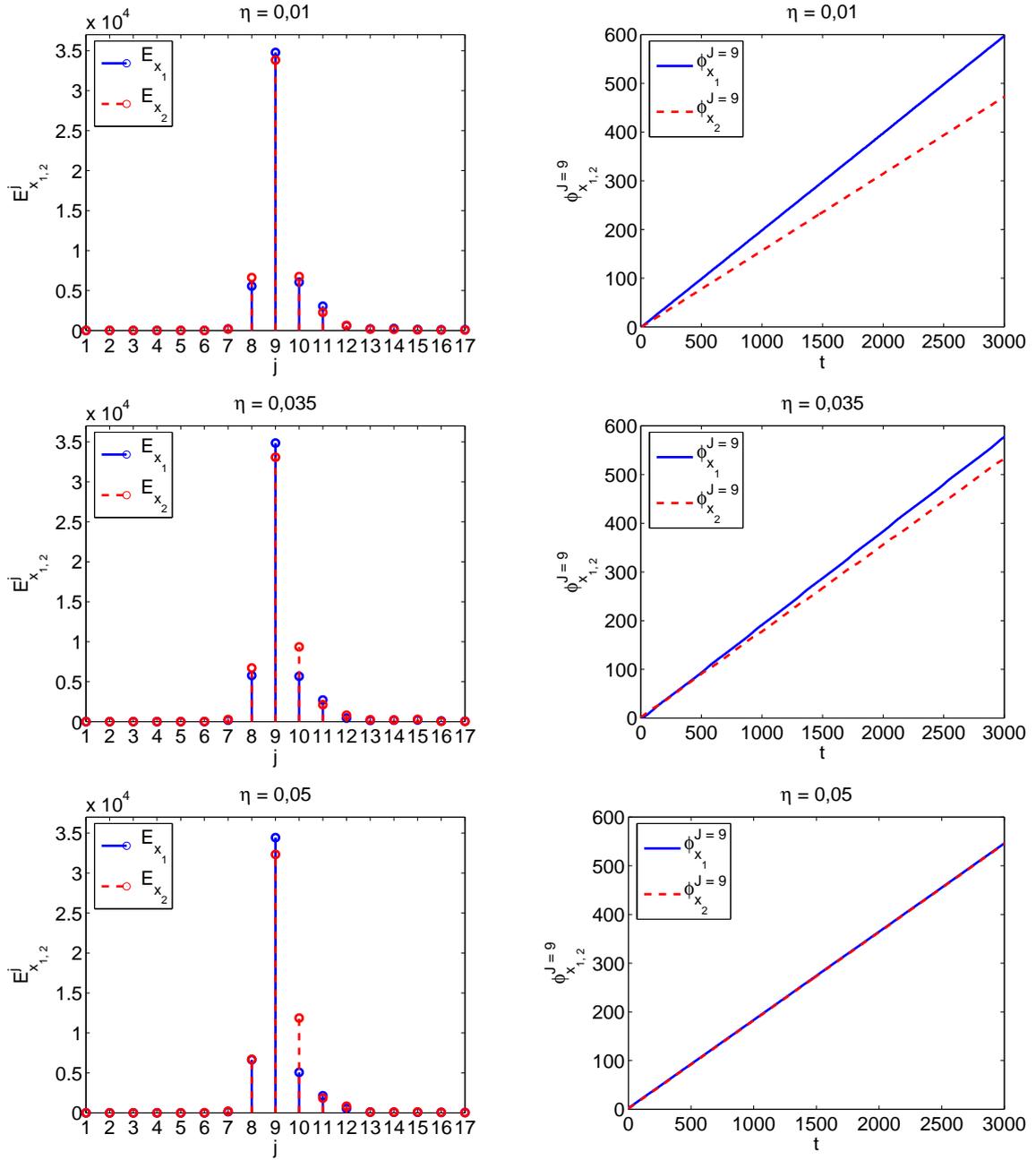


Figura 6.2 - Experimento  $R_1$ . Espectro de energia *wavelet* e a fase obtidas da análise utilizando a variável  $x$  e considerando as três intensidades de acoplamento estudadas. Aqui, a notação  $E_{x_1}$  e  $E_{x_2}$  representa a energia calculada utilizando a variável  $x$  para os sistemas 1 e 2, respectivamente. Já,  $\phi_{x_1}^{J=9}$  e  $\phi_{x_2}^{J=9}$  indica a fase calculada utilizando a variável  $x$  para os sistemas 1 e 2, respectivamente e considerando a escala de máxima energia  $J = 9$ .

tangente quando se considera a intensidade de acoplamento  $\eta = 0,035$ . Nota-se que para uma intensidade de acoplamento pequena no valor de  $\eta = 0,01$ , a diferença de fase cresce ao longo do tempo caracterizando que os dois sistemas não estão

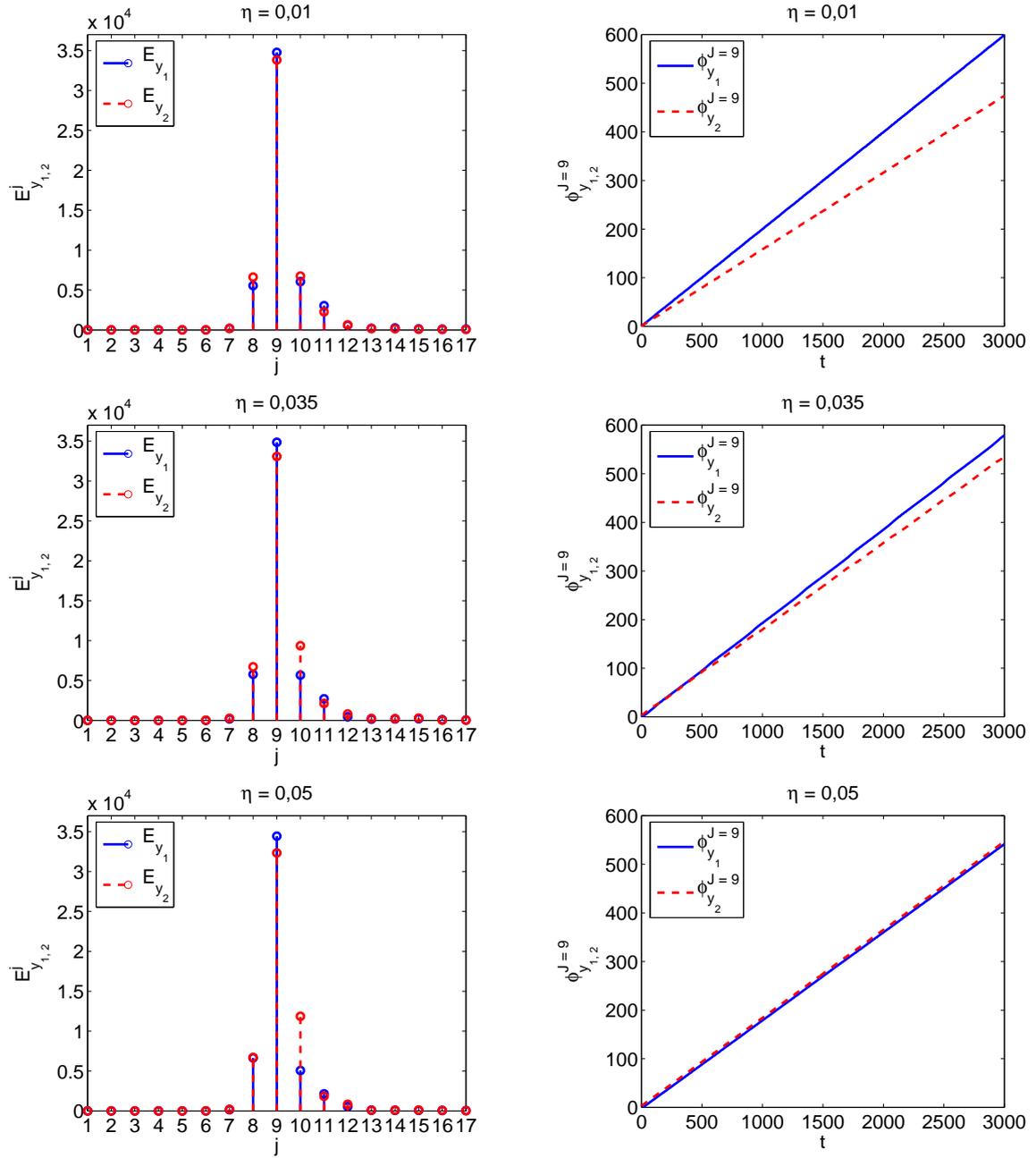


Figura 6.3 - Experimento  $R_1$ . Espectro de energia *wavelet* e a fase obtidas da análise utilizando a variável  $y$  e considerando as três intensidades de acoplamento estudadas. Aqui, a notação  $E_{y_1}$  e  $E_{y_2}$  representa a energia calculada utilizando a variável  $y$  para os sistemas 1 e 2, respectivamente. Já,  $\phi_{y_1}^{J=9}$  e  $\phi_{y_2}^{J=9}$  indica a fase calculada utilizando a variável  $y$  para os sistemas 1 e 2, respectivamente e considerando a escala de máxima energia  $J = 9$ .

sincronizados em fase.

Aumentando a intensidade de acoplamento para o valor de  $\eta = 0,035$ , ocorrem 8

regiões de deslizamentos de fase (do inglês, *phase slips*), conforme apresenta-se na Figura 6.4(d). No intervalo  $t \approx [0, 250]$ , as diferenças de fase  $\Delta\phi_x^{wavelet}$  e  $\Delta\phi_y^{wavelet}$  vão do valor de  $-1,5\pi$  para  $0,5\pi$ . Em  $t \approx [400, 700]$  ocorre que o valor de  $0,5\pi$  altera-se para  $2,5\pi$ . No intervalo  $t \approx [800, 1050]$  ocorre o deslizamento de  $2,5\pi$  para  $4,5\pi$ . Em  $t \approx [1150, 1500]$  de  $4,5\pi$  para  $6,5\pi$ . No intervalo  $t \approx [1600, 1850]$  o valor vai de  $6,5\pi$  para  $8,5\pi$ . Em  $t \approx [1900, 2200]$  ocorre a mudança do valor de  $8,5\pi$  para  $10,5\pi$ . No intervalo  $t \approx [2350, 2650]$  a mudança vai de  $10,5\pi$  para  $12,5\pi$ . Em  $t \approx [2800, 3100]$  o valor da diferença de fase vai de  $12,5\pi$  para  $14,5\pi$ .

Quando  $\eta = 0,05$  ocorre a sincronização de fase entre os sistemas, ou seja, a diferença de fase utilizando a variável  $x$  (Figura 6.4(a)) é de  $\Delta\phi_x^{J=9} \approx 0,25\pi$  e utilizando a variável  $y$  (Figura 6.4(b)) é de  $\Delta\phi_y^{J=9} \approx -1,7\pi$ . Observe que o método *wavelet dt-cwt* proposto apresenta resultados similares quando comparados com o método arco-tangente, conforme pode ser visto na Figura 6.4(c). No entanto, para a utilização do método arco-tangente é necessário conhecer duas variáveis, por exemplo, a variável  $x$  e  $y$  do sistema. Outro fator notável é que no método *wavelet dt-cwt* proposto os resultados são iguais usando ambas as variáveis  $x$  ou  $y$  do sistema.

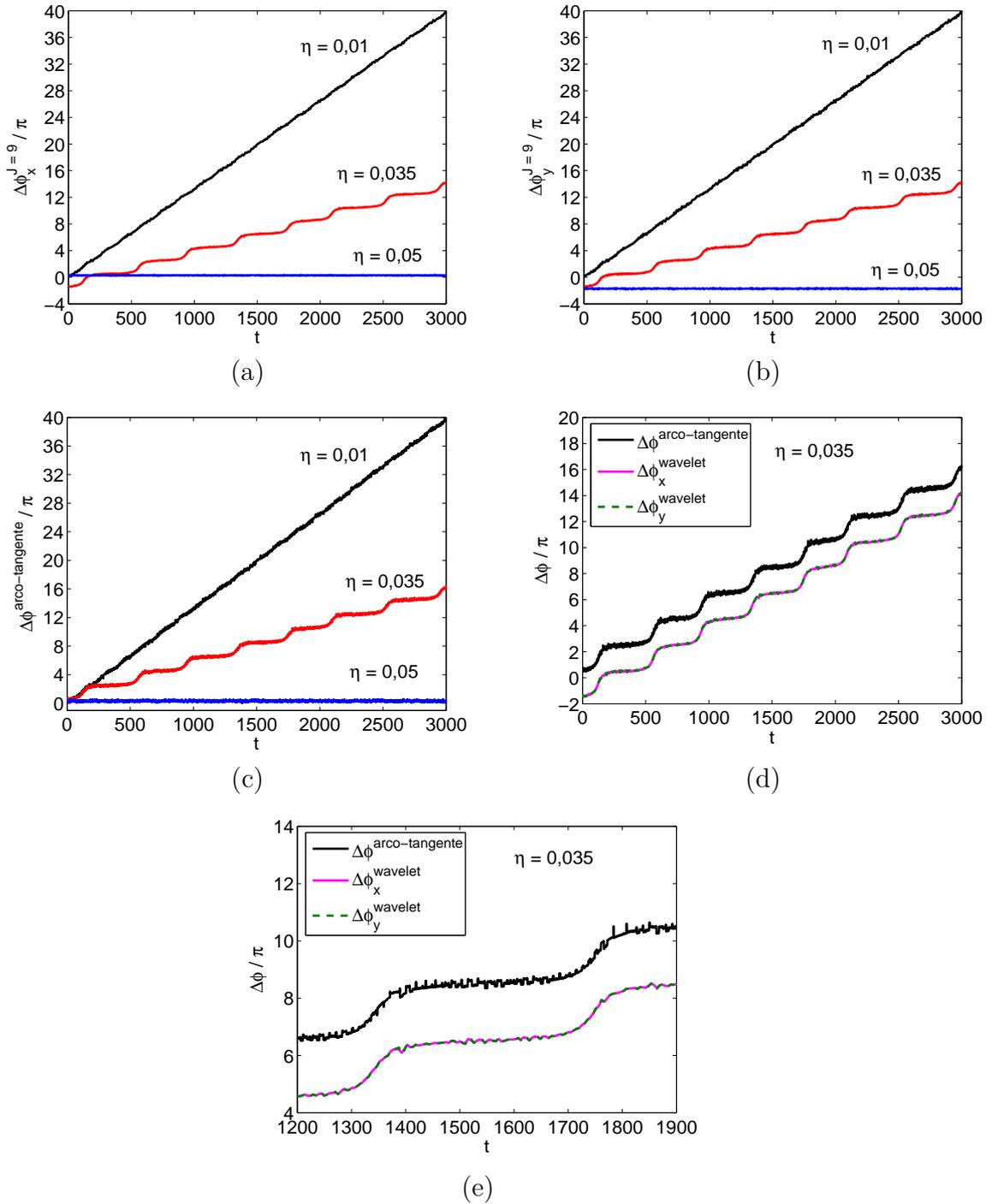


Figura 6.4 - Experimento  $R_1$ . Diferença de fase aplicando em (a) o método *wavelet dt-cwt* proposto utilizando a variável  $x$ ,  $\Delta\phi_x^{J=9}$ ; (b) o método *wavelet dt-cwt* proposto utilizando a variável  $y$ ,  $\Delta\phi_y^{J=9}$ ; (c) o método arco-tangente,  $\Delta\phi_{\text{arco-tangente}}$ ; (d) o método *wavelet dt-cwt* proposto usando ambas as variáveis  $x$  e  $y$  do sistema, e comparados com o método arco-tangente quando se considera a intensidade de acoplamento  $\eta = 0,035$  e em (e) zoom do gráfico apresentado no item (d).

### 6.1.3 Sistema de Rössler em regime de fase não coerente

Nesta subseção apresenta-se os resultados obtidos da análise de dois sistemas de Rössler não-idênticos em regime de fase não coerente sob diferentes configurações de acoplamentos. Em três experimentos os dois sistemas estão acoplados bidirecionalmente sendo que, por meio da variável  $x$  no Experimento  $R_2$ ; por meio da variável  $y$  no Experimento  $R_3$ ; por meio da variável  $x$  e  $y$  no Experimento  $R_4$ . No Experimento  $R_5$  os dois sistemas estão acoplados unidirecionalmente por meio da variável  $x$ .

Em todos estes experimentos a série temporal foi considerada com  $N = 2^{23}$  pontos.

#### 6.1.3.1 Experimento $R_2$

Neste caso consideram-se dois sistemas de Rössler não-idênticos em regime de fase não coerente acoplados bidirecionalmente por meio da variável  $x$ . O sistema de equações é dado pelas equações descritas em (6.2) e os parâmetros considerados foram baseados no estudos em (FOLLMANN et al., 2011; PIKOVSKY; ROSENBLUM, 2003).

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2} y_{1,2} - z_{1,2} + \eta(x_{2,1} - x_{1,2}) \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2} x_{1,2} + 0,2925 y_{1,2} \\ \dot{z}_{1,2} &= 0,4 + z_{1,2}(x_{1,2} - 8,5).\end{aligned}\tag{6.2}$$

Os sistemas são não-idênticos sendo que  $\omega_1 = 0,98$  e  $\omega_2 = 1,02$ . Para a resolução do sistema utilizou-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem com condição inicial do sistema 1 sendo  $(0, 1, 0)$  e do sistema 2 sendo  $(-5, 4, 5)$  e passo de integração de  $0,01$ . Três diferentes intensidades de acoplamento são consideradas: uma fraca com  $\eta = 0,05$ , uma média com  $\eta = 0,15$  e uma forte com  $\eta = 0,2$ .

A Figura 6.5 ilustra o espectro de energia *wavelet* e a fase obtidas da análise utilizando a variável  $x$  e considerando as três intensidades de acoplamento estudadas. A Figura 6.6 mostra o espectro de energia *wavelet* e a fase obtidas da análise utilizando a variável  $y$  e considerando as três intensidades de acoplamento estudadas. Observa-se das Fig 6.5 e Fig 6.6 que a escala de máxima energia é a escala  $J = 9$ , exceto quando  $\eta = 0,15$  utilizando-se a variável  $y$ . Na Figura 6.6 observe no espectro que quando  $\eta = 0,15$ , a escala de máxima energia para ambos os sistemas é a escala  $J = 17$ . No entanto, depois de testes, verificou-se que esta escala não é apropriada para calcular a fase, devido ao fato de que nesta escala a série temporal da fase apresenta poucos pontos, não possibilitando uma análise correta da mesma. Assim,

considera-se a escala  $J = 9$  no cálculo da fase.

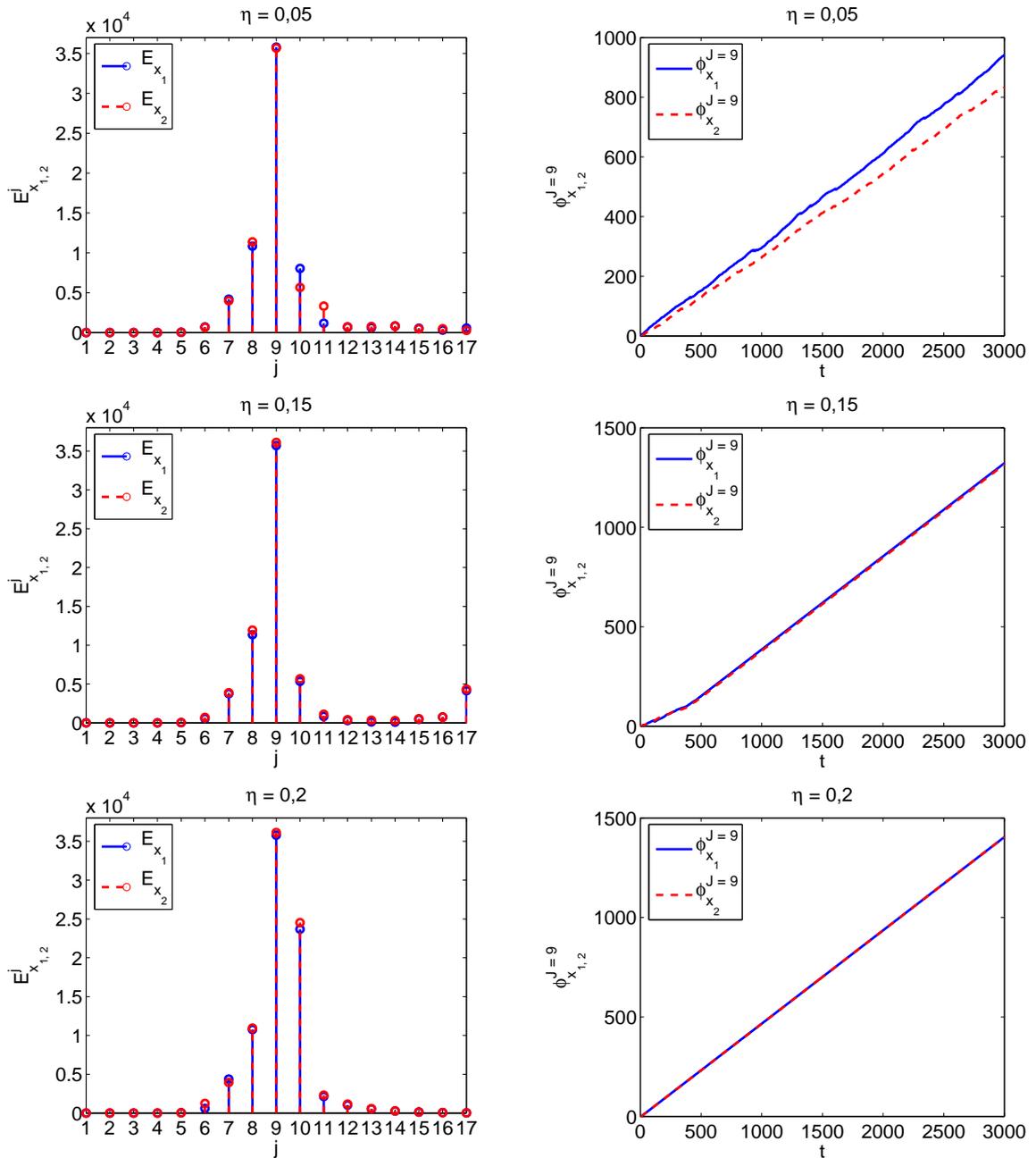


Figura 6.5 - Experimento  $R_2$ . Espectro de energia *wavelet* e a fase obtidas da análise utilizando a variável  $x$  e considerando as três intensidades de acoplamento estudadas.

A diferença de fase entre os dois sistemas é mostrada na Figura 6.7 considerando em (a) o método *wavelet dt-cut* proposto utilizando a variável  $x$ ,  $\Delta\phi_x^{J=9}$ ; (b) o

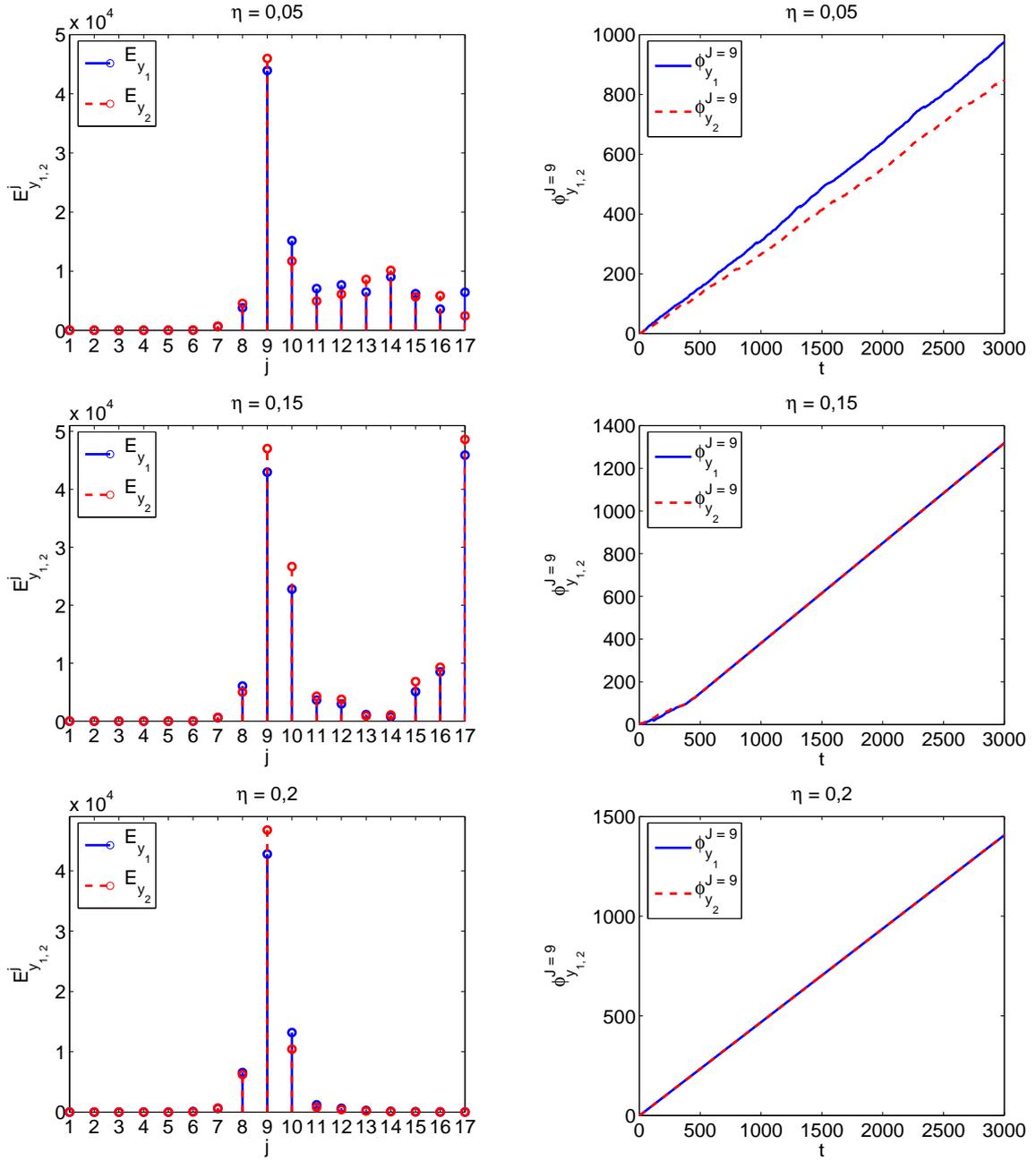


Figura 6.6 - Experimento  $R_2$ . Espectro de energia *wavelet* e a fase obtidas da análise utilizando a variável  $y$  e considerando as três intensidades de acoplamento estudadas.

método *wavelet dt-cwt* proposto utilizando a variável  $y$ ,  $\Delta\phi_y^{J=9}$  e (c) o método baseado na função arco-tangente,  $\Delta\phi^{arco-tangente}$ . Na Figura 6.7(d) ilustra-se um zoom,  $t = [0, 600]$ , da diferença de fase entre os sistemas utilizando o método *wavelet dt-cwt* proposto com ambas as variáveis  $x$  e  $y$ ,  $\Delta\phi_x^{wavelet}$  e  $\Delta\phi_y^{wavelet}$ , comparado com o método arco-tangente,  $\Delta\phi^{arco-tangente}$ , considerando a intensidade de acoplamento

$\eta = 0,15$ . Para uma intensidade de acoplamento pequena no valor de  $\eta = 0,05$ , a diferença de fase cresce ao longo do tempo caracterizando que os sistemas não estão sincronizados em fase. Aumentando a intensidade para  $\eta = 0,15$ , são detectados três deslizamentos de fase quando se utiliza a variável  $x$  do sistema e quatro deslizamentos são detectados quando se utiliza a variável  $y$  do sistema, conforme pode ser visualizado na Figura 6.7(d). Até  $t \approx 20$ , tem-se que  $\Delta\phi_x^{wavelet} = \Delta\phi_y^{wavelet} \approx 0$ . Depois de  $t \approx 25$ , ocorre que  $\Delta\phi_x^{wavelet} \approx 0$  e  $\Delta\phi_y^{wavelet}$  detecta um deslizamento de fase alterando o seu valor de 0 para o valor de  $-2\pi$ . Em  $t \approx 105$ , o valor de  $\Delta\phi_x^{wavelet}$  vai de 0 para  $-2\pi$  e o valor de  $\Delta\phi_y^{wavelet}$  vai de  $-2\pi$  para  $-4\pi$ . Quando  $t \approx 200$ , tem-se que  $\Delta\phi_x^{wavelet}$  muda de valor de  $-2\pi$  para 0 e  $\Delta\phi_y^{wavelet}$  muda de  $-4\pi$  para  $-2\pi$ . Em  $t \approx 290$ , tem-se que  $\Delta\phi_x^{wavelet}$  vai de 0 para  $2\pi$  e  $\Delta\phi_y^{wavelet}$  vai de  $-2\pi$  para 0.

Quando  $\eta = 0,2$  os dois sistemas encontram-se sincronizados em fase e a diferença de fase é de  $\Delta\phi_x^{wavelet} = \Delta\phi_y^{wavelet} \approx 0,05$ .

Observa-se na Figura 6.7(d) que o método arco-tangente não consegue verificar os deslizamentos de fase corretamente, visto que são detectados aproximadamente 11 deslizamentos e, verificando na série temporal, existem apenas três deslizamentos de fase. Logo, o método arco-tangente falha na detecção dos deslizamentos de fase. Já, o método *wavelet dt-cwt* proposto é capaz de encontrar corretamente as três regiões em que ocorrem os deslizamentos de fase e, apresenta resultados similares utilizando-se de ambas as variáveis  $x$  e  $y$ .

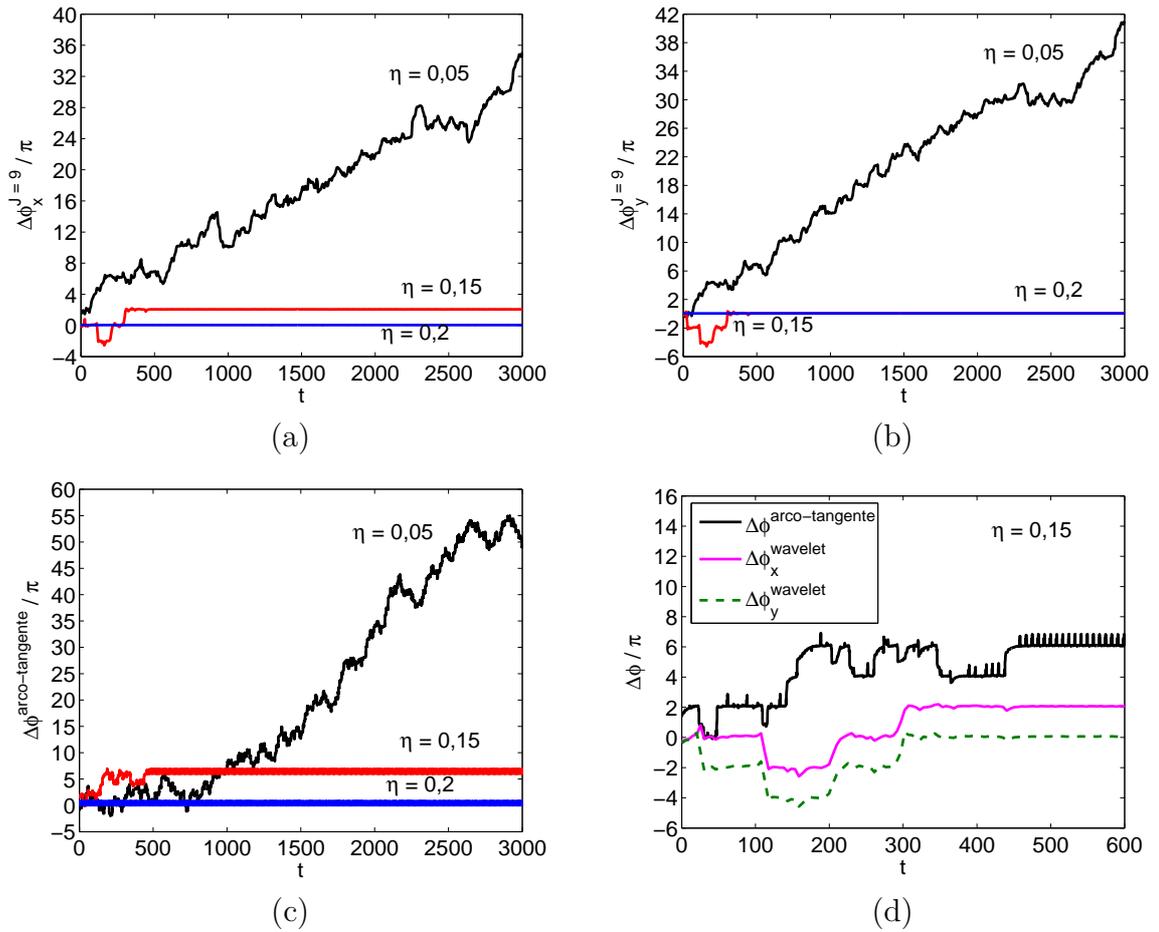


Figura 6.7 - Experimento  $R_2$ . Diferença de fase aplicando em (a) o método *wavelet dt-cut* proposto usando a variável  $x$ ,  $\Delta\phi_x^{\text{wavelet}}$ ; (b) o método *wavelet dt-cut* proposto usando a variável  $y$ ,  $\Delta\phi_y^{\text{wavelet}}$ ; (c) o método baseado na função arco-tangente,  $\Delta\phi^{\text{arco-tangente}}$  e em (d) o método *wavelet dt-cut* proposto usando ambas as variáveis  $x$  e  $y$  comparado com o método arco-tangente considerando  $\eta = 0,15$  no intervalo de tempo  $t = [0, 600]$ .

### 6.1.3.2 Experimento $R_3$

Neste experimento tem-se dois sistemas de Rössler não-idênticos em regime de fase não coerente acoplados bidirecionalmente por meio da variável  $y$ . O sistema é dado pelas equações descritas em (6.3) e os parâmetros foram baseados considerando os estudos em (FOLLMANN et al., 2011; ROMANO et al., 2005).

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2} y_{1,2} - z_{1,2} \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2} x_{1,2} + 0,2925 y_{1,2} + \eta (y_{2,1} - y_{1,2}) \\ \dot{z}_{1,2} &= 0,4 + z_{1,2} (x_{1,2} - 8,5).\end{aligned}\tag{6.3}$$

Os dois sistemas são não idênticos sendo que é considerado  $\omega_1 = 0,98$  e  $\omega_2 = 1,02$ . Para a resolução do sistema utilizou-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem com condição inicial do sistema 1 igual a  $(0, 1, 0)$  e do sistema 2 igual a  $(-5, 4, 5)$  e passo de integração de  $0,01$ . Três diferentes intensidades de acoplamento são consideradas: uma intensidade fraca no valor de  $\eta = 0,05$ , uma média no valor de  $\eta = 0,17$  e uma forte com  $\eta = 0,23$ .

A Figura 6.8 mostra o espectro de energia *wavelet* e a fase obtidas da análise utilizando a variável  $x$  e considerando as três intensidades de acoplamento estudadas. A Figura 6.9 mostra o espectro de energia *wavelet* e a fase obtidas da análise utilizando a variável  $y$  e considerando as três intensidades de acoplamento estudadas. Analisando o espectro das Figuras 6.8 e Fig. 6.9 nota-se que a escala de máxima energia é a escala  $J = 9$ . Na Figura 6.9, observa-se que quando  $\eta = 0,17$  um segundo pico de energia é encontrado em  $J = 17$  e, quando  $\eta = 0,23$  um segundo pico é encontrado em  $J = 16$ . Estes segundos picos não são considerados na análise devido ao fato da série temporal da fase, nestas escalas, apresentarem poucos pontos para análise. E, a escala de máxima energia  $J = 9$  é a considerada no cálculo da fase.

A diferença de fase entre os dois sistemas é mostrada na Figura 6.10 considerando em (a) o método *wavelet dt-cwt* proposto usando a variável  $x$ ,  $\Delta\phi_x^{J=9}$ ; (b) o método *wavelet dt-cwt* proposto usando a variável  $y$ ,  $\Delta\phi_y^{J=9}$ ; (c) o método arco-tangente,  $\Delta\phi^{\text{arco-tangente}}$  e em (d) o método arco-tangente e o método *wavelet dt-cwt* proposto usando ambas as variáveis  $x$  e  $y$  e, considerando a intensidade de acoplamento  $\eta = 0,17$ .

Para uma intensidade de acoplamento pequena  $\eta = 0,05$ , a diferença de fase cresce ao longo do tempo caracterizando que os sistemas não estão sincronizados em fase. Aumentando a intensidade para  $\eta = 0,17$  ocorrem regiões em que há deslizamentos

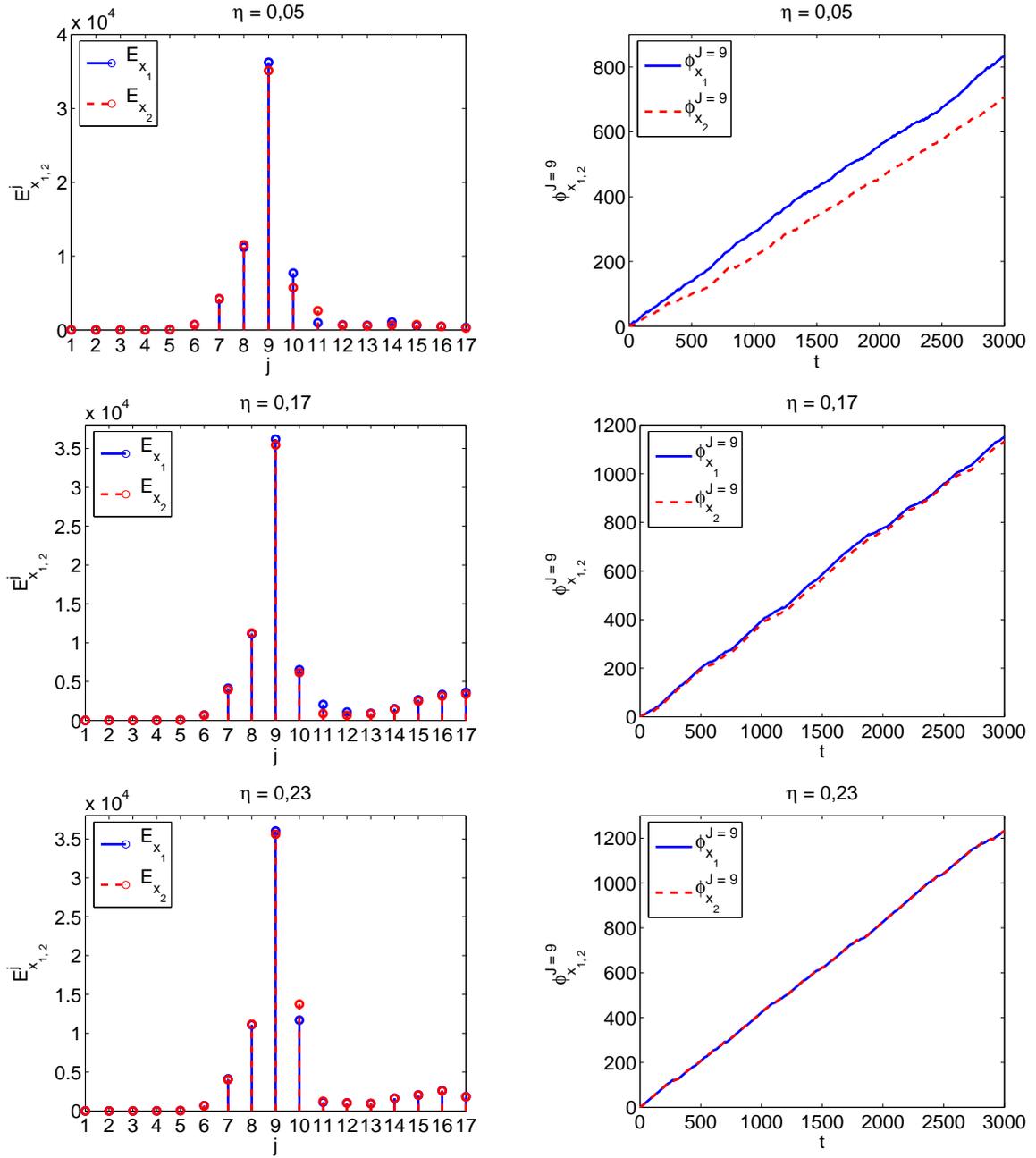


Figura 6.8 - Experimento  $R_3$ . Espectro de energia *wavelet* e a fase obtidas da análise utilizando a variável  $x$  e considerando as três intensidades de acoplamento estudadas.

de fase e quando  $\eta = 0,23$  os dois sistemas tornam-se sincronizados em fase com  $\Delta\phi_x^{wavelet} \approx \Delta\phi_y^{wavelet} \approx 0,05$ .

A Figura 6.11 ilustra um zoom dos intervalos em que ocorrem os deslizamentos de fase quando se considera a intensidade de acoplamento  $\eta = 0,17$ . Considerando a

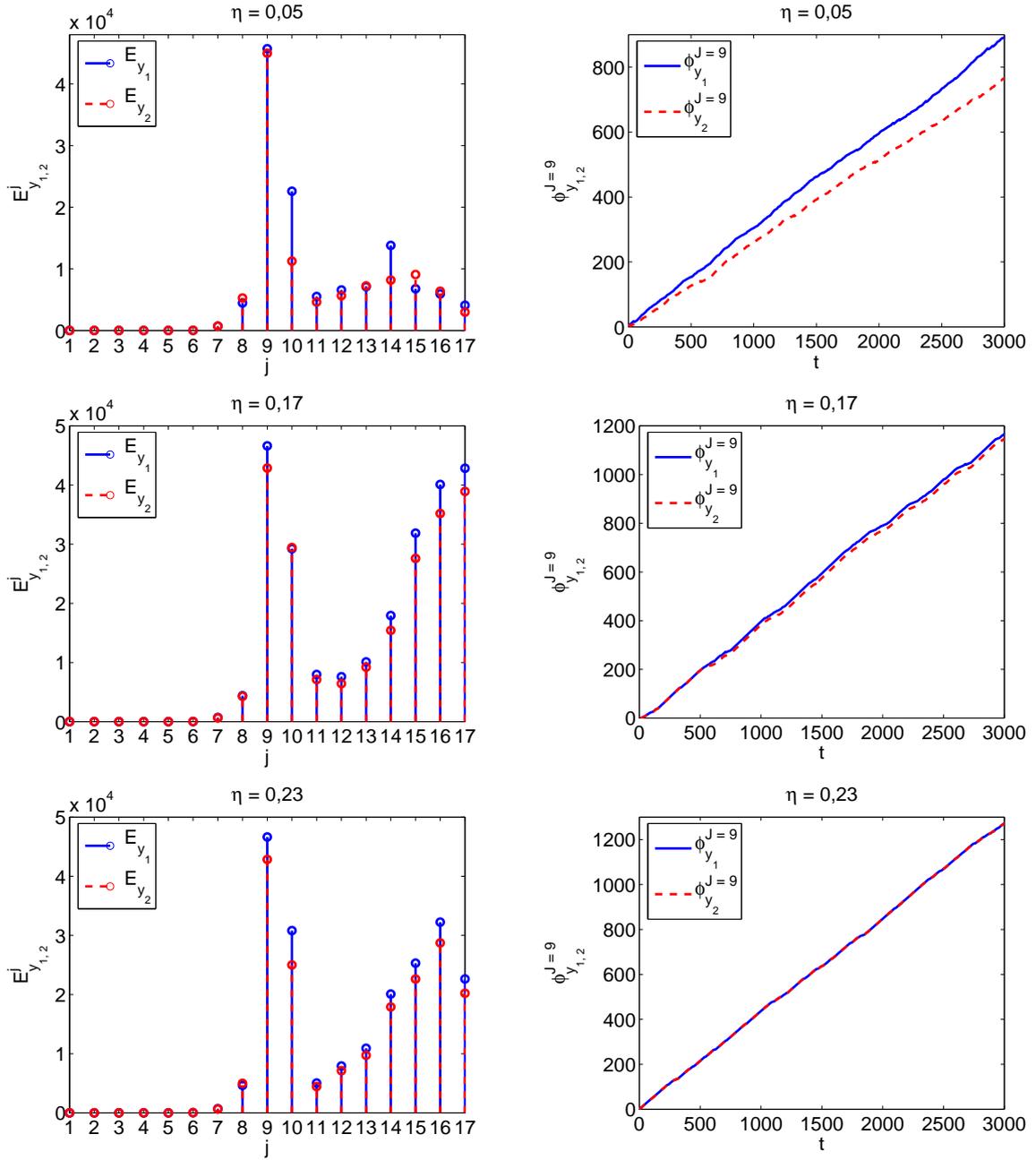


Figura 6.9 - Experimento  $R_3$ . Espectro de energia *wavelet* e a fase obtidas da análise utilizando a variável  $y$  e considerando as três intensidades de acoplamento estudadas.

aplicação do método *wavelet dt-cwt* utilizando a variável  $x$ , detectam-se 7 regiões de deslocamentos de fase e utilizando a variável  $y$  detectam-se três regiões de deslocamentos de fase. No intervalo  $t = [0, 140]$  tem-se que em  $t = [0, 55]$  ambas as diferenças de fase encontram-se ao redor do valor zero, ou seja,  $\Delta\phi_x^{wavelet} \approx \Delta\phi_y^{wavelet} \approx 0$ . Quando  $t = [55, 65]$ , o valor de  $\Delta\phi_x^{wavelet}$  muda para  $\Delta\phi_x^{wavelet} \approx 2\pi$  e o valor de

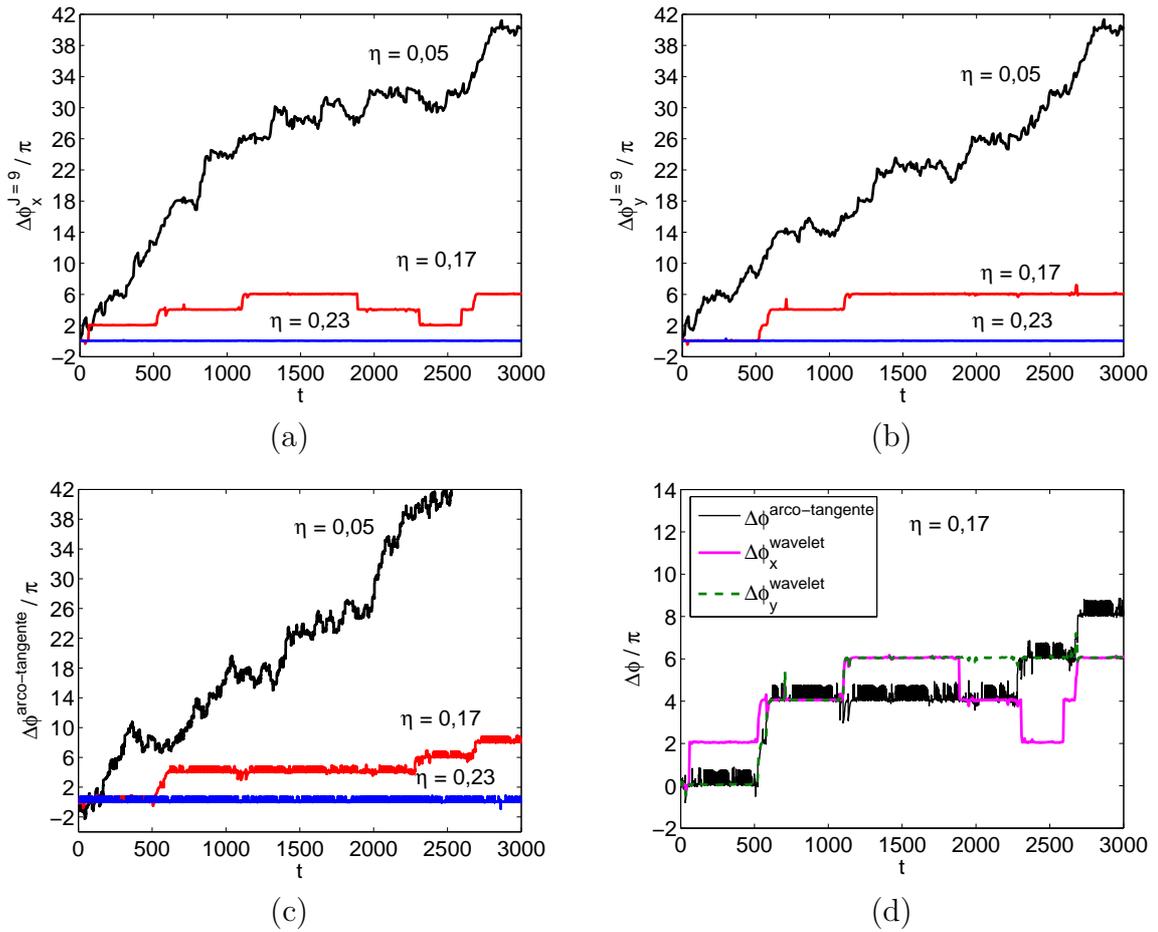


Figura 6.10 - Experimento  $R_3$ . Diferença de fase aplicando em (a) o método *wavelet dt-cwt* proposto usando a variável  $x$ ,  $\Delta\phi_x^{J=9}$ ; (b) o método *wavelet dt-cwt* proposto usando a variável  $y$ ,  $\Delta\phi_y^{J=9}$ ; (c) o método arco-tangente,  $\Delta\phi^{\text{arco-tangente}}$ ; (d) o método *wavelet dt-cwt* proposto usando ambas as variáveis  $x$  e  $y$ , denotados por  $\Delta\phi_x^{\text{wavelet}}$  e  $\Delta\phi_y^{\text{wavelet}}$  respectivamente, comparados com o método arco-tangente considerando  $\eta = 0,17$ .

$\Delta\phi_y^{\text{wavelet}}$  permanece igual a 0, conforme pode ser visualizado na Figura 6.11(a).

Em  $t \approx [520, 585]$ , ocorre um deslizamento de fase com  $\Delta\phi_x^{\text{wavelet}}$  mudando de  $2\pi$  para  $4\pi$  e  $\Delta\phi_y^{\text{wavelet}}$  mudando de 0 para  $2\pi$ , conforme pode ser visualizado na Figura 6.11(b).

No intervalo  $t = [1050, 1190]$  ocorre um deslizamento de fase em quem  $\Delta\phi_x^{\text{wavelet}} \approx \Delta\phi_y^{\text{wavelet}}$  passam de  $4\pi$  para  $6\pi$ , conforme pode ser visualizado na Figura 6.11(c). No intervalo  $t = [1800, 2000]$  a diferença de fase  $\Delta\phi_y^{\text{wavelet}}$  continua em torno de  $6\pi$  e a diferença de fase  $\Delta\phi_x^{\text{wavelet}}$  cai para  $4\pi$  em torno de  $t \approx 1880$ , conforme pode ser visualizado na Figura 6.11(d). No intervalo  $t = [2200, 2400]$  temos que a diferença de

fase  $\Delta\phi_y^{wavelet}$  continua em torno de  $6\pi$  e a diferença de fase  $\Delta\phi_x^{wavelet}$  em torno de  $t \approx 2300$  cai para  $2\pi$ , conforme pode ser visualizado na Figura 6.11(e). No intervalo  $t = [2500, 2650]$  temos que a diferença de fase  $\Delta\phi_y^{wavelet}$  continua em torno de  $6\pi$  e a diferença de fase  $\Delta\phi_x^{wavelet}$  em torno de  $t \approx 2580$  cresce para  $4\pi$ , conforme pode ser visualizado na Figura 6.11(f). Em  $t \approx 2690$ , ocorre um deslizamento de fase e ambas as diferenças de fase tornam-se  $\Delta\phi_x^{wavelet} \approx \Delta\phi_y^{wavelet} \approx 6\pi$ , conforme pode ser visualizado na Figura 6.11(f).

Verificando na série temporal, constata-se que nos intervalos  $t = [0, 140]$ ,  $t = [1800, 2000]$ ,  $t = [2200, 2400]$  e  $t = [2500, 2650]$  não ocorrem deslizamentos de fase, porém algo é detectado pelo método. Com o objetivo de analisar o que ocorre nestes intervalos, o primeiro deslizamento em  $t = [50, 70]$  é analisado.

A Figura 6.12 ilustra uma análise do Experimento  $R_3$  no intervalo  $t = [50, 70]$  onde ocorre o primeiro deslizamento de fase. Em (a) a diferença de fase considerando a intensidade de acoplamento  $\eta = 0,17$  marcando com um círculo em vermelho o primeiro deslizamento em  $t = [50, 70]$ ; (b) a diferença de fase  $\Delta\phi_{x,y}^{J=9}$  usando ambas as variáveis  $x$  e  $y$  mostrando os 4 pontos  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$  pertencentes ao intervalo do primeiro deslizamento; (c) a fase  $\phi^{J=9}$  de cada sistema e em cada variável,  $\phi_{x_1}, \phi_{x_2}, \phi_{y_1}$  e  $\phi_{y_2}$  no intervalo do primeiro deslizamento  $t = [50, 70]$  e em (d) a série temporal das variáveis  $x_1, x_2, y_1$  e  $y_2$  no intervalo do primeiro deslizamento  $t = [50, 70]$ . Nota-se na Figura 6.12(b) no intervalo  $t \approx [56, 62]$  que a diferença de fase  $\Delta\phi_x^{wavelet}$  altera o seu valor de 0 para  $2\pi$ , referente aos pontos  $P_2$  e  $P_3$ , e  $\Delta\phi_y^{wavelet}$  permanece em torno de 0. Neste mesmo intervalo de tempo, observe que a fase  $\phi_{x_2}$  tem sua evolução bruscamente alterada, conforme ilustrado em (c). Analisando a série temporal, conforme ilustrado em (d), nota-se que, neste intervalo, as oscilações  $x_1$  e  $x_2$  estão opostas com relação as oscilações  $y_1$  e  $y_2$ . Assim, acredita-se que devido a este fato tenha ocorrido a mudança no valor da diferença de fase  $\Delta\phi_x^{wavelet}$  e, não propriamente devido a um deslizamento de fase entre os sistemas.

Ainda analisando este intervalo do primeiro deslizamento  $t = [50, 70]$ , a Figura 6.13 ilustra o gráfico dos coeficientes complexos de cada sistema 1 e 2 nas variáveis  $x$  e  $y$ , denotados por  $z_{x_1}$  (coeficiente complexo do sistema 1 na variável  $x$ ),  $z_{x_2}, z_{y_1}, z_{y_2}$  dos 4 pontos  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$  pertencentes ao intervalo do primeiro deslizamento. Nota-se que do ponto  $P_2$  para  $P_3$  os valores de  $z_{x_1}$  e  $z_{x_2}$  “confundem” se rotacionam no sentido horário ou anti-horário do ciclo trigonométrico e “pulam” do segundo quadrante para o quarto quadrante. Este problema ocorre devido à limitação da função `unwrap`, a qual é utilizada para corrigir os ângulos de fase a fim de produzir

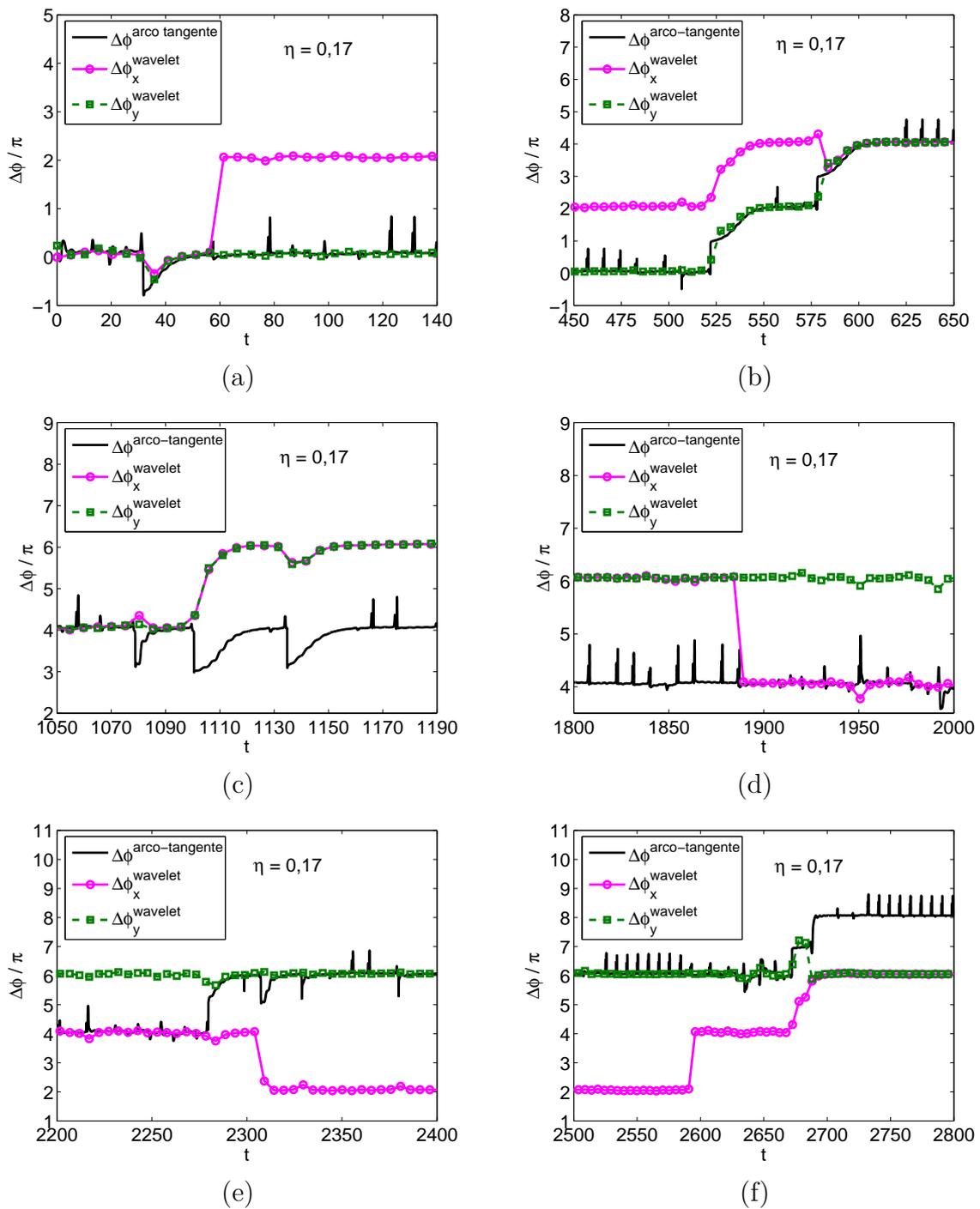


Figura 6.11 - Experimento  $R_3$ . Análise da diferença de fase quando  $\eta = 0,17$  considerando os seguintes intervalos em (a)  $t = [0, 140]$ ; (b)  $t \approx [450, 650]$ ; (c)  $t = [1050, 1190]$ ; (d)  $t = [1800, 2000]$ ; (e)  $t = [2200, 2400]$  e em (f)  $t = [2500, 2800]$ .

plots de fase suaves. Para uma descrição da função `unwrap` veja o Apêndice C .

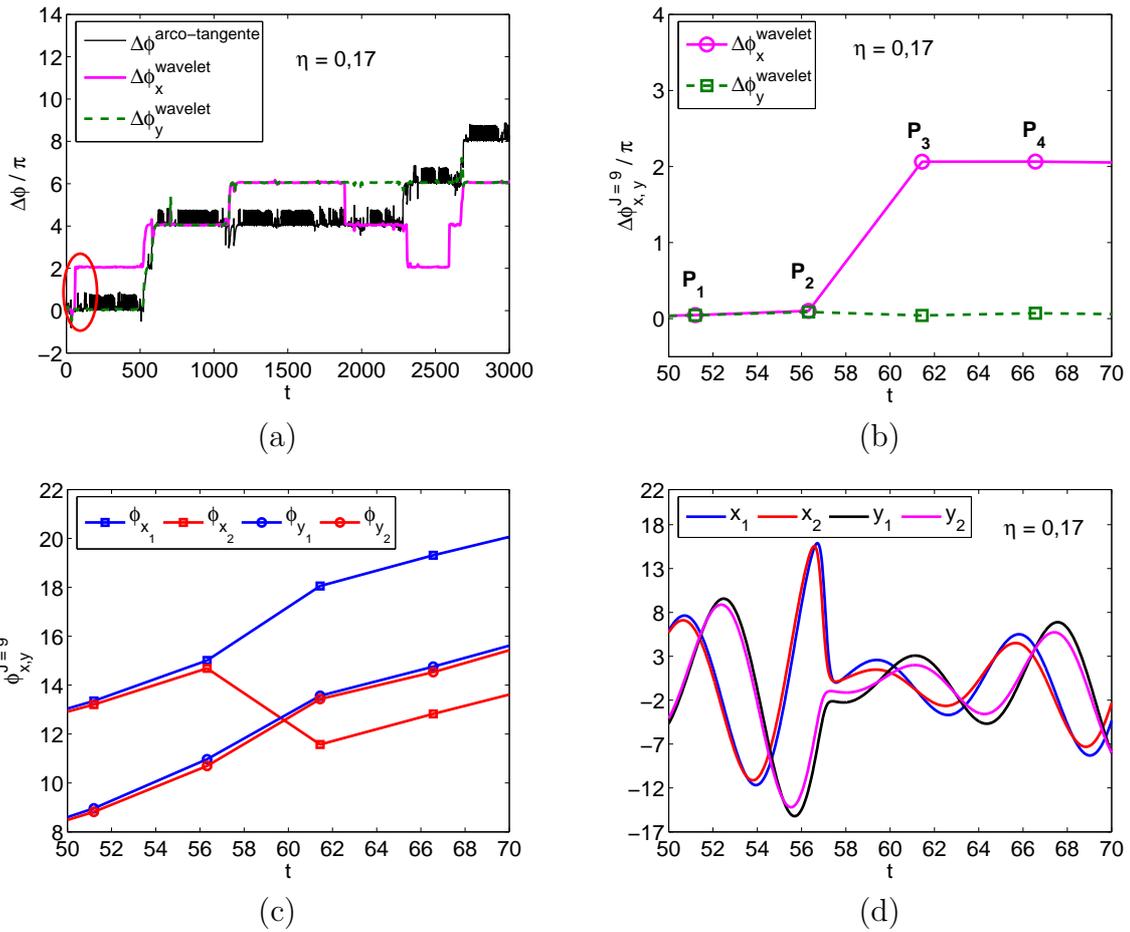


Figura 6.12 - Experimento  $R_3$ . Análise considerando  $\eta = 0,17$  tendo em (a) diferença de fase quando  $\eta = 0,17$  marcando com um círculo em vermelho o primeiro deslizamento  $t = [50, 70]$ ; (b) a diferença de fase  $\Delta\phi_{x,y}^{J=9}$  usando ambas as variáveis  $x$  e  $y$  mostrando os 4 pontos  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$  pertencentes ao intervalo do primeiro deslizamento; (c) a fase  $\phi_{x,y}^{J=9}$  de cada sistema e em cada variável,  $\phi_{x_1}, \phi_{x_2}, \phi_{y_1}$  e  $\phi_{y_2}$  no intervalo do primeiro deslizamento, e em (d) a série temporal das variáveis  $x_1, x_2, y_1$  e  $y_2$  no intervalo do primeiro deslizamento.

Com o objetivo de tentar melhorar a função `unwrap`, foi implementada uma função `my-unwrap`. Para detalhes destas funções veja o Apêndice C.

A Figura 6.14 ilustra os gráficos obtidos das análises feitas utilizando-se a função `unwrap`. Na Figura 6.14(a) ilustra-se o resultado utilizando a função `unwrap` do *GNU/Octave*, a qual detecta erroneamente alguns deslizamentos de fase quando se utiliza o método *wavelet dt-cwt* considerando a variável  $x$ . Em Fig. 6.14(b), apresenta-se o resultado utilizando a função `my-unwrap` quando aplicada em ambas as variáveis  $x$  e  $y$ . Note que os resultados para  $\Delta\phi_y^{wavelet}$  são suavizados e não é

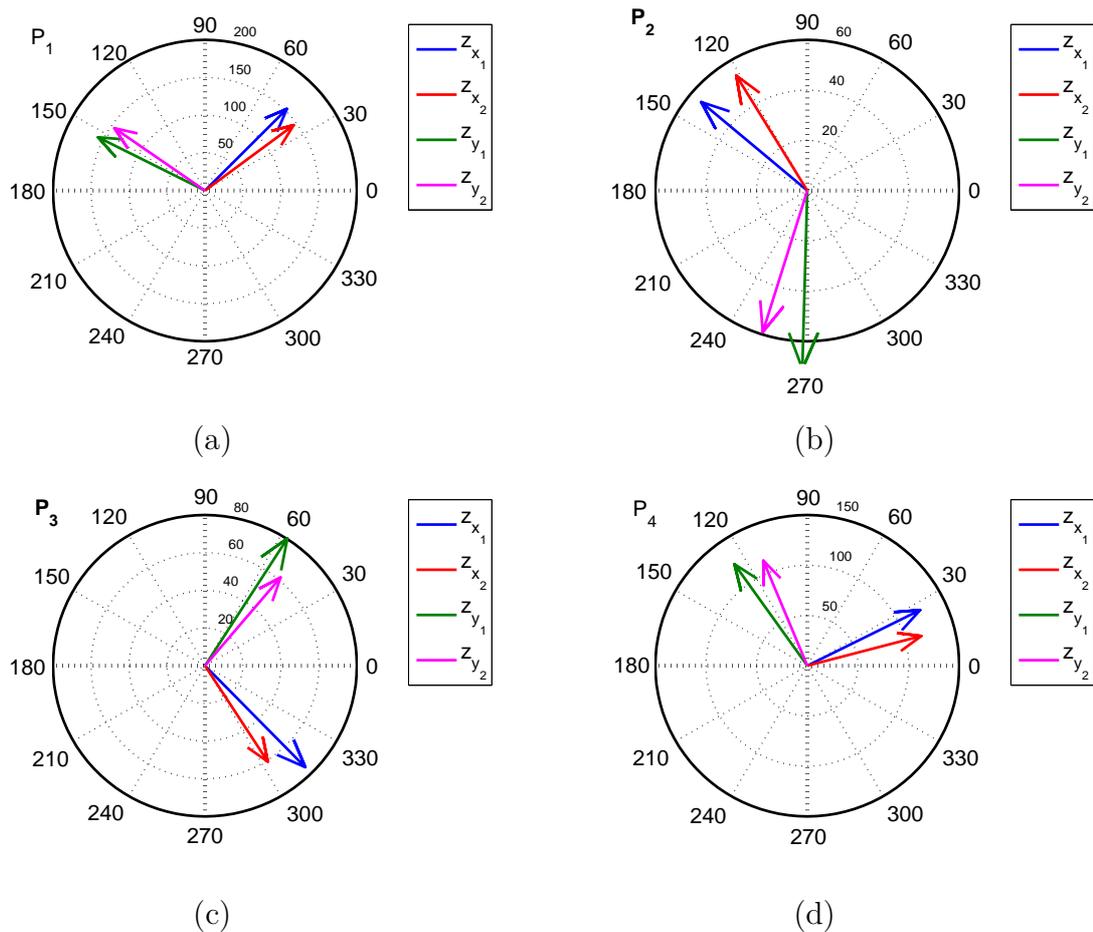


Figura 6.13 - Experimento  $R_3$ . Gráfico dos coeficientes complexos  $z_{x_1}, z_{x_2}, z_{y_1}, z_{y_2}$  dos 4 pontos  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$  pertencentes ao intervalo do primeiro deslizamento.

possível distinguir os deslizamentos de fase. Quando a função `my-unwrap` é aplicada apenas na variável  $x$ , conforme ilustrado na Figura 6.14(c), os deslizamentos de fase são corretamente detectados. Em Figura 6.14(d) os resultados para  $\Delta\phi_y^{wavelet}$  são novamente suavizados quando a função `my-unwrap` é aplicada apenas na variável  $y$ .

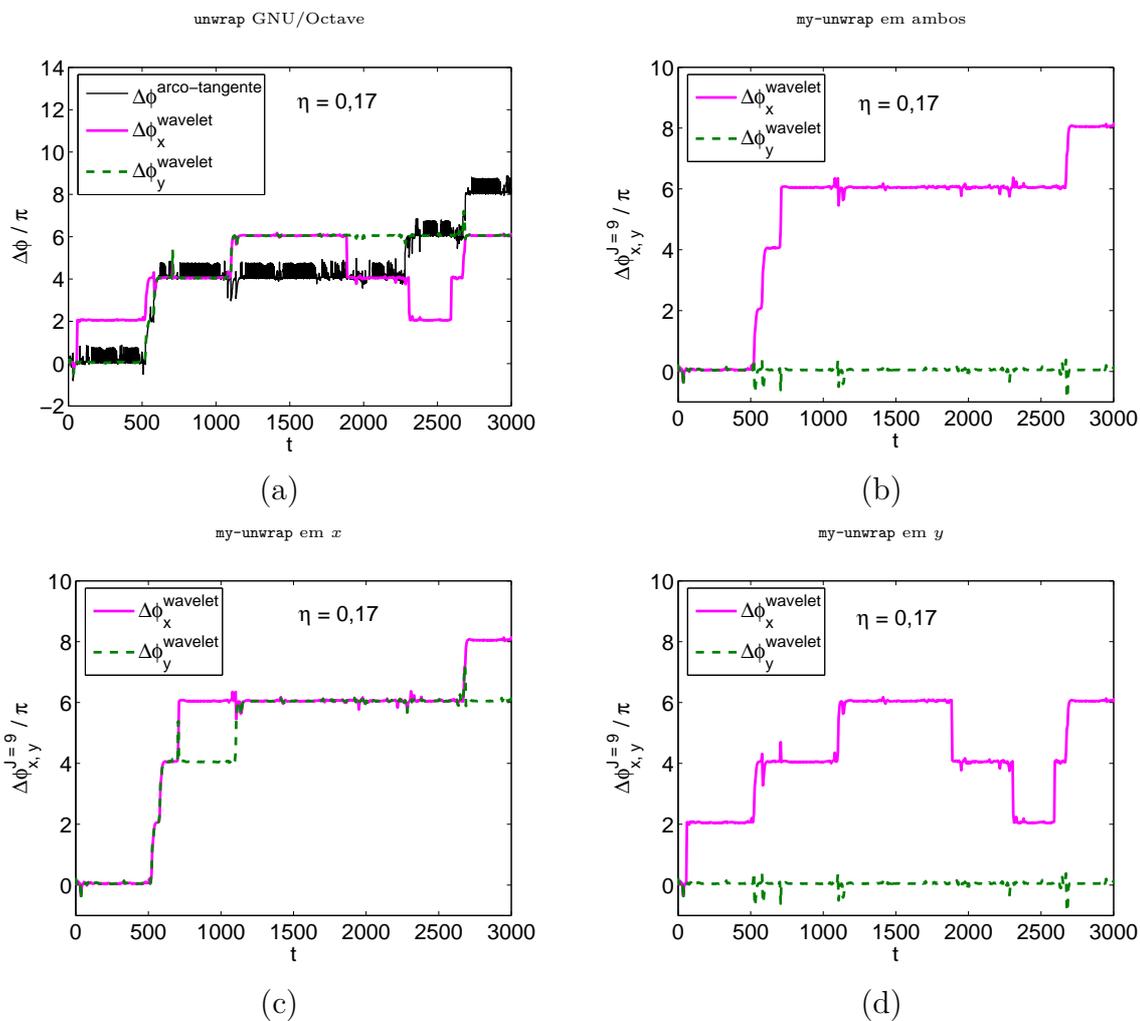


Figura 6.14 - Experimento  $R_3$ . Análise da diferença de fase considerando o método *wavelet dt-cwt* proposto com intensidade de acoplamento de  $\eta = 0,17$  e utilizando a função `unwrap` do *GNU/Octave* em (a); utilizando a função `my-unwrap` aplicada em ambas as variáveis  $x$  e  $y$  em (b); utilizando a função `my-unwrap` aplicada apenas na variável  $x$  em (c) e em (d) utilizando a função `my-unwrap` aplicada apenas na variável  $y$ .

### 6.1.3.3 Experimento $R_4$

Aqui, apresenta-se os resultados aplicando o método a dois sistemas de Rössler não-ídemicos acoplados bidirecionalmente por meio das variáveis  $x$  e  $y$ . As equações estão descritas em (6.4) e os parâmetros foram considerados de acordo com os estudos (HRAMOV; KORONOVSKII, 2004; POSTNIKOV, 2009; ROSENBLUM et al., 2002).

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2} y_{1,2} - z_{1,2} + \eta (x_{2,1} - x_{1,2}) \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2} x_{1,2} + 0,22 y_{1,2} + \eta (y_{2,1} - y_{1,2}) \\ \dot{z}_{1,2} &= 0,1 + z_{1,2} (x_{1,2} - 8,5).\end{aligned}\tag{6.4}$$

O sistemas são não ídemicos sendo considerados  $\omega_1 = 0,98$  e  $\omega_2 = 1,03$ . Para a resolução do sistema utilizou-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem com condição inicial do sistema 1 sendo  $(0, 1, 0)$  e do sistema 2 sendo  $(-5, 4, 5)$  e passo de integração de  $0,001$ . Três diferentes intensidades de acoplamento foram consideradas: uma intensidade fraca de  $\eta = 0,025$ , uma média de  $\eta = 0,05$  e uma forte de  $\eta = 0,25$ .

As Figuras 6.15 e 6.16 ilustram os espectros de energia *wavelet* e as fases obtidas da análise utilizando a variável  $x$  e a variável  $y$ , respectivamente e considerando as três intensidades de acoplamento estudadas.

Observa-se das Figuras 6.15 e 6.16 que a escala de máxima energia é a escala  $J = 12$  e a fase é calculada nesta escala.

A Figura 6.17 mostra a diferença de fase considerando em (a) o método *wavelet dt-cwt* usando a variável  $x$ ,  $\Delta\phi_x^{J=12}$ ; (b) o método *wavelet dt-cwt* usando a variável  $y$ ,  $\Delta\phi_y^{J=12}$ ; (c) o método *wavelet dt-cwt* usando ambas as variáveis  $x$  e  $y$  (notação  $\Delta\phi_x^{wavelet}$  e  $\Delta\phi_y^{wavelet}$ , respectivamente) comparados com o método arco-tangente (notação  $\Delta\phi^{arco-tangente}$ ), considerando  $\eta = 0,05$  e em (d) o método *wavelet dt-cwt* usando ambas as variáveis  $x$  e  $y$  comparando com o método arco-tangente considerando  $\eta = 0,25$ .

Nota-se na Fig. 6.17(a,b) que considerando uma intensidade de acoplamento pequena no valor de  $\eta = 0,025$  os dois sistemas não estão sincronizados em fase, ou seja, a diferença de fase entre eles cresce ao longo do tempo. Aumentando a intensidade de acoplamento para  $\eta = 0,05$ , conforme Figuras 6.17(c) e 6.18(a,b), detecta-se um deslizamento de fase quando se utiliza a variável  $x$ , veja Fig. 6.18(a), e quatro deslizamentos de fase quando se utiliza a variável  $y$ , veja Fig. 6.18(b).

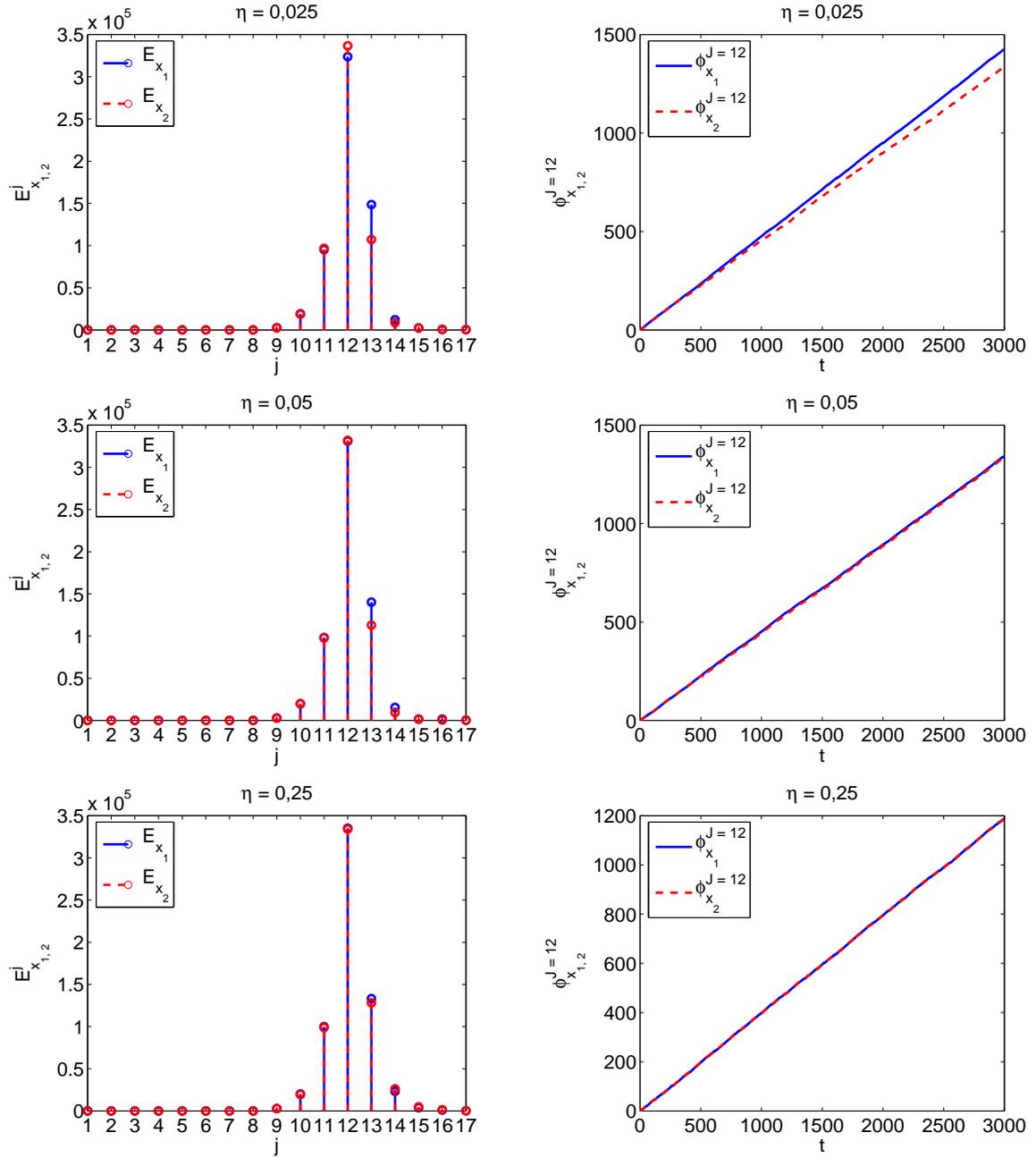


Figura 6.15 - Experimento  $R_4$ . Espectro de energia *wavelet* e as fases obtidas da análise utilizando a variável  $x$  e considerando as três intensidades de acoplamento estudadas.

Quando  $t \approx 350$ ,  $\Delta\phi_x^{wavelet} \approx 0$  e  $\Delta\phi_y^{wavelet}$  muda de valor de 0 para  $-2\pi$ , conforme pode ser visto na Fig. 6.18(a). Nota-se na série temporal ilustrada em Fig 6.18(c) que não ocorre um deslizamento de fase nesse intervalo de tempo.

Em  $t \approx 500$ , ocorre um deslizamento de fase, conforme ilustrado em Fig. 6.18(a), e

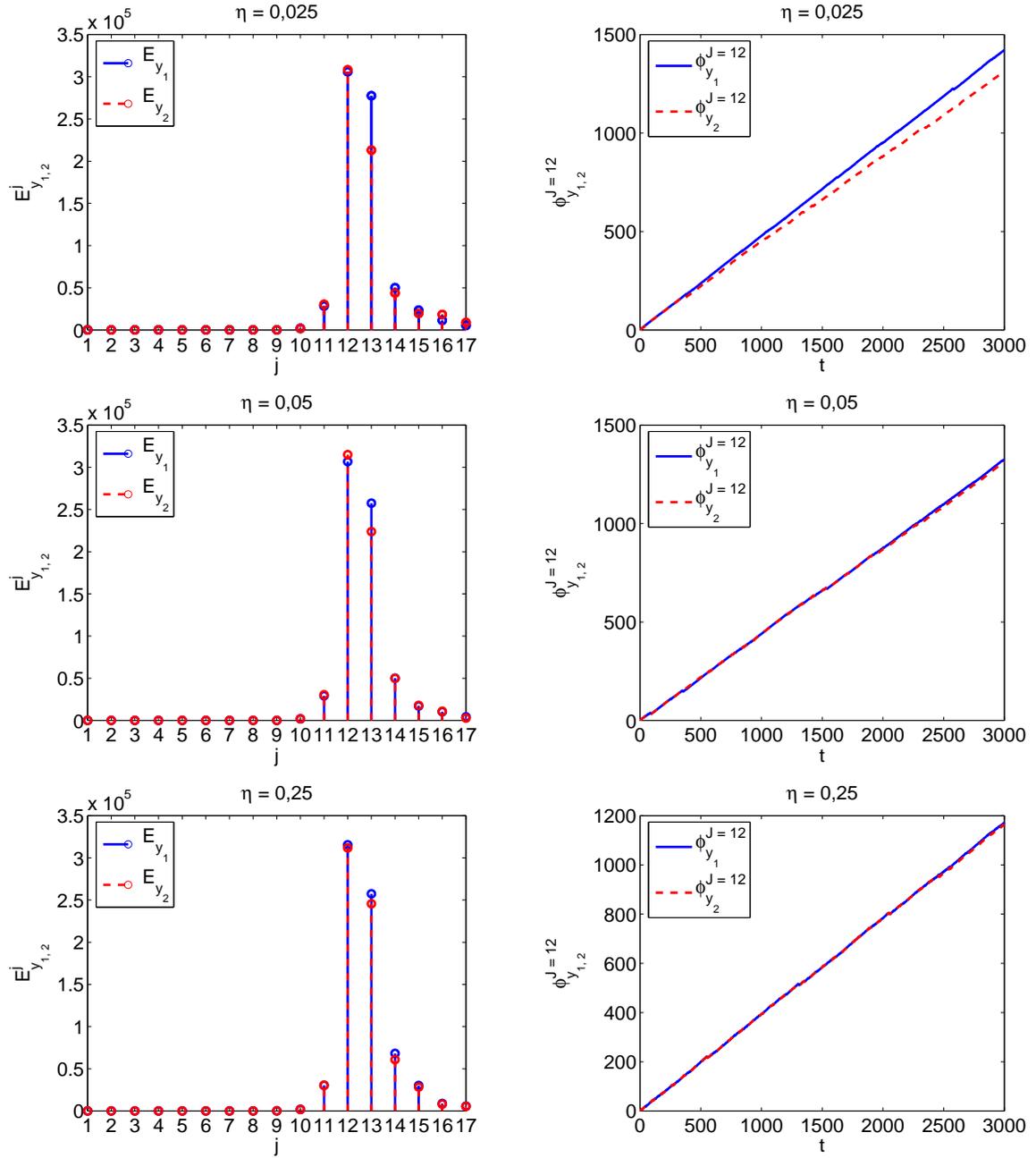


Figura 6.16 - Experimento  $R_4$ . Espectro de energia *wavelet* e as fases obtidas da análise utilizando a variável  $y$  e considerando as três intensidades de acoplamento estudadas.

as diferenças de fase  $\Delta\phi_x^{wavelet}$  altera o seu valor de 0 para  $2\pi$  e  $\Delta\phi_y^{wavelet}$  de  $-2\pi$  para 0. Nota-se na série temporal a presença do deslizamento de fase neste intervalo na Fig. 6.18(d).

Quando  $t \approx 1900$ , o valor de  $\Delta\phi_x^{wavelet}$  continua em  $2\pi$  e  $\Delta\phi_y^{wavelet}$  altera o seu valor

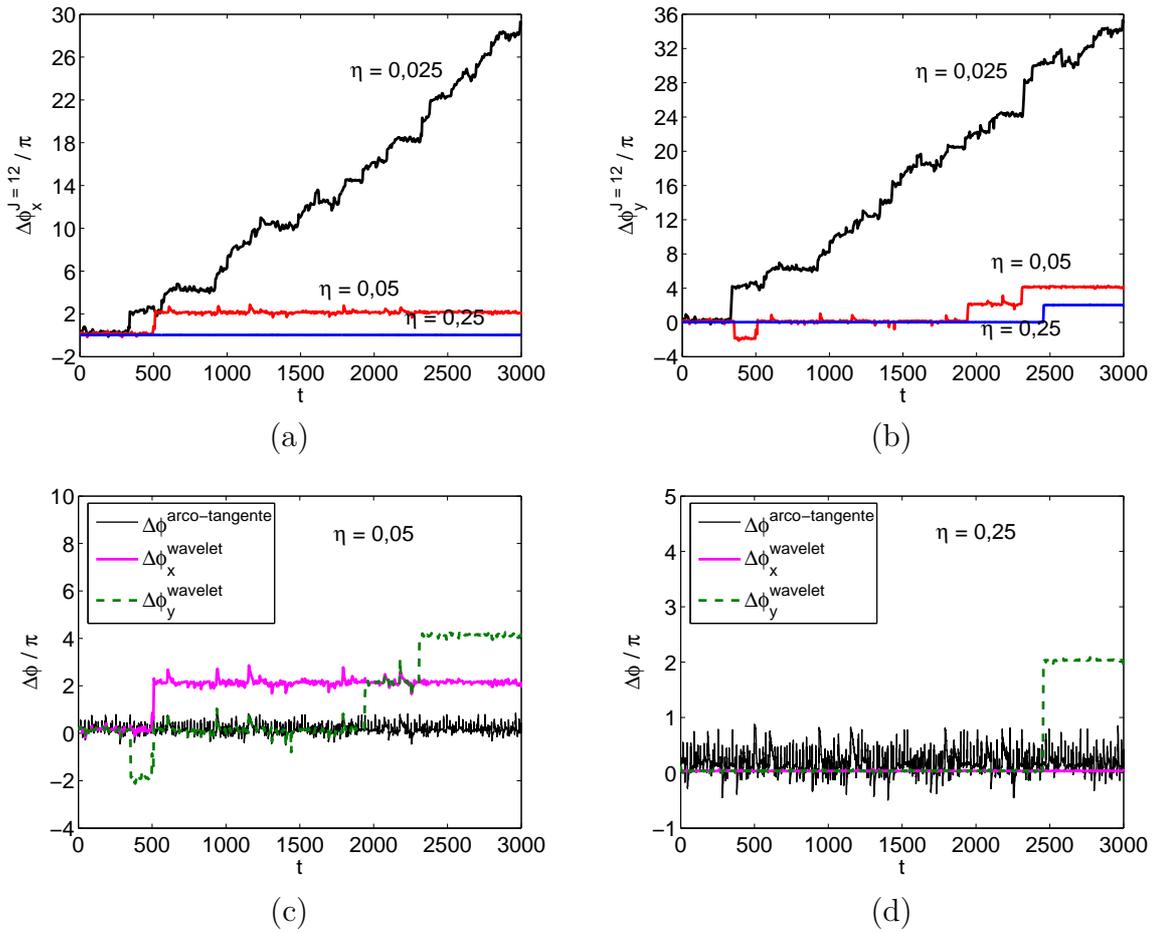


Figura 6.17 - Experimento  $R_4$ . Diferença de fase aplicando em (a) o método *wavelet dt-cwt* usando a variável  $x$ ; (b) o método *wavelet dt-cwt* usando a variável  $y$ ; (c) o método *wavelet dt-cwt* usando as variáveis  $x$  e  $y$  comparando com o método arco-tangente considerando  $\eta = 0,05$  e em (d) o método *wavelet dt-cwt* usando as variáveis  $x$  e  $y$  comparando com o método arco-tangente considerando  $\eta = 0,25$ .

de 0 para  $2\pi$ , conforme pode ser visto na Fig 6.18(b). Nota-se na série temporal ilustrada em Fig 6.18(e) que não ocorre um deslizamento de fase nesse intervalo de tempo.

Em  $t \approx 2300$ , o valor de  $\Delta\phi_x^{wavelet}$  continua em  $2\pi$  e  $\Delta\phi_y^{wavelet}$  altera seu valor de  $2\pi$  para  $4\pi$ , conforme pode ser visto na Fig. 6.18(b). Nota-se na série temporal ilustrada em Fig. 6.18(f) que não ocorre um deslizamento de fase nesse intervalo de tempo.

Quando  $\eta = 0,25$  a sincronização de fase entre os dois sistemas é verificada. No entanto, conforme Figuras 6.17(d) e 6.19(a), nota-se que em  $t \approx 2450$  a diferença de fase utilizando a variável  $y$ ,  $\Delta\phi_y^{wavelet}$  altera o seu valor de 0 para  $2\pi$ . Observa-se

na série temporal ilustrada em Fig 6.19(b) que não ocorre um deslizamento de fase nesse intervalo de tempo.

A Figura 6.18 ilustra uma análise do Experimento  $R_4$  quando  $\eta = 0,05$ , sendo apresentado em (a) diferença de fase no intervalo  $t = [300, 550]$  contendo dois deslizamentos; (b) diferença de fase no intervalo  $t = [1900, 2400]$  contendo dois deslizamentos; (c) série temporal no intervalo  $t = [340, 360]$  do deslizamento de  $\Delta\phi_y^{wavelet}$ ; (d) série temporal no intervalo  $t = [490, 520]$  do deslizamento de fase; (e) série temporal no intervalo  $t = [1930, 1950]$  do deslizamento de  $\Delta\phi_y^{wavelet}$ ; (f) série temporal no intervalo  $t = [2300, 2320]$  do deslizamento de  $\Delta\phi_y^{wavelet}$ .

Observa-se na Figura 6.18(a,b) que o que acontece com  $\Delta\phi_y^{wavelet}$  não é um deslizamento de fase, conforme pode ser verificado na série temporal ilustrada em Figura 6.18(c,e,f). O que acontece é que as oscilações das séries  $y_1$  e  $y_2$  tornam-se opostas as das oscilações das séries  $x_1$  e  $x_2$ . Já no intervalo  $t \approx [490, 520]$  realmente é identificado um deslizamento de fase conforme identificado na série temporal ilustrada na Fig. 6.18(d).

A Figura 6.19 ilustra uma análise do Experimento  $R_4$  quando  $\eta = 0,25$  sendo ilustrado em (a) diferença de fase no intervalo  $t = [2440, 2470]$  contendo um deslizamento de  $\Delta\phi_y^{wavelet}$  e em (b) série temporal no intervalo  $t = [2440, 2470]$  contendo um deslizamento de  $\Delta\phi_y^{wavelet}$ .

Nota-se da Figura 6.19 que, novamente, o que acontece com  $\Delta\phi_y^{wavelet}$  não é um deslizamento de fase, conforme pode ser verificado na série temporal ilustrada em Figura 6.19(b). O que acontece é que as oscilações das séries  $y_1$  e  $y_2$  tornam-se opostas as das oscilações das séries  $x_1$  e  $x_2$ .

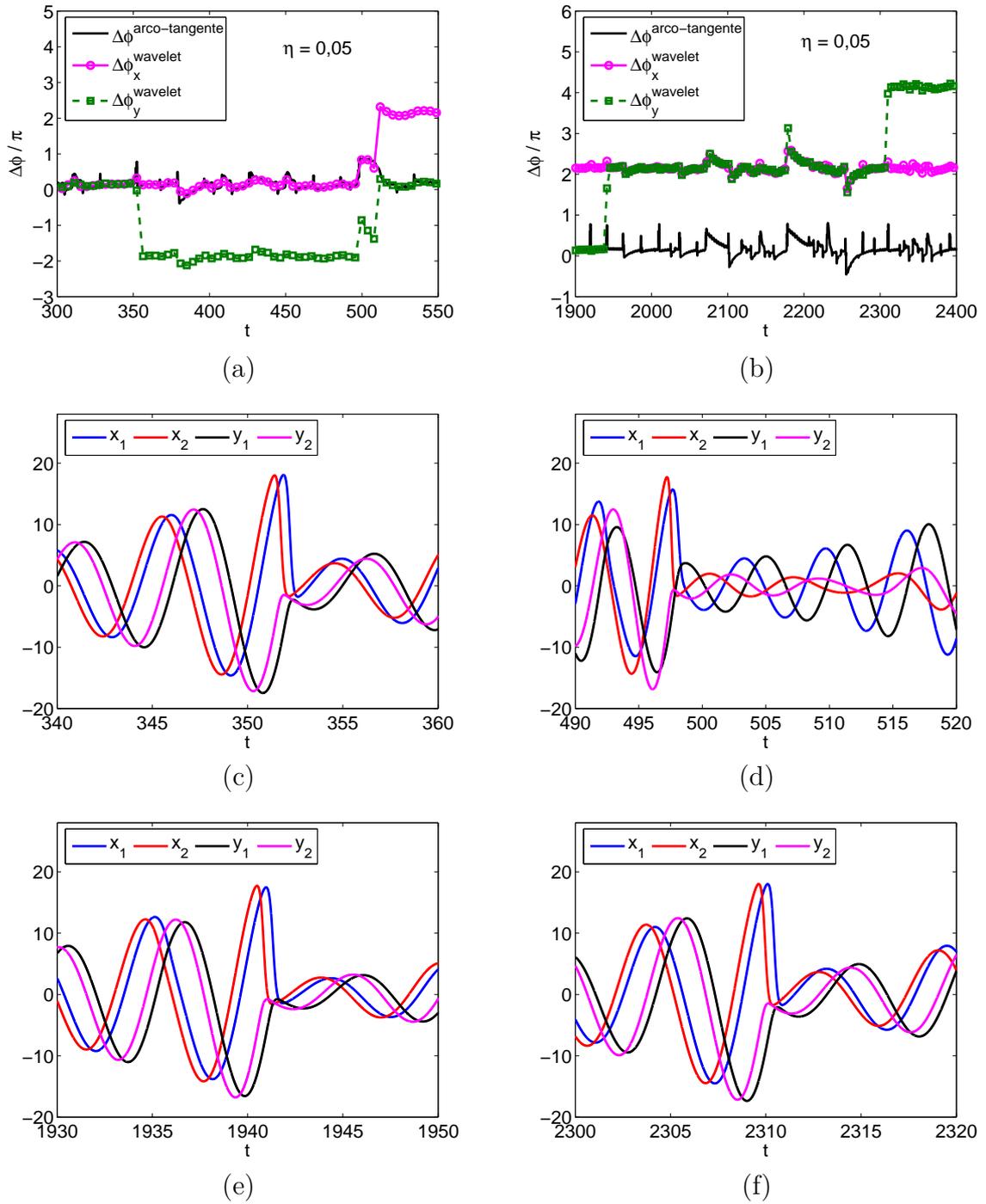


Figura 6.18 - Experimento  $R_4$ . Análise da diferença de fase considerando  $\eta = 0,05$  sendo ilustrado em (a) diferença de fase no intervalo  $t = [300, 550]$  contendo dois deslizamentos; (b) diferença de fase no intervalo  $t = [1900, 2400]$  contendo dois deslizamentos; (c) série temporal no intervalo  $t = [340, 360]$  do deslizamento de  $\Delta\phi_y^{wavelet}$ ; (d) série temporal no intervalo  $t = [490, 520]$  do deslizamento de fase; (e) série temporal no intervalo  $t = [1930, 1950]$  do deslizamento de  $\Delta\phi_y^{wavelet}$ ; (f) série temporal no intervalo  $t = [2300, 2320]$  do deslizamento de  $\Delta\phi_y^{wavelet}$ .

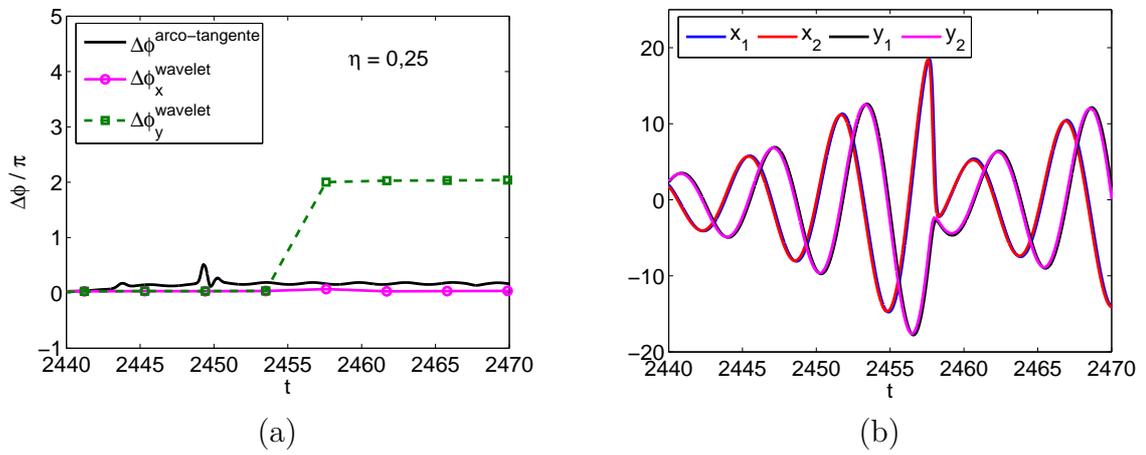


Figura 6.19 - Experimento  $R_4$ . Análise da diferença de fase considerando  $\eta = 0,25$  tendo em (a) diferença de fase no intervalo  $t = [2440, 2470]$  contendo um deslizamento de  $\Delta\phi_y^{\text{wavelet}}$  e em (b) série temporal no intervalo  $t = [2440, 2470]$  contendo um deslizamento de  $\Delta\phi_y^{\text{wavelet}}$ .

#### 6.1.3.4 Experimento $R_5$

Neste experimento exploram-se dois sistemas de Rössler não-idênticos acoplados unidirecionalmente por meio da variável  $x$ , o qual é descrito pelas seguintes equações

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2} y_{1,2} - z_{1,2} + \eta(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2} x_{1,2} + 0,22 y_{1,2} \\ \dot{z}_{1,2} &= 0,4 + z_{1,2}(x_{1,2} - 8,5)\end{aligned}\tag{6.5}$$

com  $\omega_1 = 0,98$  e  $\omega_2 = 1,02$ .

Para a resolução do sistema utilizou-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem com condição inicial do sistema 1 sendo  $(0, 1, 0)$  e do sistema 2 sendo  $(-5, 4, 5)$  e passo de integração no valor de  $0,01$ . Três diferentes intensidades de acoplamento são consideradas: uma fraca de  $\eta = 0,05$ , uma média de  $\eta = 0,5$  e uma forte de  $\eta = 0,9$ .

As Figuras 6.20 e 6.21 mostram o espectro de energia *wavelet* e as fases obtidas da análise utilizando a variável  $x$  e utilizando a variável  $y$ , respectivamente, e considerando as três intensidades de acoplamento estudadas.

Nota-se das Figuras 6.20 e 6.21 que a escala de máxima energia é a  $J = 9$  na qual a fase é calculada.

A Figura 6.22 mostra a diferença de fase do Experimento  $R_5$  aplicando em (a) método *wavelet dt-cwt* usando  $x$ ; (b) método *wavelet dt-cwt* usando  $y$  e em (c) o método arco-tangente.

Observa-se em Fig. 6.22 que o método *wavelet dt-cwt*, usando as variáveis  $x$  ou  $y$ , é capaz de identificar quando os sistemas encontram-se não sincronizados em fase ( $\eta = 0,05$ ); quando ocorrem deslizamentos de fase ( $\eta = 0,5$ ) e quando estão sincronizados em fase ( $\eta = 0,9$ ).

O método arco-tangente apresenta resultados ambíguos, conforme pode ser visualizado em Fig. 6.22(c). Quando se tem um acoplamento pequeno de  $\eta = 0,05$  o método arco-tangente não detectou corretamente que os sistemas não estão sincronizados em fase. Considerando um acoplamento médio de  $\eta = 0,5$ , o método arco-tangente detecta vários deslizamentos de fase, os quais, quando verificado na série temporal não ocorrem. Para um acoplamento forte de  $\eta = 0,9$ , o método arco-tangente não detecta corretamente que os sistemas encontram-se sincronizados em fase e detecta

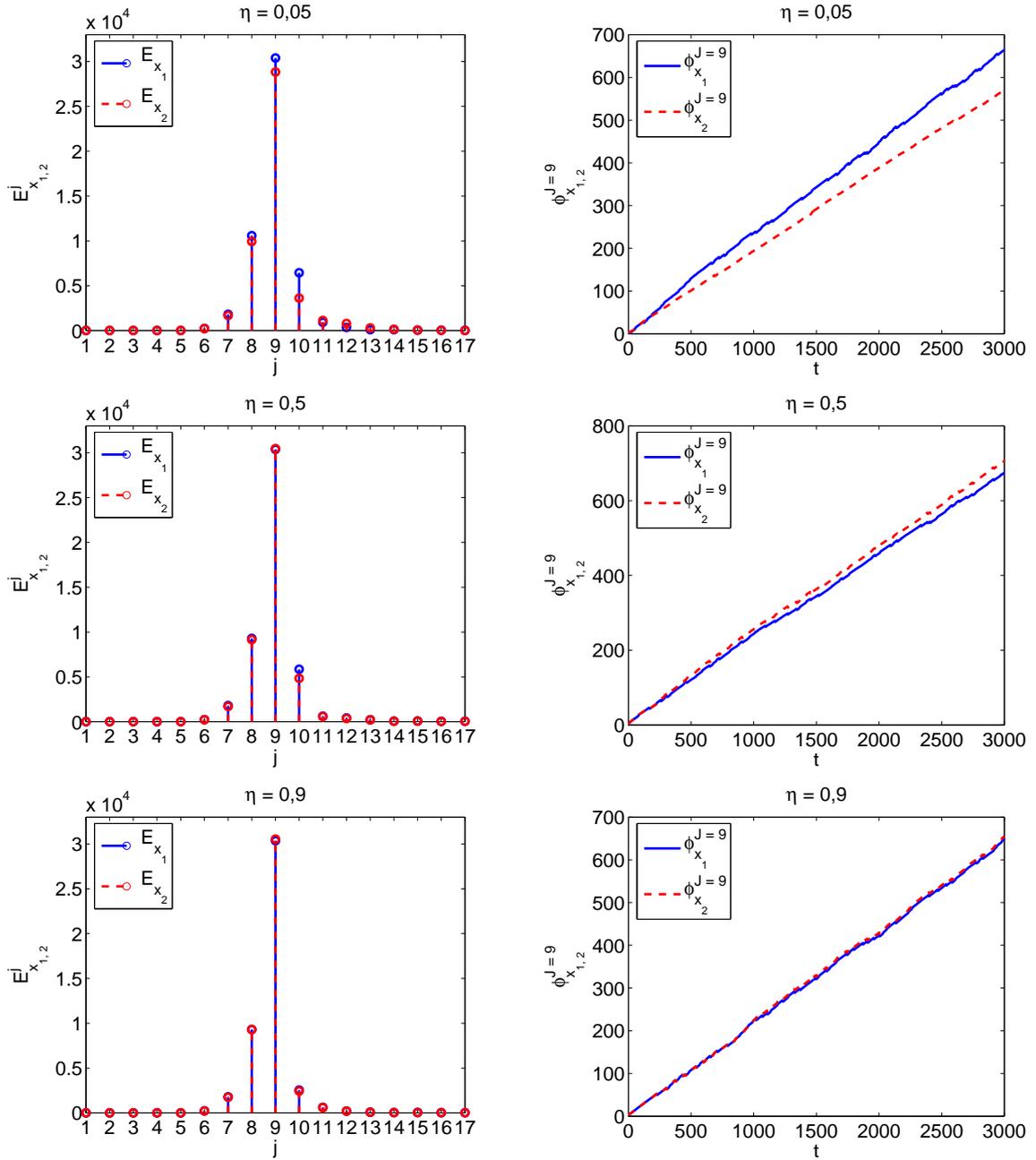


Figura 6.20 - Experimento  $R_5$ . Espectro de energia *wavelet* e as fases obtidas da análise utilizando a variável  $x$  e considerando as três intensidades de acoplamento estudadas.

erroneamente quatro deslizamentos de fase.

A Figura 6.23 ilustra uma análise do Experimento  $R_5$  quando  $\eta = 0,5$ . Em (a) ilustra-se a diferença de fase e em (b,c,d,e,f) a série temporal considerando alguns intervalos para análise. Nota-se da Figura 6.23(a) que utilizando a variável  $x$  são

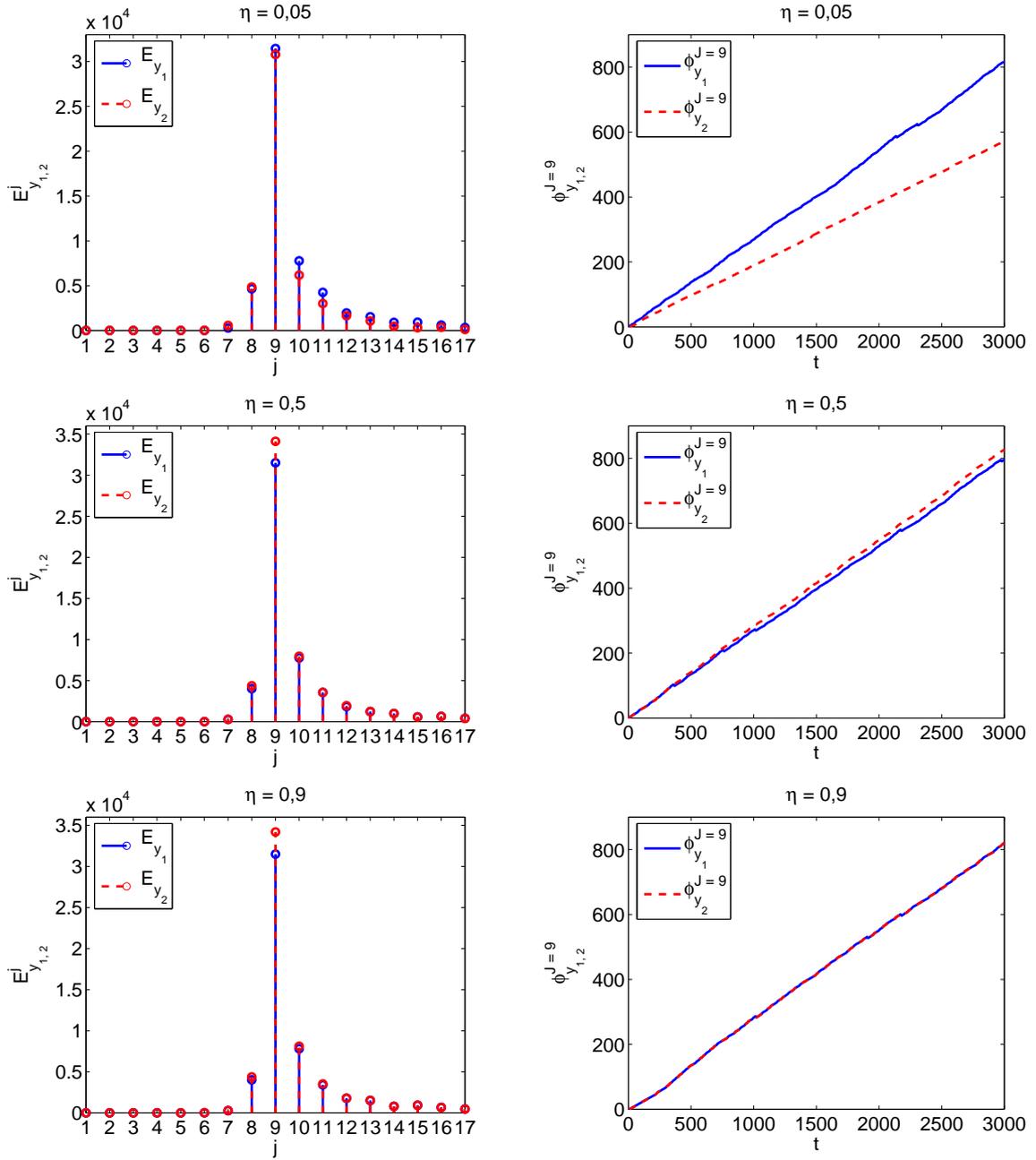


Figura 6.21 - Experimento  $R_5$ . Espectro de energia *wavelet* e as fases obtidas da análise utilizando a variável  $y$  e considerando as três intensidades de acoplamento estudadas.

detectados cinco deslizamentos de fase. Os intervalos em que ocorrem são  $t \approx 255$ ,  $t \approx 460$ ,  $t \approx 1170$ ,  $t \approx 2330$  e  $t \approx 2700$ . Observando estes intervalos na série temporal, nota-se que o que ocorre não é um deslizamento de fase, conforme ilustrado em Figura 6.23(b, d) em dois destes intervalos. Observa-se da Figura 6.23(a) que utilizando a variável  $y$  são detectados cinco deslizamentos de fase. Os intervalos em

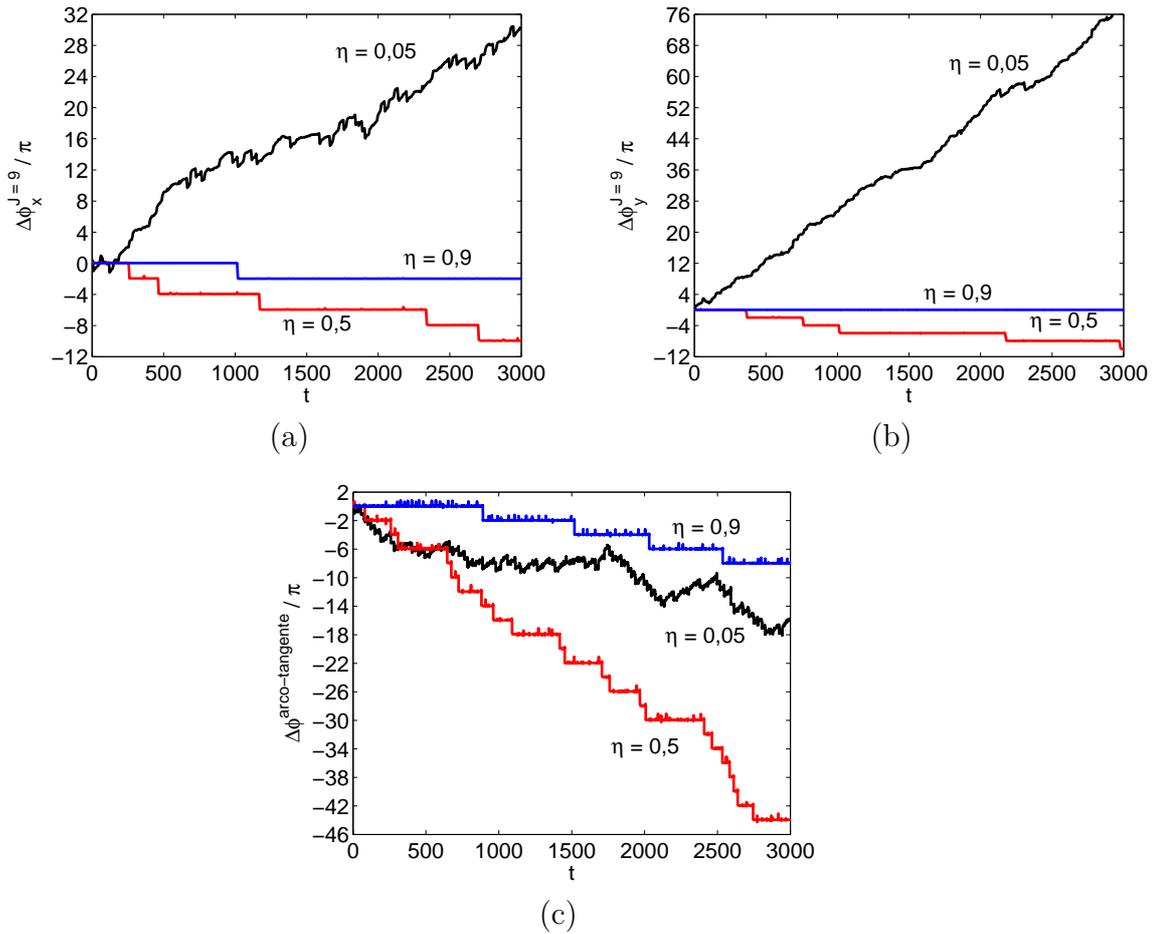


Figura 6.22 - Experimento  $R_5$ . Diferença de fase aplicando em (a) método *wavelet dt-cut* usando  $x$ ; (b) método *wavelet dt-cut* usando  $y$  e em (c) o método arco-tangente.

que ocorrem são  $t \approx 355$ ,  $t \approx 750$ ,  $t \approx 1010$ ,  $t \approx 2170$  e  $t \approx 2960$ . Observando estes intervalos na série temporal, nota-se que o que ocorre não é um deslizamento de fase, conforme ilustrado em Figura 6.23(c, e, f) em três destes intervalos.

A Figura 6.24 ilustra a análise do Experimento  $R_5$  quando  $\eta = 0,9$ . Em (a) ilustra-se a diferença de fase e em (b) a série temporal considerando o intervalo  $t \approx [1000, 1030]$ . Observa-se da Figura 6.24(a) que em  $t \approx 1010$  o valor da diferença de fase  $\Delta\phi_x^{wavelet}$  vai de 0 para o valor de  $-2\pi$ . Nota-se que o método detecta algo que, observando na série temporal ilustrada em Figura 6.24(b), não seria de fato um deslizamento de fase.

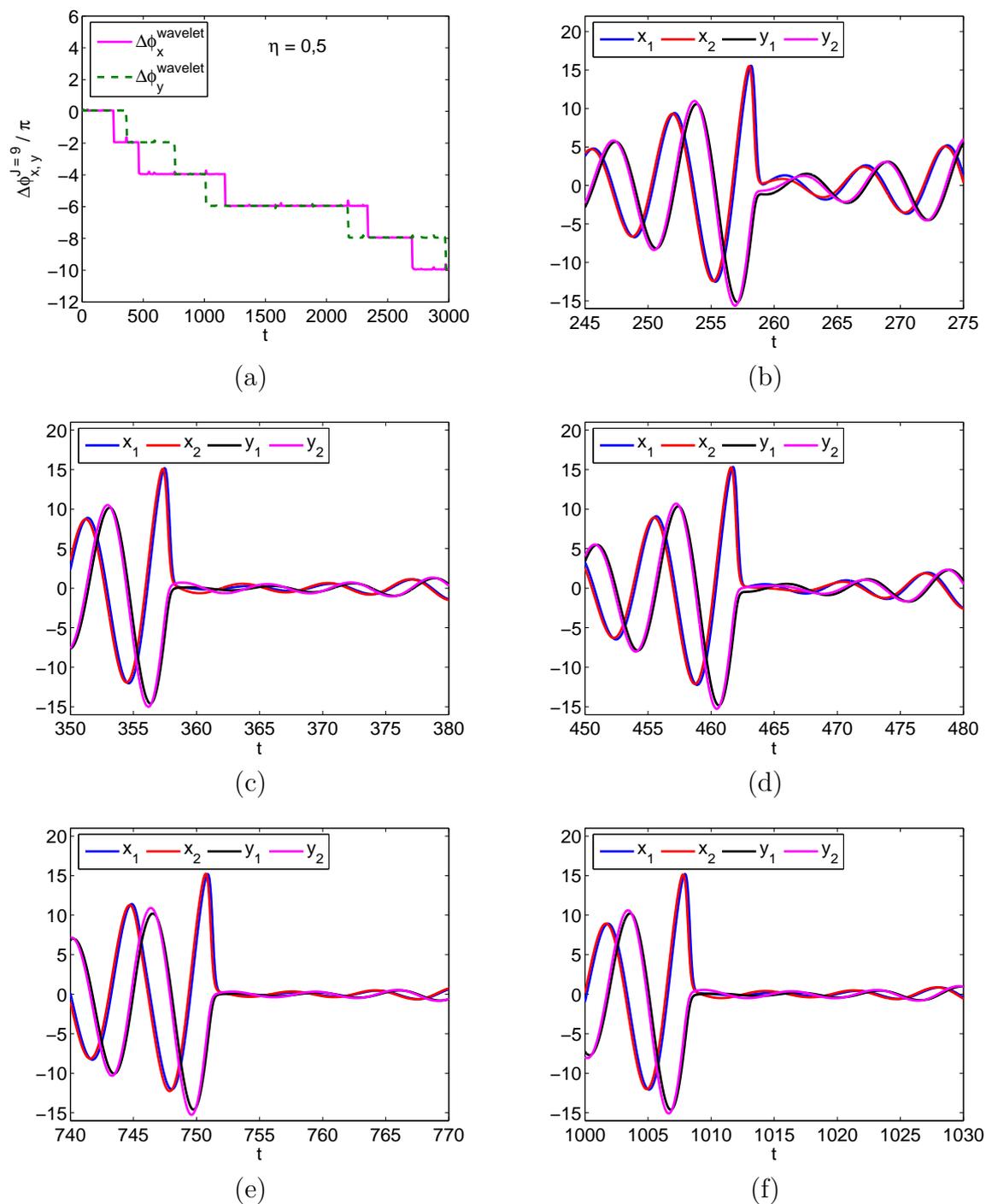


Figura 6.23 - Experimento  $R_5$ . Análise da diferença de fase considerando  $\eta = 0,5$ . Em (a) ilustra-se a diferença de fase e em (b,c,d,e,f) a série temporal considerando alguns intervalos para análise.

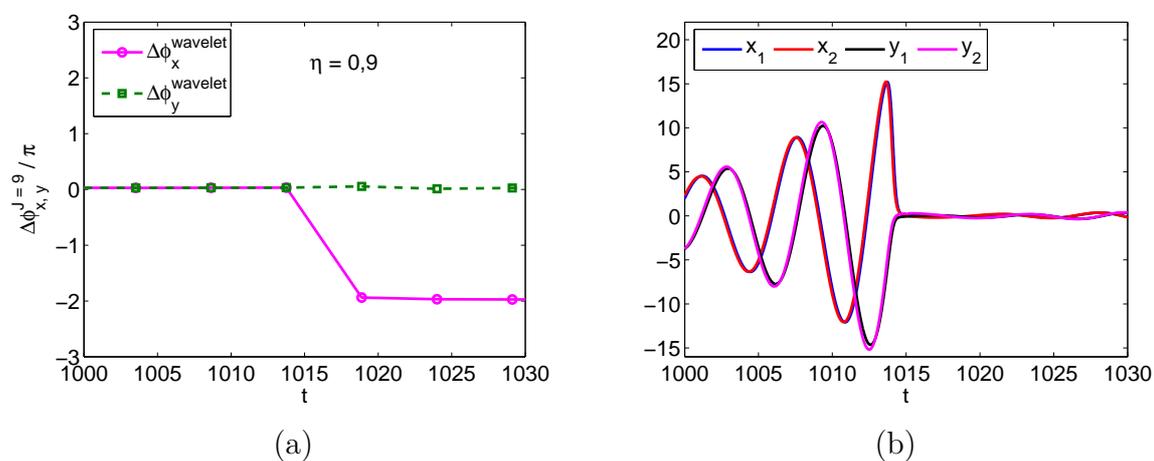


Figura 6.24 - Experimento  $R_5$ . Análise da diferença de fase considerando  $\eta = 0,9$ . Em (a) ilustra-se a diferença de fase e em (b) a série temporal considerando o intervalo  $t = [1000, 1030]$ .

## 6.2 Sistema de Lorenz

O sistema de Lorenz desacoplado foi apresentado no Capítulo 2 na Subseção 2.1.2. Neste trabalho consideram-se dois experimentos com o sistema de Lorenz, o primeiro experimento (denotado por Experimento  $L_1$ ), apresenta-se na Subseção 6.2.1 e o segundo experimento (denotado por Experimento  $L_2$ ), na Subseção 6.2.2.

Na análise destes dois experimentos, por meio da aplicação do método *wavelet dt-cwt*, utilizou-se apenas a variável  $x$  de cada sistema.

### 6.2.1 Experimento $L_1$

Neste experimento consideram-se dois sistemas não idênticos de Lorenz em evolução caótica, acoplados bidirecionalmente por meio de suas variáveis  $x$ , conforme descrito na equação (6.6). Para simular esses sistemas, usou-se o método Runge-Kutta de quarta ordem com passo de integração igual a 0,001 e a série temporal foi considerada com  $N = 2^{23}$  pontos.

O sistema de Lorenz estudado é dado por meio das seguintes equações

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,2} &= 10(y_{1,2} - x_{1,2}) + \eta(x_{2,1} - x_{1,2}) \\ \dot{y}_{1,2} &= 28x_{1,2} - y_{1,2} - z_{1,2}x_{1,2} \\ \dot{z}_{1,2} &= \omega_{1,2} \left( x_{1,2}y_{1,2} - \frac{8}{3}z_{1,2} \right),\end{aligned}\tag{6.6}$$

em que  $\omega_1 = 0,9831$  e  $\omega_2 = 1,018$  introduzem uma pequena diferença entre os dois sistemas, tornando-os não idênticos, e  $\eta$  é a intensidade de acoplamento.

Com o objetivo de analisar a sincronização de fase, são consideradas três forças de acoplamento, as quais são: um acoplamento fraco entre os dois sistemas considerando  $\eta = 0,4$ ; um acoplamento médio com  $\eta = 4,2$  e um acoplamento forte com  $\eta = 6$ .

A Figura 6.25 mostra o espectro de energia *wavelet* e a fase obtida por meio da aplicação do método *wavelet dt-cwt* proposto. Analisando os valores da máxima energia, observa-se que para  $\eta = 0,4$ , as escalas de máxima energia são iguais para ambos os sistemas, ou seja,  $J_1 = J_2 = 15$ . Considerando  $\eta = 4,2$  tem-se que  $J_1 = 15$  e  $J_2 = 16$ , assim  $J = \min(J_1, J_2) = \min(15, 14) = 14$ . Quando se tem  $\eta = 6$  a escala de máxima energia é  $J_1 = J_2 = 14$ . Avaliando a resolução da série temporal obtida para a fase nestas escalas de máxima energia, decidiu-se adotar a escala  $J = 14$  para as três intensidades de acoplamento e, assim, a fase é calculada nesta escala.

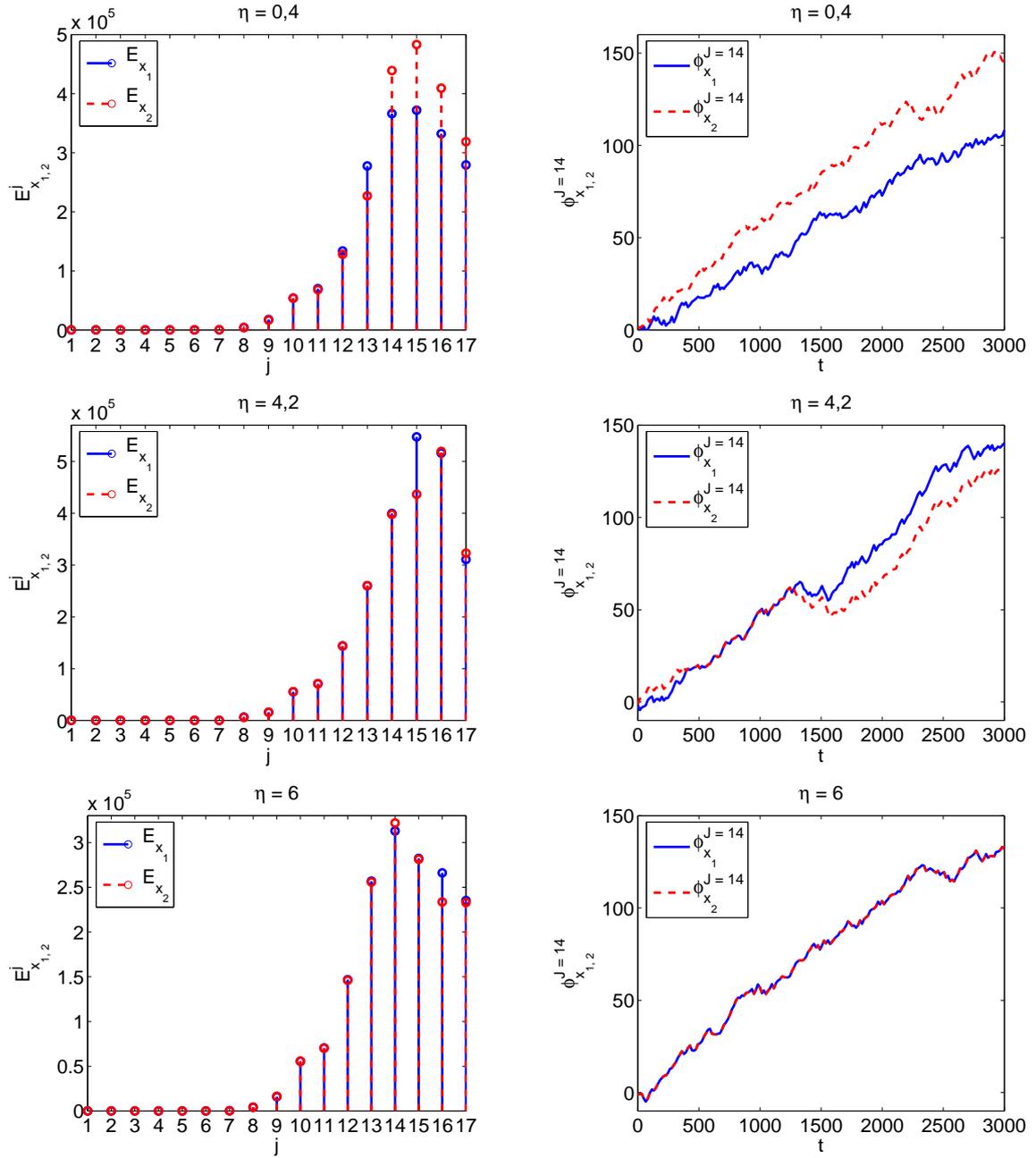


Figura 6.25 - Experimento  $L_1$ . Espectro de energia *wavelet* e a fase calculada na escala  $J = 14$  obtidos da análise do Experimento  $L_1$  e considerando as três intensidades de acoplamento estudadas.

Nota-se que a fase apresenta algumas pequenas perturbações e deslizamentos, portanto, decidiu-se verificar quando se utiliza a função `my-unwrap` se a fase apresenta um melhor resultado. A Figura 6.26 ilustra a fase obtida quando se utiliza a função `my-unwrap`. Para maiores informações da função `my-unwrap` veja o Apêndice C. Observa-se dos gráficos 6.25 e 6.26 que a fase apresenta-se consideravelmente melhor

quando se utiliza a função `my-unwrap`.

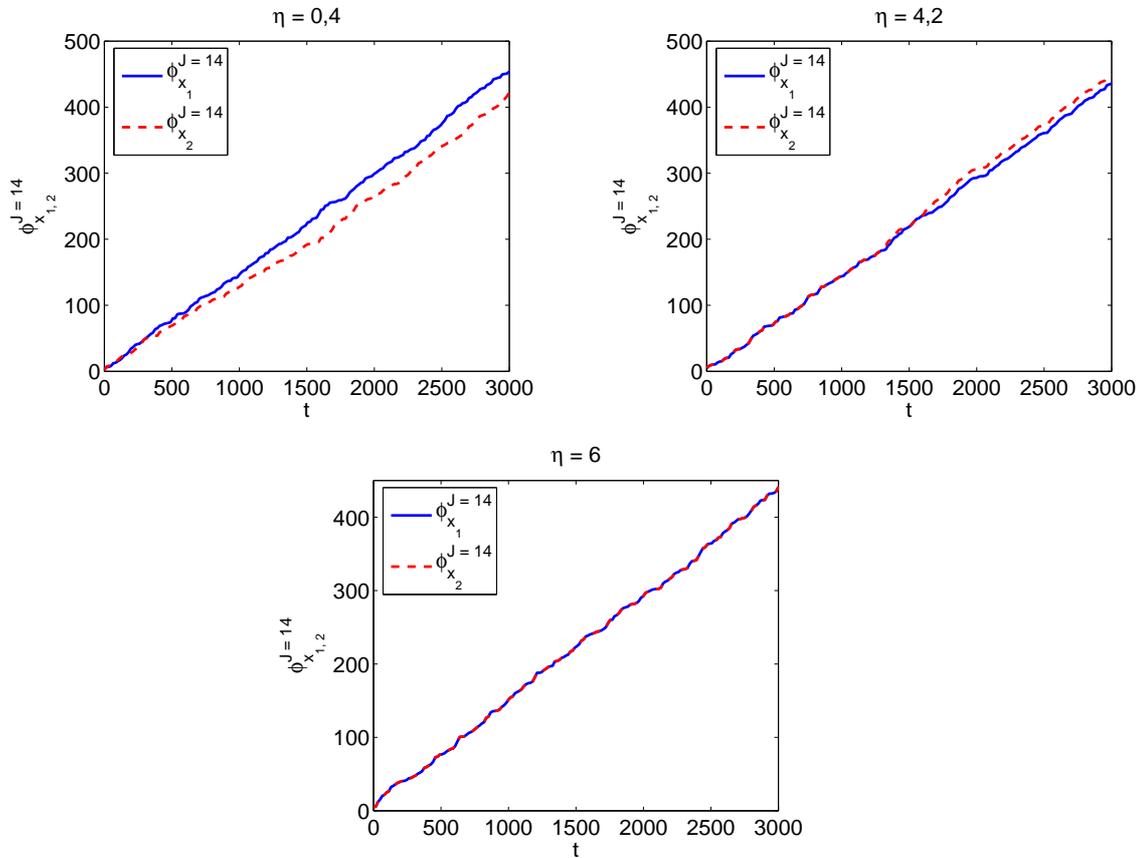


Figura 6.26 - Experimento  $L_1$ . Fase considerando a utilização da função `my-unwrap`.

A Figura 6.27 ilustra a diferença de fase obtida da análise do Experimento  $L_1$  considerando em (a) o método *wavelet dt-cwt* proposto utilizando a variável  $x$  e a função `unwrap` do *GNU/Octave*, denotada por  $\Delta\phi_x^{wavelet}$ ; (b) o método *wavelet dt-cwt* proposto utilizando a variável  $x$  e a função `my-unwrap`, denotada por  $\Delta\phi_{my-unwrap}^{wavelet}$ ; (c) o método arco-tangente, denotado por  $\Delta\phi^{arco-tangente}$ ; (d) os métodos considerados nos itens (a,b,c) considerando  $\eta = 4, 2$ .

Nota-se da Figura 6.27(a,b,c) que quando a intensidade de acoplamento é fraca,  $\eta = 0, 4$ , a diferença de fase cresce ao longo do tempo e os sistemas não estão sincronizados em fase. Aumentando a intensidade de acoplamento para  $\eta = 4, 2$  ocorrem deslizamentos de fase, conforme pode ser visualizado em Fig. 6.27(a,b,c,d). Quando a intensidade de acoplamento é  $\eta = 6$ , os sistemas encontram-se sincronizados em fase, visto que a diferença de fase encontra-se limitada.

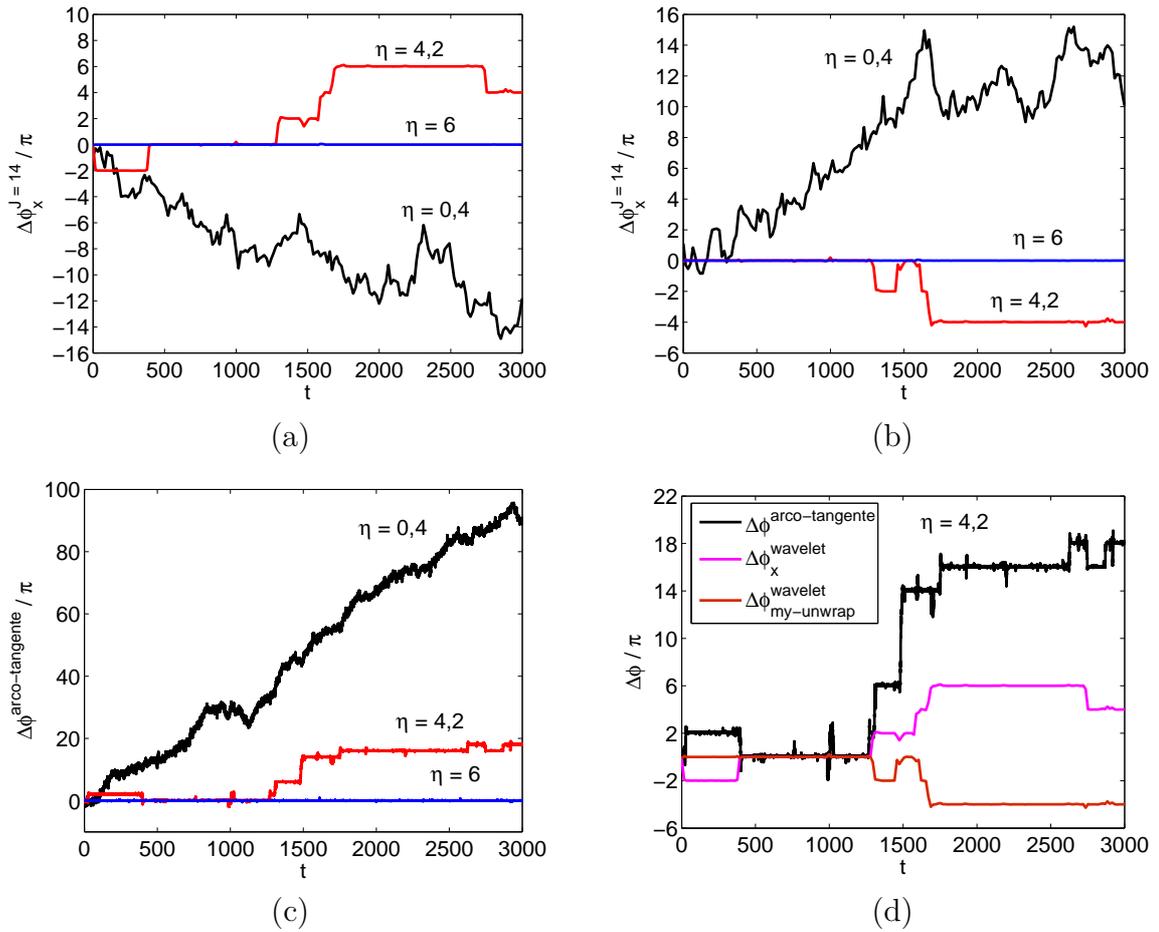


Figura 6.27 - Experimento  $L_1$ . Diferença de fase considerando em (a) o método *wavelet dt-cwt* proposto utilizando a variável  $x$  e a função *unwrap* do *GNU/Octave*, denotada por  $\Delta\phi_x^{wavelet}$ ; (b) o método *wavelet dt-cwt* proposto utilizando a variável  $x$  e a função *my-unwrap*, denotada por  $\Delta\phi_{my-unwrap}^{wavelet}$ ; (c) o método arco-tangente, denotado por  $\Delta\phi^{arco-tangente}$ ; (d) os métodos considerados nos itens (a,b,c) com  $\eta = 4, 2$ .

Analisando a Figura 6.27(d), observa-se que o método arco-tangente apresenta vários deslizamentos de fase, das quais alguns não são verificados na série temporal. Quando se utiliza o método arco-tangente são detectados aproximadamente 11 deslizamentos de fase, com o método *wavelet* usando a função *unwrap* do *GNU/Octave* verificam-se 6 deslizamentos e com o *my-unwrap* são verificados quatro deslizamentos de fase, conforme pode ser visualizado na Figura 6.27(d).

Em alguns destes intervalos, não é um deslizamento de fase que ocorre. Os intervalos em que realmente são identificados deslizamentos de fase na série temporal são:  $t \approx [1290, 1315]$ ,  $t \approx [1477, 1495]$ ,  $t \approx [1585, 1610]$  e  $t \approx [1685, 1710]$ .

Quando se utiliza o método *wavelet dt-cwt* usando a função `unwrap` do *GNU/Octave* três deslizamentos de fase são detectados corretamente, um deslizamento em  $t \approx [1477, 1495]$  não foi detectado e três deslizamentos foram detectados erroneamente, conforme pode ser visualizado na Figura 6.27(d).

Quando se utiliza a função `my-unwrap` os quatro deslizamentos de fase são corretamente detectados.

A Figura 6.28 ilustra um zoom de dois intervalos da série temporal considerando  $\eta = 4, 2$ . Em (a)  $t \approx [1290, 1315]$  apresenta-se um intervalo em que ocorre um deslizamento de fase entre os dois sistemas e, em (b)  $t \approx [2735, 2750]$  apresenta-se um intervalo em que o método detecta algo que não é propriamente um deslizamento de fase.

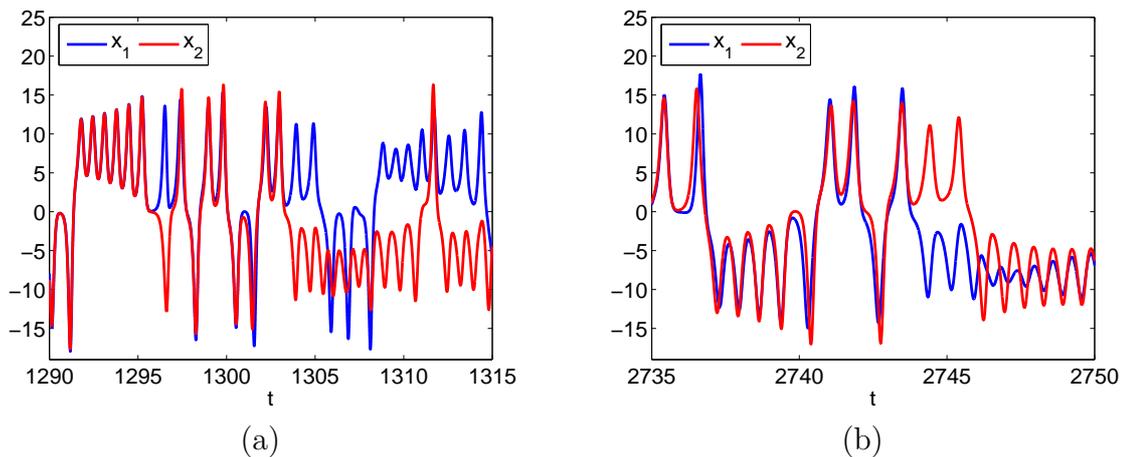


Figura 6.28 - Experimento  $L_1$ . Zoom de dois intervalos da série temporal considerando  $\eta = 4, 2$ . Em (a)  $t \approx [1290, 1315]$  e em (b)  $t \approx [2735, 2750]$ .

### 6.2.2 Experimento $L_2$

Neste experimento, considera-se o sistema de equações

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,2} &= 10(y_{1,2} - x_{1,2}) + \eta(x_{2,1} - x_{1,2}) \\ \dot{y}_{1,2} &= (36,5 + \gamma_{1,2})x_{1,2} - y_{1,2} - z_{1,2}x_{1,2} \\ \dot{z}_{1,2} &= -3z_{1,2} + x_{1,2}y_{1,2}\end{aligned}\tag{6.7}$$

em que os parâmetros  $\gamma_1 = 1,5$  e  $\gamma_2 = -1,5$  permitem que os sistemas sejam não-idênticos e  $\eta$  é a intensidade de acoplamento entre os sistemas. Neste caso, um acoplamento fraco entre os sistemas permite-nos analisar que os sistemas não estão sincronizados em fase. Dois acoplamentos de intensidade média são considerados com o objetivo de verificar deslizamentos de  $2\pi$  na fase que ocorrem entre a transição do estado de não sincronizados para sincronizados em fase. Um acoplamento forte é considerado para examinar a sincronização de fase propriamente dita. Para estudar essas situações, utilizou-se os parâmetros sugeridos no artigo de [Lee et al. \(1998\)](#) para quatro intensidades de acoplamento:

- acoplamento fraco:  $\eta = 3$ ;
- dois valores de acoplamento médio,  $\eta = 5,2$  e  $\eta = 6,4$ ;
- acoplamento forte:  $\eta = 10$ .

As séries temporais  $x$ ,  $y$  e  $z$  são obtidas a partir de cada sistema de Lorenz usando o método Runge-Kutta de quarta ordem com passo de integração de 0,001 e as séries temporais foram consideradas com  $N = 2^{21}$  pontos discretos.

A Figura 6.29 ilustra o espectro de energia *wavelet* obtido da análise do Experimento  $L_2$  considerando em (a)  $\eta = 3$ ; (b)  $\eta = 5,2$ ; (c)  $\eta = 6,4$  e (d)  $\eta = 10$ . Nota-se da Figura 6.29(a) que para  $\eta = 3$  tem-se que a escala de máxima energia para ambos os sistemas é a escala  $J = 15$ . Neste caso, as escalas  $J = 14$  e  $J = 13$  são também analisadas devido ao fato delas apresentarem séries temporais da fase maiores e energia considerável. Quando  $\eta = 5,2$ , conforme pode ser visualizado na Figura 6.29(b), tem-se que as escalas de máxima energia são iguais para ambos os sistemas, ou seja,  $J_1 = J_2 = 15$ . Esta escala ainda apresenta séries temporais de fase pequenas, portanto as escalas  $J = 14$  e  $J = 13$  são também analisadas. Considerando o acoplamento de  $\eta = 6,4$ , conforme pode ser visualizado na Figura 6.29(c), a escala de máxima energia do sistema 1 e 2 são diferentes, ou seja,  $J_1 \neq J_2$ , e

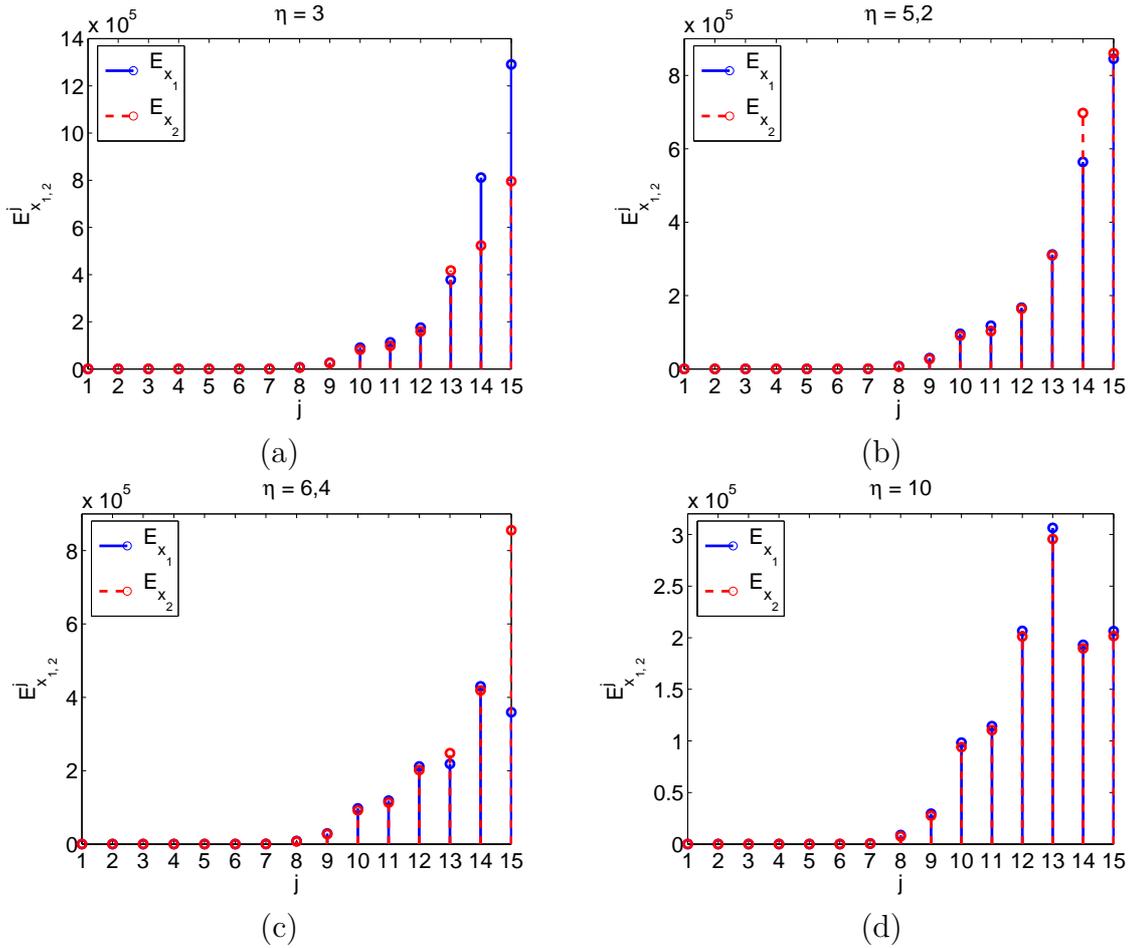


Figura 6.29 - Experimento  $L_2$ . Espectro de energia *wavelet* considerando em (a)  $\eta = 3$ ; (b)  $\eta = 5,2$ ; (c)  $\eta = 6,4$  e (d)  $\eta = 10$ .

portanto, escolhe-se a escala mínima  $J = \min(J_1, J_2) = \min(14, 15) = 14$ . Neste caso, a segunda escala de máxima energia  $J = 13$  é também analisada. Para  $\eta = 10$ , conforme pode ser visualizado na Figura 6.29(d), a escala de máxima energia para ambos os sistemas são iguais, ou seja,  $J_1 = J_2 = 13$ .

A Figura 6.30 mostra a diferença de fase entre os sistemas considerando  $\eta = 3$ . Analisando esta figura, nota-se que a diferença de fase cresce ao longo do tempo caracterizando que os dois sistemas não estão sincronizados em fase. Observa-se que as três escalas  $J = 15$ ,  $J = 14$  e  $J = 13$  são capazes de detectar a não sincronização de fase entre os sistemas.

Aumentando o acoplamento para  $\eta = 5,2$ , conforme ilustrado na Figura 6.31, ocorrem deslizamentos de fase de  $2\pi$ . Analisando a escala  $J = 15$ , detectam-se dois deslizamentos de fase de  $\approx 2\pi$ . Mas, nesta escala, o número de pontos na série tem-

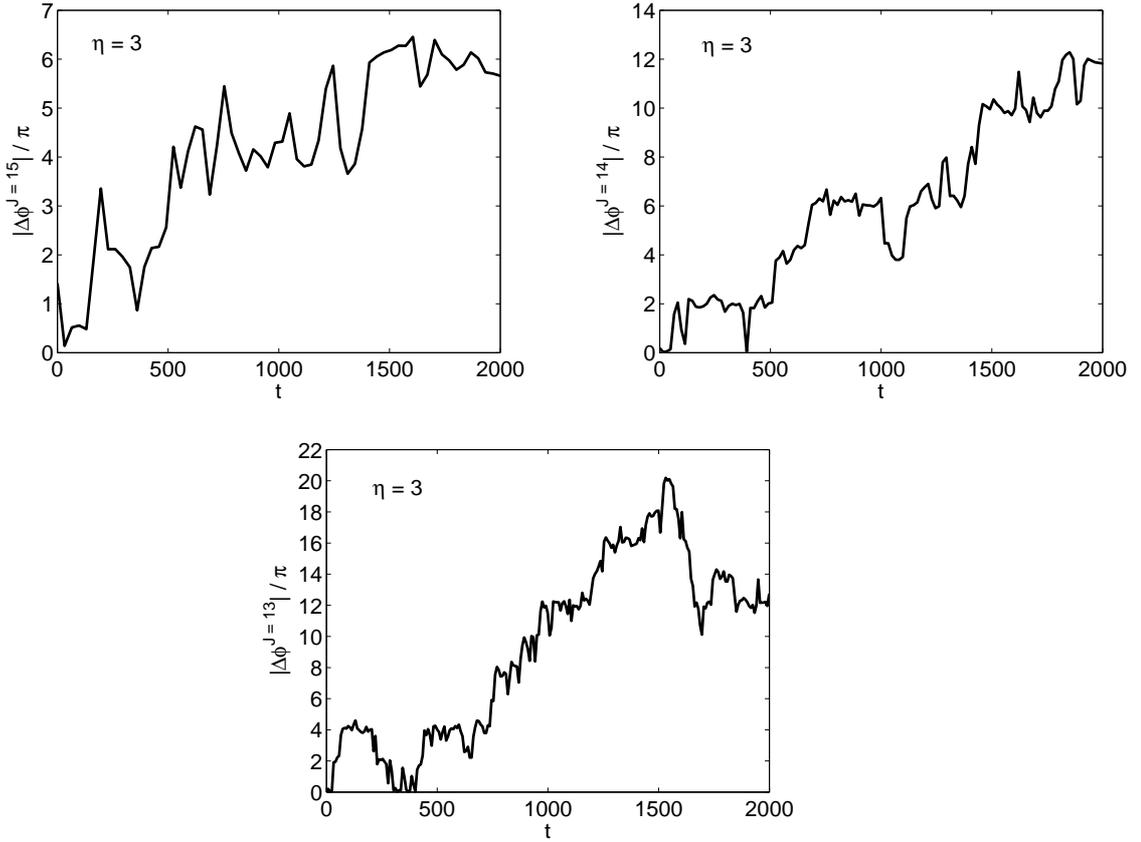


Figura 6.30 - Experimento  $L_2$ . Diferença de fase considerando  $\eta = 3$  nas escalas  $J = 15$ ,  $J = 14$  e  $J = 13$ .

poral da fase ainda não é suficiente para analisar adequadamente os deslizamentos de fase. Portanto, as escalas  $J = 14$  e  $J = 13$  são também consideradas na análise. Na escala  $J = 14$ , o método *wavelet dt-cwt* detecta quatro deslizamentos de fase. Em  $t \approx 300$  ocorre um deslizamento de fase onde a diferença de fase vai de  $2\pi$  para 0. Em  $t \approx [1100, 1300]$ , ocorrem dois deslizamentos de fase e a diferença de fase vai de  $2\pi$  para  $6\pi$  e, em  $t \approx 1400$  a diferença de fase vai de  $6\pi$  para  $4\pi$ . Na escala  $J = 13$ , são detectados 10 deslizamentos de fase. Entre  $t \approx [0, 1120]$  ocorrem cinco deslizamentos onde a diferença de fase vai de 0 a  $2\pi$  e vice e versa. Em  $t \approx [1100, 1600]$  ocorrem dois deslizamentos onde a diferença de fase varia de  $2\pi$  a  $6\pi$ . Em  $t \approx [1600, 2000]$  ocorrem três deslizamentos onde a diferença de fase varia de  $2\pi$  a 0.

Quando  $\eta = 6, 4$ , como pode ser visto na Fig. 6.32, o método *wavelet dt-cwt* considerando a escala  $J = 14$  detecta dois deslizamentos de fase que ocorrem em  $t \approx 300$  e em  $t \approx 1600$ . No intervalo  $t \approx [1300, 1400]$  não ocorre um deslizamento de  $2\pi$ . Na escala  $J = 13$  o método identifica cinco deslizamentos de fase de  $\approx 2\pi$ .

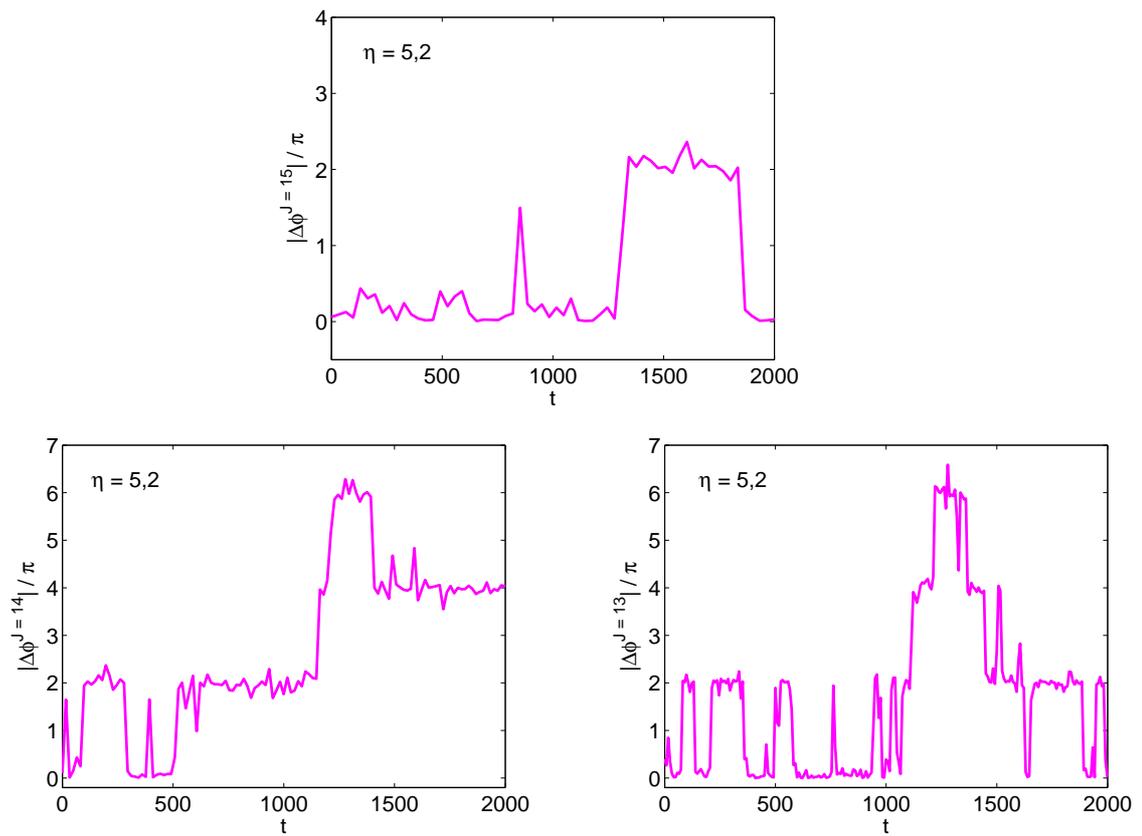


Figura 6.31 - Experimento  $L_2$ : diferença de fase considerando  $\eta = 5,2$  nas escalas  $J = 15$ ,  $J = 14$  e  $J = 13$ .

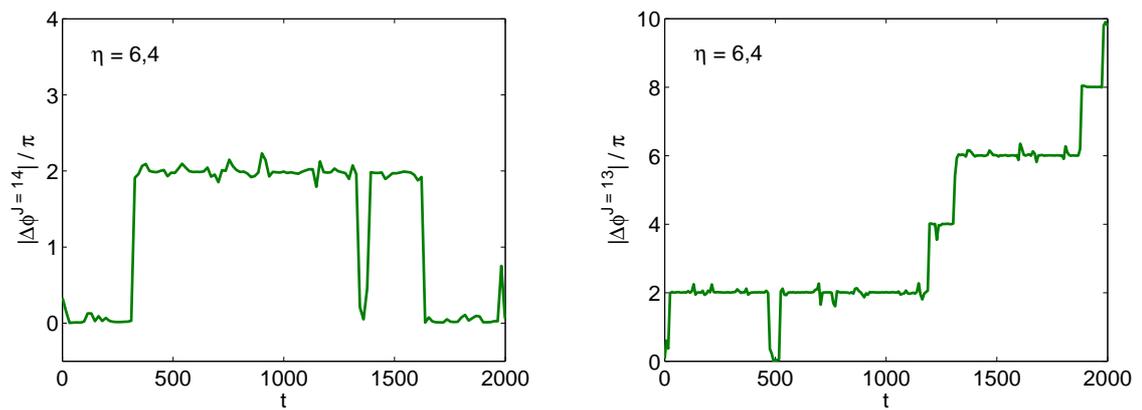


Figura 6.32 - Experimento  $L_2$ . Diferença de fase considerando  $\eta = 6,4$  nas escalas  $J = 14$  e  $J = 13$ .

Para uma intensidade de acoplamento forte de  $\eta = 10$ , como pode ser visto na Fig. 6.33, a sincronização de fase ocorre.

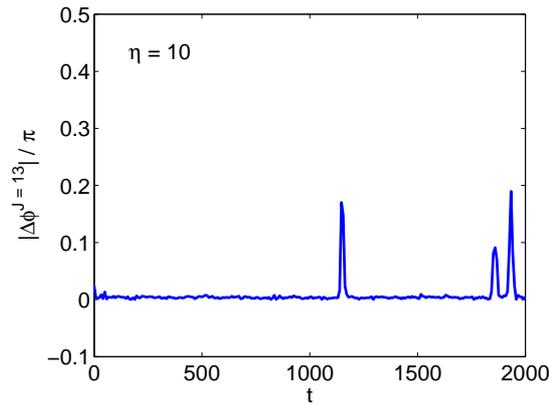


Figura 6.33 - Experimento  $L_2$ . Diferença de fase considerando  $\eta = 10$  na escala  $J = 13$ .

Os resultados são consistentes com o encontrado em (LEE et al., 1998).

O método *wavelet dt-cwt* foi capaz de verificar corretamente quando os sistemas não estavam sincronizados em fase, conforme ilustrado na Fig. 6.30, quando há deslizamentos de fase, conforme ilustrado em 6.31 e Fig. 6.32, e quando ocorre a sincronização de fase entre os dois sistemas, como pode ser visto em Fig. 6.33.

Resultados ambíguos são encontrados quando se utiliza o método arco-tangente, como pode ser visto na Figura 6.34. Quando  $\eta = 3$  o método detecta que os sistemas não estão sincronizados em fase, apesar da ocorrência de alguns deslizamentos de fase. Aumentando a intensidade de acoplamento,  $\eta = 5, 2$  e  $\eta = 6, 4$ , deslizamentos de fase são inequivocamente detectados. Quando  $\eta = 10$ , a sincronização de fase não é detectada corretamente devido a presença de vários deslizamentos de fase.

A Figura 6.34 mostra a diferença de fase entre os dois sistemas de Lorenz acoplados para as quatro intensidades de acoplamento estudadas considerando o método arco-tangente no intervalo de tempo  $t = [0, 200]$ .

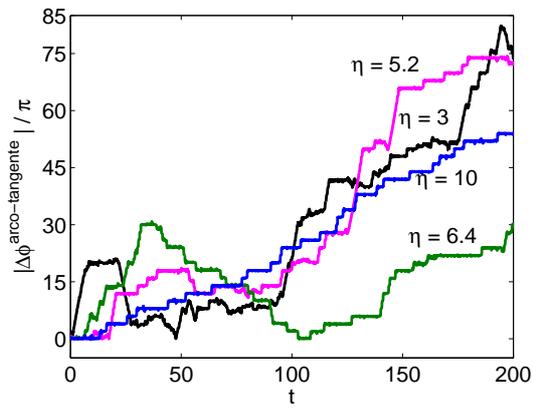


Figura 6.34 - Experimento  $L_2$ . Diferença de fase considerando o método arco-tangente no intervalo de tempo  $t = [0, 200]$ .

### 6.3 Modelo de Kuramoto

A seguir, exploram-se os resultados obtidos da análise do MK o qual foi apresentado no Capítulo 2, Seção 2.1.3.

#### 6.3.1 Modelo de Kuramoto sem Ruído

Nesta subseção apresentam-se os resultados da análise do Modelo de Kuramoto sem a adição de ruído e considerando o mesmo imerso no Plano e na Faixa de Möebius.

##### Plano

A Figura 6.35 mostra em (a) o espectro de energia *wavelet*. Em (b, c, d, e) são ilustradas as fases  $\phi$  calculadas utilizando em (b) o método *wavelet dt-cwt* considerando  $J = 8$ ; (c) o método *wavelet dt-cwt* considerando  $J = 9$ ; (d) o MK e em (e) o método arco-tangente. Nota-se que, para os osciladores 1 e 2, a escala de máxima energia é a escala  $J = 9$ ; já para o oscilador 3, a escala de máxima energia é a escala  $J = 8$ .

A Figura 6.36 mostra a diferença de fase considerando o MK no plano sem ruído, aplicando em (a) o método *wavelet dt-cwt* considerando a escala de máxima energia sendo  $J = 8$ ; (b) o método *wavelet dt-cwt* considerando a escala de máxima energia sendo  $J = 9$ ; (c) o MK teórico e em (d) o método arco-tangente.

A partir da análise da Figura 6.36, é possível distinguir que os osciladores 1 e 2 estão sincronizados em fase e que há deslizamentos de fase entre os osciladores 1 e 3 e entre os osciladores 2 e 3. Na Fig. 6.36(c) apresenta-se a diferença de fase calculada diretamente do MK. Nota-se a presença de cinco regiões de deslizamentos de fase nos intervalos  $t \approx 400$ ,  $t \approx 900$ ,  $t \approx 1400$ ,  $t \approx 1900$  e  $t \approx 2400$ , ou seja, a cada 500 unidades de tempo. Observa-se que o método *wavelet dt-cwt* considerando a escala  $J = 8$ , conforme Fig. 6.36(a), consegue identificar os deslizamentos de fase, sendo que, apenas o segundo deslizamento em  $t \approx 900$  não chega ser de  $2\pi$ . Quando se considera o método *wavelet dt-cwt* em  $J = 9$ , conforme Fig. 6.36(b), e o método arco-tangente, conforme Fig. 6.36(d), ambos são capazes de detectar corretamente os cinco deslizamentos de fase.

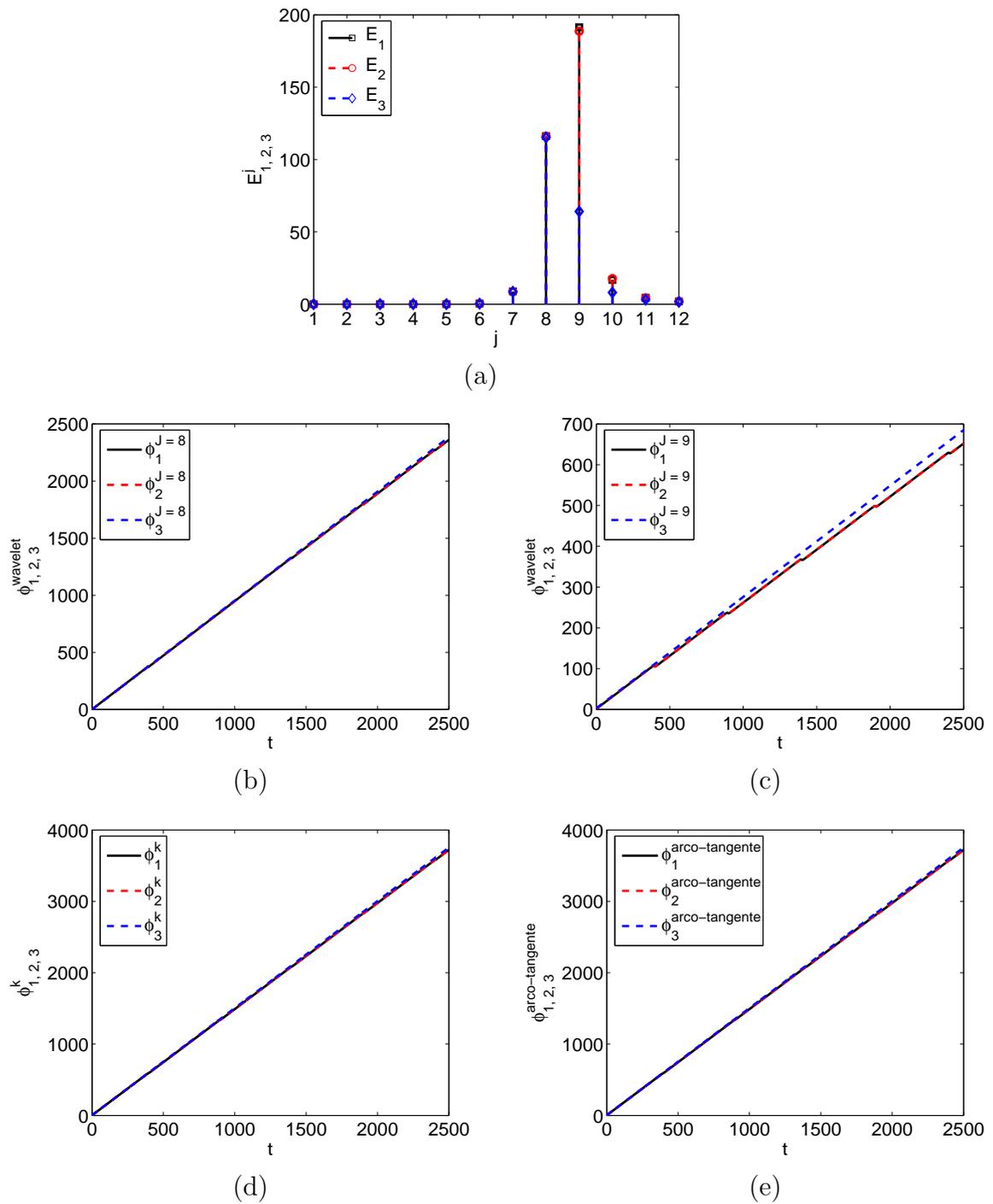


Figura 6.35 - Resultados considerando o Modelo de Kuramoto imerso no plano e sem a adiao de ruido. Em (a) o espectro de energia *wavelet* e as fases  $\phi$  usando em (b) o método *wavelet dt-cwt* considerando a escala de máxima energia sendo  $J = 8$ ; (c) o método *wavelet dt-cwt* considerando a escala de máxima energia sendo  $J = 9$ ; (d) o MK teórico e em (e) o método arco-tangente.

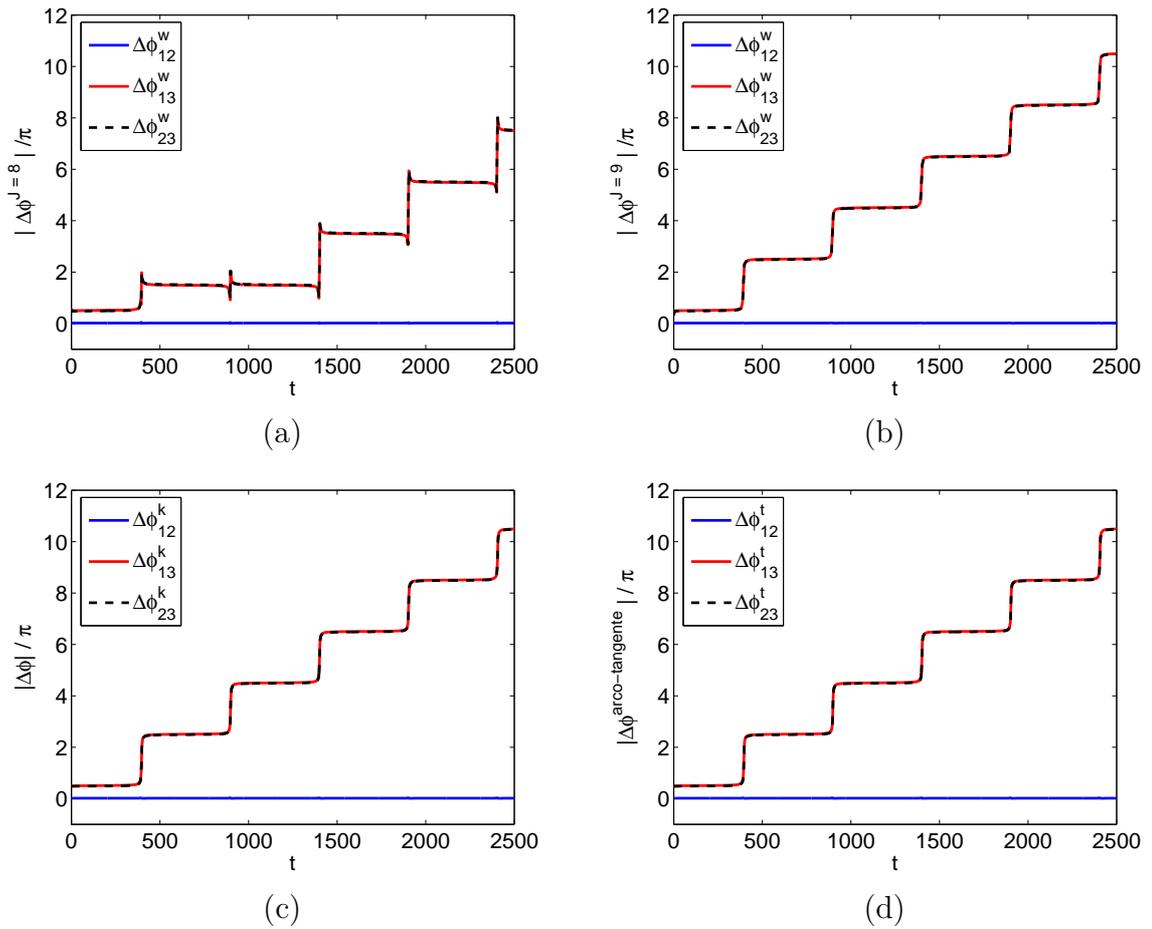


Figura 6.36 - Resultados considerando o Modelo de Kuramoto imerso no plano e sem a adição de ruído. Diferença de fase considerando em (a) o método *wavelet dt-cwt* na escala  $J = 8$ ; (b) o método *wavelet dt-cwt* na escala  $J = 9$ ; (c) o MK teórico e em (d) o método arco-tangente.

## Faixa de Möebius

A Figura 6.37 mostra os resultados considerando o MK imerso na Faixa de Möebius e sem a adição de ruído. Em (a) ilustra-se o espectro de energia *wavelet* e, em (b, c) apresenta-se a fase considerando a aplicação do método *wavelet dt-cwt* sendo em (b)  $J = 8$  e em (c)  $J = 9$ . Nota-se que, para o oscilador 1 a escala de máxima energia é a escala  $J = 9$  e, para os osciladores 2 e 3, a escala de máxima energia é a escala  $J = 8$ .

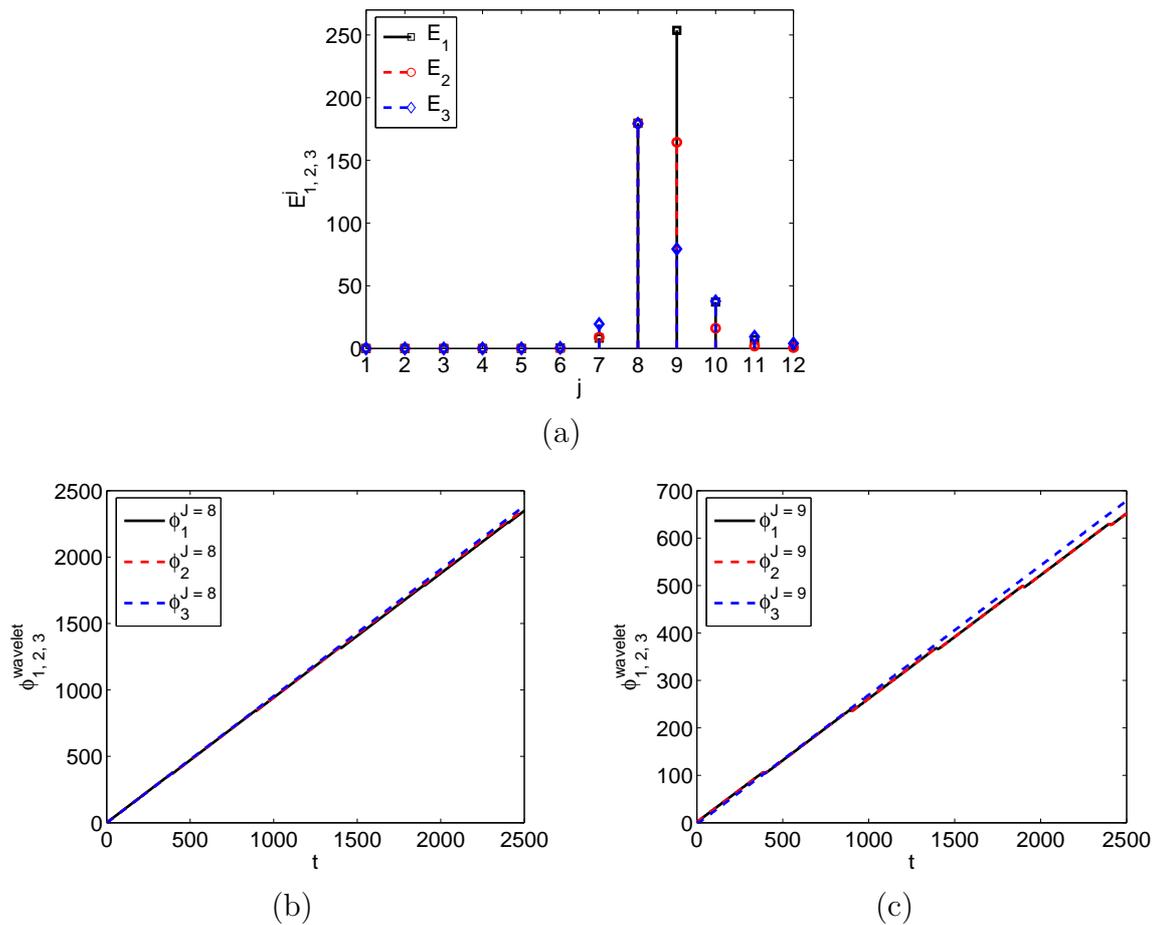


Figura 6.37 - Resultados considerando o MK imerso na Faixa de Möebius e sem adição de ruído. Em (a) o espectro de energia *wavelet* e a fase considerando a aplicação do método *wavelet dt-cwt* apresenta-se em (b) para  $J = 8$  e em (c)  $J = 9$ .

A Figura 6.38 mostra a diferença de fase considerando a aplicação em (a) do método *wavelet dt-cwt* na escala  $J = 8$ ; (b) do método *wavelet dt-cwt* na escala  $J = 9$ ; (c) do MK teórico e em (d) do método arco-tangente.

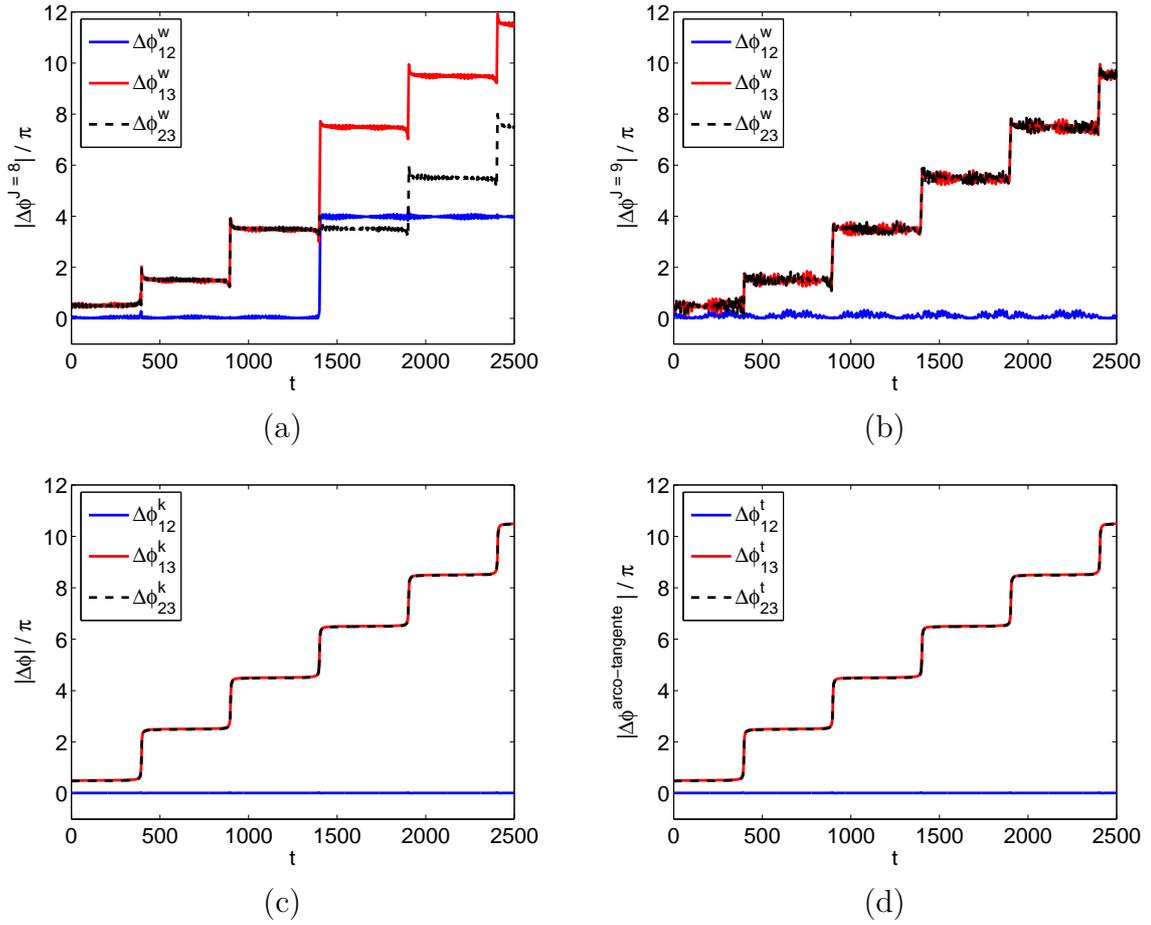


Figura 6.38 - Resultados considerando o MK imerso na Faixa de Möebius e sem a adição de ruído. A diferença de fase considerando a aplicação em (a) do método *wavelet dt-cwt* na escala  $J = 8$ ; (b) do método *wavelet dt-cwt* na escala  $J = 9$ ; (c) do MK teórico e em (d) do método arco-tangente.

Nota-se da Figura 6.38(b,c,d) que os osciladores 1,2 estão sincronizados em fase, desde que sua diferença de fase é aproximadamente igual a zero, ou seja,  $\Delta\phi_{12} \approx 0$ . Observa-se que utilizando o método *wavelet dt-cwt* considerando a escala  $J = 8$  detecta-se um deslizamento de fase entre os osciladores 1 e 2 no intervalo  $t = 1400$  e  $\Delta\phi_{12}^{J=8}$  vai do valor de 0 para  $4\pi$ , conforme pode ser visto na Figura 6.38(a).

O método *wavelet dt-cwt*, ilustrado em Fig. 6.38(a,b), e o método arco-tangente, ilustrado em Fig. 6.38(d), são capazes de identificar corretamente os deslizamentos de fase. Nota-se que o oscilador 3 apresenta deslizamentos de fase relativo aos osciladores 1 e 2 sendo que a cada  $t \approx 500$ , o oscilador 3 dá um giro adicional em torno dos osciladores 1 e 2, sendo quase como um salto, e, em seguida, retorna para uma diferença de fase quase constante.

A Figura 6.39 exibe um zoom da diferença de fase entre os osciladores do MK na faixa de Möebius sem ruído considerando a aplicação do método *wavelet dt-cwt* na escala  $J = 9$  e as séries temporais dos osciladores, a fim de verificar o porque das oscilações encontradas na diferença de fase quando se utiliza o método proposto.

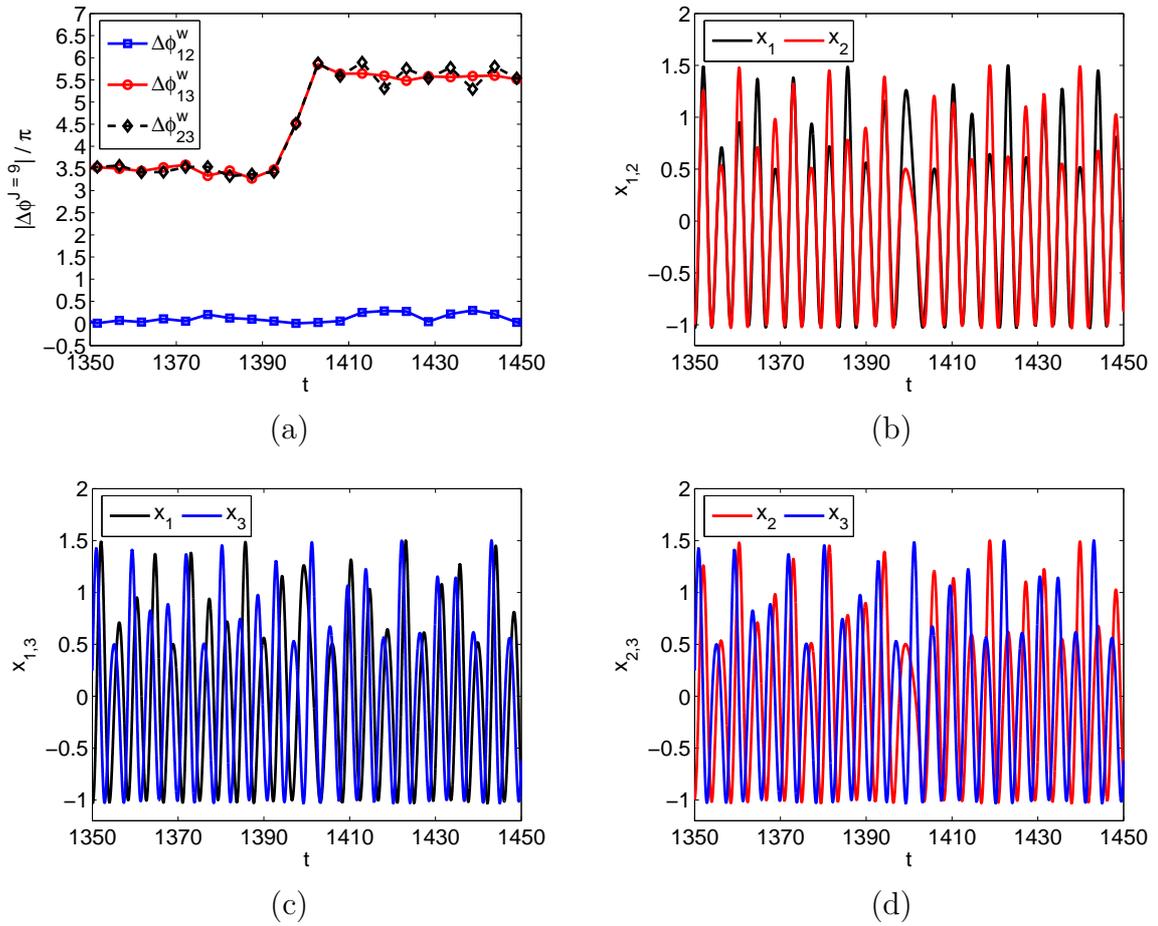


Figura 6.39 - Zoom da diferença de fase obtida entre os osciladores do MK na faixa de Möebius sem ruído considerando a aplicação do método *wavelet dt-cwt* na escala  $J = 9$  e o intervalo  $t = [1350, 1450]$  da série temporal dos osciladores 1 e 2 ( $x_{1,2}$ ); 1 e 3 ( $x_{1,3}$ ), 2 e 3 ( $x_{2,3}$ ), respectivamente.

Observa-se da Figura 6.39(a) que a diferença de fase dos osciladores 1 e 2 oscilam ao redor do valor 0, ou seja,  $\Delta\phi_{12}^{J=9} \approx 0$ . Já, a diferença de fase dos osciladores 1 e 3 e entre os osciladores 2 e 3 oscilam ao redor de 3,5 no intervalo  $t \approx [1350, 1390]$ . No intervalo de  $t = [1390, 1410]$  há um deslizamento de fase entre os osciladores 1 e 3 e entre os osciladores 2 e 3, conforme pode ser verificado nas séries temporais (veja Figura 6.39(b,c,d)), e a diferença de fase começa a oscilar em torno de 5,5, ou

seja,  $\Delta\phi_{13}^{J=9} = \Delta\phi_{23}^{J=9} \approx 5,5$ . Observa-se que as oscilações encontradas na diferença de fase estão relacionadas a um atraso (ou avanço) temporal entre as oscilações de uma série temporal em relação a outra, conforme observado nas séries temporais ilustradas em Figura 6.39(b,c,d).

### 6.3.2 Modelo de Kuramoto com Ruído

Aqui exploram-se os resultados referentes ao Modelo de Kuramoto com ruído, como exposto em 2.1.6 considerando sua imersão no Plano e na faixa de Möebius.

#### Plano

Quando se considera a presença de ruído, o espectro de energia *wavelet* apresenta as mesmas escalas de máxima energia encontradas quando  $\alpha = 0$  (veja Figura 6.35(a)) e, portanto, não ilustra-se aqui.

Considerando a presença de ruído  $\alpha = 0,10$ ,  $\alpha = 0,20$  e  $\alpha = 0,30$  os resultados são similares, isto é, os três métodos são capazes de reconstruir a diferença de fase original do MK.

A Figura 6.40 mostra a diferença de fase entre os osciladores do Modelo de Kuramoto imerso no plano, com a intensidade de ruído  $\alpha = 0,30$  considerando em (a) o MK teórico, (b) o método *wavelet dt-cwt* considerando  $J = 9$ , (c) o método arco-tangente e (d) a transformada de Hilbert.

Observa-se da Figura 6.40 que os três métodos são capazes de reconstruir a diferença de fase original do MK. Os osciladores 1,2 estão sincronizados em fase, desde que a diferença de fase é aproximadamente zero. O oscilador 3 apresenta deslizamentos de fase relativo aos osciladores 1,2: em aproximadamente 500 unidades de tempo, o oscilador 3 apresenta uma rotação adicional ao redor dos osciladores 1,2, quase como um salto, e então retorna para uma diferença de fase quase constante.

Uma importante característica do método *wavelet dt-cwt* é que ele é menos sensível a presença de ruído do que o método arco-tangente e a transformada de Hilbert, conforme pode ser visto na Figura 6.40(b, c, d).

A Figura 6.41 mostra a diferença de fase entre os osciladores do Modelo de Kuramoto imerso no plano com a intensidade de ruído de  $\alpha = 0,40$  considerando em (a) o MK teórico, (b) o método *wavelet dt-cwt* considerando  $J = 9$ , (c) o método arco-tangente e (d) a transformada de Hilbert.

Quando se considera valores acima do nível de ruído de  $\alpha = 0,40$ , o método arco-tangente e a transformada de Hilbert falham ao identificar os deslizamentos de fase e a sincronização de fase, conforme ilustrado na Figura 6.41(c,d) quando  $\alpha = 0,40$ .

Analisando os resultados obtidos da aplicação do método arco-tangente, Fi-

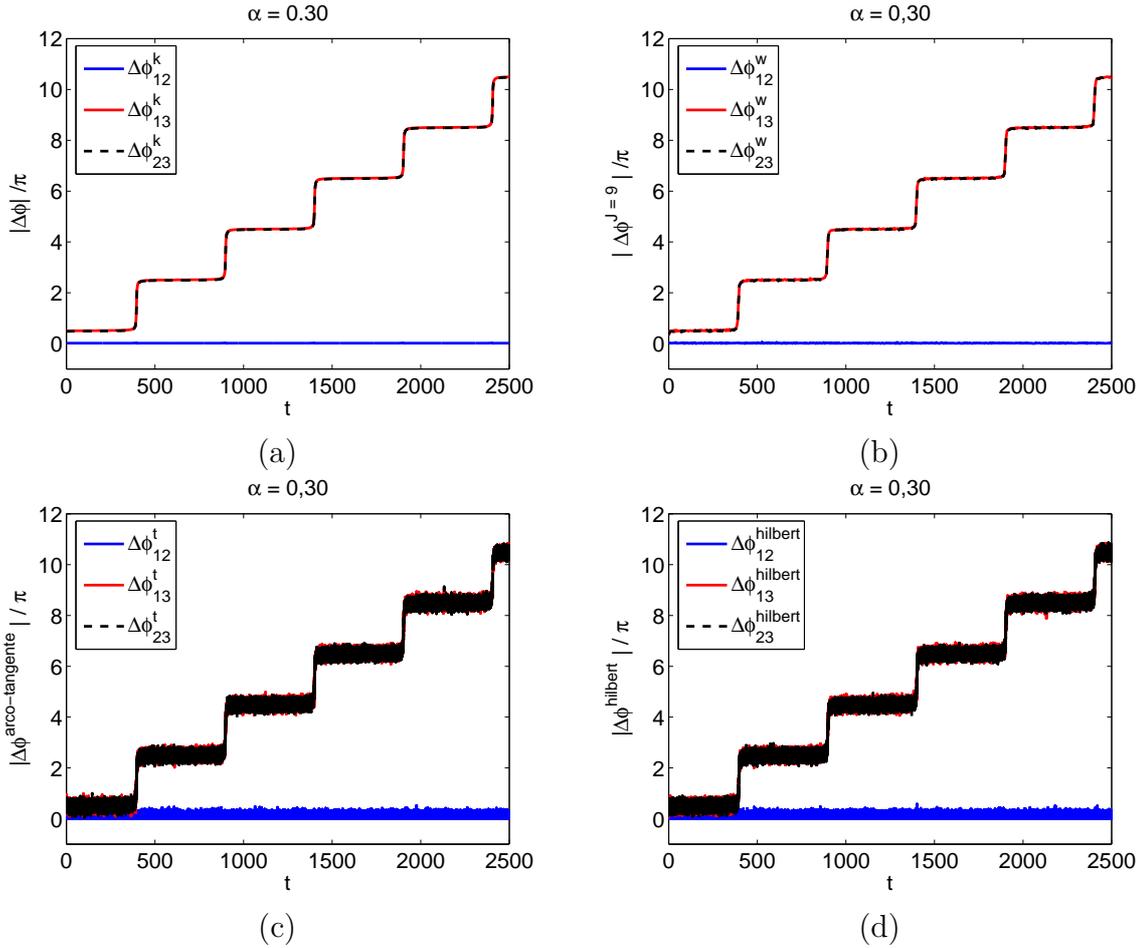


Figura 6.40 - Diferença de fase entre os osciladores do Modelo de Kuramoto imerso no plano com intensidade de ruído de  $\alpha = 0,30$  considerando em (a) o MK teórico, (b) o método *wavelet dt-cwt*, (c) o método arco-tangente e (d) a transformada de Hilbert.

Figura 6.41(c), três falsos deslizamentos de fase são detectados entre os osciladores 1 e 2, no intervalo  $t \approx 640$ ,  $t \approx 860$  e  $t \approx 1950$ . Considerando os osciladores 1 e 3 três falsos deslizamentos de fase são detectados no intervalo  $t \approx 640$ ,  $t \approx 790$  e  $t \approx 885$ ; e entre os osciladores 2 e 3 são detectados quatro deslizamentos nos intervalos  $t \approx 790$ ,  $t \approx 860$ ,  $t \approx 885$  e  $t \approx 1950$ .

Nota-se na Figura 6.41(d), que a transformada de Hilbert também apresenta resultados incorretos com relação a identificação dos deslizamentos de fase e sincronização de fase. Quando se analisa a diferença de fase entre os osciladores 1 e 2, a transformada de Hilbert detecta erroneamente 12 regiões de deslizamentos de fase. Considerando a diferença de fase entre os osciladores 1 e 3, são detectados erroneamente 15 deslizamentos de fase e quando se considera os osciladores 2 e 3 são detectados

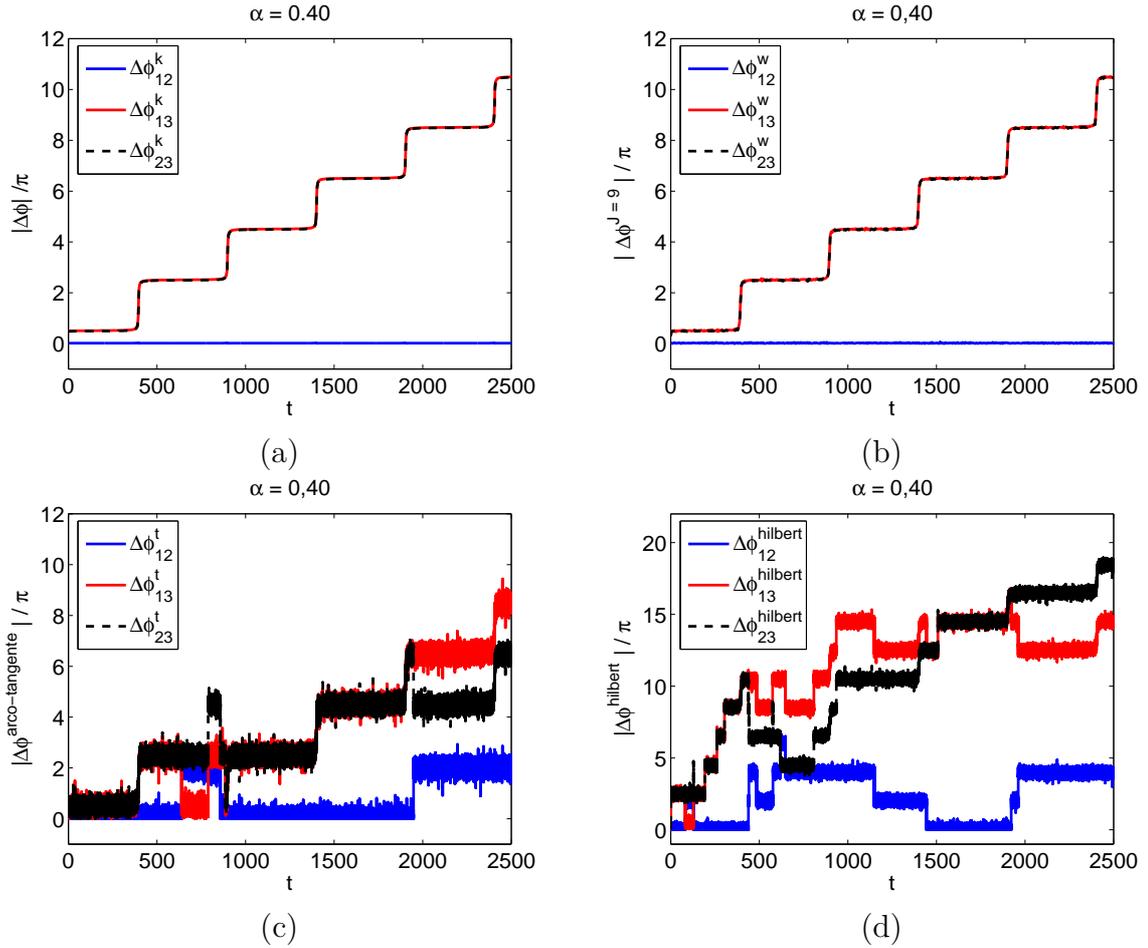


Figura 6.41 - A diferença de fase entre os osciladores do Modelo de Kuramoto imerso no plano com intensidade de ruído de  $\alpha = 0,40$  considerando em (a) o MK teórico, (b) o método *wavelet dt-cwt* considerando  $J = 9$ , (c) o método arco-tangente e (d) a transformada de Hilbert.

erroneamente 12 deslizamentos de fase.

O método *wavelet dt-cwt* detecta corretamente os deslizamentos de fase e a sincronização de fase, conforme ilustrado na Figura 6.41(b).

Mesmo para níveis elevados de ruído, até  $\alpha = 2,0$ , o método *wavelet dt-cwt* proposto detecta corretamente a não sincronização de fase, os deslizamentos de fase e a sincronização de fase.

## Faixa de Möbius

Quando se considera a presença de ruído, o espectro de energia *wavelet* apresenta as mesmas escalas de máxima energia encontradas quando  $\alpha = 0$  (veja Figura 6.37(a)) e, portanto, não ilustra-se aqui.

Considerando as intensidades de ruído  $\alpha = 0,10$  e  $\alpha = 0,20$  os resultados são similares, isto é, os três métodos são capazes de reconstruir a diferença de fase do MK original.

A Figura 6.42 mostra a diferença de fase do Modelo de Kuramoto imerso na Faixa de Möbius, com intensidade de ruído de  $\alpha = 0,20$  considerando em (a) o MK teórico, (b) o método *wavelet dt-cwt* considerando  $J = 9$ , (c) o método arco-tangente e (d) a transformada de Hilbert.

Nota-se na Fig. 6.42 que os três métodos são capazes de detectar os deslizamentos de fase e a sincronização de fase entre os osciladores. No entanto, a transformada de Hilbert detecta erroneamente uma região de deslizamento de fase entre os osciladores 1 e 3 e entre os osciladores 2 e 3 no intervalo  $t \approx 490$  (veja a Figura 6.42(d)).

Para uma intensidade de ruído de  $\alpha = 0,30$ , o método arco-tangente e a transformada de Hilbert falham em identificar os deslizamentos de fase e a sincronização de fase, conforme ilustrado na Figura 6.43(c, d). O método *wavelet dt-cwt* detecta corretamente os deslizamentos de fase e a sincronização de fase, conforme ilustrado na Figura 6.43(b).

A Figura 6.43 mostra a diferença de fase entre os osciladores do Modelo de Kuramoto imerso na Faixa de Möbius com intensidade de ruído  $\alpha = 0,30$ , considerando em (a) o MK teórico, (b) o método *wavelet dt-cwt* considerando  $J = 9$ , (c) o método arco-tangente e (d) a transformada de Hilbert.

Quando se considera a intensidade de ruído acima do valor de  $\alpha = 0,30$ , o método *wavelet dt-cwt* não detecta corretamente os deslizamentos de fase e a sincronização de fase apenas quando  $\alpha = 1,6$ .

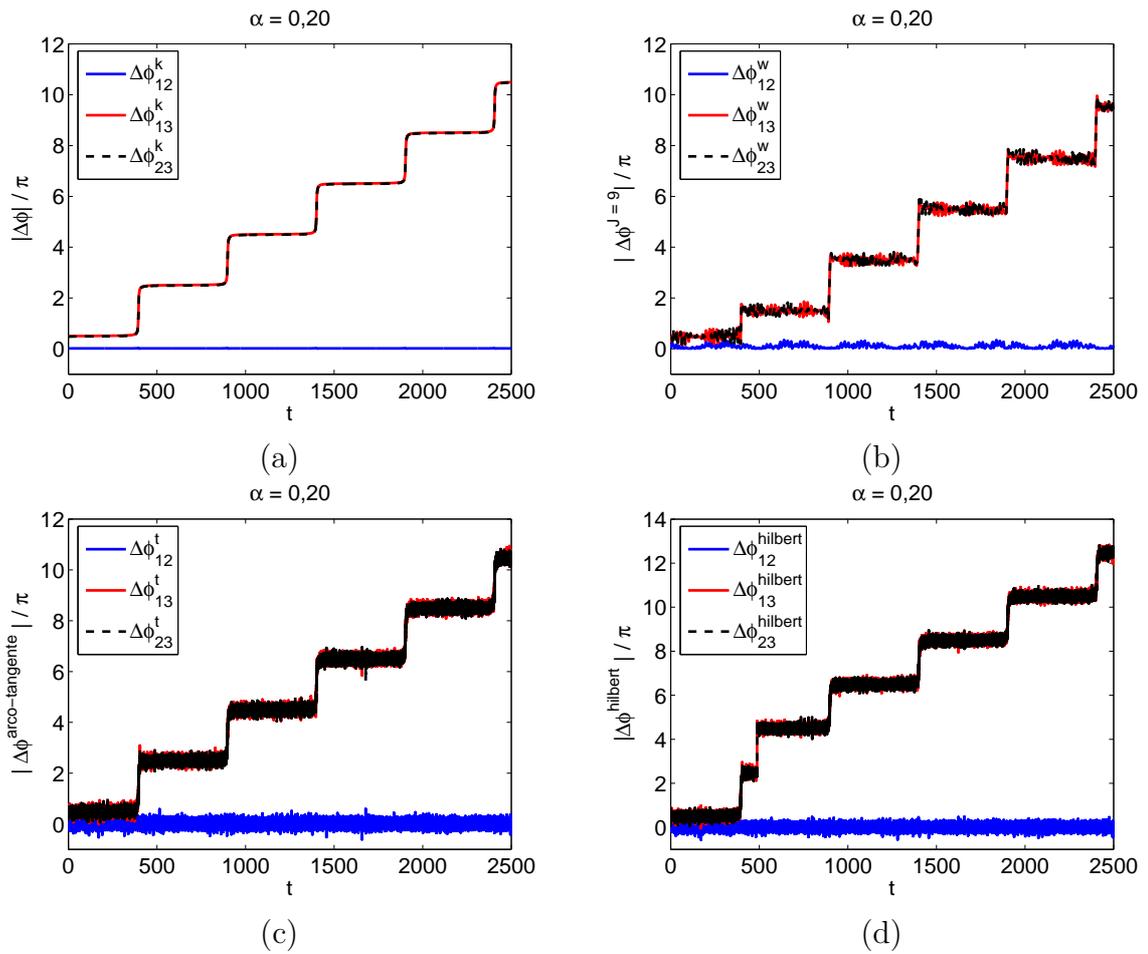


Figura 6.42 - Diferença de fase do Modelo de Kuramoto imerso na Faixa de Möbius, com intensidade de ruído de  $\alpha = 0,20$  considerando em (a) o MK teórico, (b) o método *wavelet dt-cut* considerando  $J = 9$ , (c) o método arco-tangente e (d) a transformada de Hilbert.

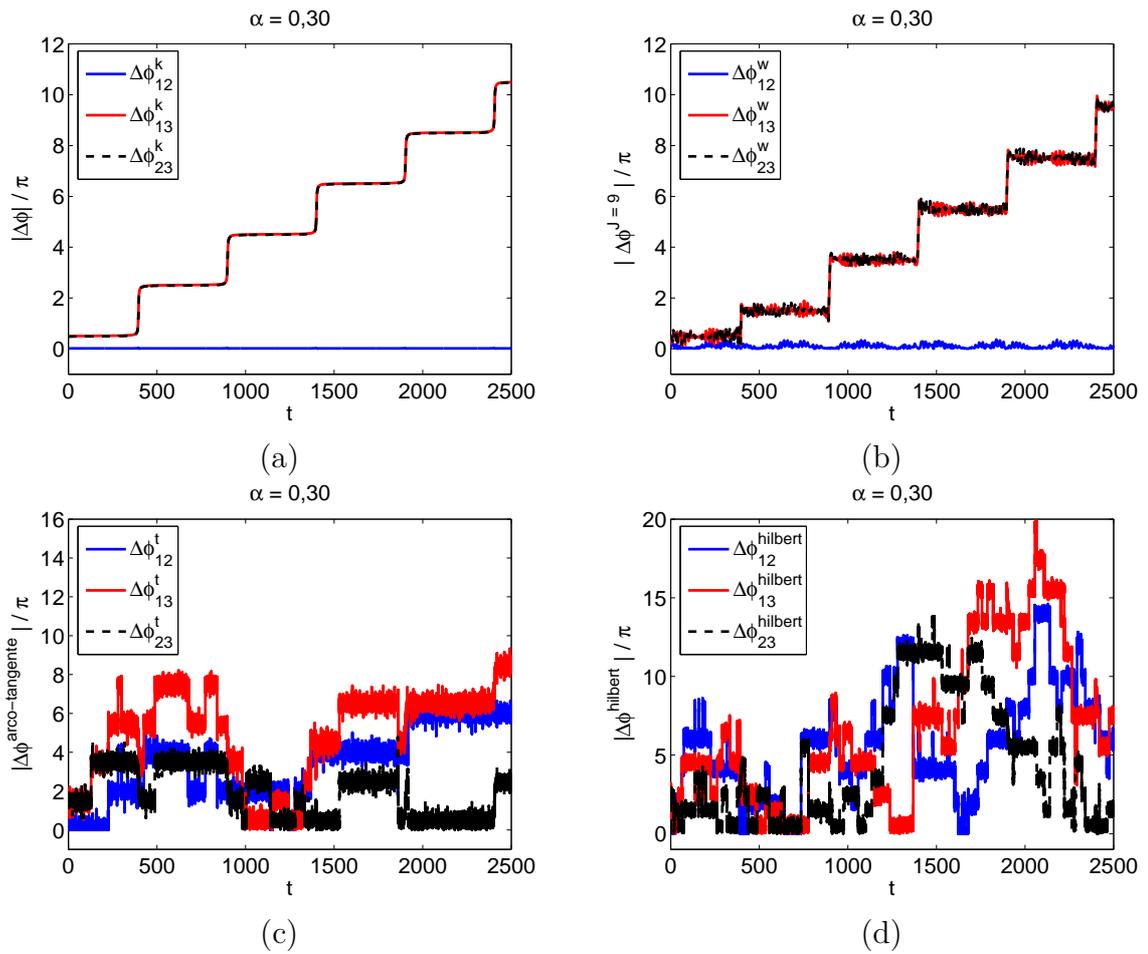


Figura 6.43 - Diferença de fase entre os osciladores do Modelo de Kuramoto imerso na Faixa de Möbius com intensidade de ruído  $\alpha = 0,30$ , considerando em (a) o MK teórico, (b) o método *wavelet dt-cwt* considerando  $J = 9$ , (c) o método arco-tangente e (d) a transformada de Hilbert.

## 6.4 Dados Experimentais

Nesta seção apresentam-se os resultados obtidos da análise dos conjuntos de dados experimentais.

### 6.4.1 Plasma

O conjunto de dados experimentais do plasma forçado foi exposto no Capítulo 2, Seção 2.2, Subseção 2.2.1.

Neste caso são consideradas três intensidades de acoplamento: uma intensidade fraca de  $E_\eta = 0,2$ , uma média de  $E_\eta = 0,34$  e uma forte de  $E_\eta = 0,4$ . A série temporal é composta por  $N = 8 \times 10^4$  pontos e foi decomposta pelo método *wavelet dt-cwt* em  $j = 17$  escalas de decomposição.

A Figura 6.44 ilustra o espectro de energia *wavelet* obtido da análise do plasma considerando as três diferentes intensidades de acoplamento estudadas. Nota-se que a escala de máxima energia quando  $E_\eta = 0,2$  e  $E_\eta = 0,34$  é a escala  $J = 5$  para ambos os sistemas. Já, quando  $E_\eta = 0,4$ , para o sistema 1 a escala de máxima energia é a  $J = 4$  e para o sistema 2 é a escala  $J = 5$ . Devido a este fato, considera-se a fase e a diferença de fase em ambas as escalas  $J = 4$  e  $J = 5$ .

A Figura 6.45 ilustra a fase considerando as três intensidades de acoplamento estudadas e as duas escalas  $J = 4$  e  $J = 5$  analisadas.

A Figura 6.46 ilustra a diferença de fase obtida da análise do plasma considerando as três intensidades de acoplamento estudadas e as duas escalas analisadas sendo em (a)  $J = 4$  e em (b)  $J = 5$ .

Analisando a Figura 6.46(a), quando se tem uma intensidade de acoplamento fraca de  $E_\eta = 0,2$ , o método detecta o crescimento da diferença de fase ao longo do tempo mostrando que os sistemas não estão sincronizados em fase. Alguns deslizamentos de fase também são detectados em alguns intervalos de tempo isolados. Com uma intensidade de  $E_\eta = 0,34$ , o método detecta a presença de cinco deslizamentos de fase nos intervalos  $t \approx [32000, 34000]$ ,  $t \approx [38000, 42000]$ ,  $t \approx [51000, 58000]$ ,  $t \approx [66000, 68000]$  e em  $t \approx [72000, 77000]$ . Aumentando ainda mais a amplitude da onda senoidal para  $E_\eta = 0,4$ , pode-se notar que a diferença de fase oscila em torno de um valor constante, indicando a sincronização de fase entre os sistemas. Para esta amplitude, o método também detecta regiões de deslizamentos de fase em alguns intervalos de tempo, sendo que no intervalo  $t \approx [7000, 13000]$  ocorre um

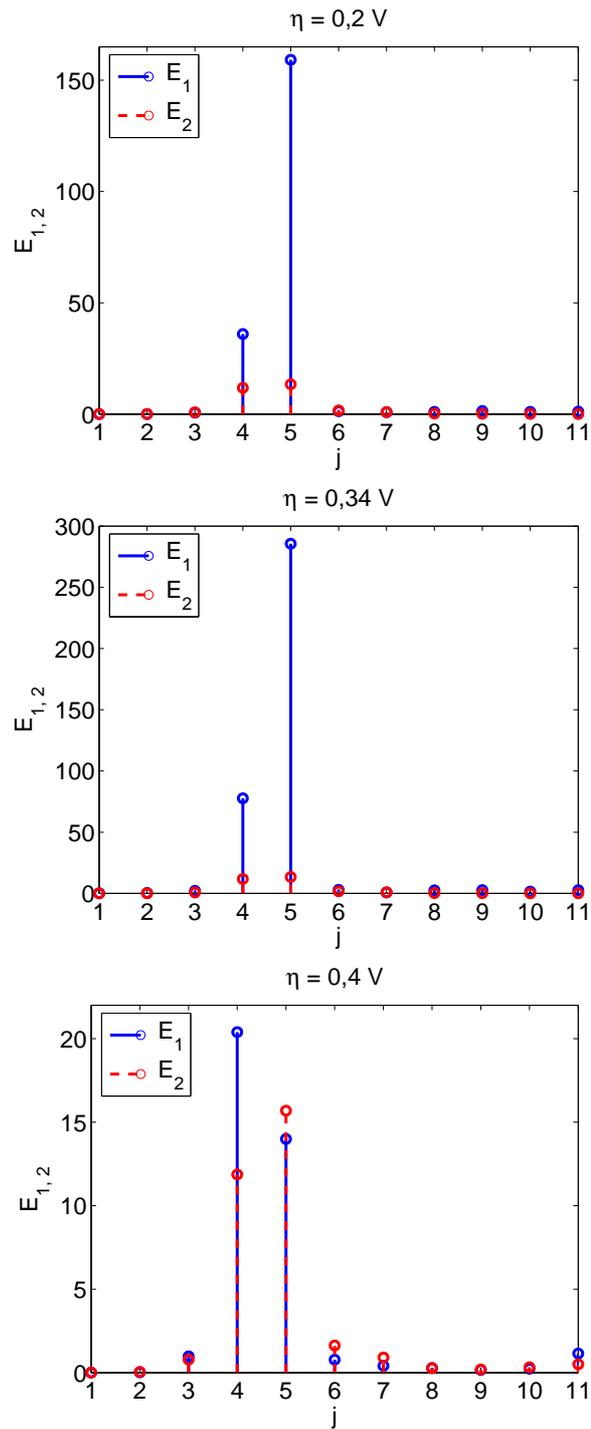


Figura 6.44 - Espectro de energia *wavelet* obtido da análise do Plasma considerando as três intensidades de acoplamento e as escalas  $J = 4$  e  $J = 5$ .

deslizamento de fase significativo onde o valor da diferença de fase vai de 0 para o valor de  $2,5\pi$ .

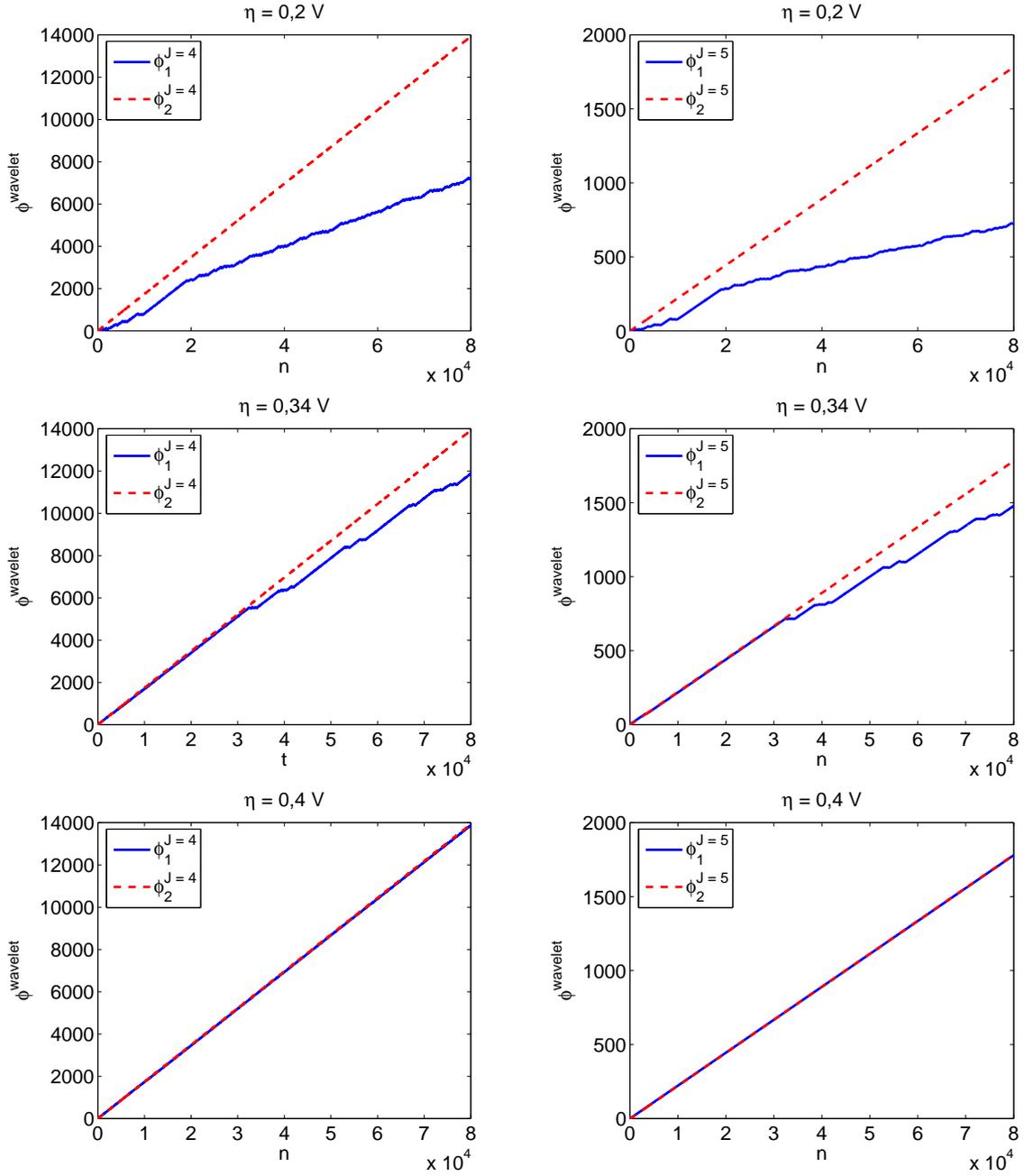


Figura 6.45 - Fase obtida da análise do plasma considerando as três intensidades de acoplamento estudadas e as duas escalas  $J = 4$  e  $J = 5$  analisadas.

Agora, fazendo uma análise dos resultados ilustrados na Figura 6.46(b), onde a escala  $J = 5$  é considerada, os mesmos resultados analisados na Figura 6.46(a) são encontrados quando  $E_\eta = 0,2$  e  $E_\eta = 0,34$ . Quando  $E_\eta = 0,4$  não há a presença de regiões de deslizamentos na diferença de fase e, neste caso,  $\Delta\phi^{J=5} \approx 0,2$ .

Os resultados apresentados são consistentes com os encontrados em (FOLLMANN et

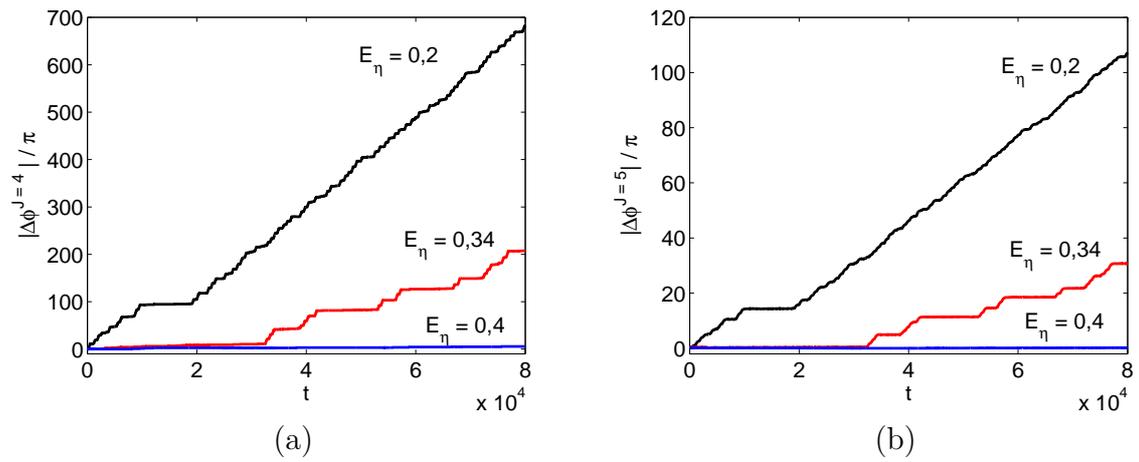


Figura 6.46 - Diferença de fase obtida da análise do plasma considerando as três intensidades de acoplamento estudadas e as duas escalas  $J = 4$  e  $J = 5$  consideradas.

al., 2011).

### 6.4.2 Circuito de Chua

O conjunto de dados experimentais do circuito de Chua foi exposto no Capítulo 2, Seção 2.2, Subseção 2.2.2.

Neste caso consideram-se três intensidades de acoplamento: uma intensidade fraca de  $R_\eta = 12 M\Omega$ , uma média de  $R_\eta = 522,11 K\Omega$  e uma forte de  $R_\eta = 90,3 K\Omega$ .

A série temporal apresenta  $N = 6 \times 10^4$  pontos e foi decomposta pelo método *wavelet dt-cwt* em  $j = 16$  escalas de decomposição.

A Figura 6.47 ilustra o espectro de energia *wavelet* e as fases obtidas da análise do circuito de Chua considerando as três diferentes intensidades de acoplamento estudadas. Nota-se que para as três intensidades de acoplamento e para os dois circuitos de Chua, a escala de máxima energia é a escala  $J = 5$ .

A Figura 6.48 ilustra a diferença de fase obtida da análise do circuito de Chua considerando as três diferentes intensidades de acoplamento estudadas. Analisando os resultados nota-se que quando  $R_\eta = 12 M\Omega$  a diferença de fase cresce ao longo do tempo caracterizando que os dois circuitos de Chua não estão sincronizados em fase. Quando  $R_\eta = 522,11 K\Omega$  o método identifica sete deslizamentos de fase que ocorrem nos seguintes intervalos:  $t \approx [2000, 8000]$ ,  $t \approx [12000, 16000]$ ,  $t \approx [20000, 24000]$ ,  $t \approx [28000, 32000]$ ,  $t \approx [34000, 42000]$ ,  $t \approx [44000, 50000]$  e em  $t \approx [52000, 58000]$ . Considerando  $R_\eta = 90,3 K\Omega$  o método é capaz de verificar que os dois circuitos de Chua estão sincronizados em fase tendo a diferença de fase limitada no valor de  $\Delta\phi^{J=5} = 1,01$ .

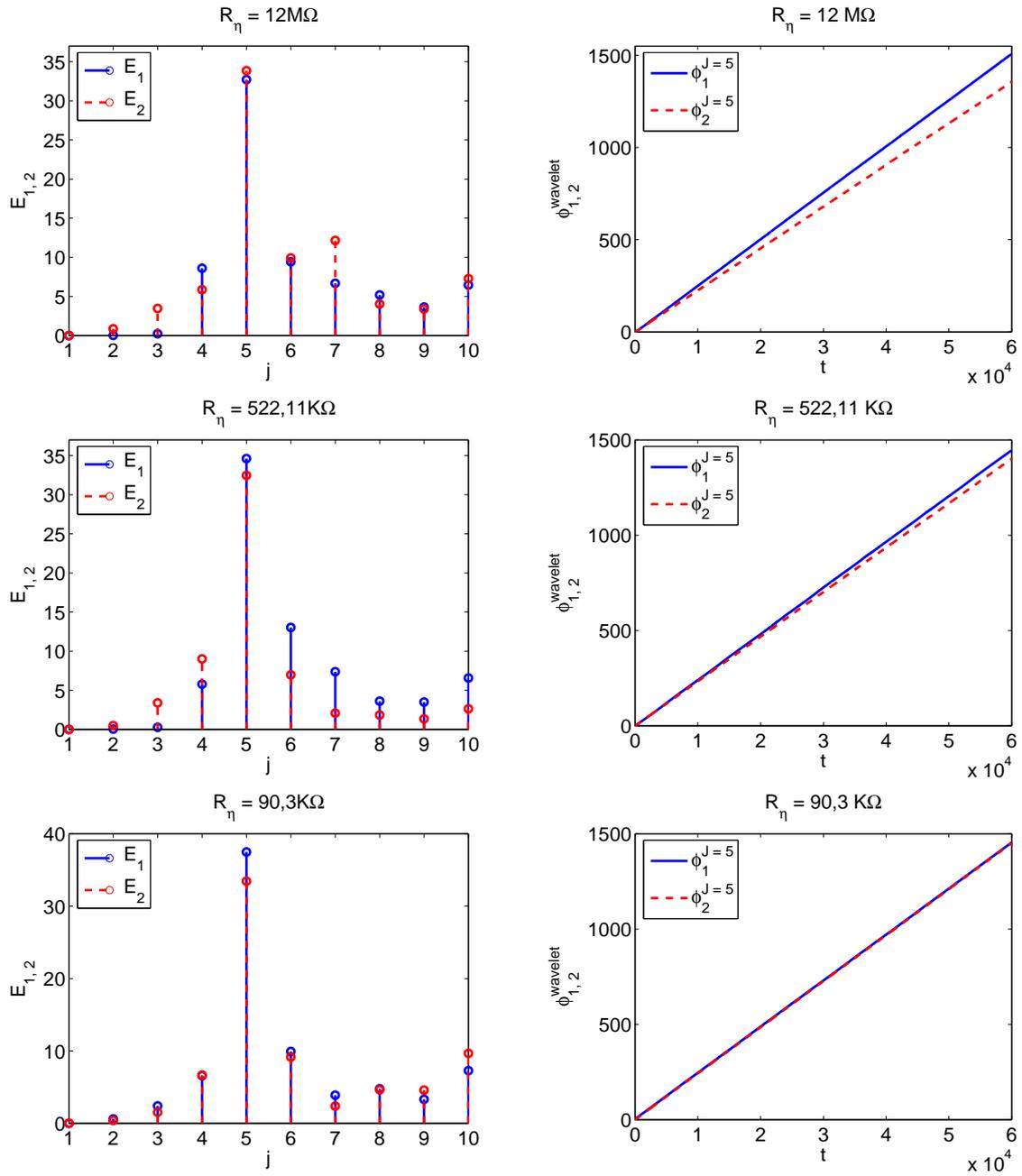


Figura 6.47 - Espectro de energia *wavelet* e as fases obtidas da análise do circuito de Chua considerando as três diferentes intensidades de acoplamento estudadas.

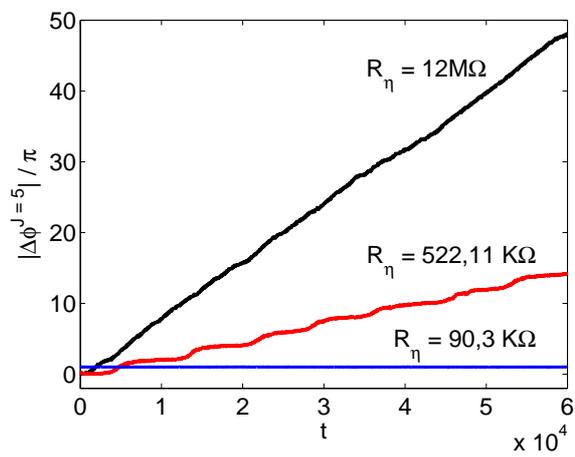


Figura 6.48 - Diferença de fase obtida da análise do circuito de Chua considerando as três diferentes intensidades de acoplamento estudadas.

### 6.4.3 Atividade Solar e Geomagnética

Nesta subseção apresenta-se a análise dos índices da atividade solar e geomagnética expostos no Capítulo 2, Seção 2.2, Subseção 2.2.3.

#### Índice $R_z$ e $aa$ anual

Para este conjunto de dados a série temporal foi decomposta em  $j = 7$  escalas.

A Figura 6.49 ilustra o espectro de energia *wavelet* obtido da análise dos índices  $R_z$  e  $aa$  anual. Nota-se da Figura 6.49 que a escala de máxima energia para o índice  $R_z$  é a escala  $J = 3$  e para o índice  $aa$  é a escala  $J = 7$ . Como na escala  $J = 7$  o número de pontos é muito pequeno, convencionou-se analisar as escalas  $J = 1$ ,  $J = 2$  e  $J = 3$  para ambos os índices.

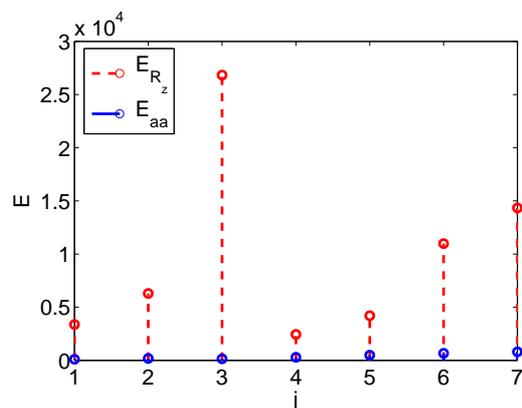


Figura 6.49 - O espectro de energia *wavelet* obtido da análise dos índices  $R_z$  e  $aa$  anual.

A Figuras 6.50, 6.51, 6.52 mostram, considerando as escalas  $J = 1$ ,  $J = 2$ ,  $J = 3$ , respectivamente, tendo em (a) energia ao longo do tempo; (b) fase e em (c) diferença de fase considerando o intervalo  $[0, 2\pi]$ . Em (d) fase e (e) diferença de fase considerando o uso da função `my-unwrap`.

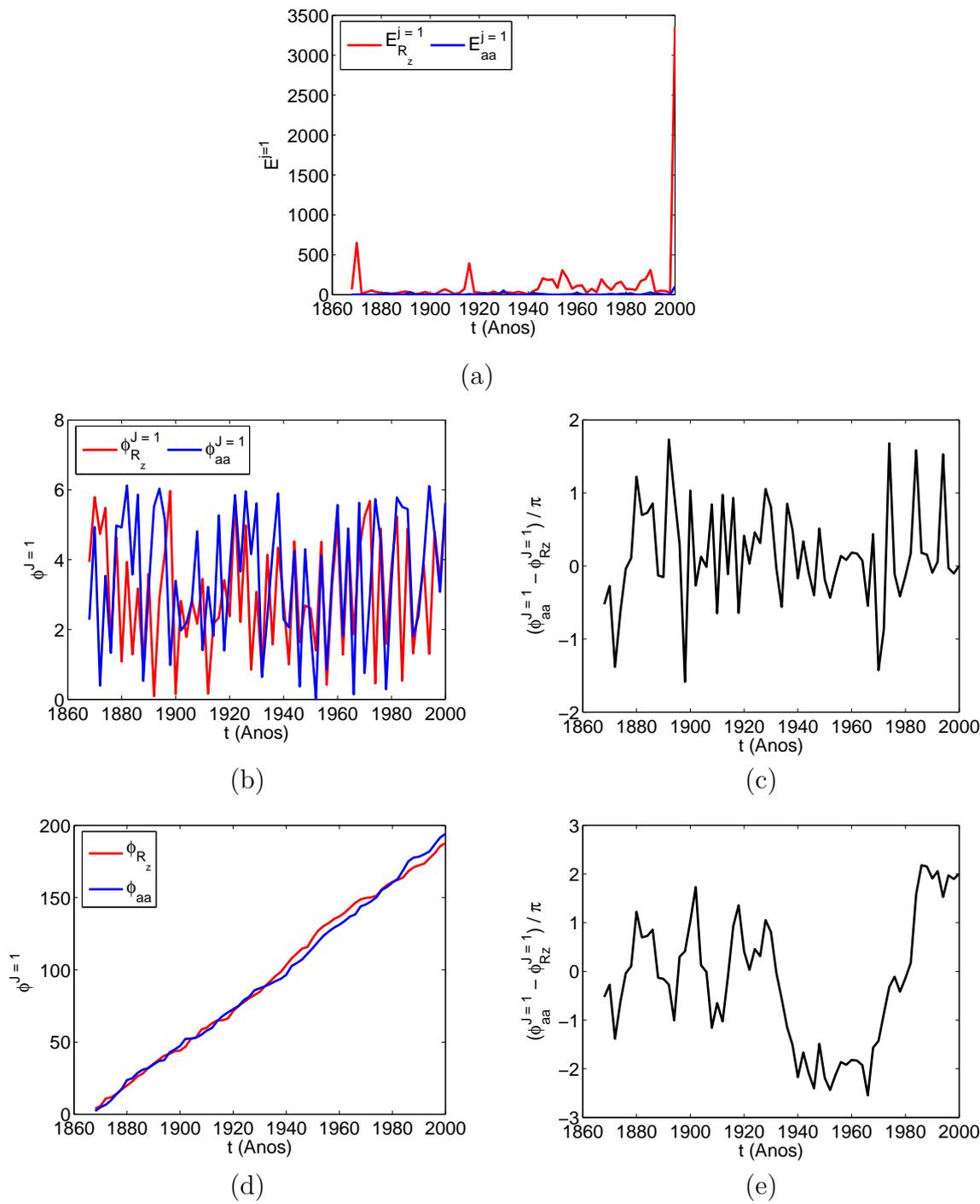


Figura 6.50 - Análise dos índices  $R_z$  e  $aa$  anual considerando a escala  $J = 1$  tendo em (a) energia ao longo do tempo; (b) fase e (c) diferença de fase considerando o intervalo  $[0, 2\pi]$ . Em (d) fase e (e) diferença de fase considerando o uso da função `my-unwrap`.

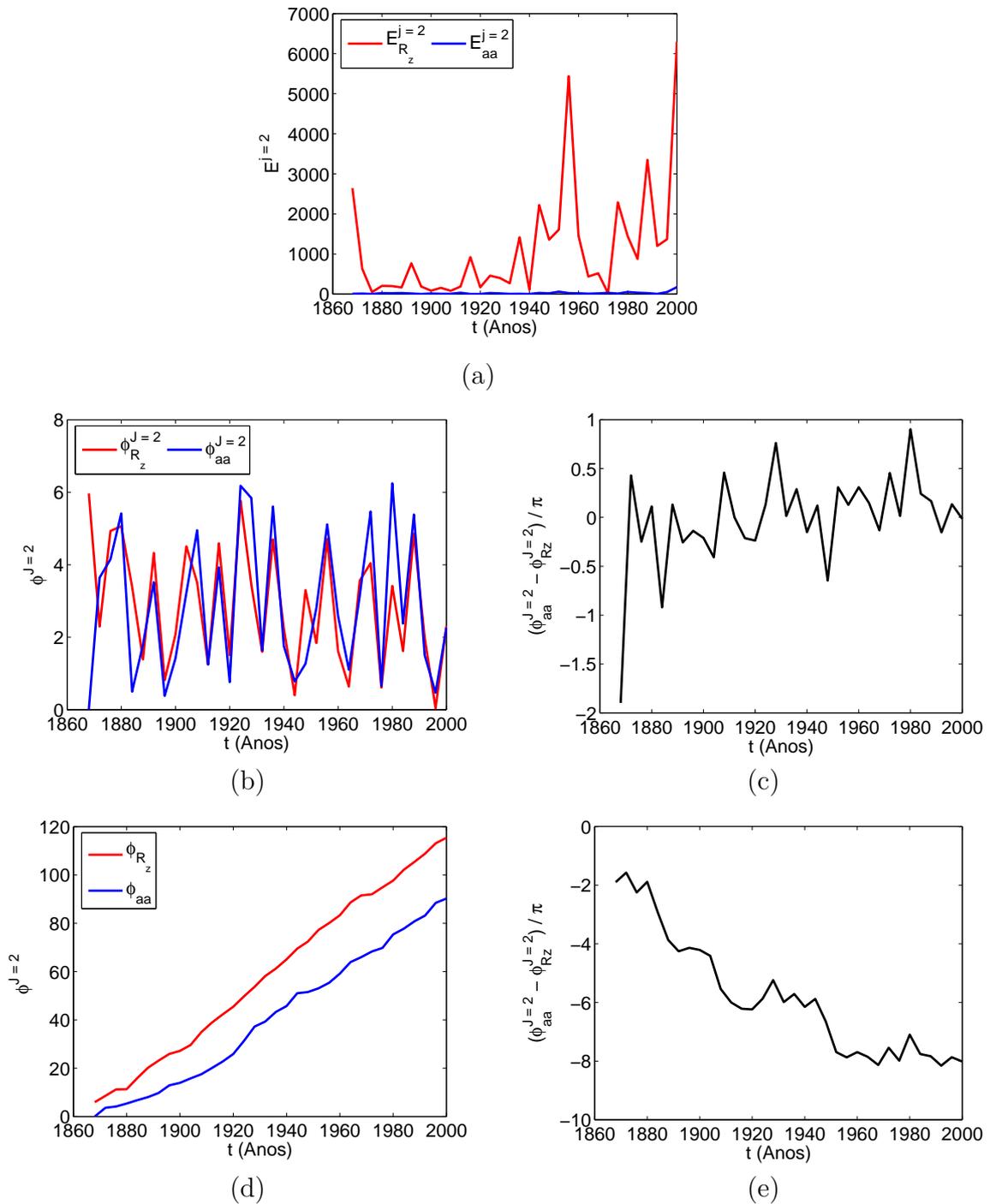
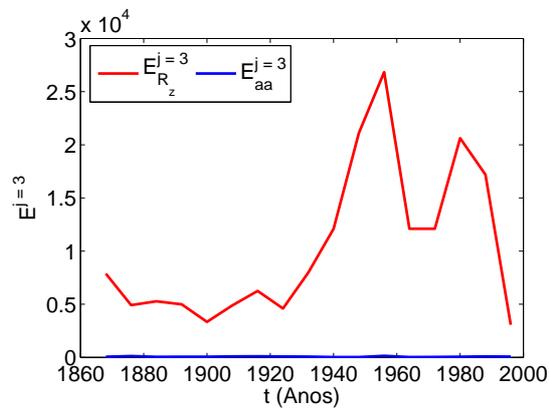
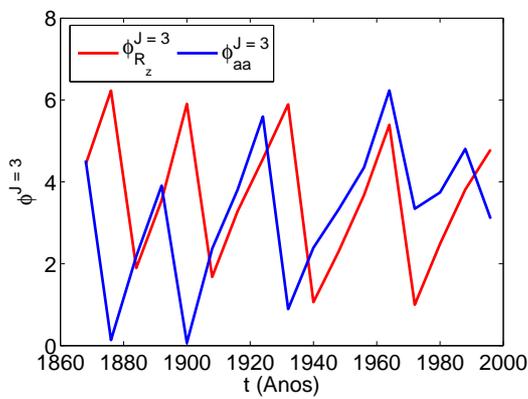


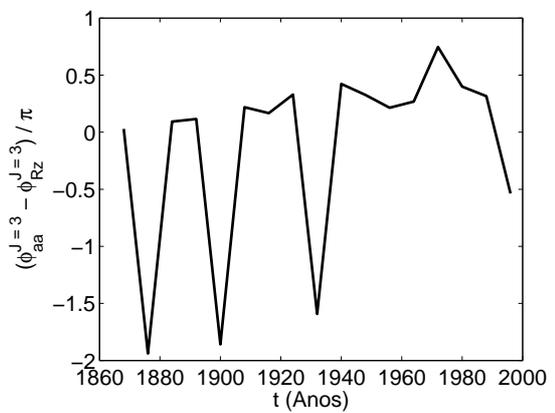
Figura 6.51 - Análise dos índices  $R_z$  e  $aa$  anual considerando a escala  $J = 2$  tendo em (a) energia ao longo do tempo; (b) fase e (c) diferença de fase considerando o intervalo  $[0, 2\pi]$ . Em (d) fase e (e) diferença de fase considerando o uso da função `my-unwrap`.



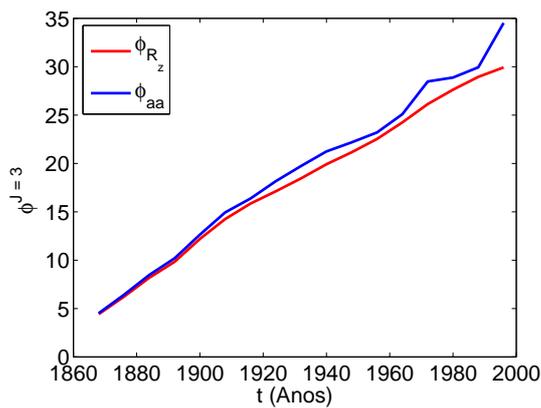
(a)



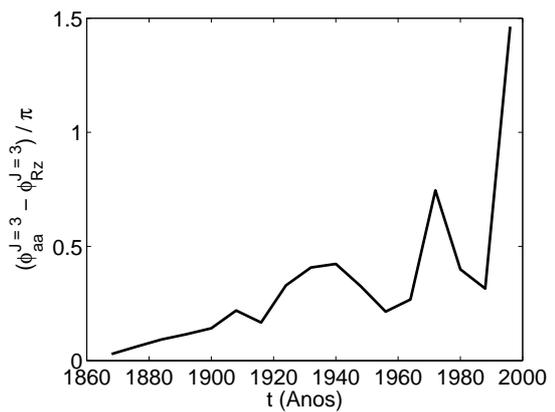
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 6.52 - Análise dos índices  $R_z$  e  $aa$  anual considerando a escala  $J = 3$  tendo em (a) energia ao longo do tempo; (b) fase e (c) diferença de fase considerando o intervalo  $[0, 2\pi]$ . Em (d) fase e (e) diferença de fase considerando o uso da função `my-unwrap`.

## Índice $R_z$ e $aa$ mensal

Neste conjunto de dados a série temporal foi decomposta em  $j = 10$  escalas.

A Figura 6.53 ilustra o espectro de energia *wavelet*. Nota-se da Figura 6.53 que a escala de máxima energia para ambos os índices é a escala  $J = 7$ . As escalas  $J = 5$  e  $J = 6$  são também consideradas, visto que na escala  $J = 7$  a quantidade de pontos é pequena.

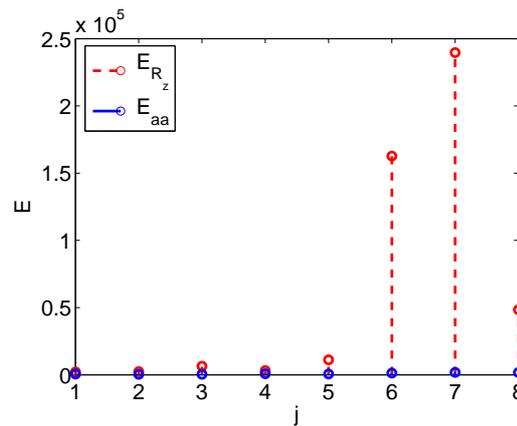


Figura 6.53 - O espectro de energia *wavelet* obtido da análise do índice  $R_z$  e  $aa$  mensal.

As Figuras 6.54, 6.55 e 6.56 ilustram considerando as escalas  $J = 5$ ,  $J = 6$  e  $J = 7$ , respectivamente, tendo em (a) energia ao longo do tempo; (b) fase e em (c) diferença de fase no intervalo  $[0, 2\pi]$ . Em (d) fase e em (e) diferença de fase usando a função `my-unwrap`.

A análise dos índices  $R_z$  e  $aa$ , considerando dados anuais e mensais, permitiu encontrar os anos em que os índices apresentam-se em fase ou fora de fase.

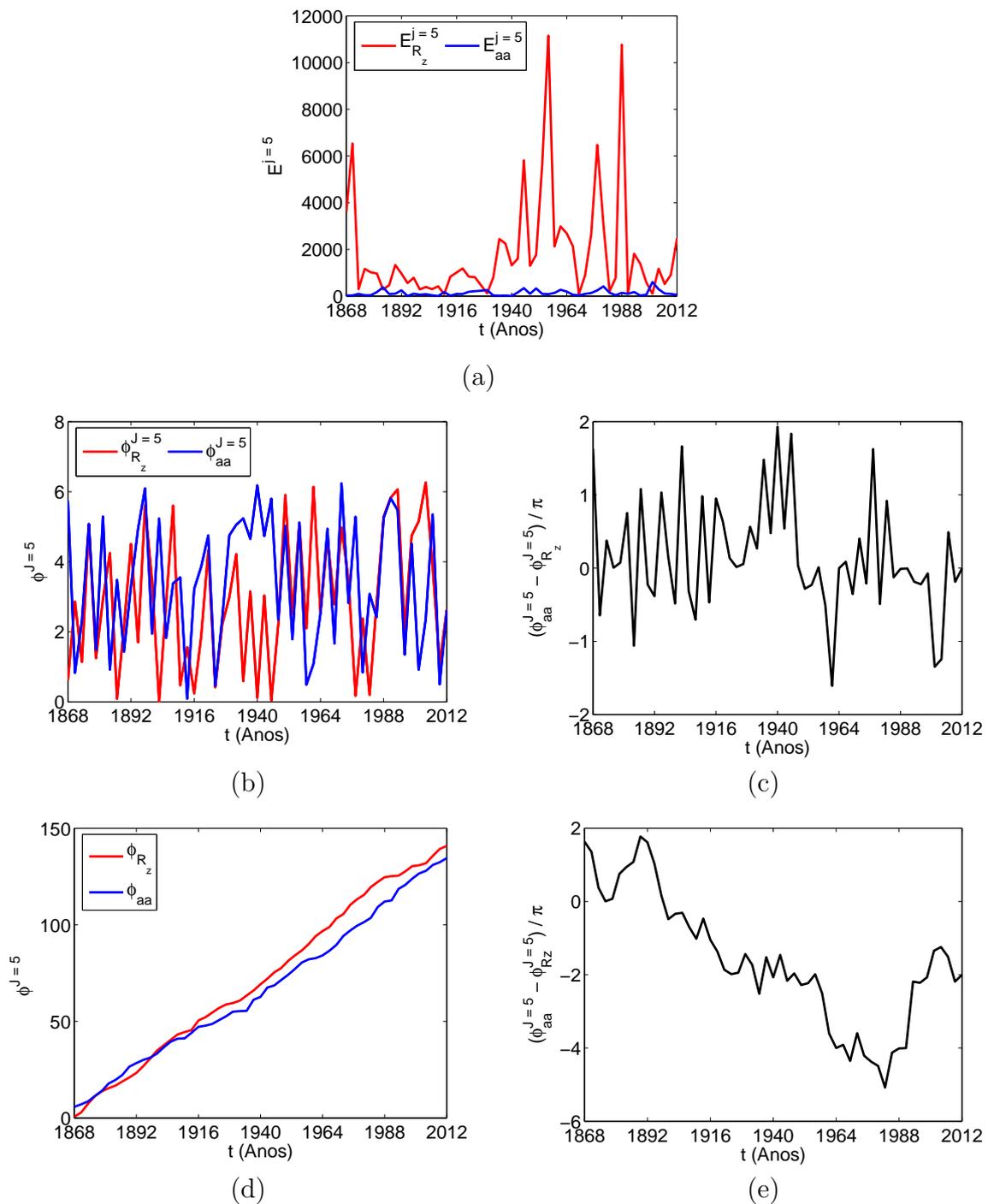


Figura 6.54 - Análise do índice  $R_z$  e  $aa$  mensal considerando a escala  $J = 5$  tendo em (a) energia ao longo do tempo; (b) fase e (c) diferença de fase no intervalo  $[0, 2\pi]$ . Em (d) fase e (e) diferença de fase considerando o uso da função `my-unwrap`.

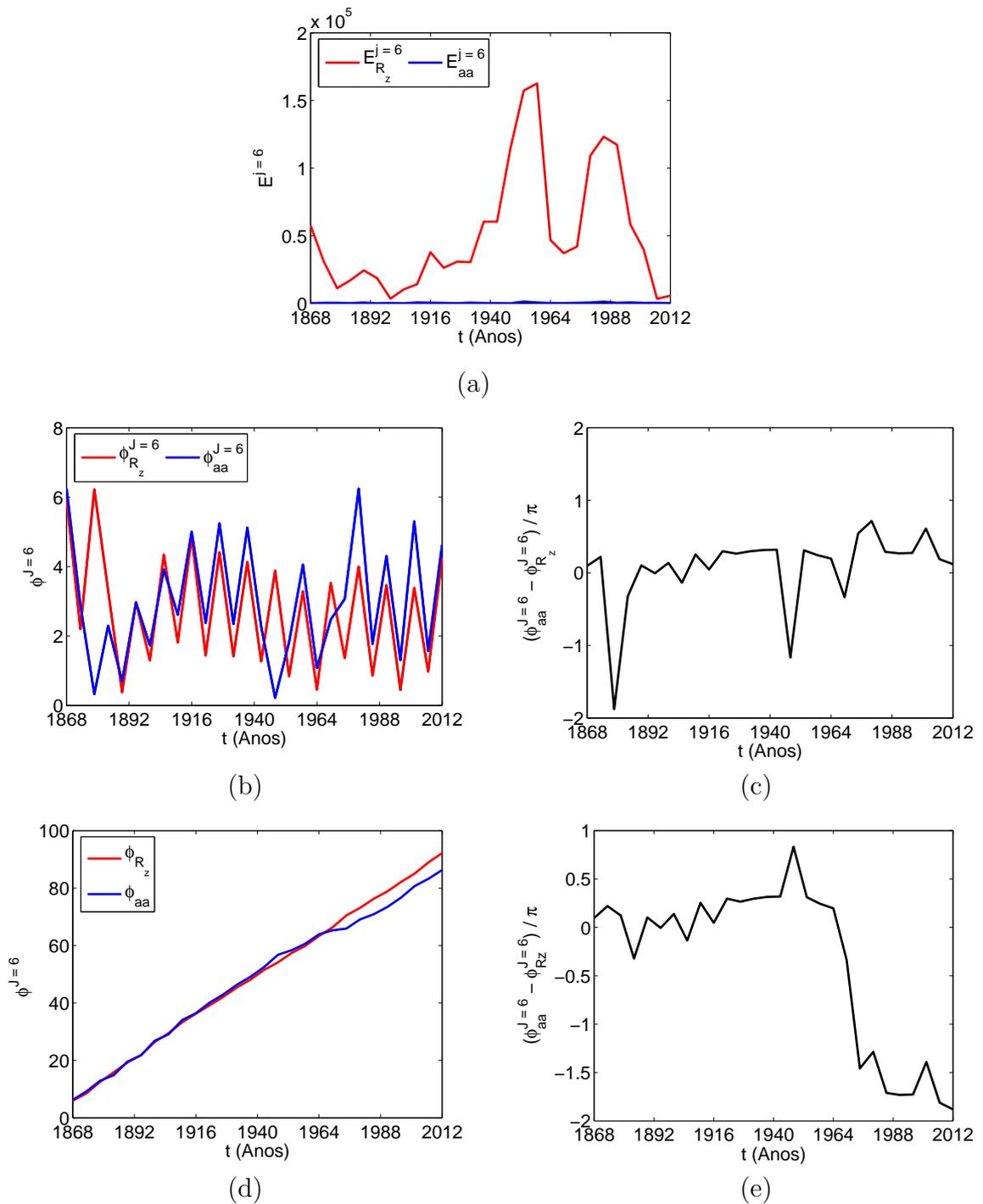


Figura 6.55 - Análise do índice  $R_z$  e  $aa$  mensal considerando a escala  $J = 6$  tendo em (a) energia ao longo do tempo; (b) fase e (c) diferença de fase no intervalo  $[0, 2\pi]$  e (d) fase e (e) diferença de fase considerando o uso da função `my-unwrap` para a escala  $J = 6$ .

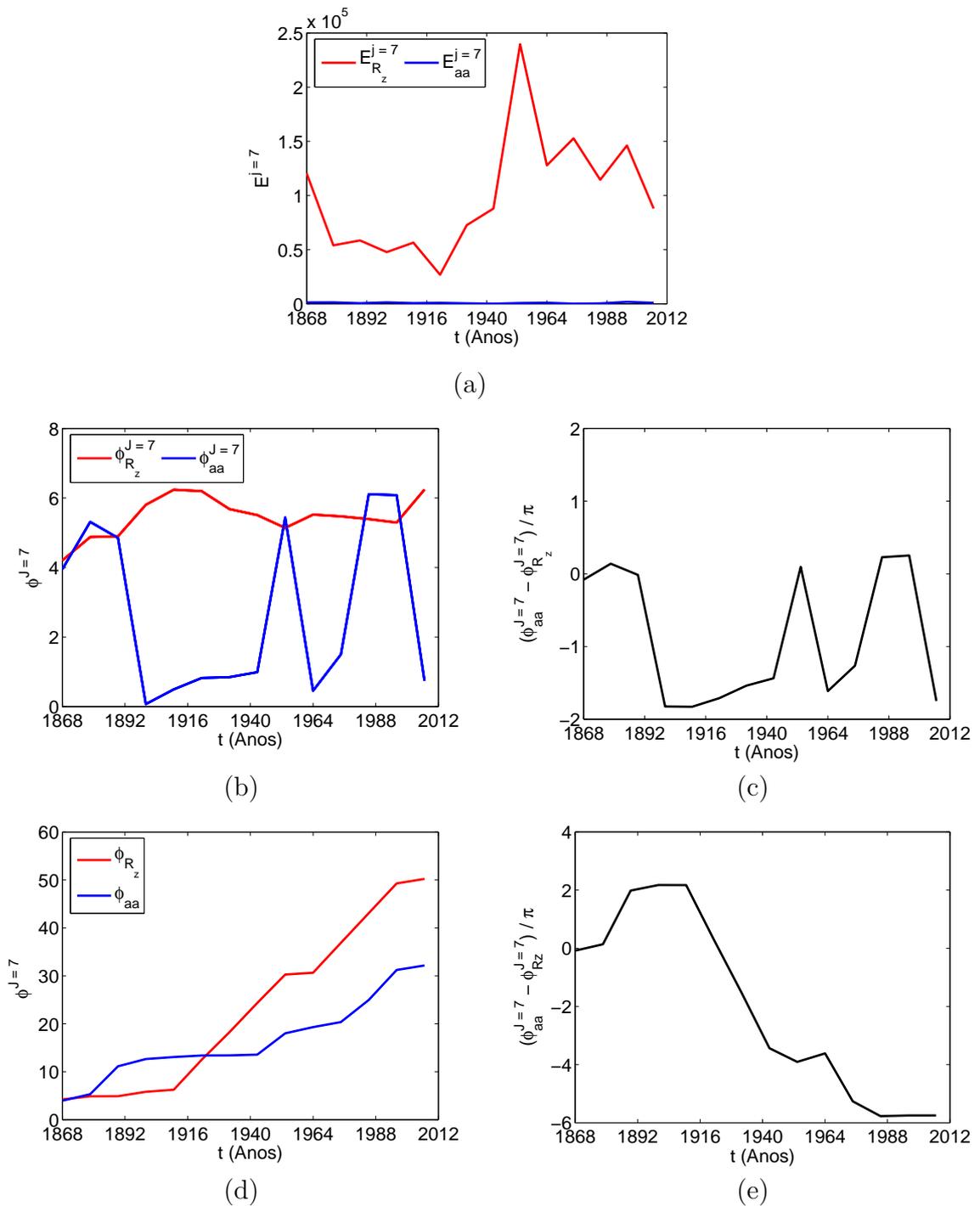


Figura 6.56 - Análise do índice  $R_z$  e  $aa$  mensal considerando a escala  $J = 7$  tendo em (a) energia ao longo do tempo; (b) fase e (c) diferença de fase no intervalo  $[0, 2\pi]$  e (d) fase e (e) diferença de fase considerando o uso da função `my-unwrap` para a escala  $J = 7$ .

#### 6.4.4 Osciladores Eletroquímicos

Na análise dos osciladores eletroquímicos foram consideradas  $j = 17$  escalas de decomposição. Foi também utilizado a função `unwrap` e a função `my-unwrap` no cálculo da fase a fim de verificar qual melhoria a função `my-unwrap` conseguiu apresentar em relação a função `unwrap` do *GNU/Octave*.

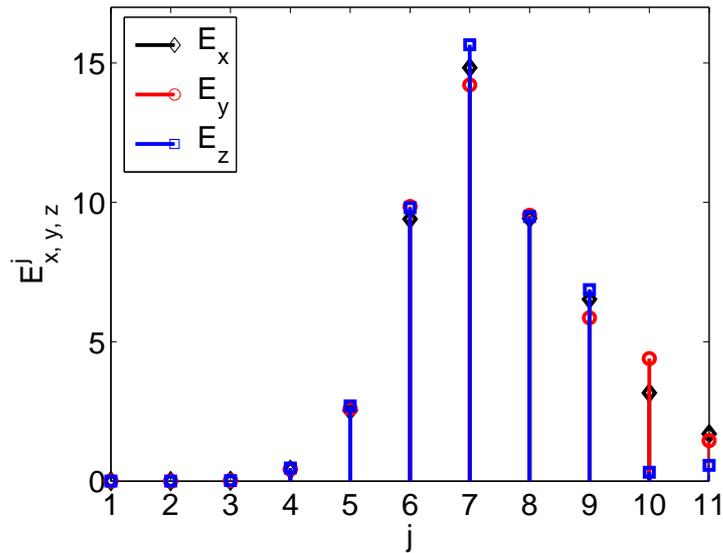
A Figura 6.57 ilustra a análise da energia do conjunto I. Em (a) o espectro de energia *wavelet* e em (b) a energia ao longo do tempo considerando as escalas  $j = 5$  até  $j = 9$ .

A Figura 6.58 ilustra a análise da fase obtida do conjunto I. Em (a, b) a fase na escala  $J = 6$  considerando, respectivamente, a utilização da função `unwrap` do *GNU/Octave* e a função proposta `my-unwrap`. Em (c, d) a fase na escala  $J = 7$  considerando a utilização da função `unwrap` do *GNU/Octave* e a função proposta `my-unwrap`, respectivamente. Nota-se que usando a função proposta `my-unwrap` houve uma melhoria significativa na evolução temporal da fase, na qual a mesma encontra-se crescente ao longo do tempo e apresentando poucas perturbações.

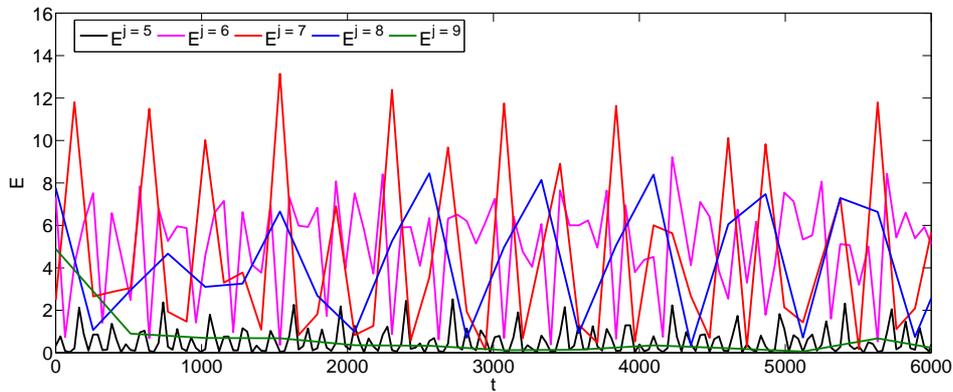
Observa-se da Figura 6.57(a) que para os três osciladores a escala de máxima energia é a escala  $J = 7$ . Analisando a evolução da energia ao longo do tempo para as escalas que apresentam energia significativa, as quais são as escalas  $J = 5$  até  $J = 9$ , conforme ilustrado na Figura 6.57(b), e analisando o espectro de energia *wavelet*, ilustrado em 6.57(a), note que a escala  $J = 7$  apresenta máxima energia para a análise. Assim, a fase foi calculada utilizando a escala  $J = 7$ , bem como é mostrado também a análise na escala  $J = 6$ , visto que nesta escala há uma alta quantidade de energia ao longo do tempo, conforme ilustrado na Figura 6.57(b).

A Figura 6.59 ilustra a diferença de fase do conjunto I, no intervalo de tempo  $t = [0, 10^5]$ , considerando em (a, b) a utilização da função `unwrap` do *GNU/Octave* e a função `my-unwrap` na escala  $J = 6$ , respectivamente. Em (c, d) é considerada utilização da função `unwrap` do *GNU/Octave* e a função `my-unwrap` na escala  $J = 7$ , respectivamente.

Analisando a diferença de fase ilustrada em 6.59, ambas as escalas  $J = 6$  e  $J = 7$  apresentam como resultado que os osciladores não encontram-se sincronizados em fase, visto que a diferença de fase não encontra-se limitada. Note que nos tempos iniciais a diferença de fase fica oscilando em torno do valor zero e, em seguida, cresce ou decai ao longo do tempo restante.



(a)



(b)

Figura 6.57 - Espectro de energia *wavelet* e a energia ao longo do tempo obtidas da análise do conjunto I. Em (a) o espectro de energia *wavelet* e em (b) a energia ao longo do tempo considerando as escalas  $j = 5$  até  $j = 9$ .

A Figura 6.60 ilustra a análise da energia do conjunto II. Em (a) o espectro de energia *wavelet* e em (b) a energia ao longo do tempo considerando as escalas de  $j = 5$  até  $j = 9$ .

A Figura 6.61 ilustra a análise da fase do conjunto II. Em (a, b) a fase na escala  $J = 6$  considerando a utilização da função `unwrap` do *GNU/Octave* e a função proposta `my-unwrap`, respectivamente. Em (c, d) a fase na escala  $J = 7$  considerando a utilização da função `unwrap` do *GNU/Octave* e a função proposta `my-unwrap`, respectivamente.

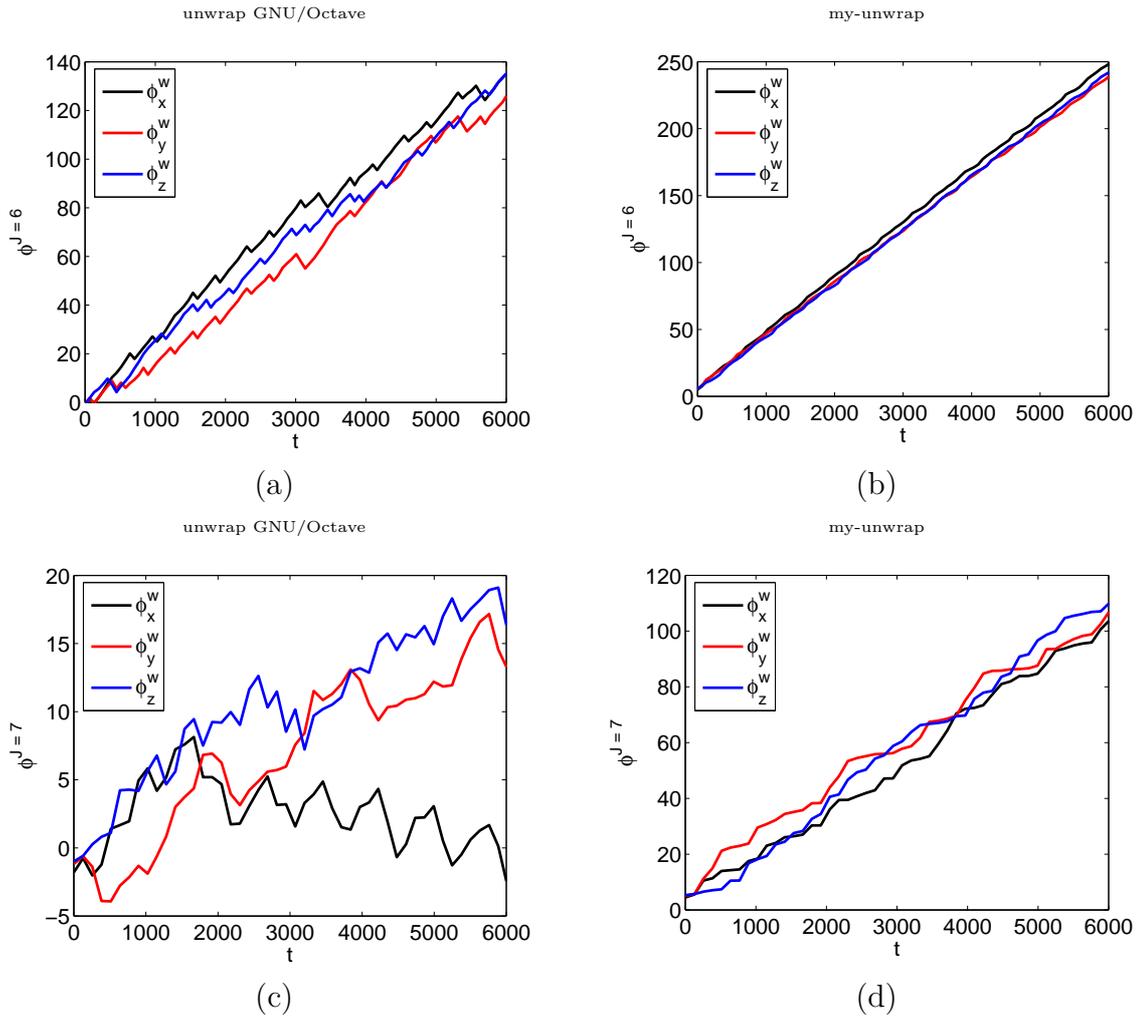


Figura 6.58 - Fases obtidas da análise do conjunto I. Em (a, b) a fase na escala  $J = 6$  considerando, respectivamente, a utilização da função `unwrap` do *GNU/Octave* e a função proposta `my-unwrap`. Em (c, d) a fase na escala  $J = 7$  considerando a utilização da função `unwrap` do *GNU/Octave* e a função proposta `my-unwrap`, respectivamente.

Nota-se da Figura 6.60(a) que para os três osciladores a escala de máxima energia é a escala  $J = 7$ . Analisando a evolução da energia ao longo do tempo e o espectro de energia, ilustrados em 6.60 note que a escala  $J = 7$  apresenta energia considerável para a análise. Assim, a fase foi calculada utilizando a escala  $J = 7$ , bem como é mostrado também a análise na escala  $J = 6$ , visto que nesta escala há uma alta quantidade de energia ao longo do tempo, conforme ilustrado na Figura 6.60(b).

Observa-se das Figuras 6.57(b, d) e 6.60(b, d) que quando se utiliza a função `my-unwrap` as fases encontram-se melhores representadas.

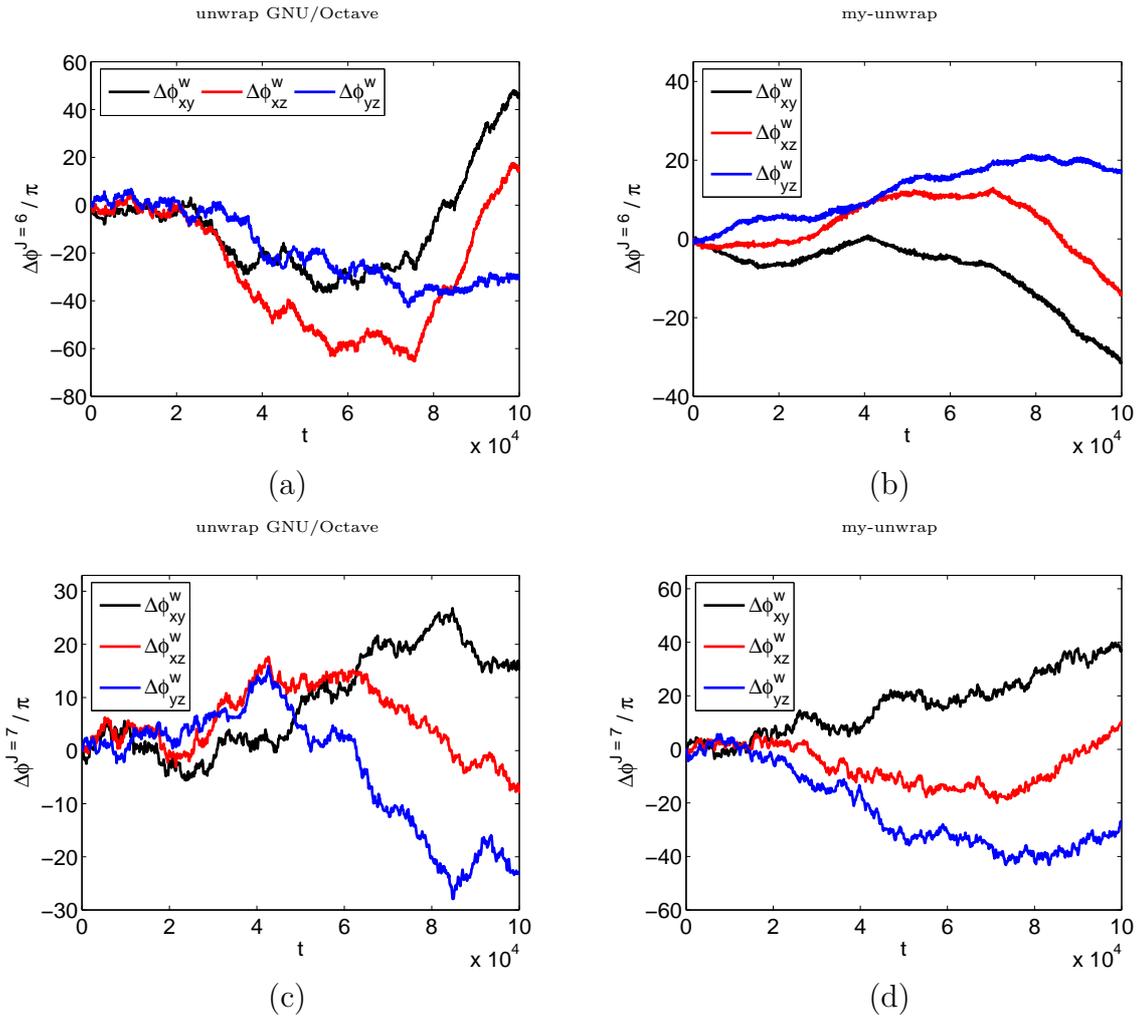
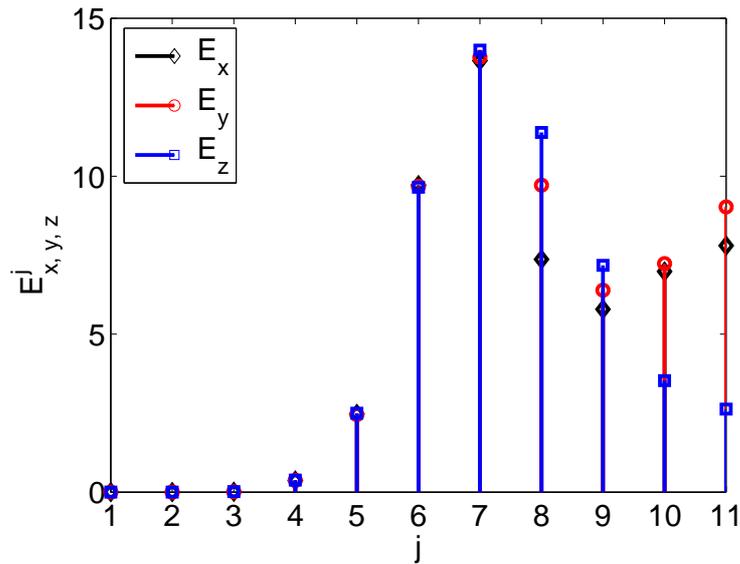


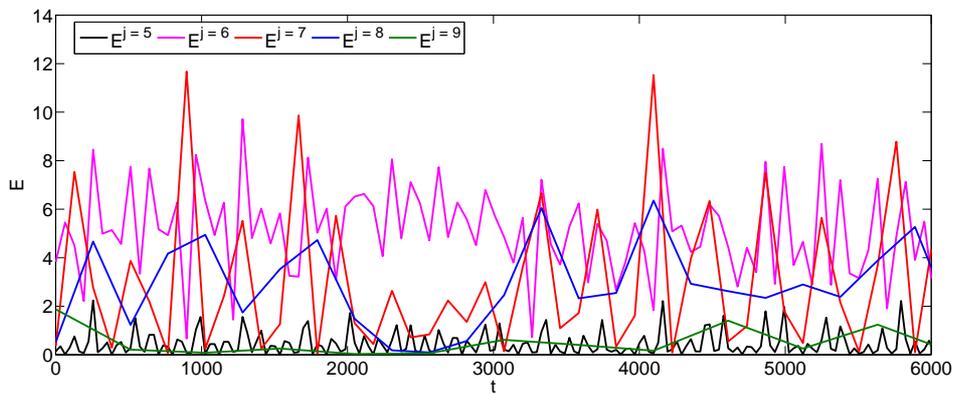
Figura 6.59 - Diferença de fase do conjunto I, no intervalo de tempo  $t = [0, 10^5]$ , considerando em (a, b) a utilização da função `unwrap` do *GNU/Octave* e a função `my-unwrap` na escala  $J = 6$ , respectivamente. Em (c, d) é considerada utilização da função `unwrap` do *GNU/Octave* e a função `my-unwrap` na escala  $J = 7$ , respectivamente.

A Figura 6.62 ilustra a diferença de fase do conjunto II, no intervalo de tempo  $t = [0, 6000]$ , considerando em (a, b) a utilização da função `unwrap` do *GNU/Octave* e a função `my-unwrap` na escala  $J = 6$ , respectivamente. Em (c, d) é considerada utilização da função `unwrap` do *GNU/Octave* e a função `my-unwrap` na escala  $J = 7$ , respectivamente.

Analisando a diferença de fase ilustrada em 6.62, ambas as escalas  $J = 6$  e  $J = 7$  apresentam como resultado que os osciladores encontram-se sincronizados em fase. Nota-se que a diferença de fase encontra-se limitada e, em alguns intervalos, há a presença de deslizamentos de fase.



(a)



(b)

Figura 6.60 - Espectro de energia *wavelet* e a energia ao longo do tempo obtidos da análise do conjunto II. Em (a) o espectro de energia *wavelet* e em (b) a energia ao longo do tempo considerando as escalas de  $j = 5$  até  $j = 9$ .

Com o objetivo de comparar os resultados obtidos pela aplicação do método *wavelet dt-cwt*, utilizou-se a transformada de Hilbert na análise dos conjuntos de dados I e II.

A Figura 6.63 ilustra a fase e a diferença de fase quando se utiliza a transformada de Hilbert na análise em (a, b) do conjunto I e em (c, d) do conjunto II, respectivamente.

A Figura 6.64 apresenta um zoom das fases ilustradas em 6.63(a, c). Note a ocorrência de perturbações bruscas na evolução temporal da fase quando se utiliza a

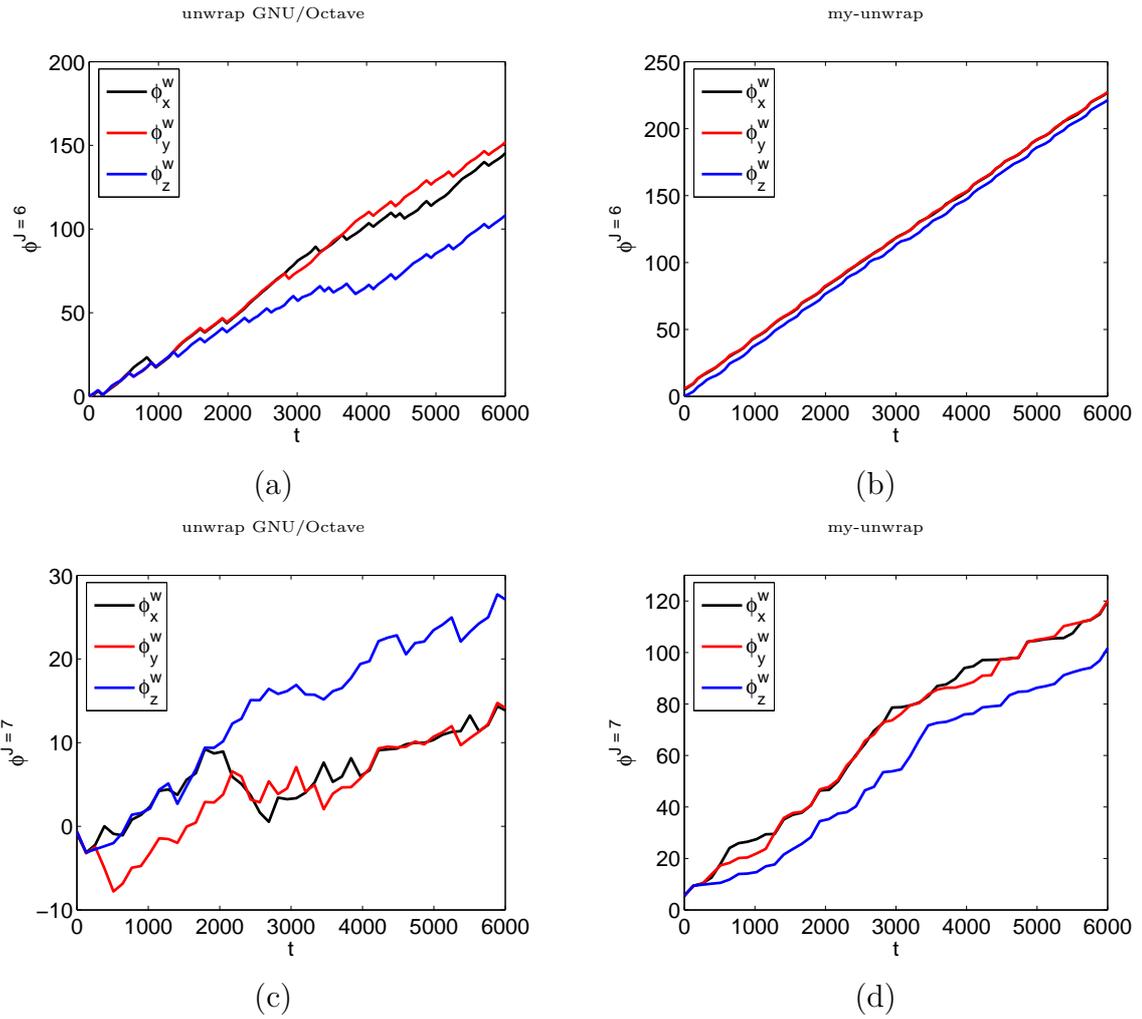


Figura 6.61 - Fases obtidas da análise do conjunto II. Em (a, b) a fase na escala  $J = 6$  considerando a utilização da função `unwrap` do *GNU/Octave* e a função proposta `my-unwrap`, respectivamente. Em (c, d) a fase na escala  $J = 7$  considerando a utilização da função `unwrap` do *GNU/Octave* e a função proposta `my-unwrap`, respectivamente.

transformada de Hilbert. Outro fator relevante é que a diferença de fase do conjunto II, conforme pode ser visualizado na Figura 6.63(d), apresenta vários deslizamentos de fase, impossibilitando inferir adequadamente que os osciladores estão sincronizados em fase.

A Figura 6.64 ilustra um zoom da fase quando se utiliza a transformada de Hilbert na análise em (a) do conjunto I e em (b) do conjunto II, respectivamente.

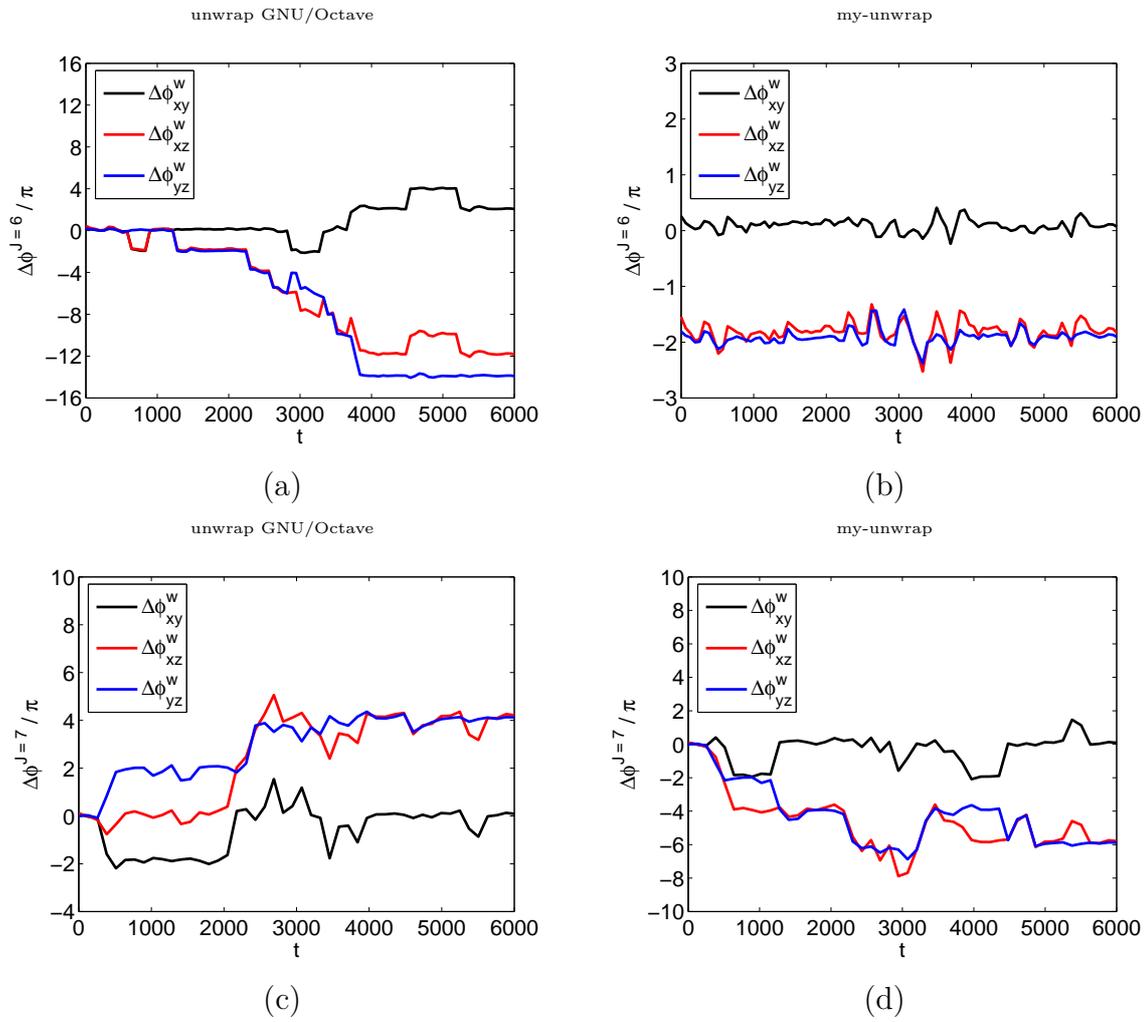


Figura 6.62 - Diferença de fase do conjunto II, no intervalo de tempo  $t = [0, 6000]$ , considerando em (a, b) a utilização da função `unwrap` do *GNU/Octave* e a função `my-unwrap` na escala  $J = 6$ , respectivamente. Em (c, d) é considerada utilização da função `unwrap` do *GNU/Octave* e a função `my-unwrap` na escala  $J = 7$ , respectivamente.

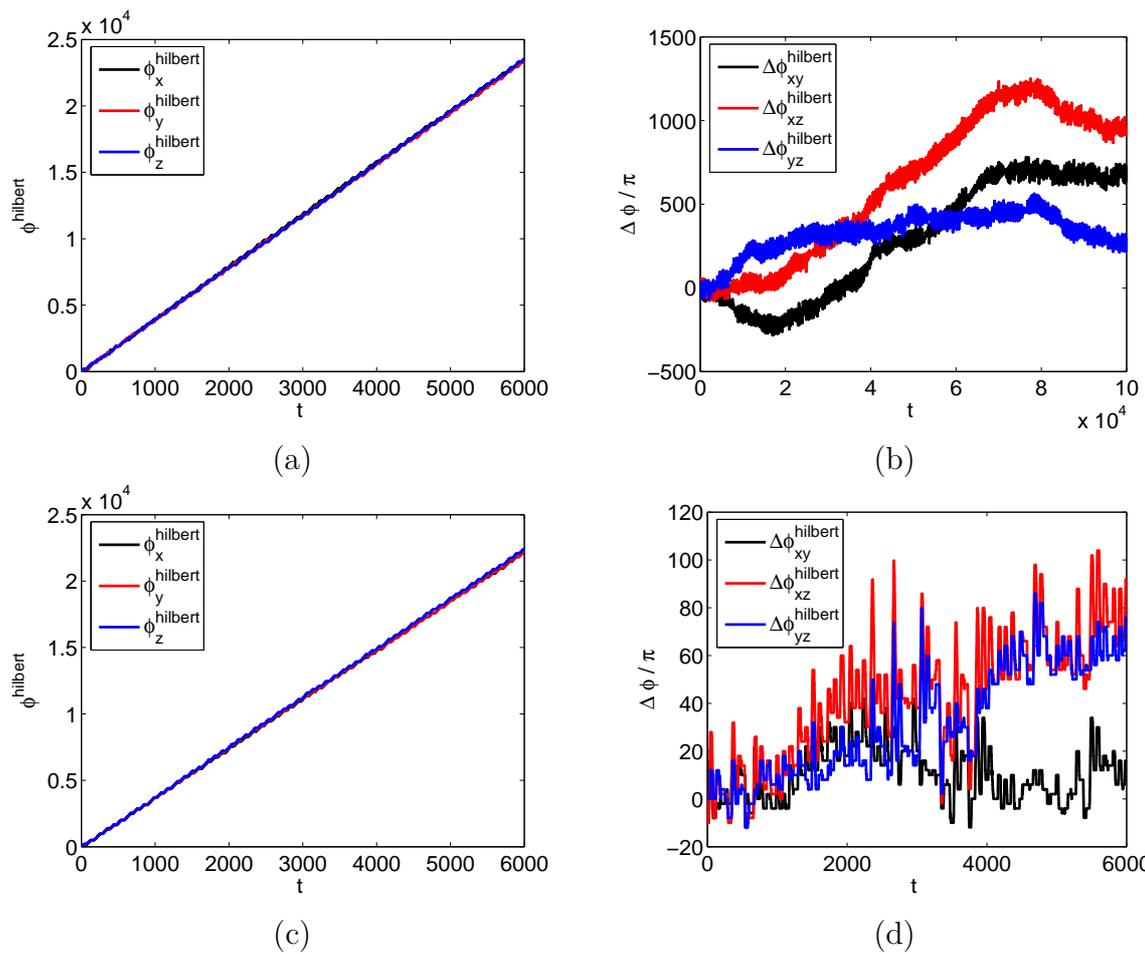


Figura 6.63 - Fase e a diferença de fase quando se utiliza a transformada de Hilbert na análise em (a, b) do conjunto I e em (c, d) do conjunto II, respectivamente.

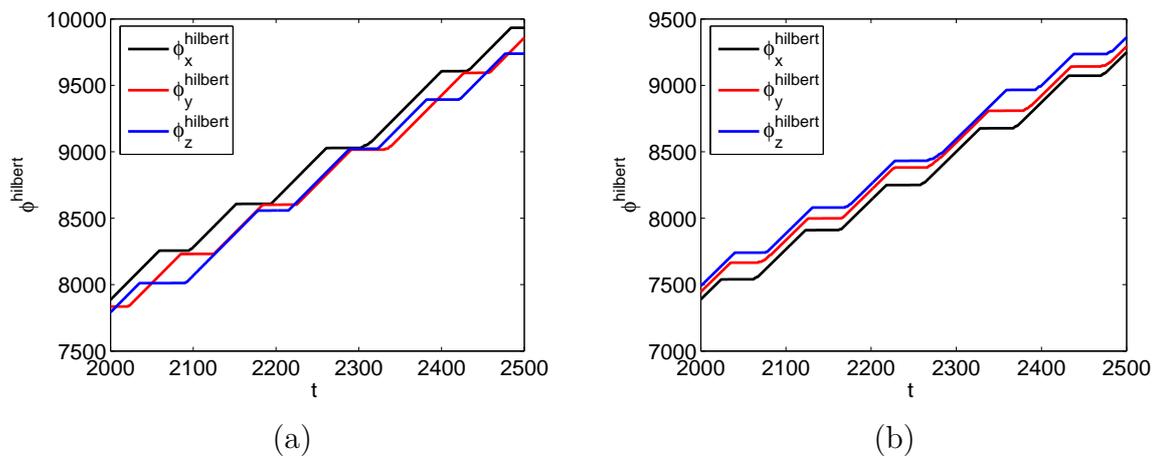


Figura 6.64 - Zoom da fase quando se utiliza a transformada de Hilbert na análise em (a) do conjunto I e em (b) do conjunto II, respectivamente.



## 7 CONCLUSÕES

Neste Capítulo são apresentadas as conclusões relativas a esta Tese, bem como sugestões para trabalhos futuros.

### 7.1 Conclusões

Este trabalho teve por objetivo explorar o fenômeno da sincronização de fase entre sistemas caóticos e em conjunto de dados experimentais. Para cumprir este objetivo, foi proposto um método para detecção da fase, chamado *wavelet dt-cwt*, o qual utiliza a DT-CWT para encontrar o coeficiente *wavelet* complexo do qual a fase é extraída.

A aplicabilidade do método foi verificada em dois sistemas caóticos, que são o sistema de Rössler e o sistema de Lorenz, no modelo de Kuramoto imerso no plano e na faixa de Möebius, sem e com a adição de ruído aditivo e, em quatro diferentes conjuntos de dados experimentais.

Considerando os experimentos envolvendo o sistema de Rössler, verificou-se que o método proposto é superior ao método arco-tangente quando se analisa deslizamentos de fase entre os sistemas. Particularmente, no experimento  $R_5$  constatou-se que o método proposto consegue analisar corretamente mesmo quando os sistemas encontram-se acoplados unidirecionalmente. Já, o método arco-tangente apresentou resultados ambíguos neste caso e não detectou corretamente os intervalos em que ocorrem os deslizamentos de fase.

Com relação aos resultados obtidos da análise dos dois experimentos envolvendo o sistema de Lorenz, nota-se a detecção precisa dos deslizamentos de fase, o que não ocorre quando se utiliza o método arco-tangente.

A aplicabilidade do método foi também testada no modelo de Kuramoto imerso no plano e na faixa de Möebius, sem e com a adição de ruído aditivo. As análises envolvendo o modelo de Kuramoto imerso no plano e na faixa de Möebius sem a adição de ruído permitiu a validação do método proposto em um sistema no qual já possui como saída a variável de fase. Outro aspecto importante nesta análise foi o fato do método proposto conseguir detectar, a partir da diferença de fase, atrasos e/ou avanços que ocorrem entre os osciladores.

Considerando o modelo de Kuramoto imerso no plano e na faixa de Möebius com a adição de ruído, o método proposto conseguiu analisar corretamente os deslizamentos de fase e a sincronização de fase, o mesmo não ocorrendo quando se utilizou o

método arco-tangente e a transformada de Hilbert. Quando se utilizou o método arco-tangente e a transformada de Hilbert foram detectados vários deslizamentos de fase que, verificados na série temporal, não ocorrem.

Com relação a análise de conjuntos de dados experimentais, foi analisado o Plasma forçado, o Circuito de Chua, a atividade solar e geomagnética e dados de osciladores eletroquímicos. Nestas análises foi possível verificar a aplicabilidade do método em conjuntos de dados experimentais. Em particular, nos dados de osciladores eletroquímicos foi possível constatar que a transformada de Hilbert não foi capaz de verificar adequadamente a sincronização de fase entre os osciladores.

Diante da aplicabilidade do método *wavelet dt-cwt* proposto e embasados em sua fundamentação teórica, pode-se citar suas várias vantagens, as quais são descritas abaixo. Com relação aos métodos existentes na literatura, uma das principais vantagens do método proposto é a não necessidade de um pré-processamento para a utilização do mesmo, como por exemplo, não é necessário fazer a projeção ou reconstrução do atrator para calcular a fase.

Em termos de custo computacional, o método proposto apresenta um baixo custo - da ordem de  $2N$ , com  $N$  sendo o número de pontos - quando comparado ao custo computacional da transformada *wavelet* contínua - da ordem de  $N^2$ . Esse fato viabiliza a aplicação do método proposto em séries temporais com grande número de pontos.

Com relação às séries temporais com adição de níveis moderados de ruído, o método proposto foi capaz de verificar corretamente a não sincronização de fase, deslizamentos de fase e a sincronização de fase entre os sistemas. Neste caso, notou-se a falha dos métodos arco-tangente e da transformada de Hilbert na detecção correta dos deslizamentos de fase entre os sistemas.

Considerando a aplicação do método proposto em comparação com o uso da CWT no cálculo da fase, pode-se notar que o uso da CWT não possibilita a detecção correta dos deslizamentos de fase. Este fato se deve em parte pela redundância presente neste tipo de transformada.

Uma contribuição adicional deste trabalho é o ajuste feito na função `unwrap` por meio da função `my-unwrap` proposta. Este ajuste possibilitou aperfeiçoar a função `unwrap` com relação à sua falha na verificação do quadrante correto da fase.

Nota-se que o presente trabalho atingiu seus objetivos iniciais em propor um método

para a detecção da fase que fosse aplicável em sistemas caóticos e em conjuntos de dados experimentais.

Na próxima seção são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros.

## 7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Nesta seção apresenta-se sugestões de trabalhos futuros.

Do ponto de vista do método proposto, sugere-se a análise da possibilidade da utilização de outros filtros na DT-CWT. Desta sugestão pode-se tentar melhorar a resolução temporal/espacial e principalmente aperfeiçoar a localização dos deslizamentos de fase.

Considerando a utilização da função `unwrapp` propõe-se futuramente uma investigação detalhada da sua aplicabilidade a fim de apresentar melhorias na sua implementação.

Com relação a aplicabilidade do método *wavelet dt-cwt* proposto sugere-se investigar a sua utilização em outros tipos de sistemas caóticos e em diversos conjuntos de dados experimentais. Com isto evidencia-se cada vez mais a veracidade do método ser aplicável em qualquer tipo de sistema.

A análise de sistemas hipercaóticos, outras configurações de acoplamento entre os sistemas e a expansão do número de sistemas utilizados são outras importantes sugestões para trabalhos futuros.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **An introduction to dynamical systems**. [S.l.]: Springer Verlag, 1997. 603 p. 7
- ANTONINI, M.; BARLAUD, M.; MATHIEU, P.; DAUBECHIES, I. Image coding using wavelet transform. **IEEE Transactions of Image Processing**, v. 1, n. 2, p. 205–220, 1992. 36
- ARENAS, A.; DIAZ-GUILERA, A.; KURTHS, J.; MORENO, Y.; ZHOU, C. Synchronization in complex networks. **Physics Reports**, v. 469, n. 3, p. 93–153, 2008. 24
- ARNEODO, A.; D'AUBENTON-CARAFI, Y.; BACRY, E.; GRAVES, P. V.; MUZY, J. F.; THERMES, C. Wavelet based fractal analysis of dna sequences. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 96, n. 1-4, p. 291–320, 1996. 36
- BJÖRCK, S.; KROMER, B.; JOHNSEN, S.; BENNIKE, O.; HAMMARLUND, D.; LEMDAHL, G.; POSSNERT, G.; RASMUSSEN, T. L.; WOHLFARTH, B.; HAMMER, C. U.; SPURK, M. Synchronized terrestrial-atmospheric deglacial records around the north atlantic. **Science**, v. 274, n. 5290, p. 1155–1160, 1996. 24
- BOCCALETTI, S.; KURTHS, J.; OSIPOV, G.; VALLADARES, D.; ZHOU, C. The synchronization of chaotic systems. **Physics Report**, v. 366, n. 1-2, p. 1–101, 2002. 1, 29
- BOLES, W. W. A security system based on human iris identification using wavelet transform. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 11, n. 1, p. 77–85, 1998. 36
- BRUNS, A. Fourier-, hilbert- and wavelet-based signal analysis: are they really different approaches? **Journal of Neuroscience Methods**, v. 137, n. 2, p. 321 – 332, 2004. 2
- BUCK, J. Synchronous rhythmic flashing of fireflies. ii. **The Quarterly Review of Biology**, v. 63, n. 3, p. 265–289, 1988. 1, 22, 24
- BUCK, J.; BUCK, E. Mechanism of rhythmic synchronous of flashing of fireflies. **Science**, v. 159, n. 3821, p. 1319–1327, 1968. 1, 22
- BURDEN, R.; FAIRES, J. **Numerical analysis**. 9. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2011. 872 p. 13

CARROLL, T.; PECORA, L. Synchronizing chaotic circuits. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, v. 38, n. 4, p. 453–456, 1991. 29

\_\_\_\_\_. Cascading synchronized chaotic systems. **Physica D: Nonlinear phenomena**, v. 67, n. 1-3, p. 126–140, 1993. 24

CASTILHO, J. E.; DOMINGUES, M. O.; MENDES, O.; PAGAMISSE, A. **Introdução ao mundo das wavelets**. [S.l.]: SBMAC - Notas em Matemática Aplicada, 2012. 144 p. 38, 145, 154

CHEN, J. Y.; WONG, K. W.; SHUAI, J. W. Properties of phase locking with weak phase-coherent attractors. **Physical Letter A**, v. 285, n. 5-6, p. 312–318, 2001. 9, 172

CHUA, L. O.; ITOH, M.; KOCAREV, L.; ECKERT, K. Chaos synchronization in chua's circuit. **Journal of Circuits, Systems and Computers**, v. 3, n. 1, p. 93–108, 1993. 17, 18

COIFMAN, R.; MEYER, Y.; WICKERHAUSER, V. Wavelet analysis and signal processing. In: **Wavelets and their Applications**. [S.l.: s.n.], 1992. p. 153–178. 36

DAUBECHIES, I. Wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 36, n. 5, p. 961–1005, 1990. 38

\_\_\_\_\_. **Ten lectures on wavelets**. 2. ed. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. 357 p. 34, 40

DAUBECHIES, I.; LU, J.; WU, H. T. Synchrosqueezed wavelet transforms: An empirical mode decomposition-like tool. **Applied Computational Harmonic Analysis**, v. 30, p. 243–261, 2011. 2

DAUBECHIES, I.; MAES, S. A nonlinear squeezing of the continuous wavelet transform based on auditory nerve models. In: **WAVELETS IN MEDICINE AND BIOLOGY**, 1996. **Proceedings**. [S.l.]: CRC Press, 1996. p. 527–546. 2

DOMINGUES, M. O.; MENDES, O. J.; COSTA, A. M. On wavelet techniques in atmospheric sciences. **Advances in Space Research**, v. 35, n. 5, p. 831–842, 2005. 34

ECHER, E.; GONZALEZ, W.; GONZALEZ, A.; PRESTES, A.; VIEIRA, L.; LAGO, A. D.; GUARNIERI, F.; SCHUCH, N. Long-term correlation between

- solar and geomagnetic activity. **Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics**, v. 66, n. 12, p. 1019 – 1025, 2004. 18
- FARGE, M. Wavelet transforms and their applications to turbulence. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 24, n. 1, p. 395–457, 1992. 33
- FARGE, M.; KEVLAHAN, N.; PERRIER, V.; GOIRAND, E. Wavelets and turbulence. **Proceedings of the IEEE**, v. 84, n. 4, p. 639–669, 1996. 36
- FOLLMANN, R.; MACAU, E. E. N.; JUNIOR, E. R. Detecting phase synchronization between coupled non-phase-coherent oscillators. **Physics Letters A**, v. 373, n. 25, p. 2146 – 2153, 2009. 172
- FOLLMANN, R.; MACAU, E. E. N.; ROSA, E. Phase detection of chaos. **Physical Review E**, v. 83, p. 016209–1 – 016209–6, 2011. 2, 56, 61, 110
- GABOR, D. Theory of communication. **Journal of the Institute of Electrical Engineering**, v. 93, p. 429–457, 1946. 146
- GE, Z. M.; LIN, T. N. Chaos, chaos control and synchronization of electro-mechanical gyostat system. **Journal of Sound and Vibration**, v. 259, n. 3, p. 585–603, 2003. 24
- GLASS, L. Synchronization and rhythmic processes in physiology. **Nature**, v. 410, n. 6825, p. 277–284, 2001. 21
- GRAPS, A. Introduction to wavelets. **IEEE Computational Science e Engineering**, v. 2, n. 2, p. 50–61, 1995. 35
- HAZEWINKEL, M. **Encyclopaedia of Mathematics, Supplement III**. [S.l.]: Springer, 2001. 557 p. 145
- HEAGY, J.; CARROLL, T.; PECORA, L. Synchronous chaos in coupled oscillator systems. **Physical Review E**, v. 50, n. 3, p. 1874–1885, 1994. 1, 29
- HIRSCH, M.; SMALE, S.; DEVANEY, R. **Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos**. 3. ed. [S.l.]: Elsevier Academic Press, 2012. 432 p. 14
- HRAMOV, A.; KORONOVSKII, A.; LEVIN, Y. Synchronization of chaotic oscillator time scales. **Journal of Experimental and Theoretical Physics**, v. 100, p. 784–794, 2005. 2, 3

- HRAMOV, A. E.; KORONOVSKII, A. A. An approach to chaotic synchronization. **Chaos**, v. 14, n. 3, p. 603–610, 2004. 2, 70
- HUANG, N. E.; SHEN, Z.; LONG, S. R.; WU, M. C.; SHIH, H. H.; ZHENG, Q.; YEN, N.-C.; TUNG, C. C.; LIU, H. H. The empirical mode decomposition and the hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 454, n. 1971, p. 903–995, 1998. 2
- HUYGENS, C. **Horologium Oscillatorium**. 1673. - p. (Parisii, France: Apud F. Muguet) [English translation: 1986, *The Pendulum Clock* (Ames: Iowa State University Press)]. 1, 21
- IATSENKO, D.; BERNJAK, A.; STANKOVSKI, T.; SHIOGAI, Y.; OWEN-LYNCH, P. J.; CLARKSON, P. B. M.; MCCLINTOCK, P. V. E.; STEFANOVSKA, A. Evolution of cardiorespiratory interactions with age. **Phil. Trans. R. Soc. A**, v. 371, n. 1997, p. 1–18, 2013. 24
- KENNEDY, M. P. Robust op amp realization of chua’s circuit. **Frequenz**, v. 46, p. 66–80, 1992. 17, 18
- KINGSBURY, N. G. The dual-tree complex wavelet transform: a new efficient tool for image restoration and enhancement. In: EUROPEAN SIGNAL PROCESSING CONFERENCE (EUSIPCO 98), 1998, Island of Rhodes, Greece. **Proceedings**. Island of Rhodes, Greece: EURASIP, 1998. p. 319–322. 41
- \_\_\_\_\_. Shift invariant properties of the dual-tree complex wavelet transform. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ACOUSTICS, SPEECH, AND SIGNAL PROCESSING, 1999, Phoenix, AZ. **Proceedings**. Phoenix, AZ: IEEE, 1999. v. 3, p. 1221–1224. 43
- \_\_\_\_\_. A dual-tree complex wavelet transform with improved orthogonality and symmetry properties. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON IMAGE PROCESSING, 2000, Vancouver, BC, Canada. **Proceedings**. Vancouver, BC, Canada: IEEE, 2000. v. 2, p. 375–378. 43, 151
- \_\_\_\_\_. Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals. **Journal of Applied and Computational Harmonic Analysis**, v. 10, n. 3, p. 234–253, 2001. 43, 153

KOCAREV, L.; PARLITZ, U. General approach for chaotic synchronization with applications to communication. **Physical Review Letters**, v. 74, n. 25, p. 5028–5031, 1995. 24

KORONOVSKII, A.; HRAMOV, A. Chaotic phase synchronization studied by means of continuous wavelet transform. **Technical Physics Letters**, v. 30, p. 587–590, 2004. 2

\_\_\_\_\_. Wavelet transform analysis of the chaotic synchronization of dynamical systems. **Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters**, v. 79, n. 7, p. 316–319, 2004. 32

KORONOVSKII, A.; KUROVSKAYA, M.; HRAMOV, A. Relationship between phase synchronization of chaotic oscillators and time scale synchronization. **Technical Physics Letters**, v. 31, p. 847–850, 2005. 2, 3

KÜHNEL, W. **Differential geometry: curves, surfaces, manifolds**. 2. ed. [S.l.]: American Mathematical Society, 2005. 375 p. 14

KURAMOTO, Y. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, v. 39, p. 420–422, 1975. 12

\_\_\_\_\_. **Chemical oscillations, waves, and turbulence**. [S.l.]: Courier Dover, 2003. 156 p. 12

KURTHS, J.; ROMANO, M.; THIEL, M.; OSIPOV, G.; IVANCHENKO, M.; KISS, I.; HUDSON, J. Synchronization analysis of coupled noncoherent oscillators. **Nonlinear Dynamics**, v. 44, p. 135–149, 2006. 2

LACHAUX, J.-P.; RODRIGUEZ, E.; MARTINERIE, J.; VARELA, F. J. et al. Measuring phase synchrony in brain signals. **Human brain mapping**, v. 8, n. 4, p. 194–208, 1999. 24, 31

LACHAUX, J. P.; RODRIGUEZ, E.; QUYEN, M. L. V.; LUTZ, A.; MARTINERIE, J.; VARELA, F. J. Studying single-trials of phase synchronous activity in the brain. **International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering**, v. 10, n. 10, p. 2429–2439, 2000. 24

LEE, K. J.; KWAK, Y.; LIM, T. K. Phase jumps near a phase synchronization transition in systems of two coupled chaotic oscillators. **Physical Review Letters**, v. 81, p. 321–324, 1998. 88, 92

LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 20, p. 130–141, 1963. 10

MALLAT, S. **A wavelet tour of signal processing - the sparse way**. 3. ed. New York: Academic Press, 2008. 832 p. 38, 39

MALLAT, S. G. Theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v. 11, n. 7, p. 674–693, 1989. 33, 37, 38, 39

MICHAELS, D. C.; MATYAS, E. P.; JALIFE, J. Mechanisms of sinoatrial pacemaker synchronization: A new hypothesis. **Circulation Research**, v. 61, n. 5, p. 704–714, 1987. 24

MORLET, J. Sampling theory and wave propagation. In: CHEN, C. (Ed.). **Issues in Acoustic Signal - Image Processing and Recognition**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1983, (NATO ASI Series, v. 1). p. 233–261. 33, 34

MORMANN, F.; LEHNERTZ, K.; DAVID, P.; ELGER, C. E. Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the eeg of epilepsy patients. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 144, p. 358–369, 2000. 31

OSIPOV, G. V.; PIKOVSKY, A. S.; ROSENBLUM, M. G.; KURTHS, J. Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical rössler oscillators. **Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics**, v. 55, n. 3 SUPPL. A, p. 2353–2361, 1997. 1, 21

OTT, E. **Chaos in dynamical systems**. [S.l.]: Cambridge Press, 1993. 7

PECORA, L. M.; CARROL, T. L. Synchronization in chaotic systems. **Physical Review Letters**, v. 64, n. 8, p. 821–824, 1990. 1, 24, 29

PEREIRA, T.; BAPTISTA, M. S.; KURTHS, J. General framework for phase synchronization through localized sets. **Physical Review E**, v. 75, p. 026216, 2007. 2

PIKOVSKY, A.; ROSENBLUM, M. G.; KURTHS, J. **Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences**. New York: Cambridge University Press, 2001. 1, 2, 21, 22, 23, 25, 27, 28, 30, 31

PIKOVSKY, A. S.; ROSENBLUM, M. G. Phase synchronization of regular and chaotic self-sustained oscillators. In: PIKOVSKY, A.; MAISTRENKO, Y. (Ed.).

**Synchronization: Theory and Application.** [S.l.]: Springer Netherlands, 2003, (NATO Science Series, v. 109). p. 187–219. 56

PIKOVSKY, A. S.; ROSENBLUM, M. G.; OSIPOV, G. V.; KURTHS, J. Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 104, n. 3-4, p. 219–238, 1997. 1, 2, 172

PORTILLA, J.; STRELA, V.; WAINWRIGHT, M. J.; SIMONCELLI, E. P. Image denoising using scale mixtures of gaussians in the wavelet domain. **IEEE Transactions on Image Processing**, v. 12, n. 11, p. 1338–1351, 2003. 36

POST, E.; FORCHHAMMER, M. C. Synchronization of animal population dynamics by large-scale climate. **Nature**, v. 420, n. 6912, p. 168–171, 2002. 24

POSTNIKOV, E. On precision of wavelet phase synchronization of chaotic systems. **Journal of Experimental and Theoretical Physics**, Nauka/Interperiodica, v. 105, n. 3, p. 652–654, 2007. 32

POSTNIKOV, E. B. Wavelet phase synchronization and chaoticity. **Physical Review E**, v. 80, p. 057201, 2009. 32, 70

QUIROGA, R. Q.; KRASKOV, A.; KREUZ, T.; GRASSBERGER, P. Performance of different synchronization measures in real data: A case study on electroencephalographic signals. **Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics**, v. 65, n. 4, p. 1–14, 2002. 2, 24, 31

QUYEN, M. L. V.; FOUCHER, J.; LACHAUX, J.-P.; RODRIGUEZ, E.; LUTZ, A.; MARTINERIE, J.; VARELA, F. J. Comparison of hilbert transform and wavelet methods for the analysis of neuronal synchrony. **Journal of neuroscience methods**, Elsevier, v. 111, n. 2, p. 83–98, 2001. 32

ROMANO, M. C.; THIEL, M.; KURTHS, J.; KISS, I. Z.; HUDSON, J. L. Detection of synchronization for non-phase-coherent and non-stationary data. **Europhysics Letters**, v. 71, n. 3, p. 466, 2005. 2, 61

ROSENBLUM, M.; PIKOVSKY, A. Synchronization: From pendulum clocks to chaotic lasers and chemical oscillators. v. 44, n. 5, p. 401–416, 2003. 1, 21, 26, 27, 32

ROSENBLUM, M.; PIKOVSKY, A.; KURTHS, J. Phase synchronization of chaotic oscillators. **Physical Review Letters**, v. 76, n. 11, p. 1804–1807, 1996. 1, 2, 29, 171

\_\_\_\_\_. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. **Physical Review Letters**, v. 78, n. 22, p. 4193–4196, 1997. 1, 24, 29, 171

ROSENBLUM, M. G.; PIKOVSKY, A. S.; KURTHS, J.; SCHAFER, C.; TASS, P. A. Chapter 9 phase synchronization: From theory to data analysis. **Handbook of Biological Physics**, v. 4, n. C, p. 279–321, 2001. 1, 24

ROSENBLUM, M. G.; PIKOVSKY, A. S.; KURTHS, J.; OSIPOV, G. V.; KISS, I. Z.; HUDSON, J. L. Locking-based frequency measurement and synchronization of chaotic oscillators with complex dynamics. **Physical Review Letters**, v. 89, p. 264102, 2002. 2, 70

RÖSSLER, O. E. An equation for continuous chaos. **Physics Letters A**, v. 57, n. 5, p. 397–398, 1976. 8

SCHÄFER, C.; ROSENBLUM, M. G.; ABEL, H. H.; KURTHS, J. Synchronization in the human cardiorespiratory system. **Physical Review E**, v. 60, n. 1, p. 857–870, 1999. 24

SELESNICK, I. W.; BARANIUK, R. G.; KINGSBURY, N. G. The dual-tree complex wavelet transform. **IEEE Signal Processing Magazine**, v. 22, n. 6, p. 123–151, 2005. 40, 41, 43, 44, 149, 150, 151

STOLLNITZ, E. J.; DEROSE, T. D.; SALESIN, D. H. Wavelets for computer graphics: A primer - part 1. **IEEE Computer Graphics and Applications**, v. 15, p. 76–84, 1995. 36

STONE, E. F. Frequency entrainment of a phase coherent attractor. **Physics Letters A**, v. 163, n. 5-6, p. 367–374, 1992. 2

STROGATZ, S. **Spontaneous synchronization in nature**. 1997. 2-4 p. 22

STROGATZ, S.; STEWART, I. Coupled oscillators and biological synchronization. **Scientific American**, v. 269, n. 6, p. 102–109, 1993. 22

SUGAWARA, T.; TACHIKAWA, M.; TSUKAMOTO, T.; SHIMIZU, T. Observation of synchronization in laser chaos. **Physical Review Letters**, v. 72, n. 22, p. 3502–3505, 1994. 24

TASS, P.; ROSENBLUM, M. G.; WEULE, J.; KURTHS, J.; PIKOVSKY, A.; VOLKMANN, J.; SCHNITZLER, A.; FREUND, H. J. Detection of  $n : m$  phase locking from noisy data: Application to magnetoencephalography. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 81, p. 3291–3294, Oct 1998. 31

TICOS, C. M.; ROSA, E.; PARDO, W. B.; WALKENSTEIN, J. A.; MONTI, M. Experimental real-time phase synchronization of a paced chaotic plasma discharge. **Physical Review Letters**, v. 85, p. 2929–2932, 2000. 17

VIEIRA, M. S. Chaos and synchronized chaos in an earthquake model. **Physical Review Letters**, v. 82, n. 1, p. 201–204, 1999. 24

WICKRAMASINGHE, M.; KISS, I. Z. Phase synchronization of three locally coupled chaotic electrochemical oscillators: Enhanced phase diffusion and identification of indirect coupling. **Physical Review E**, v. 83, p. 016210, 2011. 19, 20

WINFREE, A. T. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. **Journal of Theoretical Biology**, v. 16, n. 1, p. 15–42, 1967. 24

XIAOOU, T.; STEWART, W. K. Optical and sonar image classification: Wavelet packet transform vs fourier transform. **Computer Vision and Image Understanding**, v. 79, n. 1, p. 25–46, 2000. 36

YALCINKAYA, T.; LAI, Y.-C. Phase characterization of chaos. **Physical Review Letters**, v. 79, p. 3885–3888, 1997. 2



## APÊNDICE A

Neste apêndice descreve-se brevemente sobre a transformada de Fourier, a transformada janelada de Fourier e a transformada de Hilbert.

### A.1 Transformada de Fourier

A Transformada de Fourier (TF) foi descoberta no início do século *XIX*, pelo matemático francês Joseph Fourier. Ele mostrou que qualquer função periódica pode ser representada como uma soma infinita de funções exponenciais complexas e periódicas (HAZEWINKEL, 2001).

Essa transformada utiliza funções base senoidais (senos e cossenos) para analisar e reconstruir uma série temporal. Além disso, essas funções são ortogonais, as quais possuem propriedades desejáveis para a sua reconstrução.

As ondas senoidais são bem localizadas na frequência, mas não no tempo, devido ao fato de possuírem suporte de comprimento infinito, o que é decorrente da periodicidade das funções base (CASTILHO et al., 2012).

Essa transformada é útil na análise de séries temporais periódicas e possibilita determinar a contribuição que cada função seno e cosseno, presentes numa série temporal, representam para a energia total desta série.

Matematicamente, a TF é o produto interno da série  $f(t)$  com um conjunto de exponenciais complexas, definida por

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\iota\omega t} dt \quad (\text{A.1})$$

em que  $f(t)$  é a série temporal ou sinal analisado,  $\omega = 2\pi f$  é a frequência que cada componente oscilatório inerente à série temporal apresenta, a exponencial transforma para o espaço das frequências e  $\iota = \sqrt{-1}$ .

Um cálculo utilizado na análise de séries temporais é o módulo ao quadrado da TF, conhecido com espectro de potência, descrito por

$$S(\omega) = |\mathcal{F}(\omega)|^2. \quad (\text{A.2})$$

Esse espectro apresenta a energia, no sentido da norma  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ , associada a cada conteúdo de frequência. Em séries temporais reais esse espectro é simétrico, sendo

neste caso, comum considerar apenas a parte frequencial positiva.

A TF apresenta uma deficiência com relação à sua localização no tempo. Gabor (1946) percebeu esta deficiência quando aplicou a TF em séries temporais não-estacionárias. Em consequência ele propôs uma transformada conhecida como Transformada Janelada de Fourier (TJF).

## A.2 Transformada Janelada de Fourier

As funções seno e cosseno apresentam suporte infinito e são adequadas para analisar séries temporais estacionárias, nas quais a frequência não varia ao longo do tempo. No entanto, tais funções não são adequadas na análise de séries temporais não estacionárias, as quais a resposta em frequência da série varia no tempo.

A TF possui uma ótima resolução frequencial mas uma baixa resolução temporal, ou seja, ela consegue determinar todas as frequências presentes na série temporal, porém não é possível detectar quando, no tempo, estas frequências estão presentes.

A transformada janelada de Fourier (TJF - ou transformada de Fourier de tempo-curto) é uma possível maneira de obter uma melhor resolução no tempo e na frequência na análise de séries temporais não estacionárias.

Essa transformada é uma versão da TF que utiliza janelas no tempo, e seus respectivos deslocamentos, como bases para a transformada. Existem várias escolhas possíveis para a função janela  $W(t)$ , como por exemplo, Hanning, Gaussiana, Tukey, Papoulis, Bartlett, Box-car, Hamming, entre outras. Quando a janela utilizada é a Gaussiana, a TJF é conhecida como Transformada de Gabor.

A ideia de Gabor foi a de separar uma série temporal em vários segmentos de períodos fixos e em seguida aplicar a TF em cada um desses segmentos. Assim, a série temporal é dividida em intervalos iguais e a TF é aplicada em cada um destes intervalos.

Matematicamente, a transformada observa a série temporal  $f(t)$  por meio de uma janela  $W(t)$  centrada no instante de tempo  $t$

$$\mathcal{G}(\omega, t) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) W(t - \tau) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A.3})$$

em que  $W(t - \tau)$  é a função janela centrada em  $\tau$ .

Como a mesma janela é utilizada para todas as frequências, a resolução da análise é a mesma em todas as localizações no plano tempo-frequência.

Apesar da contribuição da TJJ, a mesma apresenta duas limitações. A primeira limitação é que a janela temporal permanece fixa, não possibilitando modificar o tamanho da mesmas após o início da aplicação da TJJ na série temporal que está sendo analisada. A segunda é que as funções base desta transformada, ou seja, as funções trigonométricas, possuem energia infinita.

### A.3 Transformada de Hilbert

A Transformada de Hilbert (TH) de uma dada série temporal  $f(t)$  é definida por

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (\text{A.4})$$

A construção do sinal analítico complexo  $\zeta(t)$  a partir da série temporal  $f(t)$  utilizando a TH pode ser feita por meio da equação

$$\zeta(t) = f(t) + \iota f_{\mathcal{H}}(t) = A(t) e^{\iota \phi_{\mathcal{H}}(t)}, \quad (\text{A.5})$$

em que  $f_{\mathcal{H}}(t)$  é a transformada de Hilbert de  $f(t)$ . A equação A.5 fornece a fase  $\phi_{\mathcal{H}}(t)$  e a amplitude instantânea  $A(t)$ .

A seguir descrevem-se as principais propriedades da TH:

- Sinal Analítico

A transformada de Hilbert de um sinal resulta em um sinal analítico que, por definição, é um sinal cujo espectro não possui componentes negativas de frequência.

- Ortogonalidade

A aplicação da TH sobre um sinal rotaciona o mesmo em  $90^\circ$ , sendo que frequências negativas recebem deslocamento de  $+90^\circ$  na fase e frequências positivas recebem deslocamento de  $-90^\circ$  na fase.

- Análise da Energia do Sinal

A TH é um tipo de filtro peculiar que altera a fase dos componentes espectrais de acordo com os sinais de suas frequências. Não atua na amplitude, sendo que a energia do sinal e de sua transformada são iguais.



## APÊNDICE B

Neste apêndice, primeiramente apresentam-se os filtros da DT–CWT utilizados neste trabalho. Em seguida, é explorado como construir as funções de escala e funções *wavelets* a partir dos filtros e, posteriormente descreve-se como calcular a frequência central da DT–CWT.

### B.1 Filtros DT–CWT

Nesta seção apresenta-se uma condição simples que deve ser verificada entre os filtros utilizados na DT–CWT, que é a condição de atraso de metade da amostra, conforme descrito em (SELESNICK et al., 2005). Em seguida, descreve-se o método de filtros *Q-shift* e questões de implementação.

#### A condição de atraso de metade da amostra

A DT–CWT necessita da construção de filtros novos onde se questiona quais as propriedades que devem ter os dois filtros passa-baixa  $\bar{h}_0$  e  $\underline{h}_0$  de modo que  $\underline{\psi}(t) \approx \mathcal{H}\{\bar{\psi}(t)\}$ .

Escrevendo as funções de escala  $\varphi(t)$  e *wavelets*  $\psi(t)$  de acordo com filtros tem-se

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(t) &= \sum_n \bar{h}_0 \bar{\varphi}(t), \\ \underline{\varphi}(t) &= \sum_n \underline{h}_0 \underline{\varphi}(t), \\ \bar{\psi}(t) &= \sum_n \bar{h}_1 \bar{\varphi}(t), \\ \underline{\psi}(t) &= \sum_n \underline{h}_1 \underline{\varphi}(t),\end{aligned}\tag{B.1}$$

em que  $h_1(n) = (-1)^n h_0(t - n)$  e  $g_1(n) = (-1)^n g_0(t - n)$ .

Devido ao fato das *wavelets* dependerem das funções de escala  $\varphi(t)$ , e desde que as funções de escala dependem implicitamente dos filtros, não é uma tarefa fácil perceber como os filtros devem estar relacionados. No entanto, em (SELESNICK et al., 2005) verifica-se que os dois filtros passa-baixa devem satisfazer uma propriedade simples: um deles deve ser aproximadamente metade da amostra do outro, ou seja,

$$\underline{h}_0 \approx \bar{h}_0(n - 0.5) \Rightarrow \underline{\psi}(t) \approx \mathcal{H}\{\bar{\psi}(t)\}.\tag{B.2}$$

Em (SELESNICK et al., 2005) descrevem-se três métodos para a construção de filtros

para a DT-CWT. A seguir, descreve-se o método de filtros *Q-shift* o qual foi utilizado neste trabalho nas escalas  $j > 1$  na decomposição da série temporal utilizando-se da DT-CWT.

### Filtro *Q-shift*

Seguindo (SELESNICK et al., 2005), quando se considera

$$g_0(n) = h_0(N - 1 - n) \quad (\text{B.3})$$

em que  $N$  é o comprimento de  $h_0(n)$  com  $0 \leq n \leq N - 1$ , a parte da magnitude da condição de atraso de metade da amostra é exatamente satisfeita devido a relação de tempo reverso entre os filtros, mas a parte da fase não é exatamente satisfeita, ou seja,

$$|G_0(e^{j\omega})| = |H_0(e^{j\omega})| \quad (\text{B.4})$$

$$\angle G_0(e^{j\omega}) \neq \angle H_0(e^{j\omega}) - 0,5\omega. \quad (\text{B.5})$$

em que  $G_0$  e  $H_0$  são as TF dos filtros  $g_0$  e  $h_0$ , respectivamente. Portanto, os filtros devem ser construídos de modo que a condição da fase seja aproximadamente satisfeita.

Uma solução apresentada em (SELESNICK et al., 2005) de deslocamento de quatro (*Q-shift*) tem uma propriedade interessante que conduz ao seu nome: se considerar que  $g_0$  e  $h_0$  são relativamente descritos conforme na equação B.3, então a resposta da frequência de  $h_0$  tem aproximadamente fase-linear.

Isto é verificado escrevendo a equação B.3 em termos da TF. Considerando a condição expressa na equação B.4 tem-se

$$G_0(e^{j\omega}) = \overline{H_0(e^{j\omega})} e^{-j(N-1)\omega},$$

em que a barra representa o complexo conjugado, e para a condição da fase descrita na equação B.5 tem-se

$$\angle G_0(e^{j\omega}) = -\angle H_0(e^{j\omega}) - (N - 1)\omega.$$

Se os dois filtros satisfazem aproximadamente a condição de fase expressa na equação B.5 então

$$\begin{aligned} \angle G_0(e^{j\omega}) &\approx \angle H_0(e^{j\omega}) - 0,5\omega \\ -\angle H_0(e^{j\omega}) - (N - 1)\omega &\approx \angle H_0(e^{j\omega}) - 0,5\omega \end{aligned}$$

rearranjando a equação nós obtemos

$$\begin{aligned}\angle H_0(e^{i\omega}) + \angle H_0(e^{i\omega}) &\approx -(N-1)\omega + 0,5\omega \\ 2 \angle H_0(e^{i\omega}) &\approx -(N-1)\omega + 0,5\omega\end{aligned}$$

dividindo por 2, obtem-se

$$\angle H_0(e^{i\omega}) \approx -0,5(N-1)\omega + 0,25\omega. \quad (\text{B.6})$$

Isto é,  $h_0(n)$  é um filtro aproximadamente de fase linear e também é aproximadamente simétrico em torno do ponto  $n = 0,5(N-1) - 0,25$ . Note que isto significa que é um quarto de distância a partir do ponto natural de simetria (se  $h_0(n)$  for exatamente simétrico) e, por esta razão, as soluções deste tipo foram introduzidas como filtros *dual-tree Q-shift* conforme discutido em (KINGSBURY, 2000).

Para a solução *Q-shift*, a parte imaginária da *wavelet* complexa é uma versão de tempo reverso da parte real,  $\underline{\psi}(t) = \overline{\psi}(N-1-t)$ . Portanto, a solução *Q-shift* produz *wavelets* complexas que são exatamente de fase linear.

A seguir, apresentam-se algumas questões de implementação de como os filtros devem ser arranjados nas árvores da *dual-tree*.

### Questões de Implementação

A implementação da DT-CWT requer que o banco de filtros utilizado na primeira escala de decomposição,  $j = 1$ , seja diferente dos que serão utilizados nas escalas seguintes,  $j > 1$ . Se os mesmos filtros são utilizados em todas as escalas de decomposição então, a DT-CWT não será aproximadamente analítica em cada escala de decomposição, conforme exposto em (SELESNICK et al., 2005).

Os filtros *dual-tree* construídos para satisfazer a condição de atraso de metade da amostra não devem ser usados na escala  $j = 1$ , mas sim é necessário ser satisfeita a condição  $\underline{h}_0^1(n) \approx \overline{h}_0^1(n-1)$ . Para as escalas superiores, verifica-se que para cada escala,  $j > 1$ , sempre obtemos a mesma condição  $\underline{h}_0(n) \approx \overline{h}_0(n-0,5)$ . Os filtros existentes na literatura podem ser utilizados na primeira escala, sendo apenas necessário compensar um do outro por uma amostra.

Neste trabalho, na primeira escala de decomposição utilizou-se um filtro bi-ortogonal e quase simétrico (13, 19), o qual é utilizado em ambas as árvores da DT-CWT. Nas escalas  $j > 1$ , escolheu-se o filtro *Q-shift* (14, 14) o qual fornece um atraso de ambos  $\frac{1}{4}$

ou  $\frac{3}{4}$  de um período da amostra. A Figura B.1 ilustra o gráfico dos coeficientes não-nulos dos filtros *Near-Symmetric* (13, 19) e dos filtros *Q-shift* (14, 14). A Tabela B.1 apresenta os coeficientes não-nulos dos filtros de análise. Neste gráfico tem-se no item (a) filtro passa-baixa  $h_0^*$  para  $j = 1$ ; (b) filtro passa-alta  $h_1^*$  para  $j = 1$ ; (c) filtros passa-baixa  $h_{0a} = \bar{h}_0$  e  $h_{0b} = \underline{h}_0$  para  $j > 1$ ; e em (d) filtros passa-alta  $h_{1a} = \bar{h}_1$  e  $h_{1b} = \underline{h}_1$  para  $j > 1$ .

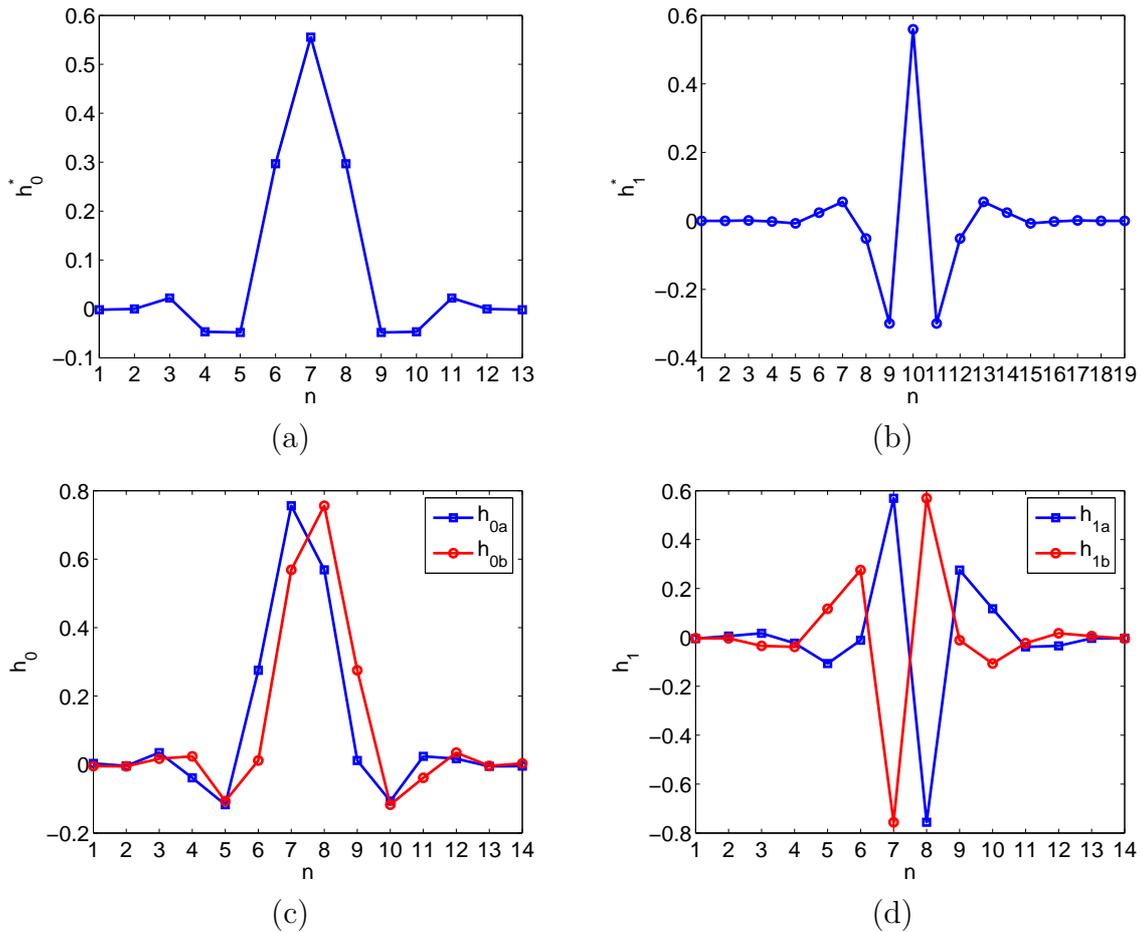


Figura B.1 - Gráfico dos coeficientes não-nulos dos filtros *Near-Symmetric* (13, 19) e dos filtros *Q-shift* (14, 14). Em (a) filtro passa-baixa  $h_0^*$  para  $j = 1$ ; (b) filtro passa-alta  $h_1^*$  para  $j = 1$ ; (c) filtros passa-baixa  $h_{0a} = \bar{h}_0$  e  $h_{0b} = \underline{h}_0$  para  $j > 1$ ; e em (d) filtros passa-alta  $h_{1a} = \bar{h}_1$  e  $h_{1b} = \underline{h}_1$  para  $j > 1$ .

Tabela B.1 - Coeficientes não-nulos dos filtros *Near-Symmetric* (13, 19) e *Q-shift* (14, 14).

$n$	Near-Symmetric		Q-Shift			
	$h_0^*$	$h_1^*$	upper tree		lower tree	
	$h_0$	$h_1$	$\underline{h}_0$	$\underline{h}_1$	$\underline{h}_0$	$\underline{h}_1$
1	-0.17578	$-7.0626 \cdot 10^{-5}$	0.32531	-0.45569	-0.45569	-0.32531
2	0	0	-0.38832	0.54395	-0.54395	-0.38832
3	2.22660	0.13419	3.46600	1.70250	1.70250	-3.46600
4	-4.68750	-0.18834	-3.88730	-2.38250	2.38250	-3.88730
5	-4.82420	-0.71568	-11.72000	-10.67100	-10.67100	11.72000
6	29.68800	2.38560	27.53000	-1.18660	1.18660	27.53000
7	55.54700	5.56430	75.61500	56.88100	56.88100	-75.61500
8	29.68800	-5.16880	56.88100	-75.61500	75.61500	56.88100
9	-4.82420	-29.9760	1.18660	27.53000	27.53000	-1.18660
10	-4.68750	55.9430	-10.67100	11.72000	-11.72000	-10.67100
11	2.22660	-29.9760	2.38250	-3.88730	-3.88730	-2.38250
12	0	-5.16880	1.70250	-3.46600	3.46600	1.70250
13	-0.17578	5.56430	-0.54395	-0.38832	-0.38832	0.54395
14		2.38560	-0.45569	-0.32531	0.32531	-0.45569
15		-0.71568				
16		-0.18834				
17		0.13419				
18		0				
19		$-7.0626 \cdot 10^{-5}$				

NOTA: Créditos (KINGSBURY, 2001). Os coeficientes estão multiplicados por  $10^{-2}$ .

## B.2 Construindo a *wavelet*

Nesta seção é apresentada a construção da função *wavelet*  $\psi$  e da função de escala  $\varphi$  a partir dos bancos de filtros. Essa construção é feita considerando como referência o estudo do algoritmo apresentado no exercício 4.4 do livro [Castilho et al. \(2012\)](#).

Considerando o filtro *Near-Symmetric* (13, 19) utilizado na escala  $j = 1$ , os seguintes passos são necessários para construir  $\varphi$  e  $\psi$ :

- Verificar a normalização dos filtros.  
A soma dos coeficientes do filtro  $h_0^*$  é igual a 1 e a normalização feita no filtro  $h_0^*$  é a multiplicação por 2.  
A soma dos coeficientes do filtro  $h_1^*$  é igual a 0 e não necessita de normalização.
- Construir a função de escala utilizando a relação de escala  $\varphi(t) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_0^*(k) \varphi(2t - k)$ , em que  $h_0^*(k)$  são os coeficientes do filtro passa-baixa.
- Construir a função de *wavelet* utilizando a relação  $\psi(t) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_1^*(k) \varphi(2t - k)$ , em que  $h_1^*(k)$  são os coeficientes do filtro passa-alta.
- Constrói-se a função *wavelet* complexa  $\boldsymbol{\psi}(t) := \overline{\psi}(t) + \underline{\psi}(t)$  e verifica-se se é uma *wavelet* por meio do cálculo da integral da função *wavelet* (condição de admissibilidade) e da energia (tem que ser unitária). Lembrando que, nesta escala,  $\overline{\psi}(t) = \underline{\psi}(t)$ .

Considerando o filtro *Q-shift* (14, 14) utilizados nas escalas  $j > 1$ , os seguintes passos são necessários para construir  $\varphi$  e  $\psi$ :

- Verificar a normalização dos filtros.  
Considerando a DWT superior, a soma dos coeficientes do filtro  $\overline{h}_0$  é igual a  $\sqrt{2}$  e a normalização é feita multiplicando por  $\sqrt{2}$ .  
A soma dos coeficientes do filtro  $\underline{h}_1$  é igual a 0 e não necessita de normalização. Considerando a DWT inferior tem-se o mesmo esquema de normalização da DWT superior.
- Construir a parte real da função de escala  $\overline{\varphi}(t) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h}_0(k) \overline{\varphi}(2t - k)$ .

- Construir a parte imaginária da função de escala  $\underline{\varphi}(t) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underline{h}_0(k) \underline{\varphi}(2t - k)$ .
- Construir a parte real da função de *wavelet*  $\overline{\psi}(t) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h}_1(k) \overline{\varphi}(2t - k)$ .
- Construir a parte imaginária da função *wavelet*  $\underline{\psi}(t) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underline{h}_1(k) \underline{\varphi}(2t - k)$ .
- Construir a função *wavelet* complexa  $\boldsymbol{\psi}(t) := \overline{\psi}(t) + \underline{\psi}(t)$  e verificar se é uma *wavelet* por meio do cálculo da integral da função *wavelet* (condição de admissibilidade) e da energia (tem que ser unitária).

A Figura B.2 ilustra em (a) a função de escala e em (b) a função *wavelet* considerando o filtro *Near-Symmetric* (13, 19). Em (c) a função de escala e em (d) a função *wavelet* considerando o filtro *Q-shift* (14, 14).

### B.3 Frequência Central da DT-CWT

Nesta seção apresenta-se como calcular a frequência central associada a *wavelet* da DT-CWT.

Em analogia com a análise de Fourier, pode-se estabelecer uma relação entre a frequência central associada com a função *wavelet*  $\xi_\psi$  e a frequência central associada com a escala  $\xi_j$ , por meio da relação

$$\xi_j = \frac{\xi_\psi}{a \cdot \Delta t} \quad (\text{B.7})$$

em que  $a = 2^j$  é a escala, e  $\Delta t$  é o período de amostragem.

Com o objetivo de encontrar o valor de  $\xi_\psi$ , os seguintes passos são realizados:

- Calcular a transformada de Fourier da função *wavelet* complexa  $\boldsymbol{\psi}(t)$ .
- Encontrar  $\xi_\psi$ , o qual corresponde ao valor da frequência associada ao valor máximo do espectro de  $\boldsymbol{\psi}(t)$ .
- Utilizar a equação B.7 para encontrar a frequência central associada com a escala  $j$ .

Considerando a função *wavelet* associada com o filtro *Near-Symmetric* obteve-se  $\xi_\psi = 0.48136$  e para o filtro *Q-shift* obteve-se  $\xi_\psi = 0.4802$ .

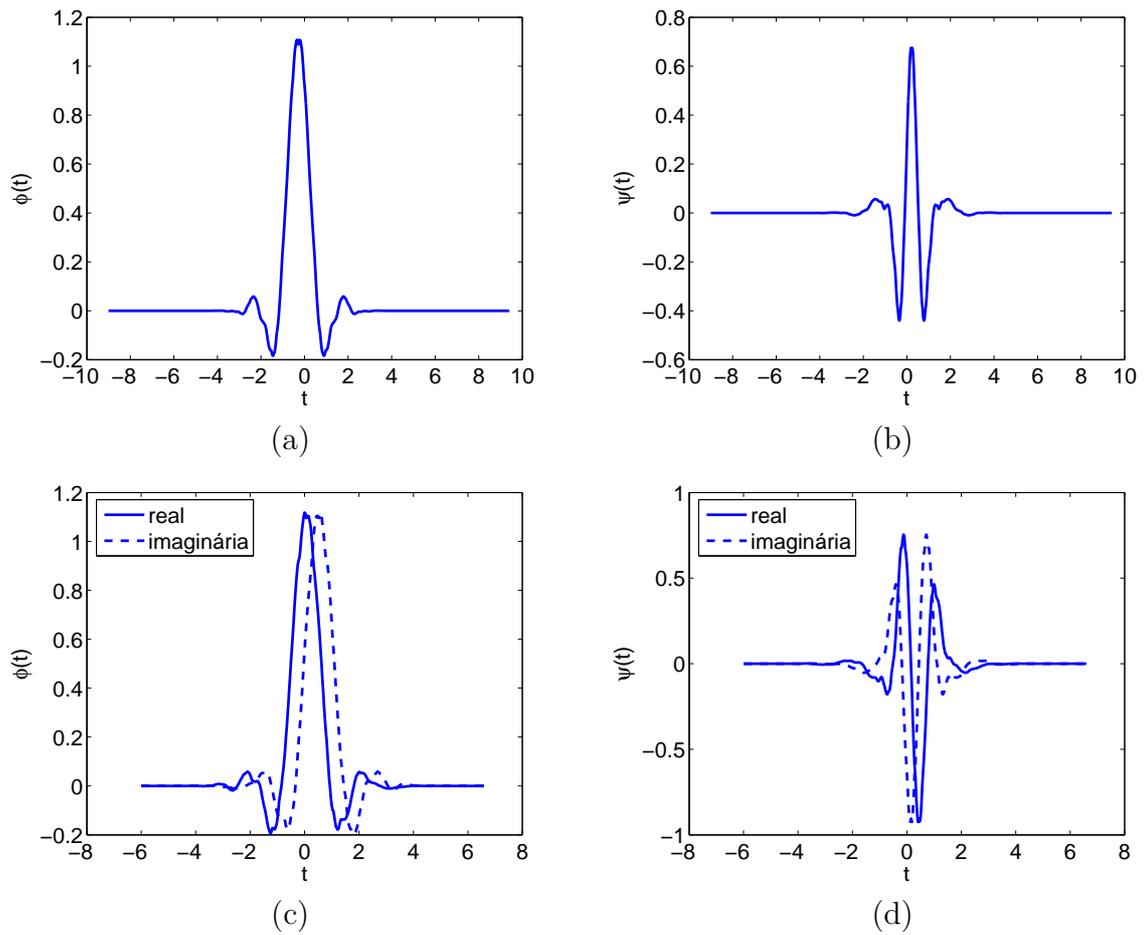


Figura B.2 - Em (a) a função de escala e em (b) a função *wavelet* considerando o filtro Near-Symmetric (13, 19). Em (c) a função de escala e em (d) a função *wavelet* considerando o filtro *Q-shift* (14, 14).

A Tabela B.2 apresenta os valores da frequência e do período central associados aos filtros *Near-Symmetric* (13, 19) e *Q-shift* (14, 14).

Tabela B.2 - Frequência e período central associados aos filtros *Near-Symmetric* (13, 19) e *Q-shift* (14, 14).

<i>Near-Symmetric</i>			<i>Q-shift</i>	
$j$	$\xi_j$	período	$\xi_j$	período
1	0.24068000	4.1549	0.24010000	4.1649
2	0.12034000	8.3099	0.12005000	8.3299
3	0.06016900	16.62	0.06002500	16.66
4	0.03008500	33.239	0.03001200	33.32
5	0.01504200	66.479	0.01500600	66.639
6	0.00752120	132.96	0.00750310	133.28
7	0.00376060	265.92	0.00375150	266.56
8	0.00188030	531.83	0.00187580	533.11
9	0.00094015	1063.7	0.00093789	1066.2
10	0.00047007	2127.3	0.00046894	2132.5



## APÊNDICE C

Neste apêndice apresenta-se inicialmente um resumo sobre números complexos e fase. Em seguida, são descritas as funções do *GNU/Octave* `atan2` a qual foi utilizada para calcular a fase  $\phi$  e a função `unwrap` que é utilizada para produzir gráficos da fase que sejam suaves e contínuos ao longo do tempo. Posteriormente, é explorada uma função `my-unwrap` proposta neste trabalho, a qual foi implementada com o objetivo de tentar corrigir as desvantagens encontradas na função `unwrap`.

### C.1 Números complexos e fase

Seja um número complexo  $z$  expresso na forma cartesiana (retangular ou algébrica) por  $z = x + iy$ , em que  $i = \sqrt{-1}$ ,  $x = \Re(z)$  é a parte real de  $z$  e  $y = \Im(z)$  é a parte imaginária de  $z$ .

Um número complexo da forma  $z = x + iy$ , pode ser representado do ponto de vista geométrico no plano cartesiano como um ponto (par ordenado) tomando-se a abscissa deste ponto como a parte real do número complexo  $z$  no eixo  $OX$  e a ordenada como a parte imaginária do número complexo  $z$  no eixo  $OY$ , sendo que o número complexo  $0 = 0 + i0$  é representado pela própria origem  $(0, 0)$  do sistema, conforme pode ser visualizado na Figura C.1. Note da Figura C.1 que existe um triângulo retângulo cuja medida da hipotenusa é a distância da origem  $0$  ao número complexo  $z$ , denotada por  $r$ ; o cateto adjacente tem comprimento igual à parte real  $x$  do número complexo  $z$  e o cateto oposto corresponde à parte imaginária  $y$  do número complexo  $z$ .

Na forma polar, o número complexo  $z$  é representado por  $z = r e^{i\phi}$ , em que  $r > 0$  é o módulo (ou valor absoluto) de  $z$ ,  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , e  $\phi = \arg z$  é o ângulo (ou fase) de  $z$ . Chama-se argumento principal de  $z$  ao seu argumento que pertence ao intervalo  $]-\pi, \pi]$ . O argumento principal, fica, assim, definido univocamente para todos os complexos  $z \neq 0$  e designa-se por  $\arg z$ . Pode-se escrever  $\arg z$  em termos da função real arco tangente cujo contradomínio é o intervalo  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , na forma:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z)}\right), & \text{se } \Re(z) > 0 \\ +\frac{\pi}{2}, & \text{se } \Re(z) = 0 \text{ e } \Im(z) > 0 \\ \arctan\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z)}\right) + \pi, & \text{se } \Re(z) < 0 \text{ e } \Im(z) \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{se } \Re(z) = 0 \text{ e } \Im(z) < 0 \\ \arctan\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z)}\right) - \pi, & \text{se } \Re(z) < 0 \text{ e } \Im(z) < 0 \end{cases}$$

A Figura C.1 ilustra o plano complexo (ou diagrama de Argand) e uma representação do triângulo extraído do plano complexo. O eixo das abcissas é o conjunto  $(x, 0) \in \mathbb{C}$  que se designa por eixo real. O eixo das ordenadas é o conjunto  $(0, y) \in \mathbb{C} = iy : y \in \mathbb{R}$  que se designa por eixo imaginário.

Como se ilustra na Figura C.1, a utilização de coordenadas polares leva à representação polar (ou representação trigonométrica) de números complexos, na forma  $z = (x, y) = r(\cos \phi, \sin \phi)$  ou  $z = x + iy = r(\cos \phi + i \sin \phi)$

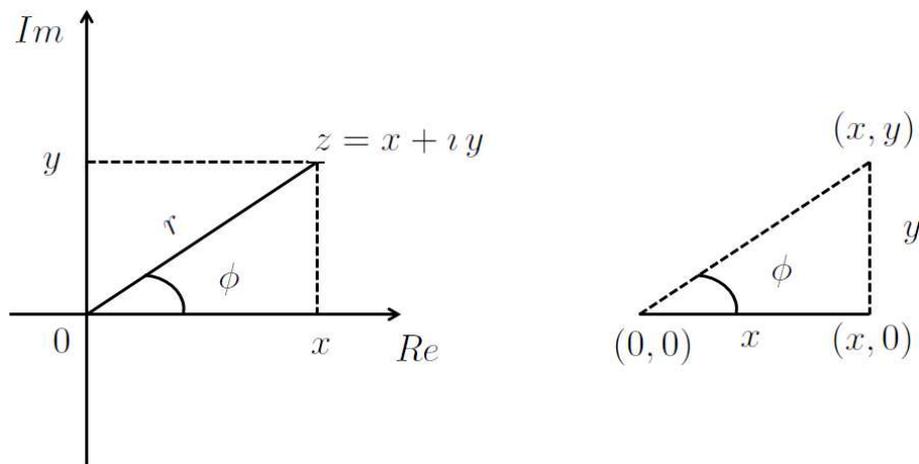


Figura C.1 - A esquerda o Plano Complexo e a direita o triângulo retângulo extraído do plano complexo.

Considerando o triângulo extraído do plano complexo, ilustrado em C.1, a tangente do ângulo  $\phi$  é a relação do cateto oposto do triângulo para o cateto adjacente, ou seja,  $\tan \phi = \frac{y}{x}$ . Logo, o ângulo de fase  $\phi$  é calculado considerando a tangente inversa (arco tangente) dada por:

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (\text{C.1})$$

Algumas considerações importantes com relação ao cálculo da equação C.1 devem ser feitas analisando o ciclo trigonométrico, o qual é ilustrado na Figura C.2.

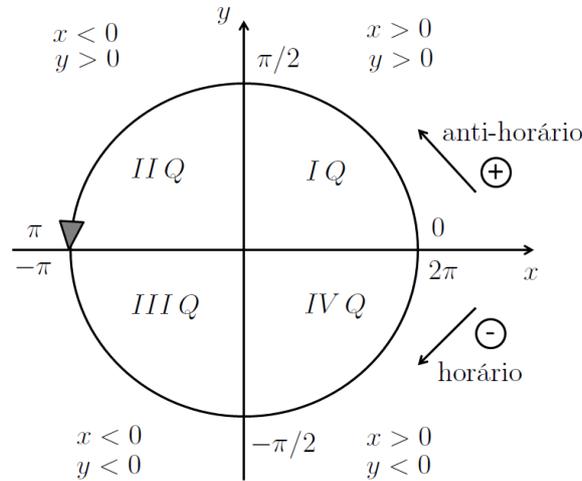


Figura C.2 - Ciclo Trigonométrico

Note que, no primeiro quadrante (*I Q*) o cálculo da equação C.1 funciona corretamente e o ângulo  $\phi$  é positivo. Já, no quarto quadrante (*IV Q*)  $\phi$  é negativo, porque a função  $\arctan$  retorna um valor entre  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  ou entre  $[-\pi, \pi]$ . Note que se  $x$  e  $y$  são negativos (*III Q*), a razão  $\frac{y}{x}$  é a mesma como se seus valores fossem positivos. Além disso, é preciso ter cuidado quando se tem  $x = 0$ , já que não podemos dividir por 0. A seguir estão sumarizadas as considerações apresentadas acima. Muitas linguagens de computador têm uma função chamada  $\text{atan2}(y, x)$  que implementa a execução dessas considerações automaticamente.

- Se  $x > 0$  então  $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ .
- Se  $x < 0$  então  $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$ .
- Se  $x = 0$  então
  - Se  $y > 0$  então  $\phi = \left(\frac{\pi}{2}\right)$ .
  - Se  $y < 0$  então  $\phi = -\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .
  - Se  $y = 0$  então  $\phi$  é indeterminado.

## C.2 Funções

Nesta seção é descrito o comando `atan2` e o comando `unwrap` do *GNU/Octave*, os quais são utilizados neste trabalho.

### C.2.1 Função `atan2`

Em uma variedade de linguagens de computador, a função `atan2` é a função arco tangente com dois argumentos. A finalidade da utilização de dois argumentos em vez de um argumento é reunir informação sobre os sinais das entradas, de modo a retornar o quadrante apropriado do ângulo calculado, o que não é possível para a função arco tangente de argumento único (dada pela função `atan`).

Para qualquer número real, `atan2(y, x)` é o ângulo em radianos entre o eixo positivo  $x$  de um plano e o ponto dado pelas coordenadas  $(x, y)$ . O ângulo é positivo para ângulos anti-horário (semi-plano superior,  $y > 0$ ), e negativo para os ângulos no sentido horário (semi-plano inferior,  $y < 0$ ).

No *GNU/Octave*  $P = \text{atan2}(y, x)$  retorna a tangente inversa (arco tangente) de  $\frac{y}{x}$  em radianos na faixa de  $(-\pi, \pi]$  do número complexo  $z$ . O comando é utilizado como  $\phi(z) = \text{atan2}(\text{imag}(z), \text{real}(z))$ .

### C.2.2 Função `unwrap`

A fase instantânea (ou “fase local” ou simplesmente “fase”) de uma função de valor complexo  $z$ , é a função de valor real  $\phi(t) = \arg(z(t))$ . Quando  $\phi(t)$ , é limitada ao seu valor principal, ou o intervalo  $(-\pi, \pi]$  ou  $[0, 2\pi)$  é chamada a fase *wrapped*. Caso contrário, é chamado de *unwrapped*, que é uma função contínua de argumento  $t$ .

A função  $Q = \text{unwrap}(p)$  corrige os ângulos de fase  $p$ , em que  $p$  é o vetor de fase  $\theta$  *wrapped*, adicionando múltiplos de  $2\pi$  quando saltos absolutos entre os elementos consecutivos do vetor de fase  $p$  são maiores do que ou iguais ao padrão de saltos de tolerância de  $\pi$  radianos.

A seguir, apresentam-se sucintamente os principais passos realizados pela função `unwrap`.

1º **passo:** Variação incremental da fase:

$$dp = \text{diff}(p) = p(t+1) - p(t), \text{ onde } t > 1 \text{ é o instante de tempo;}$$

2º **passo:** Variação da fase equivalente em  $[-\pi, \pi)$ :

$$dps = \text{mod}(dp + \pi, 2 * \pi) - \pi;$$

3º **passo:** Verificação da preservação do sinal para  $\pi$  versus  $-\pi$ :

$$dps(dps = -\pi \text{ e } dp > 0, :) = \pi;$$

4º **passo:** Correção da fase:

$$dpcorr = dps - dp;$$

5º **passo:** Ignorar a correção quando a variação  $abs(dp)$  é menor do que  $cutoff = \pi$ :

$$dpcorr(abs(dp) < cutoff, :) = 0;$$

6º **passo:** Integrar as correções e adicionar a  $p$  para produzir valores de fase suavizados:

$$\phi(2 : \text{length}(p), :) = \phi(2 : \text{length}(p), :) + \text{cumsum}(dpcorr, 1).$$

Um pseudo-algoritmo da função `unwrap` é descrito abaixo.

---

**Algoritmo 1:** Função `unwrap`

---

**Entrada:** `p`

**Saída:** `Q`

**início**

$$m = \text{length}(p);$$

$$cutoff = pi;$$

**repita**

$$dp = \text{diff}(p);$$

$$dps = \text{mod}(dp + pi, 2 * pi) - pi;$$

$$dps(dps == -pi \ \& \ dp > 0, :) = pi;$$

$$dpcorr = dps - dp;$$

$$dpcorr(abs(dp) < cutoff, :) = 0;$$

$$p(2 : m, :) = p(2 : m, :) + \text{cumsum}(dpcorr, 1);$$

**até**  $m$ ;

**fim**

---

### C.2.3 Função `my-unwrap`

Quando a fase  $\phi$  está muito próxima do  $cutoff = \pi$ , o comando `unwrap` falha em verificar o quadrante da fase. Neste caso, pode ocorrer saltos falsos de  $2\pi$ .

Com o objetivo de melhorar e tentar corrigir esses saltos falsos, é proposto, neste trabalho, uma função chamada `my-unwrap`. A entrada para esta função é a fase no intervalo de  $[0, 2\pi]$  denotada por  $\theta$  e calculada por meio da função  $\theta = \text{mod}(\theta, 2\pi)$ .

A partir do vetor  $\theta$  contendo as fases em cada instante de tempo  $k$ , calcula-se as distâncias entre os ângulos  $\theta_k$  e  $\theta_{k+1}$ , nos instantes  $k$  e  $k + 1$ , respectivamente, considerando o sentido anti-horário, denotada por  $d_A$ , e sentido horário, denotada por  $d_H$ . Algumas regras devem ser consideradas tomando com relação  $\theta_k$  e  $\theta_{k+1}$  no cálculo das distâncias  $d_A$  e  $d_H$ :

- Se o ângulo  $\theta_{k+1} > \theta_k$ :  
 $d_A = \theta_{k+1} - \theta_k$ ;  
 $d_H = 2\pi - d_A$ ;
- Se o ângulo  $\theta_{k+1} < \theta_k$ :  
 $d_H = \theta_k - \theta_{k+1}$ ;  
 $d_A = 2\pi - d_H$ ;
- Se  $d_A < d_H$  o sentido anti-horário é considerado.
- Se  $d_H < d_A$  o sentido horário é considerado.

Com base no exposto acima, implementou-se a função `q = my-unwrap(theta)`. A função é chamada por meio da função `q = my-unwrap(theta)` e um pseudo-algoritmo encontra-se descrito abaixo.

---

**Algoritmo 2:** Função `my-unwrap`

---

**Entrada:** `theta`

**Saída:** `q`

**início**

`m = length(theta) - 1`

`q(1) = theta(1);`

**repita**

`k = 1;`

**if** `theta(k + 1) > theta(k)` **then**

`q(k + 1) = (theta(k + 1) - theta(k)) + q(k);`

**else**

`q(k + 1) = [2 * pi - (theta(k) - theta(k + 1))] + q(k);`

**end**

**até** `m`;

**fim**

---

## APÊNDICE D

### D.1 Análise comparativa da utilização da CWT versus a DT-CWT

Nesta seção apresenta-se um exemplo de um experimento na qual foi utilizado a transformada *wavelet* contínua e o método *wavelet dt-cwt* para calcular a fase e, posteriormente, a diferença de fase a fim de analisar o fenômeno de sincronização de fase entre os sistemas.

A seguir, descreve-se sobre a *wavelet* de Morlet, a qual utiliza-se como *wavelet* analisadora na CWT.

#### **Wavelet** de Morlet

A *wavelet* de Morlet é dada por

$$\psi^{Morlet}(t) = \pi^{-\frac{1}{4}} \left( e^{i\xi t} - e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right) e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (D.1)$$

em que  $\xi$  é um valor adimensional geralmente considerado  $\xi = 6$ , a fim de satisfazer a condição de admissibilidade.

A *wavelet* de Morlet é indicada para o estudo de séries temporais com variações suaves. Um fator importante é que por ser uma *wavelet* complexa, permite a análise de mudanças de amplitude e fase do sinal estudado, localizando melhor as variações na frequência do que variações temporais de um sinal.

A Figura D.1 apresenta a *wavelet* de Morlet considerando em (a) a *wavelet* contraída quando  $s = 0,5$ , ou seja  $s < 1$ ; a *wavelet* em seu estado normal quando  $s = 1$  e a *wavelet* dilatada quando  $s = 2$ , ou seja,  $s > 1$ . Em (b) apresenta-se a *wavelet* de Morlet considerando a parte real e a parte imaginária da função.

A Tabela D.1 apresenta os valores da frequência e do período central associado a *wavelet* de Morlet. A frequência central da *wavelet* de Morlet é dada por  $\xi_\psi = 0.5$  e o período é igual a 2.

A seguir, apresenta-se sobre o Experimento utilizado a fim de comparar os resultados obtidos da análise da CWT e do método *wavelet dt-cwt*.

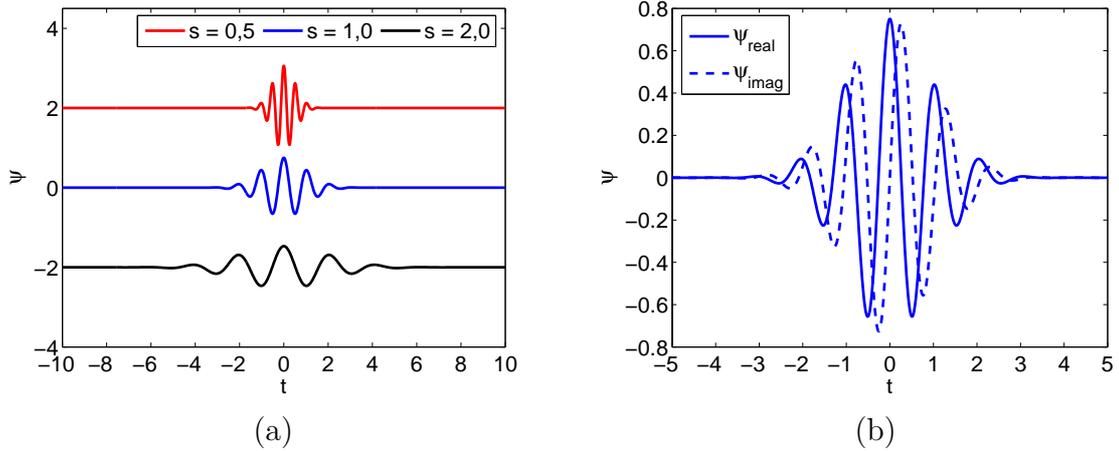


Figura D.1 - Em (a) a *wavelet* contraída quando  $s = 0,5$ , ou seja  $s < 1$ ; a *wavelet* em seu estado normal quando  $s = 1$  e a *wavelet* dilatada quando  $s = 2$ , ou seja,  $s > 1$ . Em (b) apresenta-se a *wavelet* de Morlet considerando a parte real e a parte imaginária da função.

Tabela D.1 - Frequência e período central associado a *wavelet* de Morlet.

$j$	$\xi_j$	período
1	0.25000000	4
2	0.12500000	8
3	0.06250000	16
4	0.03125000	32
5	0.01562500	64
6	0.00781250	128
7	0.00390630	256
8	0.00195310	512
9	0.00097656	1024
10	0.00048828	2048

### Experimento $R_{2a}$

O sistema de equações e parâmetros é o mesmo do Experimento  $R_2$  apresentado no Capítulo 6, Seção 6.1, Subseção 6.1.3, parte 6.1.3.1.

A série temporal apresenta  $N = 2^{17}$  pontos e quando se utiliza o método *wavelet dt-cwt* a mesma foi decomposta em 11 escalas de decomposição. Três diferentes intensidades de acoplamento são consideradas: uma fraca com  $\eta = 0,05$ , uma média com  $\eta = 0,15$  e uma forte com  $\eta = 0,2$ .

A Figura D.2 mostra o espectro de energia *wavelet* obtido do método *wavelet dt-cwt* e

o obtido utilizando a CWT, ambos considerando as três intensidades de acoplamento estudadas. Note que utilizando a DT-CWT, a escala de máxima energia é a escala  $J = 9$  e quando se utiliza a CWT a energia máxima concentra-se no intervalo  $[9, 10]$ .

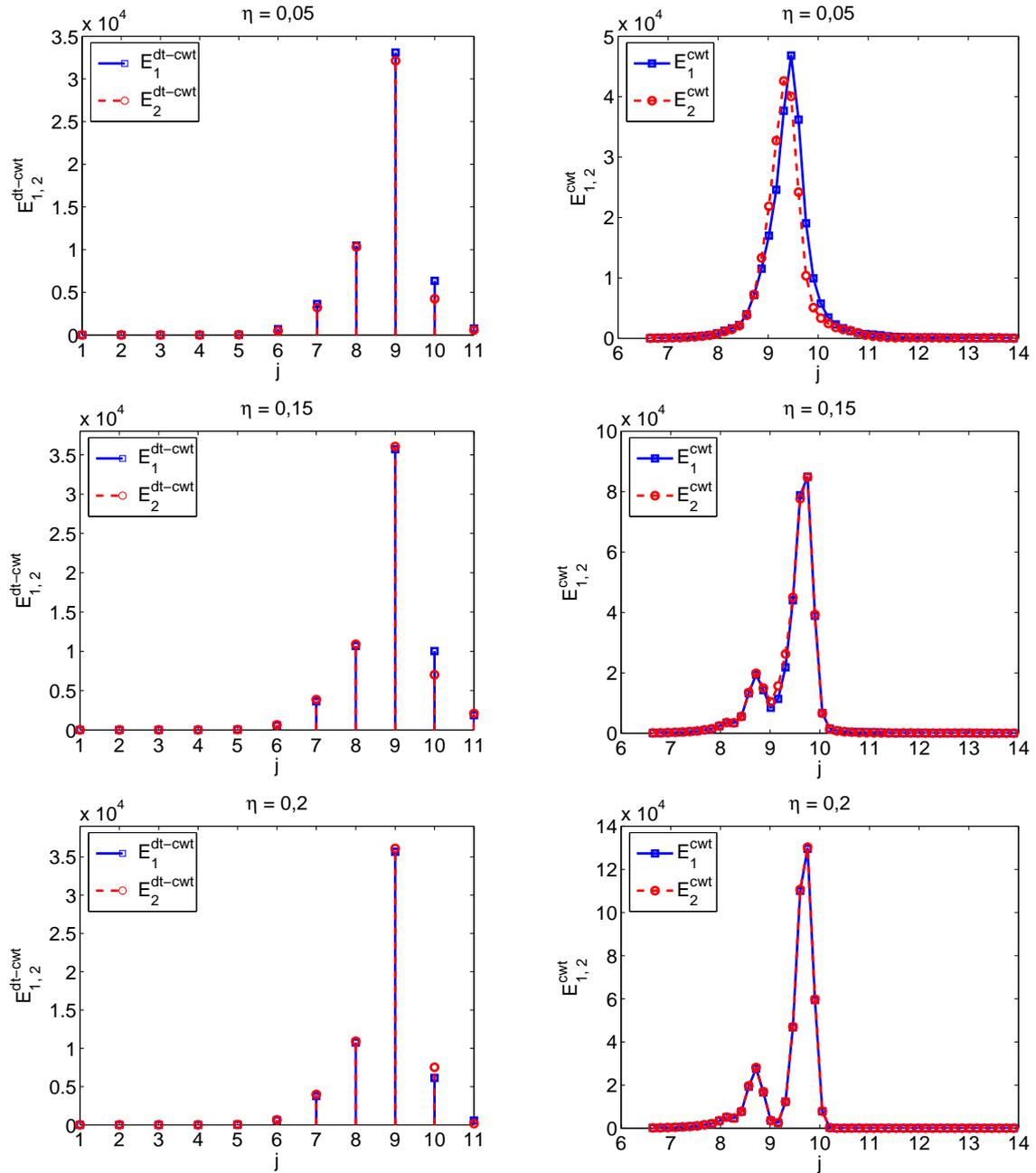


Figura D.2 - Experimento  $R_{2a}$ . Espectro de energia *wavelet* obtido do método *wavelet dt-cwt* e o obtido utilizando a CWT, ambos considerando as três intensidades de acoplamento estudadas.

A Figura D.3 mostra a fase obtida a partir do método *wavelet dt-cwt* e o obtido utilizando a CWT, ambos considerando as três intensidades de acoplamento estudadas.

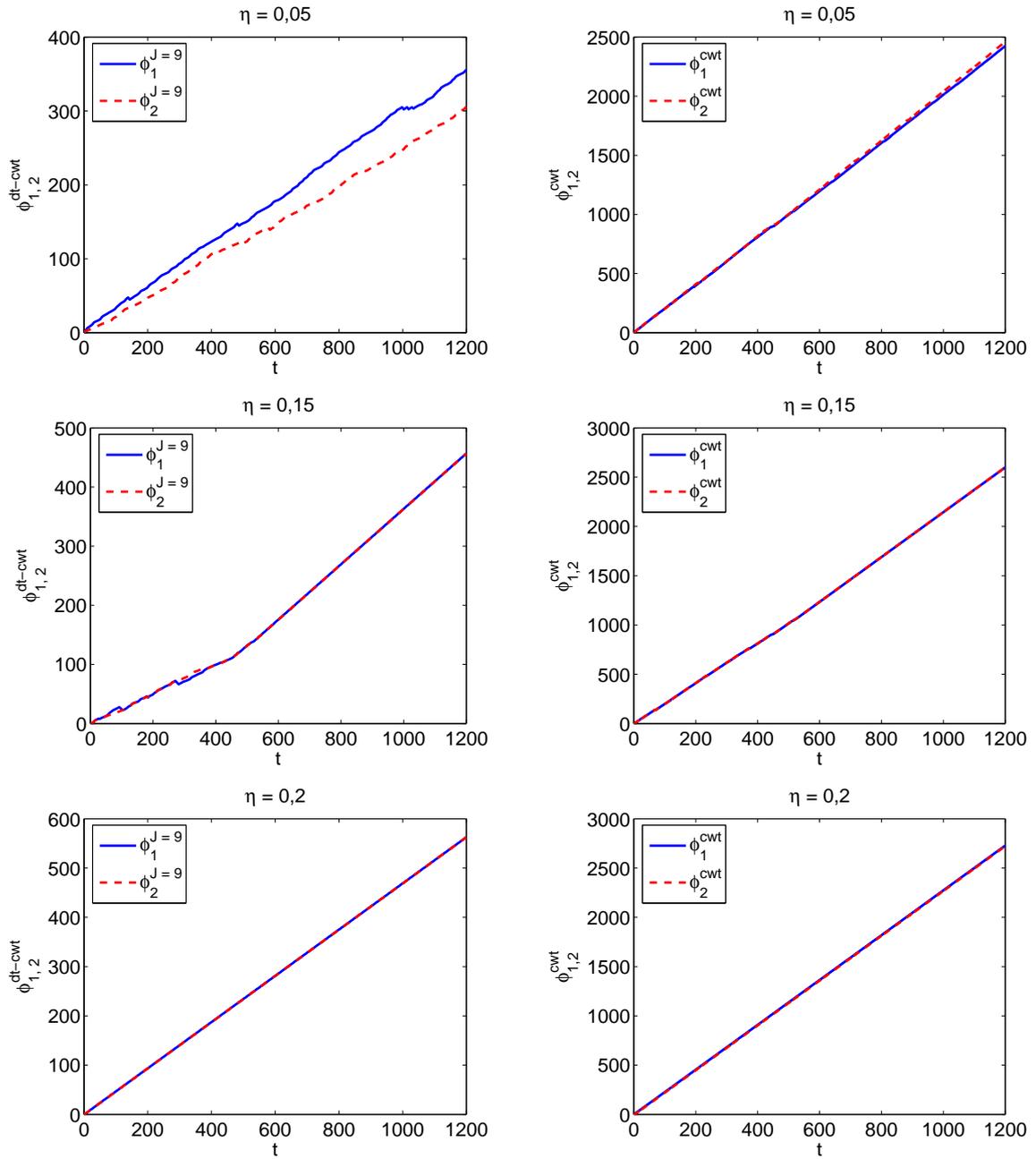


Figura D.3 - Experimento  $R_{2a}$ . Fase obtida a partir do método *wavelet dt-cwt* e o obtido utilizando a CWT considerando as três intensidades de acoplamento estudadas.

A Figura D.4 mostra a diferença de fase aplicando em (a) o método *wavelet dt-cwt*; (b) a CWT; (c) o método arco-tangente e em (d) considerando os três métodos com  $\eta = 0,15$  e no intervalo  $t = [0, 600]$ .

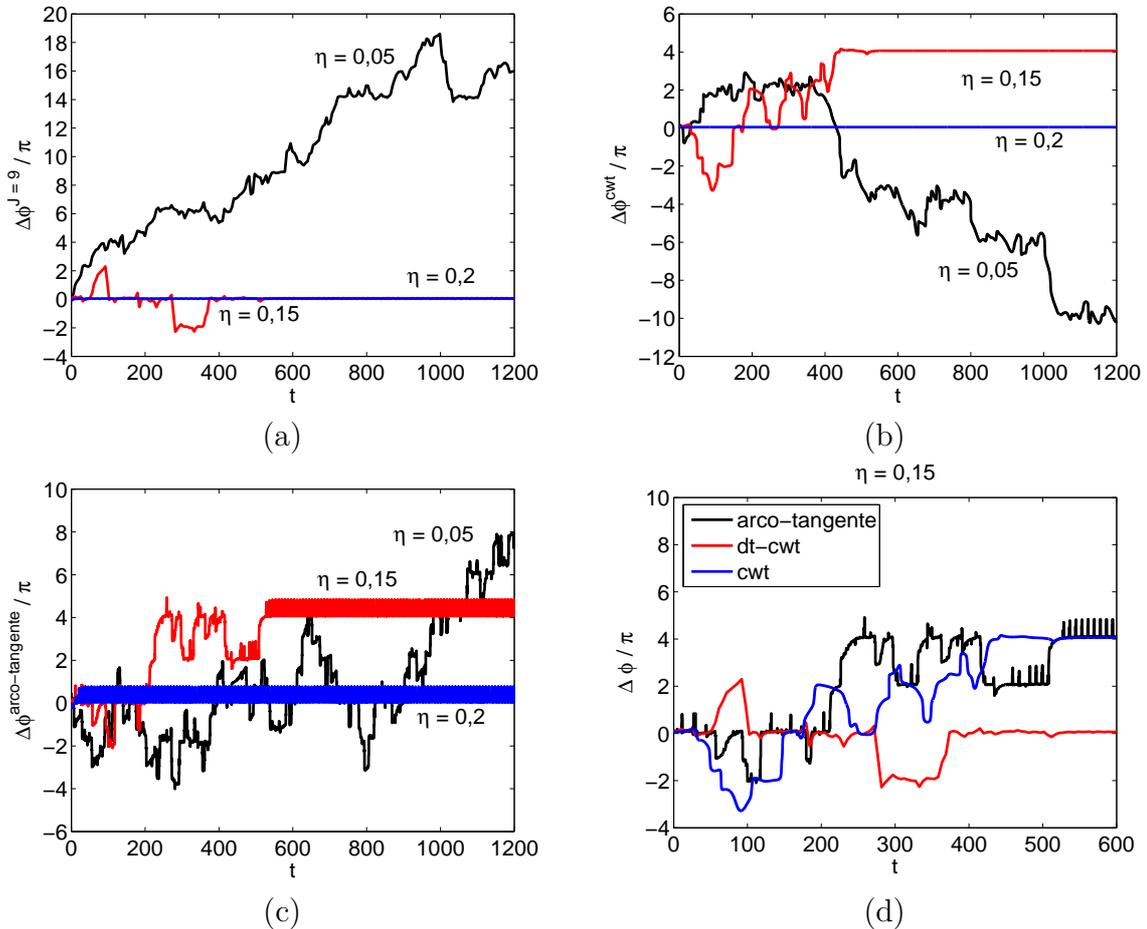


Figura D.4 - Experimento  $R_{2a}$ . Diferença de fase aplicando em (a) o método *wavelet dt-cwt*; (b) a CWT; (c) o método arco-tangente e em (d) considerando os três métodos com  $\eta = 0,15$  e no intervalo  $t = [0, 600]$ .

Observe da Figura D.4(a, b, c) que para um acoplamento fraco de  $\eta = 0,05$  os três métodos foram capazes de identificar que os sistemas não estão sincronizados em fase.

Quando se tem um acoplamento médio de  $0,15$ , o método *wavelet dt-cwt* detecta corretamente os dois deslizamentos de fase que ocorrem entre os sistemas, conforme pode ser visualizado na Figura D.4(a, d). Considerando o uso da CWT, conforme pode ser visualizado na Figura D.4(b, d), os deslizamentos de fase não são bem

localizados, este fato se deve em parte pela redundância presente neste tipo de transformada. Com relação ao uso do método arco-tangente, conforme pode ser visualizado na Figura D.4(c, d), note que vários deslizamentos de fase são verificados erroneamente, visto que verificando na série temporal os mesmos não ocorrem.

Quando se tem um acoplamento forte de  $\eta = 0,2$  os três métodos são capazes de verificar a sincronização de fase entre os sistemas, conforme pode ser visualizado na Figura D.4(a, b, c).

## APÊNDICE E

A fim de comparar o método proposto, descreve-se neste Capítulo o método arco tangente. Na Seção E.1 apresenta-se o método arco tangente e sua utilização quando o sistema apresenta regime de fase coerente e não coerente. Na Subseção E.1.3, descreve-se como calcular a fase quando se analisa o sistema de Lorenz.

### E.1 Método Arco Tangente

O método arco tangente baseia-se na projeção do atrator no espaço de fase. Calcula-se a fase como sendo o ângulo no sistema de coordenadas polares sobre o plano em que o atrator foi projetado. Esse método leva em consideração se o sistema apresenta regime de fase coerente ou não coerente, como descreve-se a seguir.

#### E.1.1 Regime de Fase Coerente

Em um regime de fase coerente, a projeção do atrator no plano  $(x, y)$  assemelha-se a um ciclo limite manchado com rotações bem definidas em torno da origem. Um exemplo considerando o sistema de Rössler pode ser visto na Figura 2.1(a). Neste caso e em casos similares, a fase  $\phi(t)$  pode ser introduzida como o ângulo no sistema de coordenadas polares sobre o plano  $(x, y)$ , conforme proposto em (ROSENBLUM et al., 1996; ROSENBLUM et al., 1997), dado da seguinte forma:

$$\phi(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right). \quad (\text{E.1})$$

Quando se tem um sistema que apresenta um regime de fase coerente, este método trabalha razoavelmente bem, apesar da presença de algumas regiões raras na qual a fase não cresce uniformemente ou mesmo decresce.

#### E.1.2 Regime de Fase Não Coerente

É interessante perceber que a abordagem de calcular a fase usando a projeção do atrator é bastante restrita, e para muitos sistemas caóticos não pode-se definir a fase ou uma variável do tipo fase de uma forma adequada.

Como exemplo, quando se considera o sistema de Rössler com o parâmetro  $a = 0,2925$ , o sistema possui um atrator chamado de *funil*, conforme ilustrado na Figura 2.1(b). O atrator funil encontrado no sistema de Rössler é, provavelmente, o exemplo mais simples de um sistema com fase não coerente ou fase mal definida.

Nesse caso, a fase pode ser definida usando a projeção do atrator sobre o plano das derivadas, conforme proposto em (CHEN et al., 2001), por meio da equação

$$\phi(t) = \arctan\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right). \quad (\text{E.2})$$

Quando se trabalha com um sistema em regime de fase não coerente, a aplicação desse método pode apresentar resultados ambíguos, sendo que a fase gerada nem sempre é uma função do tempo monotonicamente crescente ou apresenta ambiguidade (FOLLMANN et al., 2009).

Note que para utilizar o método arco tangente é necessário conhecer duas variáveis do sistema em estudo, o que na prática, é inviável, visto que na maioria dos casos tem-se apenas uma variável, a saber, a série temporal associada ao sistema.

Outro fator é que quando se utiliza as equações (E.1) e (E.2) para calcular a fase de um sistema, é necessário projetar o atrator do sistema em um plano. Assim, o conhecimento das variáveis de estado  $x$  e  $y$  são necessários.

A seguir, apresenta-se o método utilizado para calcular a fase quando se trabalha com o sistema de Lorenz.

### E.1.3 Cálculo da Fase no Sistema de Lorenz

No sistema de Lorenz, o atrator é projetado no plano  $(u, z)$ , em que considera-se a vantagem da simetria  $(x, y) \rightarrow (x, -y)$  nas equações de Lorenz para usar  $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ , conforme discutidos em (PIKOVSKY et al., 1997).

Considerando esta projeção (veja Figura 2.2(e)), a fase  $\phi(t)$  pode ser definida como

$$\phi(t) = \arctan\left(\frac{z(t) - z_0}{u(t) - u_0}\right) \quad (\text{E.3})$$

em que  $u_0 = 12$  e  $z_0 = 27$  são introduzidos para transladar o eixo de referência para o centro do atrator. Note que neste método, todas as variáveis,  $x$ ,  $y$ , e  $z$  são necessárias.

## **ANEXO A - Congressos Participados**

### **Ano de 2011**

Evento: Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações (DINCON-2011)

Data: 29 de Agosto a 2 de Setembro de 2011.

Local: Águas de Lindóia, SP.

Título do Trabalho: Transformada *Wavelet* Complexa *Dual-Tree* e a Detecção da Sincronização de Fase entre Sistemas com Dinâmica Caótica.

Autores: Maria Teodora Ferreira, Rosângela Follmann Bageston, Margarete Oliveira Domingues, Elbert. E. N. Macau.

Publicado em Anais: <http://dx.doi.org/10.5540/DINCON.2011.001.1.0184>.

Evento: *XI* Workshop de Computação Aplicada - WORCAP 2011.

Data: 8, 9 e 10 de Novembro de 2011.

Local: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE).

Título do Trabalho: Uso da transformada *wavelet* complexa *dual-tree* na detecção da sincronização de fase entre sistemas de Rössler em dinâmica caótica.

Autores: Maria Teodora Ferreira, Rosângela Follmann, Margarete Oliveira Domingues, Elbert. E. N. Macau.

Publicado em Anais: [mtc-m18.sid.inpe.br](http://mtc-m18.sid.inpe.br)

### **Ano de 2012**

Evento: Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional - ERMAC

Data: 30 de maio a 1 de junho 2012.

Local: UNESP - Campus de Botucatu-SP.

Título do Trabalho: Modelando Redes Complexas.

Autores: Maria Teodora Ferreira e Elbert E. N. Macau.

Evento: *XII* Workshop de Computação Aplicada - WORCAP 2012.

Data: 6, 7 e 8 de Novembro de 2012.

Local: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE).

Título do Trabalho: Construindo Modelos de Redes Complexas.

Autores: Maria Teodora Ferreira e Elbert E. N. Macau.

### **Ano de 2013**

Evento: Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - II CMAC-Sudeste 2013 Data: 23 a 27 de Setembro de 2013.

Local: UNESP - Campus de Bauru.

Título do Trabalho: Aplicação da Transformada *Wavelet* Complexa *Dual-Tree* na Detecção de Sincronização de Fase entre Sistemas Caóticos de Lorenz.

Autores: Maria Teodora Ferreira, Rosângela Follmann, Margarete Oliveira Domingues, Elbert E. N. Macau.

Publicado em Anais: <http://www.sbmac.org.br/cmacs/cmac-se/2013/trabalhos/>).

Evento: *XI* Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações (DINCON) e *XI* Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI).

Data: 13 A 17 de outubro de 2013

Local: Fábrica de Negócios - Fortaleza - CE

Título do Trabalho: Modelo de Kuramoto e a verificação da diferença de fase usando uma metodologia baseada na transformada *wavelet* complexa *dual-tree*: resultados preliminares. Autores: Maria Teodora Ferreira, Celso B. N. Freitas, Margarete O. Domingues, Elbert E. N. Macau.

Publicado em Anais: <http://www.sbai2013.ufc.br/pdfs/7698.pdf>.

Evento: 11th International Conference on Vibration Problems - ICOVP - Z. Dimitrovová et.al. (eds.)

Data: 9 – 12 de setembro de 2013.

Local: Lisbon, Portugal.

Título do Trabalho: Detecting Phase Synchronization in Coupled Chaotic Noncoherent Oscillators by Using Complexa Wavelet Transform.

Autores: Maria Teodora Ferreira, Rosangela Follmann, Elbert E. N. Macau, Margarete O. Domingues.

Publicado em Proceedings: <http://www.icovp.com/index.php/icovp-2013/proceedings>.

Evento: *XIII* Workshop de Computação Aplicada - WORCAP 2013.

Data: 12, 13 e 14 de Novembro de 2013.

Local: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE).

Título do Trabalho: Inferindo as ligações em uma rede complexa por meio do cálculo da coerência.

Autores: Maria Teodora Ferreira, Margarete O. Domingues, Elbert E. N. Macau.