



Ministério da
**Ciência, Tecnologia
e Inovação**



sid.inpe.br/mtc-m21b/2014/04.04.19.26-TDI

**CONFRONTANDO MODELOS DE ENERGIA ESCURA
COM A TAXA DE FORMAÇÃO ESTELAR CÓSMICA,
LGRB E FUNDOS ESTOCÁSTICOS DE ONDAS
GRAVITACIONAIS**

Carolina Gribel de Vasconcelos Ferreira

Dissertação de Mestrado do Curso
de Pós-Graduação em Astrofísica,
orientada pelo Dr. Oswaldo Duarte
Miranda, aprovada em 20 de feve-
reiro de 2014.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP5W34M/3G43QP5>>

INPE
São José dos Campos
2014

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE (RE/DIR-204):

Presidente:

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Membros:

Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

Dr^a Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Dr. Germano de Souza Kienbaum - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

Dr. Manoel Alonso Gan - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr^a Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Maria Tereza Smith de Brito - Serviço de Informação e Documentação (SID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da
**Ciência, Tecnologia
e Inovação**



sid.inpe.br/mtc-m21b/2014/04.04.19.26-TDI

**CONFRONTANDO MODELOS DE ENERGIA ESCURA
COM A TAXA DE FORMAÇÃO ESTELAR CÓSMICA,
LGRB E FUNDOS ESTOCÁSTICOS DE ONDAS
GRAVITACIONAIS**

Carolina Gribel de Vasconcelos Ferreira

Dissertação de Mestrado do Curso
de Pós-Graduação em Astrofísica,
orientada pelo Dr. Oswaldo Duarte
Miranda, aprovada em 20 de feve-
reiro de 2014.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP5W34M/3G43QP5>>

INPE
São José dos Campos
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Ferreira, Carolina Gribel de Vasconcelos.

F413c Confrontando modelos de energia escura com a Taxa de Formação Estelar Cósmica, LGRB e Fundos Estocásticos de Ondas Gravitacionais / Carolina Gribel de Vasconcelos Ferreira. – São José dos Campos : INPE, 2014.

xviii + 138 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21b/2014/04.04.19.26-TDI)

Dissertação (Mestrado em Astrofísica) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2014.

Orientador : Dr. Oswaldo Duarte Miranda.

1. cosmologia. 2. energia escura. 3. ondas gravitacionais. 4. formação estelar. 5. surtos de raios gama cósmicos. I.Título.

CDU 523.8:530.12



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aprovado (a) pela Banca Examinadora
em cumprimento ao requisito exigido para
obtenção do Título de **Mestre** em
Astrofísica

Dr. Reinaldo Ramos de Carvalho



Presidente / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Oswaldo Duarte Miranda



Orientador(a) / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Odylio Denys de Aguiar



Membro da Banca / INPE / SJC Campos - SP

Dr. José Ademir Sales de Lima



Convidado(a) / IAG/USP / São Paulo - SP

Este trabalho foi aprovado por:

maioria simples

unanimidade

Aluno (a): **Carolina Gribel de Vasconcelos Ferreira**

São José dos Campos, 20 de Fevereiro de 2014

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Dr. Oswaldo Duarte Miranda pela sua orientação durante o mestrado, aos professores do INPE, e a todos que me apoiaram ao longo desses dois anos. Agradeço também a CAPES pelo financiamento.

RESUMO

Neste presente trabalho temos o objetivo de analisar a influência da energia escura na Taxa Cósmica de Formação Estelar desde *redshift* $z \sim 20$ até o presente, nos Fundos Estocásticos de Ondas Gravitacionais, produzidos por três diferentes tipos de fontes e através da observação de *Long Gamma-Ray Burst* (LGRB). O estudo foi feito por meio de uma adaptação do código de formação de estrutura usando o Formalismo Press-Schechter, em que para um determinado tipo de energia escura nós consideramos uma equação de estado diferente (MIRANDA, 2012). Analisamos os dois candidatos mais favoráveis a energia escura atualmente, a constante cosmológica que possui uma equação de estado constante e os modelos de quinta-essência com equações de estado que são dependentes do tempo (ou *redshift*). Atualmente existem diversas parametrizações na literatura, e nenhuma delas é capaz de revelar a natureza da energia escura. Estamos interessados em utilizar tanto a Taxa Cósmica como o Fundo de Ondas Gravitacionais, como uma forma de investigar a dependência temporal da equação de estado da energia escura. Além disso, poderíamos pensar no problema inverso em que usamos os dados observacionais em ondas gravitacionais para reconstruir a história de formação estelar no Universo, bem como para contribuir com a caracterização da energia escura, por exemplo, identificar se há evidências para a evolução do parâmetro de equação de estado da energia escura $\omega(z)$.

CONFRONTING MODELS OF DARK ENERGY WITH COSMIC STAR FORMATION RATE, LGRB, AND STOCHASTIC BACKGROUNDS OF GRAVITATIONAL WAVES

ABSTRACT

In this work we aim to analyze the influence of dark energy on the Cosmic Star Formation Rate from *redshift* $z \sim 20$ up to the present, the Stochastic Background of Gravitational Waves, produced by three different sources and using the available data associated to Long Gamma-Ray Burst (LGRB). The study was conducted by an adaptation of the structure formation code using the Press-Schechter Formalism, in which for a particular type of dark energy we consider a different equation of state (MIRANDA, 2012). We analyze the two most favorable candidates to dark energy today, the cosmological constant that has a constant equation of state and models of quintessence with equations of state which are time-dependent. Currently there are several parameterizations in the literature, and none of them is able to reveal the nature of dark energy. We are interested in using both the Star Formation Rate and the Stochastic Background of Gravitational Waves, as a way to narrow down the possible parameterizations existing. Furthermore, one might think on the inverse problem, using the observational data on gravitational waves to reconstruct the history of star formation in the Universe, as well as to contribute to the characterization of dark energy, for example, identifying whether there is evidence for the evolution of the dark energy equation of state parameter $\omega(z)$.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Expansão do universo.	5
3.1 Anel de Partículas Teste.	29
3.2 Interferômetro de Michelson para detector de ondas gravitacionais.	33
3.3 A orientação relativa do braço de um detector e a direção de propagação de uma onda gravitacional.	34
6.1 TCFE para a Parametrização Generalizada	82
6.2 TCFE para a Parametrização Generalizada	83
6.3 TCFE para os modelos Oscilantes	84
6.4 TCFE para os modelos Casimir	85
6.5 TCFE para a Modelo aproximado	86
6.6 TCFE para a Modelo aproximado	87
7.1 LGRB para a Parametrização Generalizada	94
7.2 LGRB para a Parametrização Generalizada	95
7.3 LGRB para os modelos Oscilantes	96
7.4 LGRB para os modelos Casimir	97
7.5 LGRB para a Modelo aproximado	98
7.6 LGRB para a Modelo aproximado	99
8.1 FEOG em sistemas NS-NS para a parametrização Generalizada	107
8.2 FEOG em sistemas NS-NS para a parametrização Generalizada	108
8.3 FEOG em sistemas NS-NS para a parametrização Oscilante	109
8.4 FEOG em sistemas NS-NS para a parametrização Casimir	110
8.5 FEOG em sistemas NS-NS para o Modelo Independente	111
8.6 FEOG em sistemas NS-NS para o Modelo Independente	112
8.7 FEOG em sistemas NS-BH para a parametrização Generalizada	114
8.8 FEOG em sistemas NS-BH para a parametrização Generalizada	115
8.9 FEOG em sistemas NS-BH para a parametrização Oscilante	116
8.10 FEOG em sistemas NS-BH para a parametrização Casimir	117
8.11 FEOG em sistemas NS-BH para o Modelo Independente	118
8.12 FEOG em sistemas NS-BH para o Modelo Independente	119
8.13 FEOG em sistemas BH-BH para a parametrização Generalizado	121
8.14 FEOG em sistemas BH-BH para a parametrização Generalizado	122
8.15 FEOG em sistemas BH-BH para a parametrização Oscilante	123
8.16 FEOG em sistemas BH-BH para a parametrização Casimir	124

8.17	FEOG em sistemas NS-NS para o Modelo Independente	125
8.18	FEOG em sistemas NS-NS para o Modelo Independente	126
8.19	FEOG em sistemas BH-BH para a parametrização Generalizado	127
8.20	FEOG em sistemas BH-BH para a parametrização Generalizado	128
8.21	FEOG em sistemas BH-BH para a parametrização Oscilante	129
8.22	FEOG em sistemas BH-BH para a parametrização Casimir	130
8.23	FEOG em sistemas NS-NS para o Modelo Independente	131
8.24	FEOG em sistemas NS-NS para o Modelo Independente	132

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
5.1 Modelos para a Parametrização Generalizada (BARBOZA et al., 2009).	72
5.2 Modelos para a Parametrização Oscilante (PACE et al., 2012).	73
5.3 Modelos que incluem o efeito Casimir (PACE et al., 2012).	74
5.4 Modelo Independente de Energia escura (PACE et al., 2012).	74
6.1 Taxa Cósmica de Formação Estelar para os Modelos Energia Escura. A Parametrização Generalizada é dada pelos modelos (2)-(6) vide (BAR- BOZA et al., 2009), para a parametrização oscilante, modelos de (7)-(11) (PACE et al., 2012), para o Efeito Casimir e o modelo aproximado (PACE et al., 2010) temos (12)-(20).	80
7.1 Os valores dos parâmetros da estatística K-S.	92
8.1 Espectro de Ondas Gravitacionais para sistema NS-NS para os Modelos Energia Escura.	106
8.2 Espectro de Ondas Gravitacionais para sistemas NS-BH para os Modelos Energia Escura.	113
8.3 Espectro de Ondas Gravitacionais para sistemas BH-BH para os Modelos Energia Escura.	120
8.4 Espectro de Ondas Gravitacionais Total, NS-NS+NS-BH+BH-BH, para os Modelos Energia Escura.	124

Nomenclatura

Adotamos, nesta dissertação, a seguinte nomenclatura:

- Índices gregos ($\alpha, \beta, \gamma \dots$) variam de 0 a 3.
- Índices latinos (i,j,k...) correspondem as coordenadas espaciais 1 até 3.
- A assinatura da métrica de Minkowski é, $\eta_{ij} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.
- A assinatura da métrica é dada por $g_{ij} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.
- Ponto ($\dot{}$) corresponde a derivadas no tempo.
- (\prime) e ($\prime\prime$) correspondem, respectivamente, as primeira e segunda derivadas em relação ao fator de escala do universo.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
2 COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA	3
2.1 Postulado de Weyl	3
2.2 Princípio Cosmológico	4
2.3 Relatividade Geral	5
2.4 A Métrica de Friedmann-Robertson-Walker	6
2.5 <i>Redshift</i> e a Lei de Hubble	7
2.6 Equação de Friedmann	10
2.7 As densidades no tempo presente	12
2.8 Relação entre Tempo e Redshift	14
2.9 Distâncias e Volumes Cosmológicos	15
2.10 Horizonte	17
3 ONDAS GRAVITACIONAIS	19
3.1 Equações de Einstein Linearizadas	19
3.2 Polarização	23
3.3 Efeito das Ondas Gravitacionais em partículas livres	25
3.3.1 Distância própria entre as partículas de teste	25
3.3.2 Desvio geodésico de partículas de teste	27
3.3.3 Anel de partículas teste: polarização das ondas gravitacionais	28
3.4 Emissão de Ondas Gravitacionais	29
3.5 Detecção de Ondas Gravitacionais	33
4 FORMAÇÃO DE ESTRUTURA	37
4.1 Perturbações Cosmológicas	37
4.1.1 Teoria Newtoniana de pequenas perturbações	37
4.1.2 Perturbações Relativísticas	42
4.2 Soluções	47
4.2.1 Perturbações adiabáticas na matéria	47
4.2.2 Fluido com várias componentes	49
4.2.3 Perturbações de Densidade da <i>Cold Dark Matter</i> (CDM)	50
4.3 Função de Crescimento	51

4.4	Modelo de Colapso Esférico	52
4.5	Formalismo Press-Schechter	55
4.6	Equação de Boltzmann	57
5	MODELOS DE ENERGIA ESCURA	63
5.1	Evidencias Observacionais	63
5.1.1	Observações de Supernovas	64
5.1.2	Radiação Cósmica de Fundo	65
5.2	Modelo Λ CDM	67
5.2.1	O Problema de Ajuste Fino	67
5.2.2	O Problema da Coincidência	68
5.3	Modelo $\phi(t)$ CDM	68
5.4	Modelos $\omega(t)$ CDM	70
5.4.1	Parametrização Generalizada	71
5.4.2	Parametrização Oscilante	72
5.4.3	Efeito Casimir	73
5.4.4	Modelo independente de Energia Escura	74
6	OBTENDO A TAXA CÓSMICA DE FORMAÇÃO ESTELAR A PARTIR DO CENÁRIO HIERÁRQUICO	77
6.1	Resultados	79
7	LONG GAMMA-RAY BURST	89
7.1	Taxa de LGRB	89
7.2	Estatística K-S	90
7.3	Resultados	91
8	FUNDO ESTOCÁSTICO DE ONDAS GRAVITACIONAIS DE ORIGEM COSMOLÓGICA	101
8.1	Taxas de Coalescência	101
8.2	Fundo Estocástico de Ondas Gravitacionais	102
8.3	Resultados	104
9	CONCLUSÃO	133
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	135

1 INTRODUÇÃO

Atualmente diversos esforços tem sido despendidos no que diz respeito a compreender a natureza da energia escura. Desde evidências de que o universo está acelerando, por medidas de distância de luminosidade de Supernovas Tipo Ia (RIESS et al., 1998; PERLMUTTER et al., 1999), várias propostas foram feitas na tentativa de explicar tal aceleração. A Cosmologia Moderna é descrita pela Relatividade Geral, pelo Postulado de Weyl e pelo Princípio Cosmológico, que nos diz que o universo é homogêneo e isotrópico. No entanto, esse modelo não explica a atual aceleração. Uma das possíveis explicações é que a Teoria da Relatividade Geral deixa de ser válida em Larga Escala e a gravidade é modificada, como por exemplo, através dos modelos $f(R)$, modelos de branas, e modelos $f(T)$. Outra possibilidade é que a Relatividade Geral está correta mas o universo em baixo *redshift* é dominado por um fluido exótico com uma pressão negativa, a Energia Escura.

O candidato a energia escura mais favorecido é a chamada constante cosmológica, que possui uma equação de estado constante, $\omega = -1$. No entanto, esse modelo apresenta problemas teóricos. Apesar de os dados observacionais favorecerem a constante cosmológica, outros modelos de energia escura foram propostos com o intuito de resolver os problemas que aparecem ao considerar o modelo Λ CDM. Podemos citar quinta-essência, k-essência e campos fantasmas, que tem equações de estado que variam no tempo, os modelos $\omega(t)$ CDM. Esses modelos são estudados com mais facilidade ao parametrizar a equação de estado $\omega(z)$, desde então uma grande variedade de parametrizações foi proposta para descrever a energia escura, e nenhuma delas é capaz de fornecer uma descrição fundamental. Além disso, com os dados observacionais disponíveis, tais como medidas de distância de SN Ia, radiação cósmica de fundo (CMB), oscilações acústicas de Bárions (BAO), nenhuma dessas parametrizações é capaz de revelar a natureza da energia escura. No entanto é viável usar esses dados cosmológicos para restringir o número de possíveis equações de estado.

Neste presente trabalho temos o objetivo de analisar a influência da energia escura na Taxa Cósmica de Formação Estelar (TCFE) desde *redshift* $z \sim 20$ até o presente, e nos Fundos Estocásticos de Ondas Gravitacionais (FEOG), produzidos por três diferentes fontes astrofísicas, que são, coalescência de binárias compactas, de duas estrelas de nêutrons (NS-NS), estrela de nêutron-buraco negro (NS-BH), e dois buracos negros (BH-BH). Para isso escolhemos os dois candidatos a energia escura mais favorecidos, o modelo Λ CDM, e modelos de quinta-essência, $\omega(t)$ CDM, em que adotamos quatro equações de estado, resultando em 19 modelos. Para complementar

esse estudo, analisamos esses modelos utilizando dados observacionais de GRBs e a estatística Kolmogorov-Smirnov (K-S). Além disso, o espectro de ondas, quando este for observável, pode ser usado para investigar a dependência temporal da energia escura e restringir o número de parametrizações.

Neste trabalho apresentamos uma nova forma de investigar a dependência temporal da energia escura, fazendo uso da TCFE, e pelos FEOG.

Esta monografia está organizada da seguinte forma: no capítulo 2, apresentamos os fundamentos teóricos da Cosmologia Moderna. No capítulo 3, apresentamos os conceitos de Ondas Gravitacionais e Detectores Interferométricos. No capítulo 4, estudamos sobre a Formação de Estruturas, onde derivamos conceitos importantes como Função de Crescimento, e também o Formalismo Press-Schechter, fundamentais para compreensão dos capítulos subsequentes. No capítulo 5, discorremos sobre os modelos de Energia Escura, começamos com um estudo teórico, e finalizamos apresentando algumas parametrizações discutidas atualmente na literatura. No capítulo 6 obtemos a Taxa Cósmica de Formação Estelar, e analisamos a influência da energia escura para cada parametrização estudada. No capítulo 7, discutimos o uso de Long Gamma Ray Burst (LGRBs) para analisar a consistência dos modelos de TCFE usando a estatística K-S. No capítulo 8, fazemos um estudo teórico do Fundo Estocástico de Ondas Gravitacionais (FEOG), e finalizamos com os resultados obtidos. Terminamos com o capítulo 9, em que fazemos as considerações finais do trabalho.

2 COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA

Cosmologia é o ramo da ciência que estuda o universo como um todo, sua estrutura, a sua origem e sua evolução. A cosmologia moderna é fundada sobre a teoria de Einstein da relatividade geral (RG), na qual as propriedades geométricas do espaço-tempo são determinadas através da distribuição de matéria/energia implícitas em um dos princípios fundamentais na cosmologia, chamado de *princípio cosmológico*, que nos diz que, as distribuições de matéria/energia são homogêneas e isotrópicas.

Neste capítulo revisamos a Cosmologia Relativística, a qual é baseada em dois princípios fundamentais, apresentados nas seções 2.1, 2.2, que são o Postulado de Weyl e o Princípio Cosmológico, e na Relatividade Geral, seção 2.3. Partindo desses princípios obtemos uma métrica que descreve um espaço-tempo homogêneo e isotrópico, seção 2.4. Revisamos conceitos como *redshift* e Lei de Hubble na seção 2.5, as equações de Friedmann são apresentadas em 2.6, e finalizamos com alguns parâmetros fundamentais em Cosmologia, como as densidades 2.7, relação entre o tempo e o *redshift* 2.8, distâncias e volumes cosmológicos 2.9 e o conceito de Horizonte 2.10.

2.1 Postulado de Weyl

O Postulado de Weyl nos diz que:

As linhas de mundo de um fluido de partículas do substrato são hiper-superfícies ortogonais formando uma congruência normal a geodésica tipo-tempo divergente de um ponto no passado, sendo esse último finito ou infinito.(D'INVERNO, 1992; NARLIKAR, 2002)

Para melhor compreensão do Postulado de Weyl, iremos mostra-lo em termos das coordenadas e da métrica. Considere uma hiper-superfície tipo-espaço definida pela coordenada $x^0 = \text{constante}$, que é ortogonal a uma linha de mundo dada por, $x^i = \text{constante}$, que são as coordenadas espaciais que descrevem um fluido de partículas, aqui estaremos considerando que sejam galáxias. A Condição de Ortogonalidade nos diz que $g_{0i} = 0$.

Também temos que x^i é uma geodésica, dada por

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (2.1)$$

que é satisfeita para $x^i = \text{constante}$. Sendo assim, $\Gamma^i_{00} = 0$. Então,

$$\Gamma_{00}^i = -g^{ii}(2\partial_0 g_{0i} - \partial_i g_{00}) = g^{ii}\partial_i g_{00} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g^{00}}{\partial x^i} = 0 \quad (2.2)$$

em que g_{00} é a componente da métrica tempo-tempo, e g_{ij} corresponde a componente espacial, onde $i, j = 1, 2, 3$. Com isso concluímos que g_{00} depende somente de x^0 , mas podemos reescrever x^0 como uma função e fazer com que g_{00} seja uma constante. Então $g_{00} = 1$.

Considerando a conclusão acima, podemos reescrever o elemento de linha como,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + h_{ij} dx^i dx^j \quad (2.3)$$

A coordenada x^0 é chamada de *Tempo Cósmico*. As hiper-superfícies do Postulado de Weyl são superfícies de simultaneidade com respeito ao tempo cósmico, e t é o tempo próprio de cada galáxia.

2.2 Princípio Cosmológico

O Princípio Cosmológico nos diz que: “Em cada época, o universo apresenta o mesmo aspecto em todos os pontos, exceto por irregularidades locais”. (D’INVERNO, 1992; DODELSON, 2003).

Supondo uma hiper-superfície do tipo-espaço sendo que o tempo cósmico é constante, afirmamos que, essa superfície não tem pontos e direções privilegiadas, ou seja, é *Homogênea e Isotrópica*, respectivamente.

Para compreendermos melhor o princípio cosmológico, considerando primeiramente em duas dimensões, que as coordenadas x^i correspondem as linhas de mundo de galáxias, que são separadas umas das outras por uma distancia a , que chamamos de *fator de escala*. Isso é visto como uma grade, como mostra a figura 2.1. No entanto, sabemos que o universo esta em expansão, de forma que hoje as distâncias entre as galáxias são maiores do que no início do universo. Como mostra a figura 2.1, a medida que evoluem com o tempo esse fator de escala se expande, e devido ao princípio cosmológico esse parâmetro não deve depender das coordenadas espaciais, apenas do tempo.

Além disso temos que satisfazer as condições de homogeneidade e isotropia então a métrica deve ter simetria esférica. Matematicamente, o termo espacial da métrica

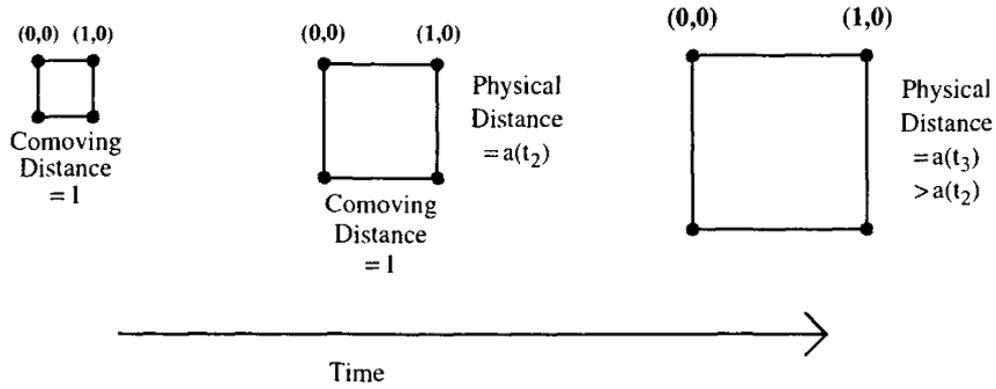


Figura 2.1 - Expansão do universo.
 Fonte: Dodelson (2003)

deve ser dado por um fator de escala dependente somente do tempo, dado por:

$$h_{ij} = a^2(t)g_{ij} \quad (2.4)$$

sendo assim a métrica pode ser reescrita como:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)g_{ij}dx^i dx^j \quad (2.5)$$

onde $g_{ij}dx^i dx^j$ é o elemento de linha que descreve um sistema de coordenadas esférico.

2.3 Relatividade Geral

Na cosmologia fazemos uso da Equação de Campo, obtida por Einstein. Nesse caso consideramos a constante cosmológica, sendo assim (EINSTEIN, 1916):

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

onde Λ é a constante cosmológica, $g_{\mu\nu}$ é a métrica, $T_{\mu\nu}$ é o tensor Momento-Energia e $G_{\mu\nu}$ é o Tensor de Einstein, dado por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (2.7)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o Tensor de Ricci e R é o Escalar de Ricci.

2.4 A Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

Como vimos nas subseções anteriores, temos que o espaço-tempo tem que ter uma curvatura constante, para satisfazer o Princípio Cosmológico. Matematicamente, considerando o caso tridimensional, isso é dado ao considerarmos o espaço maximamente simétrico em que a métrica obedece a seguinte relação (CARROLL, 2003):

$$R_{abcd} = K(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \quad (2.8)$$

onde K é uma constante que chamamos de *Curvatura*. Contraindo o tensor de Riemann, ou seja, multiplicando por g^{ac} , concluímos que o Tensor de Ricci é dado por:

$$g^{ac}R_{abcd} = K(g^{ac}g_{ac}g_{bd} - g^{ac}g_{ad}g_{bc}) = K(3g_{bd} - g_{bd}) = 2Kg_{bd} \quad (2.9)$$

Como dito anteriormente, a variedade do espaço-tempo deve ser esfericamente simétrica em torno de todos os pontos, então o elemento de linha tem a seguinte forma:

$$d\sigma^2 = g_{ij}dx^i dx^j = e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (2.10)$$

Os componentes do tensor de Ricci são:

$$R_{11} = \frac{\lambda'}{r}; \quad R_{22} = \frac{1}{2}re^{-\lambda}\lambda' - e^{-\lambda} + 1; \quad R_{33} = \text{sen}^2\theta R_{22} \quad (2.11)$$

onde $\lambda' = \partial\lambda/\partial r$, ou seja, \prime corresponde a derivada parcial com relação a r . Comparando os valores do tensor de Ricci de cada um, chegamos a duas equações:

$$R_{11} = 2Ke^\lambda = \frac{\lambda'}{r} \quad (2.12)$$

$$R_{22} = 2Kr^2 = \frac{1}{2}re^{-\lambda}\lambda' - e^{-\lambda} + 1 \quad (2.13)$$

A Solução fica como:

$$e^{-\lambda} = 1 - Kr^2 \quad (2.14)$$

Substituindo na equação (2.10), temos que:

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2 d\phi^2) \quad (2.15)$$

e sendo assim o elemento de linha é dada por:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2 d\phi^2) \right] \quad (2.16)$$

onde K é o termo que descreve a curvatura do espaço-tempo. Desse elemento de linha obtemos a métrica $g_{\mu\nu}$ que é conhecida como a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) que descreve um universo homogêneo e isotrópico.

Se $K = 0$, a parte espacial da métrica de FRW é plana, ou seja, é a de um espaço euclidiano escrito em coordenadas esféricas.

2.5 *Redshift* e a Lei de Hubble

A cosmologia moderna surgiu das observações de Edwin Hubble de que os *redshifts* das galáxias são proporcionais à sua distância. A luz de galáxias distantes é mais vermelha (tem comprimento de onda maior), quando chega aqui. Este *redshift* pode ser determinado com grande precisão a partir das linhas espectrais da galáxia. Estas linhas são causadas por transições entre os diferentes estados de energia dos átomos, e, assim, os seus comprimentos de onda originais λ_0 são conhecidos.

Para encontrarmos a relação que define o *redshift* consideramos um observador O que recebe luz de uma galáxia que se afasta dele. As condições para uma geodésica

nula são (D'INVERNO, 1992):

$$ds^2 = d\theta = d\phi = 0 \quad (2.17)$$

Sendo assim a métrica fica:

$$cdt = \pm a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (2.18)$$

em que os sinais de + e - correspondem ao afastamento e aproximação, respectivamente. Considerando a luz emitida de uma galáxia P com uma linha de mundo $r = r_1$, e $t = t_1$, é recebido por O em um tempo t_0 . Sendo assim, a equação acima fica:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{c dt}{a(t)} = - \int_{r_1}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (2.19)$$

Considere agora dois raios de luz sendo emitidos de P, nos tempos t_1 e $t_1 + dt_1$, e sendo recebidos por O em t_0 e $t_0 + dt_0$. Então:

$$\int_{t_1+dt_1}^{t_0+dt_0} \frac{c dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{c dt}{a(t)} \quad (2.20)$$

Podemos reescrever como:

$$\int_{t_1+dt_1}^{t_0} \frac{c dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0+dt_0} \frac{c dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_1+dt_1} \frac{c dt}{a(t)} + \int_{t_1+dt_1}^{t_0} \frac{c dt}{a(t)} \quad (2.21)$$

o que implica em:

$$\int_{t_0}^{t_0+dt_0} \frac{c dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_1+dt_1} \frac{c dt}{a(t)} \quad (2.22)$$

Assumindo que $a(t)$ não varia muito nesse intervalo, concluímos que:

$$\frac{c \Delta t_0}{a(t_0)} = \frac{c \Delta t_1}{a(t_1)} \quad (2.23)$$

Este efeito de dilatação do tempo cosmológico se aplica a qualquer evento na galáxia observada.

Em um universo em expansão, $t_0 > t_1$ segue que o observador O irá experimentar um redshift z dado por:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0} - 1 \quad (2.24)$$

onde λ é o comprimento de onda observado. A relação de proporcionalidade

$$cz = H_0 r \quad (2.25)$$

é a chamada lei de Hubble, e a constante de proporcionalidade H_0 é a *constante de Hubble*. Aqui, r é a distância da galáxia, e o redshift é z . Das observações mais recentes do WMAP, (BENNETT et al., 2013), o valor da constante de Hubble é dada por

$$H_0 = 70.0 \pm 2.2 \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (2.26)$$

Esta incerteza de escala de distância é refletida em muitas quantidades cosmológicas. Costuma-se dar a essas quantidades multiplicadas pelo poder apropriado de h , definida por

$$H_0 = h \times 100 \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (2.27)$$

Então $h = 0.70 \pm 0.02$. A constante de Hubble é chamada de *constante*, uma vez que é constante como uma função da posição. No entanto, é uma função do tempo, $H(t)$, na escala do tempo cosmológico. $H(t)$ é chamado de parâmetro de Hubble, e seu valor atual é chamado de constante de Hubble, H_0 .

Voltando a equação 2.23 e assumindo $a(t_0) = 1$, o *redshift* fica:

$$1 + z = \frac{1}{a(t_1)} \quad (2.28)$$

Assim, o desvio para o vermelho, *redshift*, nos diz diretamente quanto menor o universo era quando a luz deixou a galáxia.

2.6 Equação de Friedmann

Nessa seção revisamos a Cosmologia de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Para isso usamos a métrica de FRW, dada pela (2.16), considerando um universo plano, ou seja, $K=0$, e aplicamos as equações de Einstein. Sendo assim a conexão $\Gamma_{\alpha\beta}^0$, pode ser escrita (DODELSON, 2003):

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\alpha 0}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta 0}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} \quad (2.29)$$

Sendo que $g_{00} = -1$ e $g_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}$. Sendo assim essa derivação não será nula, se α e β forem componentes espaciais, ou seja, $(i, j=1,2,3)$. Temos que:

$$\Gamma_{00}^0 = 0 \quad (2.30)$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{i0}^0 = 0 \quad (2.31)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{\delta_{ij}}{c} \dot{a}a \quad (2.32)$$

Para o caso de $\Gamma_{\alpha\beta}^i$, nós temos que:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^i = \frac{g^{ii}}{2} \left[\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} \right] = \frac{\delta^{ii}}{2a^2} \left[\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^\alpha} \right] \quad (2.33)$$

Sendo assim, temos dois valores que são iguais pois $\Gamma_{\alpha\beta}^i$ são simétricos em α e β , logo:

$$\Gamma_{0j}^i = \Gamma_{j0}^i = \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i \quad (2.34)$$

onde \dot{a} , é a derivada temporal do fator de escala. Calculamos agora as componentes

temporais e espaciais do tensor de Ricci, dado por:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \quad (2.35)$$

Para $\mu = \nu = 0$, que corresponde a componente tempo-tempo, temos que:

$$R_{00} = -\frac{3}{c^2} \ddot{a} \quad (2.36)$$

Para $\mu = i$ e $\nu = j$, são as componentes espaço-espaço:

$$R_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{c^2} (2\dot{a}^2 + \ddot{a}a) \quad (2.37)$$

O escalar de Ricci fica:

$$R = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij} = -\frac{6}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] \quad (2.38)$$

O Tensor Momento-Energia é dado por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)u_{\mu}u_{\nu} - pg_{\mu\nu} \quad (2.39)$$

onde $u_{\mu} = (c, 0, 0, 0)$. Então separando as componentes temporal e espacial para o tensor Momento-Energia, temos:

$$T_{00} = \rho c^2 \quad (2.40)$$

$$T_{ij} = -g_{ij}P \quad (2.41)$$

A Componente tempo-tempo da equação de Einstein fica:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}c^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_{\Lambda}) \quad (2.42)$$

onde $\rho_\Lambda = c^2\Lambda/8\pi G$. A Componente espaço-espaço da equação de Einstein fica:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{\Lambda}{2} c^2 = -\frac{4\pi G}{c^2} P \quad (2.43)$$

e a combinação de ambas as equações:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3\frac{P}{c^2} \right) + \frac{\Lambda}{3} c^2 \quad (2.44)$$

Estas são as equações Friedmann. *Equação Friedmann* no singular, refere-se a Equação 2.42. Essa equação nos diz que, a medida que o universo se expande (a cresce), as diferentes componentes da densidade tornam-se importantes em momentos diferentes. Logo no início, quando a era muito pequeno, o universo era dominado por radiação. Logo em seguida uma era dominada por matéria, e atualmente a energia do vácuo se torna dominante.

2.7 As densidades no tempo presente

A Equação da Continuidade para a densidade pode ser encontrada ao multiplicar por a^2 a (2.42), depois diferenciando e usando a (2.44), obtemos (MO HOUJUN; VAN DER BOSH; WHITE, 2010):

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P/c^2) = 0 \quad (2.45)$$

onde $H = \dot{a}/a$. Sabendo que $P = \omega\rho c^2$ onde ω é o parâmetro da equação de estado, substituindo na equação acima, temos:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega) \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.46)$$

Integrando essa equação, obtemos:

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\omega)} \quad (2.47)$$

onde ρ_0 é o valor da densidade no presente, lembrando que, $a_0 = 1$. A Equação acima mostra a dependência da densidade com o fator de escala e essa dependência

muda com o tipo de fluido; para a radiação temos que $\omega = 1/3$, para a matéria não relativística $\omega \simeq 0$, e para a constante cosmológica temos $\omega = -1$. Sendo assim, as densidades ficam:

$$\rho_r = \rho_r^{(0)} a^{-4} \quad (2.48)$$

$$\rho_m = \rho_m^{(0)} a^{-3} \quad (2.49)$$

$$\rho_\Lambda = \rho_\Lambda^{(0)} \quad (2.50)$$

Essas equações são obtidas pela conservação do tensor momento-energia separadamente para cada componente.

No entanto é possível ter um parâmetro de equação de estado que dependa do tempo, como veremos é um tipo de energia escura que chamamos de *quinta-essência*, nesse caso a equação para a densidade é dada por,

$$\rho_{DE} = \rho_{DE}^{(0)} \exp\left(-3 \int_1^a \frac{1 + \omega(a')}{a'} da'\right) \quad (2.51)$$

Levando em consideração a densidade crítica do universo, dada por:

$$\rho_c^{(0)} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (2.52)$$

lembrando que H_0 é o parâmetro de Hubble no tempo presente. Substituindo a (2.47) na (2.42), obtemos:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 a^{-3(1+\omega)} \quad (2.53)$$

Usando a equação (2.52), reescrevemos a equação acima como:

$$E^2(a) = \left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \sum_i \Omega_i^{(0)} a^{-3(1+\omega)}, \quad (2.54)$$

onde $\Omega_i^{(0)} = \rho_i^{(0)}/\rho_c^{(0)}$. Essa relação é chamada de termo de expansão, e depende do

tipo de fluido em consideração. Veremos mais adiante que diferentes parametrizações da equação de estado nos leva a diferentes termos de expansão que influenciam diversos parâmetros cosmológicos, tais como o tempo do universo, seção 2.8, e nas distâncias e volumes cosmológicos, seção 2.9.

2.8 Relação entre Tempo e Redshift

A relação entre tempo e um dado *redshift* z pode ser obtido usando as (2.28) e o termo de expansão (2.54) (AMENDOLA; TSUJIKAWA, 2010):

$$\frac{da}{dt} = H_0 a \sqrt{\sum_i \Omega_i^{(0)} a^{-3(1+\omega)}} \quad (2.55)$$

lembrando que $a = 1/(1+z)$, temos que $da/dz = -1/(1+z)^2$, substituindo na equação acima, obtemos:

$$t(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)E(z)} \quad (2.56)$$

Para um dado conjunto de parâmetros cosmológicos, $t(z)$ pode ser calculado a partir da (2.56) por integração numérica. Em alguns casos especiais, a integração pode mesmo ser realizada analiticamente.

A integral (2.56) é dominada pelos termos em *redshifts* baixos. Uma vez que $\Omega_r^{(0)}$ é da ordem de $10^{-5} - 10^{-4}$, a radiação torna-se importante somente para *redshifts* elevados ($z \gtrsim 1000$). Por isso, é uma boa aproximação negligenciar a contribuição de radiação quando avaliamos (2.56). Vamos considerar o caso em que, $\Omega_m^{(0)} + \Omega_\Lambda^{(0)} = 1$. Em seguida, a idade do Universo é dada por

$$t_0 = H_0^{-1} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z) \left[\Omega_m^{(0)} (1+z)^3 + \Omega_\Lambda^{(0)} \right]^{1/2}} \quad (2.57)$$

Integrando essa equação obtemos:

$$t_0 = \frac{H_0^{-1}}{3\sqrt{1-\Omega_m^{(0)}}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-\Omega_m^{(0)}}}{1 - \sqrt{1-\Omega_m^{(0)}}} \right) \quad (2.58)$$

lembrando que podemos reescrever utilizando a relação $\Omega_{\Lambda}^{(0)} = 1 - \Omega_m^{(0)}$. No limite $\Omega_{\Lambda}^{(0)} \rightarrow 0$, nos temos

$$t_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1} \quad (2.59)$$

Corresponde a idade do universo em que a constante cosmológica é nula. No entanto, a idade para o universo fornecida por essa equação não é coerente com as idades de estrelas mais velhas, o que sugere que a idade seja maior que o valor obtido. Ao considerarmos a constante cosmológica a idade para universo aumenta, levando a considerar a existência da *Energia Escura*, como iremos discutir no capítulo 5.

2.9 Distâncias e Volumes Cosmológicos

Começamos calculando a distância co-móvel que é obtida ao considerar, $ds = d\theta = d\phi = 0$, sendo assim,

$$dr = \frac{c}{a}dt \quad (2.60)$$

lembrando que, $dz = -da/a^2$ e $E(z) = H(z)/H_0$, dado pela equação 2.54, obtemos a seguinte relação

$$\frac{dt}{a} = -\frac{dz}{H_0 E(z)} \quad (2.61)$$

Substituindo na equação acima, e integrando obtemos:

$$r_c = \int_0^z \frac{c}{H_0} \frac{dz'}{E(z')} \quad (2.62)$$

onde $E(z)$ é o termo de expansão, dado pela equação 2.54. Para obtermos a equação para a distância de Luminosidade precisamos primeiramente obter o fluxo. Considerando uma fonte esférica de raio R , o fluxo é dado por

$$F(R) = \frac{L}{4\pi R^2} \quad (2.63)$$

Levando em consideração o elemento de linha FRW, equação 2.16, em que as coor-

denadas t e r são constantes, reescrevemos como:

$$ds^2 = a^2(t)r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (2.64)$$

que é equivalente a um elemento de linha de uma superfície esférica de raio $a(t)r$. Com isso, o fluxo medido em nossa direção em um tempo t_0 é

$$F = \frac{L_0}{4\pi a_0^2 r^2} \quad (2.65)$$

onde $a_0 = a(t_0)$ e r é a distância co-móvel. Lembrando que a Luminosidade é dada por

$$L_0 = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad (2.66)$$

e que a Luminosidade no referencial do observador é dada por,

$$L_0 = \frac{\Delta E_0}{\Delta t_0} \quad (2.67)$$

Como $\nu\lambda = \nu_0\lambda_0$, onde λ e ν são, respectivamente, o comprimento de onda e a frequência emitidos pela fonte em um tempo t e, λ_0 e ν_0 são o comprimento de onda e a frequência observados em t_0 , temos

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta E_0} = 1 + z \quad (2.68)$$

Usando a equação para a Luminosidade obtemos:

$$L_0 = L \frac{\Delta t}{\Delta t_0} \frac{\Delta E_0}{\Delta E} = \frac{L}{(1+z)^2} \quad (2.69)$$

e substituindo na equação para o Fluxo, concluímos que:

$$F = \frac{L}{4\pi a_0^2 r^2 (1+z)^2} = \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (2.70)$$

onde

$$d_L \equiv a_0 r(1+z) = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (2.71)$$

que chamamos de distância de luminosidade. Concluimos com a variação do volume co-móvel com o *redshift*, ou seja

$$\frac{dV}{dz} = 4\pi r_c^2 \frac{dr_c}{dz} = \frac{4\pi r_c^2 c}{H_0} \frac{1}{E(z)} \quad (2.72)$$

Outra medida de distância é a distância diâmetro angular d_A , que é definida de modo que o ângulo θ é dado pela relação

$$\theta = s/d_A \quad (2.73)$$

onde $d_A \equiv a(t)r$. Comparando (2.73) com (2.71) temos que

$$\frac{d_A}{d_L} = \frac{1}{(1+z)^2} \quad (2.74)$$

Como já vimos o termo de expansão vai afetar essas quantidades dependendo do tipo de energia escura escolhida. Além disso a distância de luminosidade é um observável que comprova a existência da energia escura, utilizando supernovas do tipo Ia, veremos com mais detalhes na seção 5.1.1.

2.10 Horizonte

Por causa da velocidade finita da luz e da idade finita do universo, apenas uma parte do universo é observável. Nosso horizonte é apenas a distância que a luz teve tempo para chegar até nós durante toda a idade do universo. Se não fosse pela expansão do universo, a distância para este horizonte r_{hor} seria igual a idade do universo, 12-15 de bilhões de anos-luz (3500-4500 Mpc).

Se considerarmos a distância co-móvel dada pela equação 2.62, integrando para toda a idade do universo, essa distância (ou a esfera com raio r_{hor} , centrada no observador) é chamada de horizonte, uma vez que representa a distância máxima que podemos ver, ou receber qualquer informação.

Na verdade, existem vários conceitos diferentes em cosmologia chamado de horizonte. Para ser exato, o que foi definido acima é o *horizonte de partículas*. Outro conceito é o *horizonte de eventos*, que está relacionado com a observação dos eventos e estabelece uma divisão entre os eventos que são observáveis em algum instante e os que nunca serão observados, por nunca se encontrarem no interior de algum cone de luz do observador. A *comprimento de Hubble* l_H é também muitas vezes referido como o horizonte (especialmente quando se fala em *sub-horizonte* e escalas de distância *super-horizonte*).

Para facilitar as discussões nos próximos capítulos, apresentamos o parâmetro de Hubble co-móvel

$$\mathcal{H} \equiv aH \tag{2.75}$$

O comprimento de Hubble e o comprimento co-móvel de Hubble ficam,

$$l_H \equiv H^{-1}, \quad l_H^c = \mathcal{H}^{-1} \tag{2.76}$$

O comprimento de Hubble dá a distância sobre a qual temos interação causal em escalas de tempo cosmológicas. O comprimento de Hubble co-móvel dá essa distância em unidades co-móvel.

3 ONDAS GRAVITACIONAIS

A Relatividade Geral prevê a existência de ondas gravitacionais, que são perturbações no espaço-tempo que se propagam na velocidade da luz. Uma prova indireta da existência de ondas gravitacionais veio com a perda do momento angular pelo pulsar PSR 1913+16, também conhecido como Pulsar de Hulse-Taylor ([WEISBERG; TAYLOR, 2003](#)).

Neste capítulo iremos fazer um estudo teórico das ondas gravitacionais, na seção 3.1, obtemos a equação de Einstein Linearizada, que descreve a equação da onda gravitacional. Na seção 3.2, analisamos a polarização da onda, na seção seguinte 3.3 estudamos o efeito das ondas em partículas livres, em 3.4, estudamos a emissão das ondas gravitacionais, e finalizamos, na seção 3.5, com um estudo dos detectores interferométricos.

3.1 Equações de Einstein Linearizadas

Para obtermos a equação de onda gravitacional nós temos que linearizar a Equação de Campo obtida por [Einstein \(1916\)](#):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

Considerando a aproximação de corpo fraco em que a métrica é dada por:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, e $h_{\mu\nu}$ é a perturbação na métrica em que $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Um sistema de coordenadas que satisfaz a equação 3.2 é referido como um sistema de coordenadas *quase Lorentz*, ou seja, podemos encontrar um sistema de coordenadas que satisfaz essa equação. Certamente não se segue que para qualquer escolha do sistema de coordenadas, podemos escrever as componentes da métrica na forma acima.

A métrica Contravariante é dada por:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (3.3)$$

Com isso podemos calcular a conexão, que fica:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\beta\rho}(h_{\rho\mu,\nu} + h_{\rho\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\rho}) \quad (3.4)$$

pois $\partial_{\nu}\eta_{\rho\mu} = 0$, em que consideramos apenas termos até a primeira ordem. O Tensor de Riemann $R_{\nu\rho\sigma}^{\mu}$ é dado considerando até primeira ordem,

$$R_{\mu\alpha\nu}^{\beta} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\mu,\nu}^{\beta} + h_{\nu,\mu\alpha}^{\beta} - h_{\mu\nu,\alpha}^{\beta} - h_{\alpha,\mu\nu}^{\beta}) \quad (3.5)$$

Contraindo os índices α e β na equação acima, concluímos que:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\mu,\nu\alpha}^{\alpha} + h_{\nu,\mu\alpha}^{\alpha} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu}) \quad (3.6)$$

onde $\square = \eta_{\alpha\beta}\partial^{\alpha}\partial^{\beta} = \partial_{\alpha}\partial^{\alpha}$. O escalar de Ricci,

$$R = \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = h^{\alpha\mu}{}_{,\mu\alpha} - \square h \quad (3.7)$$

Substituindo (3.6) e (3.7) no lado esquerdo de (3.1), ou seja, o tensor de Einstein fica,

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[h_{\mu,\nu\alpha}^{\alpha} + h_{\nu,\mu\alpha}^{\alpha} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} - \square h)\right] \quad (3.8)$$

Então (3.1) fica,

$$h_{\mu,\nu\alpha}^{\alpha} + h_{\nu,\mu\alpha}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\square h = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (3.9)$$

O sistema de coordenadas, no qual se pode expressar as componentes da métrica de um espaço-tempo quase plana 3.2 não é, certamente, única. Se nós identificamos um sistema de coordenadas, então podemos encontrar uma família infinita de outros através da realização de determinadas transformações de coordenadas que preservam as propriedades da equação 3.2. Chamamos de *Transformações de Calibre*.

Considerando a seguinte transformação de coordenadas:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x) \quad (3.10)$$

onde $x'^{\mu}_{,\lambda} = \delta^{\mu}_{\lambda} + \xi^{\mu}_{,\lambda}(x)$, com isso a métrica se transforma como

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}} g^{\lambda\rho} \quad (3.11)$$

$$g'^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + g^{\mu\rho} \xi^{\nu}_{,\rho} + g^{\lambda\nu} \xi^{\mu}_{,\lambda} \quad (3.12)$$

Substituindo a equação (3.3) na relação acima, lembrando que $\xi^{\nu}_{,\rho}$ é da mesma ordem que $h_{\mu\nu}$, e $\eta'^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ concluímos que:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\nu,\mu} - \xi_{\mu,\nu} \quad (3.13)$$

A derivada fica:

$$h'_{\mu\nu,\alpha} = h_{\mu\nu,\alpha} - \xi_{\nu,\mu\alpha} - \xi_{\mu,\nu\alpha} \quad (3.14)$$

Note que, se $|\xi_{\mu,\nu}|$ são pequenos, portanto, $h'_{\mu\nu}$ também é. Assim, o nosso novo sistema de coordenadas, denotado por $(')$, é ainda quase Lorentz.

O resultado acima nos diz que - uma vez que nós identificamos um sistema de coordenadas que é quase Lorentz - podemos acrescentar um pequeno vetor arbitrário ξ^{μ} às coordenadas x^{μ} sem alterar a validade de que o espaço-tempo é quase plano. Podemos, portanto, escolher os componentes ξ^{μ} para tomar as equações de Einstein o mais simples possível. Chamamos esta etapa de *escolha de gauge* para o problema e transformações de coordenadas do tipo dado pela equação 3.13 são conhecidas como transformações de Calibre. Vamos considerar abaixo escolhas específicas de calibre que são particularmente úteis.

Para simplificar a equação (3.9) consideramos a seguinte transformação,

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (3.15)$$

essa transformação é conhecida como traço reverso, onde $\bar{h} = -h$, e $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - 1/2\eta_{\mu\nu}\bar{h}$, substituindo em (3.9), obtemos:

$$-\square\bar{h}_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\alpha, \nu} + \bar{h}_{\nu\alpha, \mu} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta, \alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (3.16)$$

Vimos que podemos realizar uma transformação de calibre em um sistema de coordenadas quase Lorentz e o novo sistema de coordenadas ainda é quase Lorentz. Seria útil, portanto, encontrar uma transformação calibre que elimine os últimos três termos no lado esquerdo da equação 3.16.

Fazendo uso da transformação de Calibre na (3.15), temos:

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h' \quad (3.17)$$

Contraindo 3.14, obtemos:

$$h' = h - 2\xi_{, \alpha}^{\alpha} \quad (3.18)$$

Substituindo $h'_{\mu\nu}$ e a relação acima na equação 3.17, concluímos que:

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\nu, \mu} - \xi_{\mu, \nu} + \eta_{\mu\nu}\xi_{, \alpha}^{\alpha} \quad (3.19)$$

Com isso a derivada fica como:

$$\partial^{\nu}\bar{h}'_{\mu\nu} = \partial^{\nu}\bar{h}_{\mu\nu} - \square\xi_{\mu} \quad (3.20)$$

Se a configuração inicial de $h_{\mu\nu}$ é tal que $\partial^{\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = f_{\mu}(x)$, para que $\partial^{\nu}\bar{h}'_{\mu\nu} = 0$, temos que:

$$\square\xi_{\mu} = f_{\mu}(x) \quad (3.21)$$

Chamamos isso de transformação de *Calibre de Lorentz*, e que desempenha um papel importante na simplificação das equações de Einstein para um campo gravitacional

fraco.

Com essa condição a equação (3.16) fica:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.22)$$

e no vácuo,

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (3.23)$$

A equação 3.23 tem a forma matemática de uma equação de onda, propagando com velocidade c . Deste modo, mostramos que as perturbações métricas - as *ondulações* no espaço-tempo produzidas por perturbar a métrica - propagam à velocidade da luz, como ondas no espaço livre.

3.2 Polarização

Para analisarmos a polarização das Ondas Gravitacionais, admitimos que a solução da equação (3.23) é uma onda plana, temos (MAGGIORE, 2008):

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} \quad (3.24)$$

onde $A_{\mu\nu}$ é a amplitude da onda e k_α é o vetor de onda, em que ambas as componentes não são arbitrárias. Primeiramente, $A_{\mu\nu}$ é simétrico, pois $\bar{h}_{\mu\nu}$ é simétrico. Isso reduz o número de componentes independentes.

Agora substituindo a solução acima na equação de onda, obtemos a relação:

$$k^\beta k_\beta = 0 \quad (3.25)$$

ou seja, o vetor de onda é um vetor nulo. Pela condição de Calibre concluímos que:

$$A_{\mu\nu} k^\mu = 0 \quad (3.26)$$

ou seja, as componentes da amplitude da onda devem ser ortogonais ao vetor de

onda. Considerando agora a (3.16), e substituindo a solução, encontramos para o vácuo

$$A_{\mu\nu}k^\beta k_\beta - A_{\mu\alpha}k^\alpha k_\nu - A_{\nu\alpha}k^\alpha k_\nu + \eta_{\mu\nu}A_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta = 0 \quad (3.27)$$

Contraindo os índices μ e ν , ou seja, multiplicamos a equação acima por $\eta^{\mu\nu}$, obtemos:

$$A^\nu_\nu = 0 \quad (3.28)$$

Essa relação implica que, $\bar{h} = 0$ e conseqüentemente, temos que $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$. Escrevendo essa equação de forma explícita,

$$A_0^0 + A_1^1 + A_2^2 + A_3^3 = -A_{00} + A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0 \quad (3.29)$$

Além disso podemos escolher um sistema de coordenadas de forma que a seguinte condição é satisfeita:

$$h_{\mu 0} = 0 \quad (3.30)$$

Mas pela condição (3.26), e supondo que a onda se propaga na direção x^3 , o vetor de onda é dado por:

$$k^\mu = (\omega, 0, 0, k) \quad (3.31)$$

$$A_{\mu 0}k^\mu = 0 \quad (3.32)$$

$$A_{\mu 1}k^\mu = A_{01}k^0 + A_{31}k^3 = 0 \quad (3.33)$$

$$A_{\mu 2}k^\mu = A_{02}k^0 + A_{32}k^3 = 0 \quad (3.34)$$

$$A_{\mu 3}k^\mu = A_{03}k^0 + A_{33}k^3 = 0 \quad (3.35)$$

Sendo que, $A_{\mu 0} = 0$, pela condição $h_{0\mu} = 0$, e com isso concluímos que:

$$A_{13} = A_{23} = A_{33} = 0 \quad (3.36)$$

e pela relação (3.29), obtemos:

$$A_{11} + A_{22} = 0 \quad \rightarrow \quad A_{11} = -A_{22} \quad (3.37)$$

e pela relação de simetria, $A_{12} = A_{21}$, podemos escrever a matriz para as componentes de $A_{\mu\nu}$,

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Com isso podemos escrever $h_{\mu\nu}$ da seguinte forma:

$$h_{\mu\nu} = [h_+(\mathbf{e}_+)_{\mu\nu} + h_\times(\mathbf{e}_\times)_{\mu\nu}] e^{ik_\alpha x^\alpha} \quad (3.39)$$

onde $h_+ = A_{11}$ e $h_\times = A_{12}$, e

$$(\mathbf{e}_+)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (\mathbf{e}_\times)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

em que $(\mathbf{e}_+)_{\mu\nu}$ e $(\mathbf{e}_\times)_{\mu\nu}$ são os dois estados da polarização das ondas gravitacionais.

3.3 Efeito das Ondas Gravitacionais em partículas livres

3.3.1 Distância própria entre as partículas de teste

Pela equação (3.39), a amplitude da perturbação métrica é descrita por apenas duas constantes independentes, A_{11} e A_{12} . Podemos entender o significado físico dessas constantes examinando o efeito da onda gravitacional sobre uma partícula livre, numa região inicialmente livre de onda do tempo-espaço.

Consideramos que a partícula está inicialmente em repouso, ou seja, $u^\beta = (1, 0, 0, 0)$ e montamos o nosso sistema de coordenadas de acordo com o gauge TT¹.

A trajetória da partícula livre satisfaz a equação geodésica

$$\frac{du^\beta}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta u^\mu u^\nu = 0 \quad (3.41)$$

onde τ é o tempo próprio. A aceleração inicial das partículas é

$$\left(\frac{du^\beta}{d\tau}\right)_0 = -\Gamma_{00}^\beta = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(h_{\alpha 0,0} + h_{0\alpha,0} - h_{00,\alpha}) \quad (3.42)$$

Mas sabemos que, $\bar{h}_{\alpha 0} = h_{\alpha 0} = 0$, sendo assim

$$\left(\frac{du^\beta}{d\tau}\right)_0 = 0 \quad (3.43)$$

Considere agora a distância própria entre duas partículas vizinhas, ambas inicialmente em repouso, neste sistema de coordenadas: um na origem e outro na coordenada $x = \epsilon$, $y = z = 0$. A distância própria entre as partículas é então dada por

$$\Delta l = \int |g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|^{1/2} = \int_0^\epsilon |g_{xx}|^{1/2} dx = \sqrt{g_{xx}} \epsilon \quad (3.44)$$

sendo que $g_{xx} = \eta_{xx} + h_{xx}$, concluímos:

$$\Delta l \simeq \left[1 + \frac{1}{2}h_{xx}\right] \epsilon \quad (3.45)$$

Como h_{xx} , em geral, não é constante, daqui resulta que a distância própria entre as partículas irá mudar quando a onda gravitacional passar. É essencialmente esta mudança na distância própria entre as partículas de teste que detectores interferométricos de ondas gravitacionais tentam medir.

¹O calibre TT (ou Traço-Transverso) tem essa denominação a partir do resultado visto em (3.38) o que garante que $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$.

3.3.2 Desvio geodésico de partículas de teste

Podemos estudar o comportamento das partículas teste com um formalismo mais rigoroso, utilizando a idéia de desvio geodésico. Nós definimos o vetor ξ_α que liga as duas partículas introduzidas acima. Então, para um campo gravitacional fraco,

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial t^2} = R^\alpha_{\mu\nu\beta} u^\mu u^\nu \xi^\beta \quad (3.46)$$

onde u^μ são os componentes da quadri-velocidade das duas partículas. Uma vez que as partículas estão inicialmente em repouso, então $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ e $\xi^\beta = (0, \epsilon, 0, 0)$, a equação (3.46) fica

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial t^2} = \epsilon R^\alpha_{001} u^\mu = -\epsilon R^\alpha_{010} \quad (3.47)$$

Reescrevendo o tensor de Riemann dado pela equação (3.5) como,

$$R_{\alpha\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\sigma,\nu\rho} - h_{\nu\sigma,\alpha\rho} - h_{\alpha\rho,\nu\sigma} + h_{\rho\nu,\alpha\sigma}) \quad (3.48)$$

Com isso a equação para o desvio geodésico fica,

$$R^1_{010} = \eta^{11} R_{1010} = -\frac{1}{2} h_{11,00} \quad (3.49)$$

$$R^2_{010} = \eta^{22} R_{2010} = -\frac{1}{2} h_{12,00} \quad (3.50)$$

Assim, duas partículas inicialmente separadas por ϵ na direção x, tem um vetor desvio geodésico que obedece às equações diferenciais

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^x = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx} \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^y = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xy} \quad (3.52)$$

Da mesma forma, é muito simples mostrar que duas partículas inicialmente separadas por ϵ na direção y , tem um vetor de desvio geodésico que obedece às equações diferenciais

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^x = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xy} \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^y = -\frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx} \quad (3.54)$$

3.3.3 Anel de partículas teste: polarização das ondas gravitacionais

Podemos ainda generalizar as equações (3.51) e (3.52) para considerar o desvio geodésico de duas partículas - um na origem e outro inicialmente nas coordenadas $x = \epsilon \cos \theta$, $y = \epsilon \sin \theta$ e $z = 0$, ou seja, no plano xy - como uma onda gravitacional que se propaga na direção z . Podemos mostrar que ξ^x e ξ^y obedecem às equações diferenciais

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^x = \frac{1}{2} \epsilon \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx} + \frac{1}{2} \epsilon \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xy} \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^y = \frac{1}{2} \epsilon \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xy} - \frac{1}{2} \epsilon \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx} \quad (3.56)$$

A Solução é dada por:

$$\xi^x = \epsilon \cos \theta + \frac{1}{2} \epsilon \cos \theta A_{xx} \cos \omega t + \frac{1}{2} \epsilon \sin \theta A_{xy} \cos \omega t \quad (3.57)$$

$$\xi^y = \epsilon \sin \theta + \frac{1}{2} \epsilon \cos \theta A_{xy} \cos \omega t - \frac{1}{2} \epsilon \sin \theta A_{xx} \cos \omega t \quad (3.58)$$

Suponha agora que θ varia entre 0 e 2π , de modo que estamos considerando um anel inicialmente circular de partículas teste no plano xy , inicialmente equidistantes da origem. A Figura 3.1 mostra o efeito da passagem de uma onda gravitacional plana, que se propaga ao longo do eixo z , neste anel de partículas teste.

O painel superior mostra o caso em que a perturbação métrica tem $A_{xx} \neq 0$ e

$A_{xy} = 0$. Neste caso, as soluções para ξ^x e ξ^y reduzem a

$$\xi^x = \epsilon \cos \theta \left(1 + \frac{1}{2} A_{xx} \cos \omega t \right) \quad (3.59)$$

$$\xi^y = \epsilon \sin \theta \left(1 - \frac{1}{2} A_{xx} \cos \omega t \right) \quad (3.60)$$

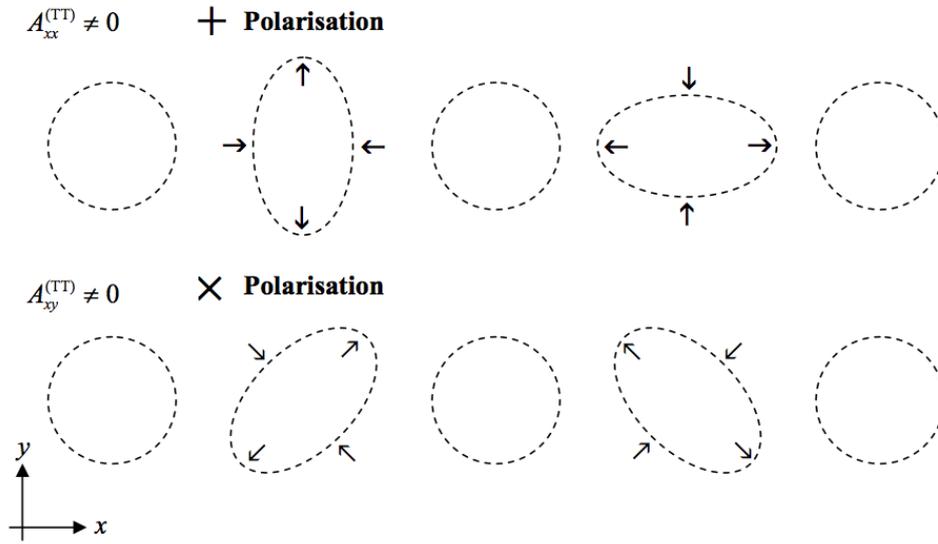


Figura 3.1 - Anel de Partículas Teste.

Fonte: star-www.st-and.ac.uk/hz4/gr/hendry-GRwaves.pdf

3.4 Emissão de Ondas Gravitacionais

Sabemos que, $\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G/c^4 T_{\mu\nu}$. Essa equação diferencial linear não homogênea pode ser resolvida utilizando a função de Green, ou seja consideramos que (MAGGIORE, 2008):

$$\square G(x, x') = \delta^4(x - x') \quad (3.61)$$

onde $G(x, x')$ é o potencial produzido por uma densidade de Dirac, $\delta^4(x - x')$. Procedemos de forma análoga ao eletromagnetismo (JACKSON, J. D., 2007). Procedemos removendo a dependência temporal introduzindo a transformada de Fourier com

relação a frequência. A representação de $G(x, x')$ e $\delta(x - x')$ é dada por

$$G_k(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int G(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.62)$$

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.63)$$

que satisfaz a equação

$$(\nabla^2 + k^2)G_k(x, x') = \delta(x - x') \quad (3.64)$$

A Função de Green é dependente somente de $R = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, e deve ser esfericamente simétrica. Levando em consideração o Laplaciano para coordenadas esféricas, a equação (3.64) fica:

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2}(RG_k) + k^2 G_k = \delta(\mathbf{R}) \quad (3.65)$$

Exceto para $R=0$, RG_k satisfaz a equação homogênea, ou seja, $\delta(\mathbf{R}) = 0$, e a solução é simplesmente dada por:

$$RG_k(R) = Ae^{ikR} + Be^{-ikR} \quad (3.66)$$

A normalização é dada por

$$\lim_{kR \rightarrow 0} G_k(R) = \frac{1}{R} \quad (3.67)$$

A solução geral para a função de green é então

$$G_k(R) = AG_k^{(+)}(R) + BG_k^{(-)}(R) \quad (3.68)$$

onde

$$G_k^{(\pm)}(R) = \frac{e^{\pm ikR}}{R} \quad (3.69)$$

com $A + B = 1$. A Função de Green correspondente dependente do tempo é dada por

$$\left(\nabla_x^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G^{(\pm)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') \quad (3.70)$$

A Solução é dada então por,

$$G^{(\pm)}(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{\pm ikR}}{R} e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (3.71)$$

onde $\tau = t - t'$. A Função de Green é dependente apenas da distância relativa R , e o tempo τ , e $G(x, x') = 0$ se $t' > t$. Com isso obtemos:

$$G(x, x') = \frac{1}{4\pi R} \delta\left(\frac{R}{c} - \tau\right) \quad (3.72)$$

Logo,

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x, t) = \int G(x, x') T_{\mu\nu}(x') d^3x' dt' \quad (3.73)$$

Concluimos:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x, t) = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}[x', t - (|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)/c]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (3.74)$$

Da condição de conservação do Tensor Momento-Energia $T^\mu_{\nu,\mu} = 0$, temos que (PEIREIRA, 2012):

$$T^{\mu 0}_{,\nu} = T^{\mu 0}_{,0} + T^{0k}_{,k} \quad (3.75)$$

$$T^{\mu i}_{,\nu} = T^{\mu i}_{,0} + T^{ik}_{,k} \quad (3.76)$$

Considerando que:

$$\int (T^{ik}x^j)_{,k}d^3k = \int T^{ik}_{,k}x^j d^3x + \int T^{ij}d^3x \quad (3.77)$$

Pelo Teorema de Gauss o lado esquerdo dessa equação é nulo. Sendo assim, temos que;

$$\int T^{ij}d^3x = -\frac{\partial}{\partial t} \int T^{i0}x^j d^3x = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int (T^{i0}x^j + T^{j0}x^i)d^3x \quad (3.78)$$

Mas,

$$\int (T^{0k}x^i x^j)_{,k}d^3x = \int T^{0k}_{,k}x^i x^j d^3x + \int (T^{i0}x^j + T^{j0}x^i)d^3x \quad (3.79)$$

Utilizando novamente o Teorema de Gauss e substituindo a equação (3.79) na (3.78), concluímos:

$$\int T^{ij}d^3x = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int T^{00}x^i x^j d^3x \quad (3.80)$$

Para a matéria não relativística, a equação de campo é, $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$, então $T^{00} \simeq \rho$. Então a solução fica:

$$h_{kl}(t, \mathbf{x}) = -\frac{4G}{r} \int d^3\mathbf{x}' T_{kl}(t-r, \mathbf{x}') \quad (3.81)$$

em que podemos reescrever como:

$$h^{kl} = -\frac{2G}{r} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho x^k x^l d^3x' \right]_{t-r} \quad (3.82)$$

O Tensor de quadrupolo é definido como:

$$Q^{kl} \equiv \int (3x'^k x'^l - r'^2 \delta^{kl}) \rho(x') d^3x' \quad (3.83)$$

Reescrevemos h^{kl} em termos do quadrupolo, então:

$$h^{kl} = -\frac{2G}{3r} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} Q^{kl} + \delta^{kl} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int r'^2 \rho d^3 x' \right]_{t-r} \quad (3.84)$$

3.5 Detecção de Ondas Gravitacionais

Como vimos na seção 3.3, uma alteração na separação própria das partículas durante a passagem de uma onda gravitacional é a quantidade física que detectores de ondas gravitacionais são projetados para medir. Para a maioria dos detectores de ondas gravitacionais atualmente operacionais, ou planejados para o futuro, essas mudanças na separação própria são monitorados através da medição do tempo de viagem de luz de um feixe de laser que viaja para trás e para a frente ao longo dos braços de um interferômetro de Michelson. Diferenças no tempo de viagem de luz ao longo de braços perpendiculares irá produzir franjas de interferência na saída do laser do interferômetro.

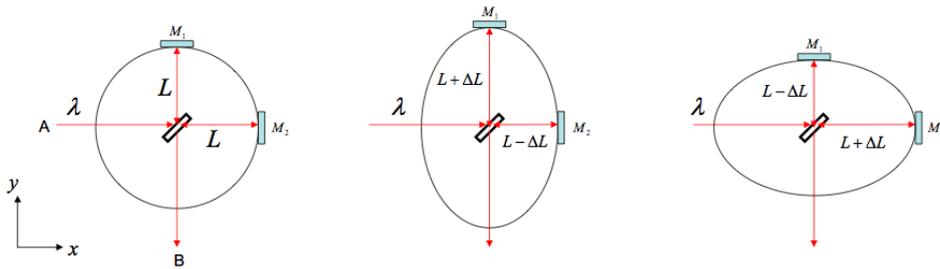


Figura 3.2 - Interferômetro de Michelson para detector de ondas gravitacionais.

Fonte: star-www.st-and.ac.uk/hz4/gr/hendry-GRwaves.pdf

A Figura 3.2, mostra um interferômetro de Michelson para um detector de ondas gravitacionais. Aqui vamos supor que a onda gravitacional com a polarização '+' está se propagando ao longo do eixo z. A luz do laser de comprimento de onda λ entra no aparelho em A, e é dividida em dois feixes que são perpendiculares, retransmitidas pelos espelhos de massa de teste M_1 e M_2 no fim de cada um dos braços (de comprimento próprio L na ausência de qualquer onda gravitacional). Os dois feixes são então recombinados e saem do sistema em B.

Os três painéis da Figura 3.2 indicam três fases diferentes da onda que passa através

do sistema. No painel esquerdo a onda não provoca alteração no comprimento dos braços; no painel do meio o braço horizontal é encurtado por ΔL enquanto que o braço vertical é alongado pela mesma distância própria. No painel à direita, vemos o oposto: os braços horizontais e verticais são alongados e encurtados respectivamente por ΔL .

Considere agora uma onda gravitacional $\mathbf{h} = h\mathbf{e}_+$ propagando ao longo do eixo z . Se colocarmos duas massas testes ao longo do eixo- x , inicialmente separadas por uma distância própria L , pode-se ver a partir da equação (3.59) que a distância mínima e máxima própria entre as massas de teste, quando a onda gravitacional passa, é $L - h/2$ e $L + h/2$, respectivamente. Assim, a mudança fracionada $\Delta L/L$ na separação própria das massas de teste satisfaz

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{h}{2} \quad (3.85)$$

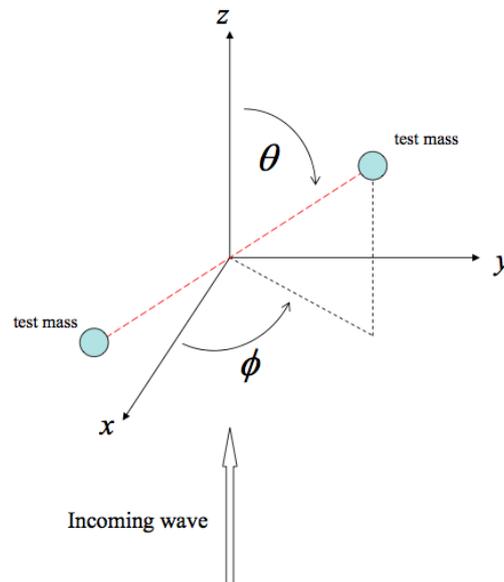


Figura 3.3 - A orientação relativa do braço de um detector e a direção de propagação de uma onda gravitacional.

Fonte: star-www.st-and.ac.uk/hz4/gr/hendry-GRwaves.pdf

Claro que, em geral, os braços de um detector de ondas gravitacionais não serão alinhados com a polarização e a direção de propagação de uma onda. Figura 3.3, esboça a orientação de um detector de onda gravitacional com respeito a uma onda

de entrada propagando ao longo do eixo z . O eixo do detector é definido pelos ângulos θ e ϕ . Se a onda de entrada tem polarização $+$, ou seja, $\mathbf{h} = h\mathbf{e}_+$, o detector $vê$ uma amplitude eficaz de

$$h_+ = h \text{sen}^2 \theta \cos 2\phi \quad (3.86)$$

Assim, vemos que a onda produz uma resposta máxima no braço do detector se $\theta = \pi/2$ e $\phi = 0$, e produz uma resposta nula para $\theta = 0$ ou $\phi = \pi/4$. Isso faz sentido quando consideramos a Figura 3.3, como já comentamos anteriormente a perturbação da métrica não produz perturbação ao longo de sua direção de propagação.

Se, por outro lado, a onda de entrada tem a polarização \times , então neste caso o detector $vê$ uma amplitude eficaz de

$$h_\times = h \text{sen}^2 \theta \text{sen} 2\phi \quad (3.87)$$

Agora, a onda produz uma resposta máxima para $\theta = \pi/2$ e $\phi = \pi/4$, enquanto que a resposta é nula para $\theta = 0$ ou $\phi = 0$.

No nosso trabalho, avaliaremos a densidade espectral de ondas gravitacionais (razão sinal-ruído) para dois detectores de ondas gravitacionais interferométricos, *Advanced LIGO* e *Einstein Telescope*.

4 FORMAÇÃO DE ESTRUTURA

Como vimos no capítulo 2, o universo é isotrópico e homogêneo em larga escala, no entanto o universo real certamente não é homogêneo, pois contém estruturas como galáxias, aglomerados, e etc. O crescimento de tais estruturas se deve a instabilidades gravitacionais que iniciaram como pequenas perturbações nos primórdios do universo.

O tratamento matemático é dado pela Teoria de Perturbações Lineares, separados em dois casos, a aproximação Newtoniana e o caso relativístico, em que consideramos a Relatividade Geral.

Neste capítulo na seção 4.1 estudamos a aproximação newtoniana da Teoria de Perturbações Lineares, na seção 4.2, estudamos a solução para a equação de perturbação de densidade, na seção 4.4 estudamos o colapso esférico, na seção 4.5 com o Formalismo de Press-Schechter onde obtemos a função de massa dos halos de matéria escura e finalizamos com a equação de Boltzman 4.6.

4.1 Perturbações Cosmológicas

Em princípio, o estudo da Teoria de Perturbações Lineares pode ser procedido de duas formas. Dado um modo λ , temos que: (i) Para $\lambda > l_H$, devemos usar uma teoria relativística para as perturbações lineares; (ii) Para $\lambda < l_H$, podemos utilizar a aproximação newtoniana (PADMANABHAN, 1993).

Nas subseções seguintes revisamos as Perturbações Lineares: Teoria Newtoniana 4.1.1 e a Teoria Relativística 4.1.2.

4.1.1 Teoria Newtoniana de pequenas perturbações

A evolução temporal de um fluido não-relativístico com densidade ρ e velocidade \mathbf{u} sobre a influencia de um potencial gravitacional ϕ são dados pelas equações a seguir (MO HOUJUN; VAN DER BOSH; WHITE, 2010; PEREIRA, 2012):

- **Equação da Continuidade:** que descreve a conservação de massa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}_{\mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (4.1)$$

- **Equação de Euler:** a equação de movimento,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \vec{\nabla}_{\mathbf{r}} \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_{\mathbf{r}} P - \vec{\nabla}_{\mathbf{r}} \phi \quad (4.2)$$

- **Equação de Poisson:** descreve o campo gravitacional,

$$\vec{\nabla}_{\mathbf{r}}^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (4.3)$$

Essas equações são aplicáveis em um gás bariônico, e para a poeira sem pressão, como matéria escura.

Para discutirmos a evolução temporal das perturbações num universo, em expansão, de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) precisamos considerar as coordenadas comóveis dadas por \mathbf{x} , definido por

$$\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x} \quad (4.4)$$

A velocidade própria é dada por,

$$\mathbf{u} = \dot{a}(t)\mathbf{x} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \equiv a\dot{\mathbf{x}}, \quad (4.5)$$

onde \mathbf{v} é a **velocidade peculiar** que descreve o movimento do fluido relativo ao observador fundamental. Como estamos substituindo (\mathbf{r}, t) por (\mathbf{x}, t) então

$$\vec{\nabla}_{\mathbf{r}} \rightarrow \frac{1}{a}\vec{\nabla}_{\mathbf{x}}; \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{x} \cdot \vec{\nabla}_{\mathbf{x}} \quad (4.6)$$

Para analisarmos a perturbação, temos que:

$$\rho \rightarrow \bar{\rho}(t) + \delta\rho \equiv \bar{\rho}(t)(1 + \delta(\mathbf{x}, t)) \quad (4.7)$$

$$P \rightarrow \bar{P}(t) + \delta P \quad (4.8)$$

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v} + a(t)H(t)\mathbf{x} \quad (4.9)$$

$$\phi \rightarrow \bar{\phi}(x, t) + \phi \quad (4.10)$$

onde $\delta(\mathbf{x}, t) = \delta\rho/\bar{\rho}$ corresponde a perturbação na densidade e ϕ é a perturbação no potencial gravitacional.

Analizamos primeiramente a Equação da Continuidade. Substituindo as (4.7)-(4.10) na (4.1) e separando os termos de diferentes ordens, a equação da continuidade fica:

$$\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + 3\bar{\rho}H\right) + \left[\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + 3\bar{\rho}H\right)\delta + \bar{\rho}\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\bar{\rho}}{a}\vec{\nabla}_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{v}\right] + \left[\frac{\bar{\rho}}{a}(\mathbf{v}\cdot\vec{\nabla}_{\mathbf{x}}\delta + \delta(\vec{\nabla}_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{v}))\right] = 0 \quad (4.11)$$

Nós consideramos termos até primeira ordem, sendo assim nós eliminamos o último termo. Além disso, o termo entre parênteses descreve a dinâmica de fundo, dada pela equação de Friedmann, para obtê-las precisamos considerar novamente a equação da continuidade e a lei de Hubble, dada por $\mathbf{u} = H(t)\mathbf{r}$.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}_{\mathbf{r}}\cdot(\rho\mathbf{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}_{\mathbf{r}}\cdot(\rho H(t)\mathbf{r}) = 0 \quad (4.12)$$

onde $\vec{\nabla}_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r} = 3$. Concluimos que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\rho H = 0 \quad (4.13)$$

Sendo assim todos os termos entre parênteses são nulos, e com isso a perturbação da equação da continuidade é dada por:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\vec{\nabla}_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{v} = 0 \quad (4.14)$$

Fazemos o mesmo procedimento para as outras duas equações, separamos os termos correspondentes a cada ordem; para a equação de Euler temos que:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t} + H^2 + \frac{4\pi}{3}G\bar{\rho}\right)\mathbf{r} + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + H\mathbf{v}\right) + \frac{1}{a}(\vec{\nabla}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v} = -\frac{1}{a\bar{\rho}}\vec{\nabla}_{\mathbf{x}}\delta P - \frac{1}{a}\vec{\nabla}_{\mathbf{x}}\bar{\phi} \quad (4.15)$$

Eliminando o termo de segunda ordem e considerando o termo de ordem zero, corresponde a dinâmica de fundo, dado por:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + H^2 + \frac{4\pi}{3}G\bar{\rho} = 0 \quad (4.16)$$

Concluimos que:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + H\mathbf{v} = -\frac{1}{a\bar{\rho}}\vec{\nabla}_{\mathbf{x}}\delta P - \frac{1}{a}\vec{\nabla}_{\mathbf{x}}\bar{\phi} \quad (4.17)$$

Finalizamos com a equação de Poisson. A equação perturbada, fica:

$$\left(\frac{1}{a^2}\nabla^2\bar{\phi} - 4\pi G\bar{\rho}\right) + \frac{1}{a^2}\nabla^2\phi = 4\pi G\bar{\rho}\delta \quad (4.18)$$

Sendo que o termo entre parêntese corresponde a dinâmica de fundo:

$$\nabla_r^2\phi = \frac{1}{a^2}\vec{\nabla}_{\mathbf{x}}\phi = 4\pi G\rho \quad (4.19)$$

Concluimos que:

$$\nabla^2\phi = 4\pi Ga^2\bar{\rho}\delta \quad (4.20)$$

Para completar o conjunto de equações precisamos da equação de estado. Considerando que a pressão dependa somente da densidade, $P = P(\rho)$, temos que:

$$\delta P = \frac{\partial P}{\partial \rho}\delta\rho = c_s^2\bar{\rho}\delta \quad (4.21)$$

lembrando que $\delta = \delta\rho/\bar{\rho}$ corresponde a perturbação na densidade e c_s é a velocidade do som adiabática, dado por

$$c_s = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)^{1/2} \quad (4.22)$$

Perturbações com essa propriedade são chamados de *perturbações adiabáticas* em cosmologia. Se $p = p(\rho)$, temos necessariamente perturbações adiabáticas. No caso geral, as perturbações podem ou não ser adiabáticas. Neste último caso, a perturbação pode ser dividida em uma componente adiabática e uma perturbação entropia. Perturbações adiabáticas permanecem adiabáticas enquanto elas estão fora do horizonte, mas podem desenvolver perturbações de entropia quando entram no horizonte.

Isso acontece com fluidos de muitas componentes.

Substituindo na (4.17)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + H\mathbf{v} = -\frac{1}{a}c_s^2\vec{\nabla}_x\delta - \frac{1}{a}\vec{\nabla}_x\bar{\phi} \quad (4.23)$$

Diferenciando a (4.14) com relação ao tempo:

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} - \frac{1}{a}H\vec{\nabla}\cdot\mathbf{v} + \frac{1}{a}\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right) = 0 \quad (4.24)$$

e usando a (4.23), obtemos:

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} - \frac{2}{a}H\vec{\nabla}\cdot\mathbf{v} - \frac{1}{a^2}c_s^2\bar{\rho}\vec{\nabla}_x\delta - \frac{1}{a^2}\vec{\nabla}_x\bar{\phi} = 0 \quad (4.25)$$

Combinando com a (4.14) e (4.20), concluímos que:

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} + 2H\frac{\partial\delta}{\partial t} - 4\pi G\bar{\rho}\delta - \frac{c_s^2}{a^2}\bar{\rho}\vec{\nabla}_x\delta = 0 \quad (4.26)$$

Podemos reescrever a equação acima como:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\delta}{dt} = \left[4\pi G\bar{\rho} - \frac{k^2c_s^2}{a^2}\right]\delta \quad (4.27)$$

O segundo termo do lado esquerdo da equação 4.27 corresponde ao termo *Hubble drag*, que previne as estruturas de crescerem devido a expansão do universo. O primeiro termo do lado direito corresponde ao termo gravitacional, que contribui com o crescimento das perturbações através da instabilidade gravitacional. O último termo corresponde a pressão, que também previne as estruturas de se formarem.

Considerando o caso para a poeira não-relativística, em que o termo de pressão pode ser ignorado $p \approx 0$, a equação acima pode ser reescrita como:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\delta}{dt} - 4\pi G\bar{\rho}\delta = 0 \quad (4.28)$$

Sendo que a derivada é com relação ao tempo, mudamos para uma derivação com relação ao fator de escala, sendo assim $\partial_t = aH(a)\partial_a$, e considerando o valor da densidade crítica, encontramos (PACE et al., 2010):

$$\delta'' + \left(\frac{3}{a} + \frac{E'}{E}\right)\delta' - \frac{3}{2} \frac{\Omega_m^{(0)}}{a^5 E^2} \delta = 0 \quad (4.29)$$

onde $\delta'' = \partial\delta/\partial a$, E corresponde ao termo de expansão e $E' = \partial E(a)/\partial a$. Através dessa equação, notamos a influência do termo de expansão nas perturbações. Além disso essa equação nos fornece duas soluções que chamamos de modo de crescimento e de decaimento, essas soluções serão afetadas pelo tipo de energia escura escolhida.

4.1.2 Perturbações Relativísticas

Para perturbar as equações de Einstein precisamos primeiramente determinar a métrica. Como vimos anteriormente o universo homogêneo e isotrópico é descrito pelo elemento de linha de FRW caracterizada pelo fator de escala, $a(t)$, para um universo perturbado devemos acrescentar mais duas funções que dependem do espaço e do tempo, Ψ e Φ . Com isso a métrica é dada por,

$$g_{00} = -(1 + 2\Psi(\mathbf{x}, t)) \quad (4.30)$$

$$g_{0i} = 0 \quad (4.31)$$

$$g_{ij} = a^2 \delta_{ij} (1 + 2\Phi(\mathbf{x}, t)) \quad (4.32)$$

Claramente na ausência de Ψ e Φ obtemos a métrica de FRW, que representa o termo de ordem zero. Essas perturbações na métrica são, Ψ , que corresponde ao potencial Newtoniano, e Φ , que é a perturbação na curvatura espacial. Esses termos são pequenos de forma que consideramos até primeira ordem.

Os passos a serem seguidos são parecidos com a da seção 2.6, primeiramente calculamos os símbolos de Christoffel, seguidos pelo tensor de Ricci, escalar de Ricci, e finalmente o tensor de Einstein. Apesar de todo esse calculo estamos interessados apenas em duas componentes.

Consideramos primeiramente o termo $\Gamma_{\mu\nu}^0$, dado por

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2}g^{0\alpha} (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}) \quad (4.33)$$

A única componente não nula da equação acima é $\alpha = 0$, que é a inversa de $g_{00} = -(1 + 2\Psi)$, ou seja, $g^{00} = -1 + 2\Psi$,

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{-1 + 2\Psi}{2} (g_{0\mu,\nu} + g_{0\nu,\mu} - g_{\mu\nu,0}) \quad (4.34)$$

Fazendo $\mu = \nu = 0$, obtemos até primeira ordem,

$$\Gamma_{00}^0 = \Psi_{,0} \quad (4.35)$$

Consideramos agora $\mu = 0$ e $\nu = i$, nesse caso o único termo não nulo é $g_{00,i} = -2\Psi_{,i}$, então

$$\Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{i0}^0 = \Psi_{,i} = ik_i\Psi \quad (4.36)$$

e finalmente se μ e ν são espaciais, os dois primeiros termos $g_{0i,j} = 0$, então concluímos que,

$$\Gamma_{ij}^0 = \delta_{ij}a^2 [H + 2H(\Phi - \Psi) + \Phi_{,0}] \quad (4.37)$$

lembrando que H é o parâmetro de Hubble, $H = \dot{a}/a$.

Concluimos calculando agora os termos $\Gamma_{\mu\nu}^i$, dado por

$$\Gamma_{\mu\nu}^i = \frac{1}{2}g^{i\alpha} (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}) \quad (4.38)$$

Novamente, temos que g^{ii} é a única componente não nula, dada por, $g^{ij} = a^2\delta_{ij}(1 + 2\Phi)$, sendo assim, $g_{ij} = a^{-2}\delta_{ij}(1 - 2\Phi)$. Temos para $\mu = \nu = 0$

$$\Gamma_{00}^i = \frac{ik^i}{2a^2}\Psi \quad (4.39)$$

Para $\mu = j$ e $\nu = 0$, nesse caso os dois últimos termos são nulos, permanecendo apenas $g_{ij,0}$ e obtemos

$$\Gamma_{j0}^i = \Gamma_{0j}^i = \delta_{ij} (H + \Phi_{,0}) \quad (4.40)$$

Finalizamos considerando $\mu = j$ e $\nu = k$, então:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1 - 2\Phi}{2a^2} (g_{ij,k} + g_{ik,j}g_{jk,i}) \quad (4.41)$$

sendo que, $g_{ij,k} = 2a^2\delta_{ij}ik_k\Phi$. Substituindo todos esses termos com seus respectivos índices, concluímos que:

$$\Gamma_{jk}^i = i\Phi (\delta_{ij}k_k + \delta_{ik}k_j - \delta_{jk}k_i) \quad (4.42)$$

Partimos agora para o cálculo do tensor de Ricci. Primeiramente consideramos a componente tempo-tempo:

$$R_{00} = \Gamma_{00,\alpha}^\alpha - \Gamma_{0\alpha,0}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{00}^\beta - \Gamma_{\beta 0}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^\beta \quad (4.43)$$

A componente espaço-espaço:

$$R_{ij} = \delta_{ij} \left[\left(2a^2 H^2 + a \frac{d^2 a}{dt^2} \right) (1 + 2\Phi - 2\Psi) + a^2 H (6\Phi_{,0} - \Phi_{,0}) + a^2 \Phi_{,00} + k^2 \Phi \right] + k_i k_j (\Phi + \Psi) \quad (4.44)$$

Sendo que o escalar de Ricci, é dado por $R = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij}$, obtemos

$$\begin{aligned} R = & [-1 + 2\Psi] \left[\frac{3}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} - \frac{k^2}{a^2} \Psi - 3\Phi_{,00} + 3H(\Phi_{,0} - 2\Phi_{,0}) \right] \\ & + 3 \left[\frac{1 - 2\Phi}{a^2} \right] \left(2a^2 H^2 + a \frac{d^2 a}{dt^2} \right) (1 + 2\Phi - 2\Psi) \\ & + \left[\frac{1 - 2\Phi}{a^2} \right] [3 \{ a^2 H (6\Phi_{,0} - \Phi_{,0}) + a^2 \Phi_{,00} + k^2 \Phi \} + k^2 (\Phi + \Psi)] \end{aligned} \quad (4.45)$$

Agora nós podemos encontrar a equação de evolução para Ψ e Φ . A primeira componente é a tempo-tempo, sendo assim o tensor de Einstein é,

$$G_0^0 = g^{00} \left[R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R \right] = (-1 + 2\Psi) R_{00} - \frac{1}{2} R \quad (4.46)$$

Considerando apenas primeira ordem, essa componente do tensor de Einstein fica,

$$\delta G_0^0 = -6H\Phi_{,0} + 6\Psi H^2 - 2\frac{k^2}{a^2}\Phi \quad (4.47)$$

Reescrevemos essa equação de acordo com o tempo conforme e o comprimento conforme de Hubble, lembrando que $d\eta = dt/a(t)$ e $\mathcal{H} = aH$, a eq. acima fica

$$k^2\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) = 4\pi G a^2 T_0^0 \quad (4.48)$$

Para obtermos a equação completa precisamos determinar o valor de T_0^0 , para os diferentes fluidos que compõem o universo. Para o caso dos fótons, temos que o tensor momento-energia é dado por,

$$T_0^0 = -2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p \left[f^{(0)} - p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \Theta \right] \quad (4.49)$$

Levando em consideração a função de distribuição para fótons, a equação acima integrada, obtemos

$$T_0^0 = -\rho_\gamma [1 + 4\Theta_0] \quad (4.50)$$

De forma análoga, o tensor momento-energia para neutrinos é dado por, $T_0^0 = -\rho_\nu [1 + 4\mathcal{N}_0]$. Levando em consideração todas as componentes, concluímos que a componente tempo-tempo da equação de Einstein é dada por

$$k^2\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) = 4\pi G a^2 [\rho_{dm}\delta + \rho_b\delta_b + 4\rho_\gamma\Theta_0 + 4\rho_\nu\mathcal{N}_0] \quad (4.51)$$

Esta é a nossa primeira equação de evolução para Φ e Ψ . No limite de nenhuma

expansão ($a = \text{constante}$), eq. (4.51) reduz-se a equação de Poisson para a gravidade (no espaço de Fourier). O lado esquerdo é $-\nabla^2\Phi$ enquanto o lado direito é $4\pi G\delta\rho$. Os termos proporcionais a \dot{a} contam para a expansão e são geralmente importantes para os modos com comprimentos de onda comparáveis a, ou maior do que, o raio de Hubble, H^{-1} .

Vamos agora obter uma segunda equação de evolução para Φ e Ψ . Já obtemos a componente tempo-tempo do tensor de Einstein, vamos nos concentrar na parte espacial

$$G_j^i = g^{ik} \left[R_{kj} - \frac{g_{kj}}{2} R \right] = \frac{\delta^{ik}(1 - 2\Phi)}{a^2} R_{kj} - \frac{\delta_{ij}}{2} R \quad (4.52)$$

Da eq.(4.44), vemos que a maioria dos termos em R_{kj} são proporcionais a δ_{kj} . Quando contraído com δ^{ik} isto conduzirá a uma série de termos proporcionais à δ_{ij} , em adição ao último termo aqui, o que é proporcional ao R. Portanto,

$$G_j^i = A\delta_{ij} + \frac{k^i k_j (\Phi + \Psi)}{a^2} \quad (4.53)$$

onde A tem cerca de uma dúzia de termos. Uma vez que todos estes termos são proporcionais à δ_{ij} todos eles contribuem para o traço de G_j^i . Para evitar lidar com estes termos, considere a parte longitudinal, sem traço de G_j^i , que pode ser extraído através da contração de G_j^i com $\hat{k}_i \hat{k}^j - 1/3\delta_i^j$, um operador de projeção.

Este operador projeção mata todos os termos proporcionais a δ_{ij} deixando apenas

$$\left(\hat{k}_i \hat{k}^j - 1/3\delta_i^j \right) G_j^i = \frac{2}{3a^2} k^2 (\Phi + \Psi) \quad (4.54)$$

Fazemos o mesmo com o tensor momento-energia, temos então

$$\left(\hat{k}_i \hat{k}^j - 1/3\delta_i^j \right) T_j^i = \sum_l g_l \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^2 \mu^2 - 1/3p^2}{E_l(p)} f_l(\mathbf{p}) \quad (4.55)$$

Pode-se reconhecer que a combinação $\mu^2 - 1/3$ é proporcional ao segundo polinômio de Legendre, mais precisamente igual a $2/3\mathcal{P}_2(\mu)$. Por conseguinte, a integral tira a parte de quadrupolo da distribuição. Claro que a parte de ordem zero da função de

distribuição não possui quadrupolo, de modo que o termo fonte é de primeira ordem, proporcional ao Θ_2 , que é diferente de zero apenas para neutrinos e fótons. Esta componente do tensor energia-momento é chamada de *anisotropic stress*. Partículas não-relativísticas, como bárions e matéria escura, não contribuem para *anisotropic stress*.

A segunda equação de Einstein, fica

$$k^2(\Phi + \Psi) = -32\pi G a^2 [\rho_\gamma \Theta_2 + \rho_\nu \mathcal{N}_2] \quad (4.56)$$

4.2 Soluções

Para poder encontrar a solução para a evolução das perturbações, temos um processo em duas etapas:

- 1) Resolver as equações de fundo para obter as funções $a(t)$, $H(t)$, e $\rho(t)$. Depois disto, estas são funções nas equações de perturbação conhecida.
- 2) Resolver as equações de perturbação.

4.2.1 Perturbações adiabáticas na matéria

Considere agora perturbações adiabáticas de um fluido com única componente não-relativística. A equação para a perturbação densidade é agora

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{d\delta}{dt} = \left[4\pi G \bar{\rho} - \frac{k^2 c_s^2}{a^2} \right] \delta \quad (4.57)$$

Antes de resolver essa equação é preciso primeiro encontrar a solução de fundo que dá as funções $a(t)$, $H(t) = \dot{a}/a$ e $\bar{\rho}(t)$.

A solução da eq.(4.57) depende do sinal do fator dentro dos colchetes. O primeiro termo é devido a gradientes de pressão. Pressão tenta resistir à compressão, por isso, se este termo domina, obtemos uma solução oscilante. O segundo termo entre parênteses é devido à gravidade. Se este termo domina, as perturbações crescem. O número de onda para os quais os termos são iguais,

$$k_J = \frac{a\sqrt{4\pi G \bar{\rho}}}{c_s} \quad (4.58)$$

é chamado o *número de onda de Jeans*, e o comprimento de onda correspondente

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} \quad (4.59)$$

o *comprimento de Jeans*. Para a matéria não-relativística $c_s \ll 1$, de modo que o comprimento Jeans é muito menor do que o comprimento Hubble, $k_J \gg \mathcal{H} \equiv aH$. Assim, podemos aplicar a teoria newtoniana para ambas as escalas maiores e menores do que o comprimento de Jeans.

Para escalas muito menores que o comprimento de Jeans, $k \ll k_J$, então podemos aproximar a eq.(4.57) por

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\delta}{dt} + \frac{k^2 c_s^2}{a^2}\delta = 0 \quad (4.60)$$

As soluções são oscilantes, $\delta(t) \sim e^{i\omega t}$, onde $\omega = c_s k/a$. Estas oscilações são amortecidas pelo termo $2H\dot{\delta}$, de modo que a amplitude das oscilações diminui com o tempo. Não há crescimento de estruturas em escalas sub-Jeans.

Para escalas maiores do que o comprimento de Jeans (mas ainda sub-horizonte), $\mathcal{H} \ll k \ll k_J$, podemos aproximar a eq.(4.57)

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\delta}{dt} - 4\pi G\bar{\rho}\delta = 0 \quad (4.61)$$

Para um universo dominado por matéria, a solução do fundo é $a \propto t^{2/3}$, de modo que, $H = 2/(3t)$ e $\bar{\rho} = 1/(6\pi Gt^2)$, a eq. acima pode ser reescrita como

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{4}{3t}\frac{d\delta}{dt} - \frac{2}{3t^2}\delta = 0 \quad (4.62)$$

A solução geral é,

$$\delta(t) = At^{2/3} + Bt^{-1} \quad (4.63)$$

O primeiro termo é o modo de crescimento e o segundo termo é o modo de decaimento. Depois de algum tempo o modo de decaimento desaparece, e a perturbação

crece

$$\delta \propto t^{2/3} \propto a \quad (4.64)$$

Assim perturbações de densidade em questão crescem proporcional ao fator de escala.

4.2.2 Fluido com várias componentes

A densidade de energia do universo real é composta por várias componentes. Em muitos casos, é razoável ignorar as perturbações em algumas componentes (já que elas são relativamente pequenas nas escalas de interesse).

$$\frac{d^2\delta_i}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\delta_i}{dt} + \frac{k^2c_s^2}{a^2}\delta_i = \sum_i 4\pi G\bar{\rho}_i\delta_i \quad (4.65)$$

Na verdade, verifica-se que a teoria de perturbação newtoniana pode ser aplicada, mesmo com a presença de componentes de energia relativísticas, como a radiação, e da energia escura, contanto que eles possam ser considerados como componentes suaves e suas perturbações passam ser ignoradas. Sendo assim, essas componentes apenas contribuem para a solução do fundo. Neste caso, a solução de fundo é calculada usando a relatividade geral, ou seja, a solução de fundo é um universo FRW, mas as equações de perturbação são as equações de perturbação newtoniana.

Consideramos uma perturbação na densidade da matéria escura fria (CDM) $\delta\rho_m$ durante o período de dominação da radiação. Nós definimos $\rho = \rho_r + \rho_m$, onde $\rho_m \ll \rho_r$. Como as perturbações na radiação oscilam rapidamente e estão sendo amortecidas, ou seja, elas estão ficando menores, pode ser uma aproximação razoável ignorá-las quando consideramos as perturbações em CDM.

CDM pode ser tratada completamente como um fluido sem pressão, por isso o termo gradiente de pressão na equação Jeans pode ser descartado. Então, temos novamente

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\delta}{dt} = 4\pi G\bar{\rho}_m\delta \quad (4.66)$$

No entanto consideramos o caso do universo dominado por radiação, então $H^2 \propto \bar{\rho} \propto a^{-4}$, o que implica em $a \propto t^{1/2}$, e assim $H = 1/(2t)$. Logo:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d\delta}{dt} - 4\pi G \bar{\rho}_m \delta = 0 \quad (4.67)$$

Na época do domínio da radiação $\rho_m \ll \rho_r$ de forma que o último termo pode ser ignorado. Então a solução fica,

$$\delta(t) = A + B \ln t \quad (4.68)$$

Assim perturbações em CDM crescem, no máximo, logaritmicamente durante o período de dominação de radiação.

4.2.3 Perturbações de Densidade da *Cold Dark Matter* (CDM)

Matéria escura fria é considerada a componente de estrutura de formação dominante no universo a altos *redshifts* (a energia escura começa a influenciar a densidade de energia apenas em baixos *redshifts* isto é, para $z < 20$). Observações indicam que $\rho_b \lesssim 0.2\rho_c$. Assim, podemos obter uma aproximação razoável para o comportamento das perturbações da CDM, ignorando a componente bariônica e igualando $\rho_m \approx \rho_c$.

CDM não tem pressão e, assim, a velocidade do som é zero. Assim, para CDM, todas as escalas são maiores do que a escala de Jeans, e nós não temos um comportamento oscilatório. Em vez disso, as perturbações crescem em todas as escalas.

O crescimento das perturbações de CDM é possível mesmo durante o período de dominação de radiação, pois a componente de radiação afeta apenas a taxa de expansão. Considerando $c_s = 0$ na eq.(4.27), obtemos

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a} \frac{d\delta}{dt} - 4\pi G \bar{\rho} \delta = 0 \quad (4.69)$$

Vamos agora supor um universo plano, e ignorar o componente ρ_d , de modo que a equação de Friedmann é

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho} \quad (4.70)$$

onde $\bar{\rho} = \bar{\rho}_m + \bar{\rho}_r$ e $\bar{\rho}_m \propto a^{-3}$ e $\bar{\rho}_r \propto a^{-4}$. Nós definimos uma nova coordenada de tempo

$$y \equiv \frac{a}{a_{eq}} = \frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_r} \quad (4.71)$$

Sendo assim,

$$4\pi G\rho_m = \frac{3}{2} \frac{y}{y+1} H^2 \quad (4.72)$$

e a eq.(4.69) fica

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{3}{2} \frac{y}{y+1} H^2 \delta = 0 \quad (4.73)$$

Fazendo a mudança de variáveis de t para y , chegamos à equação (onde $' \equiv d/dy$)

$$\delta'' + \frac{2+3y}{2y(1+y)} \delta' - \frac{3}{2y(1+y)} \delta = 0 \quad (4.74)$$

conhecida como a *equação Meszaros*. Essa equação tem duas soluções, a de crescimento, e a outra de decaimento. A solução de crescimento é

$$\delta = \delta_{prim} \left(1 + \frac{3}{2}y \right) \quad (4.75)$$

Vemos que a perturbação permanece ao seu valor primordial, $\delta \approx \delta_{prim}$, durante o período de dominação de radiação. Em $t = t_{eq}$, temos $\delta = 5\delta_{prim}/2$.

Durante o período dominado por matéria, $y \gg 1$, a perturbação CDM cresce proporcional ao fator de escala,

$$\delta \propto y \propto a \propto t^{2/3} \quad (4.76)$$

4.3 Função de Crescimento

O modo de crescimento é obtido considerando a equação (4.29) e tentamos uma solução da forma $u = \delta/H$. Então a equação de evolução para u fica (DODELSON, 2003):

$$\frac{d^2 u}{da^2} + 3 \left[\frac{1}{a} + \frac{d \ln H}{da} \right] \frac{du}{da} = 0 \quad (4.77)$$

Que é uma equação de primeira ordem para $u' = y$, ou seja

$$\frac{dy}{da} + 3 \left[\frac{1}{a} + \frac{d \ln H}{da} \right] y = 0 \quad (4.78)$$

o termo entre parênteses pode ser reescrito como,

$$\frac{1}{(aH)} \frac{d(aH)}{da} = \frac{1}{a} + \frac{1}{H} \frac{dH}{da} \quad (4.79)$$

lembrando que, $d \ln H/da = 1/H dH/da$, a equação acima integrada nos fornece a seguinte solução,

$$\frac{du}{da} \propto (aH)^{-3} \quad (4.80)$$

Integrando novamente e lembrando que o fator de crescimento é uma segunda solução, ou seja, $\delta_+ = uH$, concluímos:

$$\delta_+ \propto H(a) \int^a \frac{da'}{[a'H(a')]^3} \quad (4.81)$$

4.4 Modelo de Colapso Esférico

Na ausência da constante cosmológica, o raio de uma casca esférica em uma perturbação de densidade simetricamente esférica evolui de acordo com a equação Newtoniana (MO HOUJUN; VAN DER BOSH; WHITE, 2010; PEREIRA, 2012),

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \quad (4.82)$$

onde M é a massa dentro da casca esférica. Essa equação pode ser integrada uma vez para dar

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{r} = \mathcal{E} \quad (4.83)$$

Para $\mathcal{E} \neq 0$, o movimento de uma casca de massa pode ser escrito de uma forma parametrizada que depende do sinal de \mathcal{E} . Consideramos o caso em que $\mathcal{E} < 0$, para o qual a casca de massa eventualmente colapsa. Sendo assim, a solução para a equação 4.83 é dada por

$$r = A(1 - \cos \theta) \quad (4.84)$$

$$t = B(\theta - \sin \theta) \quad (4.85)$$

onde A e B são constantes que são determinadas pelas condições iniciais. Em tempos iniciais, quando $\theta \ll 1$, expandimos as soluções até segunda ordem e obtemos:

$$r = A \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24} \right) \quad e \quad t = B \left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^5}{120} \right) \quad (4.86)$$

Substituindo nas (4.82) e (4.83), encontramos:

$$A^3 = GMB^2 \quad e \quad \mathcal{E} = -\frac{GM}{2A} \quad (4.87)$$

Para $\theta \rightarrow 0$,

$$r \rightarrow \frac{1}{2}A\theta^2 \quad e \quad t \rightarrow \frac{1}{6}B\theta^3 \quad (4.88)$$

Sendo assim, podemos escrever r como:

$$r^3 = \frac{9}{2}GMt^2 \quad (4.89)$$

Lembrando que $r^3 = 3M/4\pi\rho$, podemos reescrever a equação acima como

$$6\pi\rho Gt^2 = 1 \quad (4.90)$$

Para associar esse resultado com a expansão cósmica, $H^2 = 8\pi G\rho/3$, obtemos que $t = 2/3H$.

A medida que avançamos no tempo é necessário expandir a solução:

$$r = \frac{A}{2}\theta^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{12}\right) \quad (4.91)$$

$$t = \frac{B}{6}\theta^3 \left(1 - \frac{\theta^2}{20}\right) \quad (4.92)$$

Reescrevendo a equação (4.92) como,

$$\theta \approx \left(\frac{6t}{B}\right)^{1/3} \left[1 + \frac{1}{60} \left(\frac{6t}{B}\right)^{2/3}\right] \quad (4.93)$$

e substituindo em (4.91), considerando até ordem 2, concluímos que:

$$r \approx \frac{A}{2} \left(\frac{6t}{B}\right)^{2/3} \left[1 - \frac{3}{20} \left(\frac{6t}{B}\right)^{2/3}\right] \quad (4.94)$$

A massa do sistema é dada por, $M = (4\pi/3)\bar{\rho}r^3$. A densidade é alterada por um crescimento δ , e o raio δr , sendo assim a massa fica:

$$M = \frac{4\pi}{3}\bar{\rho}r^3(1 + \delta)(1 + \delta r)^3 \quad (4.95)$$

Igualando a massa inicial com a final vem: $(1 + \delta)(1 + \delta r)^3 = 1$. Expandindo em primeira ordem $(1 + \delta)(1 + \delta r)^3 = 1 + \delta + 3\delta r = 1$, concluímos que:

$$\delta \sim 3\delta r = -\frac{3}{20} \left(\frac{6t}{B}\right)^{2/3} \quad (4.96)$$

A massa atinge sua expansão máxima em $\theta = \pi$, sendo assim, $r = 2A$ e $t = \pi B$. E o colapso final ocorre em $\theta = 2\pi$, ou seja, $r = 0$ e $t = 2\pi B$. Substituindo esses valores na equação acima concluímos que:

$$\delta_t = 1,06 \quad (4.97)$$

$$\delta_c = 1,69 \quad (4.98)$$

O colapso ocorre quando a densidade atinge o valor crítico dado pela densidade crítica, $\delta_c = 1,69$. Por outro lado a perturbação atinge seu raio máximo quando $\delta_t = 1,06$.

4.5 Formalismo Press-Schechter

Evidências observacionais mostram que as galáxias residem em halos de matéria escura. Sendo que esses halos de matéria escura se formam através de instabilidade gravitacional. Como vimos, as perturbações de densidade crescem linearmente até atingirem uma densidade crítica. Esses halos continuam a crescer em massa (e tamanho), seja por acreção de material de sua vizinhança ou pela fusão com outros halos.

Para uma melhor compreensão da formação de estruturas é necessário compreender os halos de matéria escura, sendo assim é interessante estudar o espectro de massa (ou função de massa) dos halos, e isso é dado pela Teoria de Press-Schechter (PRESS; SCHECHTER, 1974).

Para obtermos a função de massa considere uma região de massa M e uma flutuação da densidade δ , de forma que a variação no raio é dada por:

$$\Delta R = \frac{1}{V} \int_{esf} \delta(\mathbf{r}) d^3r \quad (4.99)$$

Também consideramos uma função janela $W(r)$, que é igual a 1 no interior da esfera e 0 fora. Sendo assim,

$$\sigma_r^2 = \langle \Delta R^2 \rangle = \left\langle \frac{1}{V} \int d^3r \delta(\mathbf{r}) W(r) \frac{1}{V} \int d^3r' \delta^*(\mathbf{r}') W^*(r') \right\rangle \quad (4.100)$$

Concluimos:

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{V^2} \int d^3r d^3r' W(r) W(r') \xi(|r - r'|) \quad (4.101)$$

No espaço de Fourier temos que:

$$\Delta R = \frac{1}{V} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{2/3}} \delta_k W_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (4.102)$$

Sendo assim a variância é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{1}{V^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \langle \delta_k^2 \rangle \int d^3 k W_k W_k^* \quad (4.103)$$

Concluimos que:

$$\sigma^2 = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{P(k) |W_k|^2}{V^2} \quad (4.104)$$

Como a janela é esférica, no espaço de Fourier também será esférica:

$$W_k = \int d^3 r W(r) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{3V}{4\pi R^3} \int r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi e^{-ikr \cos \theta} \quad (4.105)$$

Concluimos que:

$$W_k = \frac{3V J_1(kR)}{kR} \quad (4.106)$$

Sendo assim, podemos reescrever a equação 4.104 como:

$$\sigma^2 = \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2} P(k) \left(\frac{3 \sin(kR) - 3kR \cos(kR)}{(kR)^3} \right)^2 \quad (4.107)$$

Os halos se formam através de picos das flutuações da matéria escura. Com isso, somente regiões com densidades de 1,69 irão colapsar. A fração de massa é dada pela seguinte distribuição Gaussiana:

$$f_{PS}(> M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1,69/\sigma}^{\infty} dx e^{-x^2/2} \quad (4.108)$$

chamando $\nu = 1,69/\sigma$, temos que:

$$\frac{df_{PS}}{dM} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dM} \left[\int_{\nu}^{\infty} dx e^{-x^2/2} \right] \quad (4.109)$$

$$\frac{df_{PS}}{dM} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d\nu}{dM} e^{-\nu^2/2} \quad (4.110)$$

A densidade numérica de todos os halos com massa M , é então:

$$\frac{dn}{dM} = \frac{\rho_0}{M} \frac{df_{PS}}{dM} = \frac{\rho_0}{M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d\nu}{dM} e^{-\nu^2/2} \quad (4.111)$$

sendo que,

$$\frac{d \log \nu}{d \log M} = \frac{M}{\nu} \frac{d\nu}{dM} \quad (4.112)$$

Concluimos:

$$\frac{dn}{dM} = \frac{\rho_0}{M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\nu}{M} \frac{d \log \nu}{d \log M} e^{-\nu^2/2} \quad (4.113)$$

Neste capítulo vimos como pequenas perturbações crescem para formar as estruturas que conhecemos hoje. Essas perturbações são diferentes dependendo da componente da densidade que levamos em conta no termo de expansão, e dessas componentes a que nos interessa é a energia escura, que será discutida com mais detalhes no próximo capítulo, e como a evolução temporal da equação de estado influência nessas estruturas.

4.6 Equação de Boltzmann

Ao consideramos somente os fluidos perfeitos que não interagem exceto gravitacionalmente não é necessário utilizar a equação de Boltzmann, como vimos em 4.1.1. No entanto, a mistura cósmica contém fluidos imperfeitos de forma que a descrição anterior é insuficiente. Quando os termos de interação ou o tensor de energia-momento dependem do momento \mathbf{P} , o fluido precisa ser descrito por sua função de distribuição $f(\mathbf{P}, \mathbf{x}, t)$. Radiação, bárions, e neutrinos são tais fluidos.

Usando a métrica perturbada dada pelo elemento de linha,

$$ds^2 = -(1 + 2\Psi)dt^2 + a^2(t)(1 + 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (4.114)$$

Dada uma função de distribuição de $f(\mathbf{P}, \mathbf{x}, t)$, o tensor energia-momento para um fluido

$$T_{\nu}^{\mu}(\mathbf{x}, t) = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int dP_1 dP_2 dP_3 \sqrt{-g} \frac{P^{\mu} P_{\nu}}{P^0} f(\mathbf{P}, \mathbf{x}, t) \quad (4.115)$$

onde $P^0 \equiv dt/d\lambda$, $P^i \equiv dx^i/d\lambda$, sendo que λ descreve o caminho da partícula, e g_i são os graus de liberdade. Para uma partícula de massa m temos $P^{\mu} P_{\mu} = -m^2$.

Podemos escolher a magnitude espacial e a direção do vetor unitário

$$p^2 \equiv g_{ij} P^i P^j \quad \hat{p}^i \equiv \frac{P^i}{|P|} \quad (4.116)$$

de forma que $\delta_{ij} \hat{p}^i \hat{p}^j = 1$. Sendo assim podemos escrever,

$$p^2 = a^2(1 + 2\Phi)(\delta_{ij} \hat{p}^i \hat{p}^j) P^2 = a^2(1 + 2\Phi) P^2 \quad (4.117)$$

que nos dá $|P| = p(1 - \Phi)/a$ a primeira ordem. Com isso o vetor espacial P^i pode ser escrito como

$$P^i = \frac{1 - \Phi}{a} p \hat{p}^i \quad (4.118)$$

Os fótons satisfazem a relação $g_{\mu\nu} P^{\mu} P^{\nu} = 0$, o que se traduz na seguinte condição

$$-(1 + 2\Psi)(P^0)^2 + p^2 = 0 \quad (4.119)$$

Obtemos a componente temporal de P^{μ} :

$$P^0 = p(1 - \Psi) \quad (4.120)$$

O processo de colisões entre as partículas pode ser descrito pela equação de Boltzmann

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i} \frac{d\hat{p}^i}{dt} = C[f] \quad (4.121)$$

onde $f(\mathbf{P}, \mathbf{x}, t)$ é a função de distribuição e $C[f]$ descreve o termo colisão. Na equação (4.121) devem ser avaliadas até a primeira ordem pela métrica perturbada. O último termo desaparece a nível linear, uma vez que tanto $\partial f/\partial \hat{p}^i$ e $d\hat{p}^i/dt$ são termos de primeira ordem. O termo colisão é diferente dependendo do tipo de espécies da matéria. Para fótons precisamos calculá-lo para o processo de interação Compton com prótons e elétrons (ou seja, com os bárions).

Vamos considerar a equação de Boltzmann para os fótons. De eqs. (4.118) e (4.120) segue-se que

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{P^i}{P^0} = \frac{1 - \Phi + \Psi}{a} \hat{p}^i \quad (4.122)$$

Da componente temporal da equação da geodésica $dP^0/d\lambda = -\Gamma_{\mu\nu}^0 P^\mu P^\nu$, obtemos a seguinte relação

$$\frac{dp}{dt} = -p \left(H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right) \quad (4.123)$$

O lado esquerdo de (4.121) fica então

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} - p \frac{\partial f}{\partial p} \left(H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right) \quad (4.124)$$

Lembre-se que no fundo imperturbável os fótons com a temperatura T obedecem a função de distribuição de Bose-Einstein,

$$f^{(0)}(t, p) = [\exp(p/T) - 1]^{-1} \quad (4.125)$$

onde foi negligenciado o potencial químico μ . Note que neste fundo a temperatura T depende apenas do tempo t : $T \propto 1/a(t)$. No Universo perturbado podemos definir a

perturbação de temperatura, $\Theta(t, \mathbf{x}, \hat{p}^i) \equiv \delta T/T$, que é escolhida como uma variável de perturbação de fótons em vez de $\delta_\gamma = 4\delta T/T$. Assumimos que Θ não depende da magnitude p já que no espalhamento Compton a magnitude do momento do fóton é aproximadamente conservado. A função de distribuição é dada pela

$$f(t, p, \mathbf{x}, \hat{p}) = \left\{ \exp \left[\frac{p}{T(t)[1 + \Theta(t, \mathbf{x}, \hat{p}^i)]} \right] - 1 \right\}^{-1} \quad (4.126)$$

Se $\Theta \ll 1$, podemos expandir sobre o valor de fundo $f^{(0)}$, utilizando a relação $T\partial f^{(0)}/\partial T = -p\partial f^{(0)}/\partial p$:

$$f = f^{(0)} - p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \Theta \quad (4.127)$$

que é válido em primeira ordem. Usando a equação (4.127) na (4.124) e considerando apenas os termos de primeira ordem, obtemos

$$\frac{df^{(1)}}{dt} = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \left[\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] \quad (4.128)$$

No espaço de Fourier, expandimos Θ como

$$\Theta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \Theta_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (4.129)$$

Em vez do vetor unitário $\hat{\mathbf{p}}$, podemos usar $\mu = \mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{p}}/k$, onde $k = |\mathbf{k}|$ é a magnitude do vetor de onda \mathbf{k} . É conveniente integrar a dependência angular de $\Theta(k)$ definindo os multipolos

$$\Theta_l \equiv \frac{1}{(-i)^l} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_l(\mu) \Theta(\mu) \quad (4.130)$$

onde \mathcal{P}_l é o polinômio de Legendre de ordem l . Os primeiros são polinômios $\mathcal{P}_0(\mu) = 1$, $\mathcal{P}_1(\mu) = \mu$, e $\mathcal{P}_2(\mu) = (3\mu^2 - 1)/2$. Assim, $l = 0$ define a monopolo Θ_0 .

O próximo passo é avaliar o termo colisão $C[f]$ para os fótons, determinado pelo processo de espalhamento Compton $e^- + \gamma \leftrightarrow e^- + \gamma$. O resultado final, é dado por:

$$C[f] = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} n_e \sigma_T [\Theta_0 - \Theta(\hat{p}) + \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v}_b] \quad (4.131)$$

onde n_e é a densidade de elétrons, σ_T é a seção de choque Thomson, e \mathbf{v}_b é a velocidade dos elétrons.

Juntando as equações 4.128 e 4.131, obtemos

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = n_e \sigma_T [\Theta_0 - \Theta(\hat{p}) + \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v}_b] \quad (4.132)$$

Com isso finalizamos a equação de Boltzmann para fótons dada pela equação 4.132.

5 MODELOS DE ENERGIA ESCURA

Sabemos que, no presente, o universo está acelerando, de acordo com os dados obtidos por medidas de distância de Luminosidade de Supernovas Tipo Ia (SN Ia), pelos grupos *Supernova Cosmology Project* (RIESS et al., 1998) e *High Redshift Supernova Team* (PERLMUTTER et al., 1999). A fonte para tal aceleração é o que chamamos de *Energia Escura*, da qual sua origem não foi ainda identificada. A energia escura se distingue das espécies comuns, tais como a matéria bariônica e da radiação, no sentido de que tem uma pressão negativa. Esta pressão negativa leva à expansão acelerada do Universo, contrabalançando a força gravitacional. As observações SN Ia mostraram que cerca de 70% da presente energia do Universo é composta por energia escura.

Dos modelos de energia escura que encontramos na literatura, o candidato mais simples seria a constante cosmológica, que é interpretada como a densidade de energia do vácuo, no entanto este sofre de dois problemas fundamentais, sendo assim outros modelos surgiram na tentativa de resolvê-los. Existem dois métodos, modificação da gravidade ou da *matéria*. Iremos seguir apenas com modificação de *matéria*, onde focamos em modelos de quinta-essência.

Neste capítulo apresentamos, na seção 5.1 um resumo sobre as evidências observacionais da energia escura, na seção 5.2, discutimos o candidato mais favorável pelas observações atuais, e seus problemas teóricos, em 5.3, discutimos um modelo alternativo da energia escura, que é caracterizado por uma equação de estado dependente do tempo, e finalizamos em 5.4, com algumas parametrizações da equação de estado da Energia Escura.

5.1 Evidências Observacionais

A existência da energia escura é suportada por um certo número de observações. Isso inclui (i) a idade do Universo em comparação com a idade de estrelas de baixa massa em aglomerados globulares, (ii) observações de supernovas tipo Ia (SN Ia), (iii) a radiação cósmica de fundo (RCF), (iv) oscilações acústicas de bárions (OAB), e (v) Estruturas em Larga Escala.

Como já vimos em um universo CDM a idade cósmica pode ser menor do que a idade das estrelas mais velhas. A energia escura pode explicar esta discrepância, pois a sua presença pode aumentar a idade cósmica.

5.1.1 Observações de Supernovas

A explosão de estrelas como supernovas é extremamente luminosa e libera grande quantidade de radiação. As supernovas podem ser classificadas de acordo com as linhas de absorção de elementos químicos. Se o espectro de uma supernova inclui uma linha espectral do hidrogênio, é classificada como tipo II. Caso contrário, é chamada de Tipo I. A explosão do Tipo Ia ocorre quando a massa de uma anã branca num sistema binário ultrapassa o limite de Chandrasekhar. Uma vez que a luminosidade absoluta de tipo Ia é quase constante no pico de brilho, a distância de uma SN Ia pode ser determinada medindo a sua luminosidade observada (aparente). Assim, a SN Ia é como uma *vela padrão*, através da qual a distância de luminosidade pode ser medida por observação.

Considere dois objetos estelares cujos fluxos aparente são dados por F_1 e F_2 . As magnitudes aparentes dessas estrelas (m_1 e m_2) estão relacionadas com os fluxos de acordo com

$$m_1 - m_2 = -\frac{5}{2} \log_{10} \left(\frac{F_1}{F_2} \right) \quad (5.1)$$

A equação acima nos diz que a magnitude aparente é menor para os objetos mais brilhantes.

Nós definimos a magnitude absoluta M em termos da magnitude aparente m e a distância de luminosidade d_L :

$$m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{10 \text{ pc}} \right) \quad (5.2)$$

Em outras palavras, o valor absoluto corresponde ao valor aparente que o objeto teria se fosse localizado a uma distância de luminosidade $d_L = 10 \text{ pc}$ do observador.

A magnitude absoluta da SN Ia é cerca de $M = -19$ no pico de brilho. Uma vez que esse pico é o mesmo para qualquer SN Ia sob a suposição de *velas padrão*, a distância de luminosidade $d_L(z)$ é obtida a partir da eq. 5.2, por meio da observação da magnitude aparente, m . O *redshift* correspondente da SN Ia pode ser encontrado através da medição do comprimento de onda da luz λ . As observações de muitas SN Ia fornece a dependência da distância luminosidade d_L em termos de z .

5.1.2 Radiação Cós mica de Fundo

As observações de anisotropias na temperatura da RCF fornecem outro teste independente para a existência da energia escura. O céu mais antigo que podemos ver é o chamado superfície do último espalhamento em que os elétrons estão presos por hidrogênio para formar átomos. Os fótons estavam fortemente acoplados a bárions e elétrons antes da época do desacoplamento em $z \simeq 1100$ que marca o instante em que o universo torna-se transparente.

Todas as componentes de matéria do Universo (matéria escura, neutrinos, ...) são acopladas a gravidade através das equações de Einstein. A parte escalar das perturbações é a principal fonte para as anisotropias de temperatura da RCF. As perturbações vetoriais decaem no Universo em expansão, enquanto as perturbações tensoriais contribuem para as anisotropias CMB através do espectro de ondas gravitacionais primordiais.

A presença da energia escura afeta as anisotropias da CMB. O primeiro efeito é a alteração da posição dos picos acústicos provenientes da modificação da distância de diâmetro angular. O segundo efeito é o chamado efeito Sachs-Wolfe integrado causado pela variação do potencial gravitacional. Uma vez que esta última está limitada a escalas muito grandes, o primeiro efeito é tipicamente mais importante.

A temperatura da RCF em um ponto no céu é denotado por $T(\theta, \phi)$, e as flutuações na temperatura são

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (5.3)$$

onde $Y_{lm}(\theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos, essa expansão é útil já que $\delta T/T$ é definido sobre a superfície de uma esfera. Os harmônicos esféricos $Y_{lm}(\theta, \phi)$ satisfazem a condição de normalização

$$\int d\Omega Y_{lm}(\hat{n}) Y_{l'm'}^*(\hat{n}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (5.4)$$

Os coeficientes a_{lm} são assumidos como sendo estatisticamente independentes. Isto significa que o valor médio de a_{lm} é zero ($\langle a_{lm} \rangle = 0$) com uma variância dada por

$$C_l \equiv \langle |a_{lm}|^2 \rangle \quad (5.5)$$

Podemos expressar C_l em termos do campo de temperatura $\Theta_l(k)$, no espaço de Fourier

$$C_l = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 |\Theta_l(k)|^2 \quad (5.6)$$

O momento de multipolo C_l é uma medida das flutuações de temperatura em escalas angulares $\theta = \pi/l$. As flutuações de densidade da RCF são mais convenientes se escritas como

$$\Delta_T \equiv \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l \langle T \rangle^2 \quad (5.7)$$

O comprimento de onda co-móvel correspondente aos picos acústicos pode ser aproximadamente estimado como $\lambda_c = 2\pi/k = (2/n)r_s$. Então o ângulo característico para a localização de picos:

$$\theta_A \equiv \frac{r_s(z_{dec})}{d_A^{(c)}(z_{dec})} \quad (5.8)$$

onde z_{dec} é o *redshift* na época do desacoplamento e $d_A^{(c)}$ é o diâmetro angular co-móvel definido por

$$d_A^{(c)}(z) \equiv \frac{d_A(z)}{a} = (1+z)d_A(z) \quad (5.9)$$

O multipolo l correspondente ao ângulo (5.8) é

$$l_A = \frac{\pi}{\theta_A} = \pi \frac{r_s(z_{dec})}{d_A^{(c)}(z_{dec})}. \quad (5.10)$$

A distância diâmetro angular pode ser expressa como

$$d_A^{(c)}(z_{dec}) = \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_m^{(0)}}} \mathcal{R} \quad (5.11)$$

onde \mathcal{R} é o chamado *shift parameter* da RCF definido por

$$\mathcal{R} = \sqrt{\frac{\Omega_m^{(0)}}{\Omega_K^{(0)}}} \sinh \left(\sqrt{\Omega_K^{(0)}} \int_0^{z_{dec}} \frac{dz}{E(z)} \right) \quad (5.12)$$

O parâmetro \mathcal{R} da RCF definido na eq.(5.12) é afetado pela história da expansão cósmica a partir do desacoplamento até o presente. A presença da energia escura leva a uma mudança de \mathcal{R} em relação ao modelo CDM, mudando assim o valor de l_A . Por isso, o parâmetro \mathcal{R} pode ser usado para colocar restrições sobre a energia escura.

5.2 Modelo Λ CDM

O mais simples candidato a energia escura é a constante cosmológica Λ , que chamamos assim porque sua densidade de energia é constante no tempo e no espaço. De fato o modelo Λ CDM mostrou ser consistente com um grande número de observações. Apesar de sua simplicidade, é geralmente difícil de explicar por que a escala de energia da constante cosmológica necessária para a aceleração cósmica, hoje, é muito pequena em relação ao previsto pela física de partículas, que é de cerca de 10^{121} vezes maior do que a densidade de energia observada.

5.2.1 O Problema de Ajuste Fino

Interpretamos Λ como a densidade de energia do vácuo, que atua nas equações de campo como um fluido perfeito, com uma equação de estado $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. A energia de ponto-zero de um campo de massa m com um momento k e frequência ω é dada por $E = \hbar\omega/2 = \sqrt{k^2 + m^2}/2$. Somando todas as energias até um corte em k_{max} , nós obtemos a densidade de energia do vácuo

$$\rho_{vac} = \int_0^{k_{max}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + m^2} \approx \frac{k_{max}^4}{16\pi^2} \quad (5.13)$$

Para o caso da relatividade geral, essa escala de corte é dada pela escala de Planck, ou seja, $k_{max} = m_{planck} \sim 10^{19} GeV$, e com isso concluímos que:

$$\rho_{vac} \simeq 10^{74} GeV \quad (5.14)$$

No entanto, através de observações atuais, temos que a densidade de energia escura é dada por:

$$\rho_{DE}^{(0)} = \Omega_{DE}^{(0)} \rho_c^{(0)} = \Omega_{DE} \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 10^{-47} GeV \quad (5.15)$$

Sendo assim, há uma diferença de 121 ordens de grandeza entre a observação e o previsto pela Teoria Quântica de Campos.

5.2.2 O Problema da Coincidência

O segundo problema da constante cosmológica como energia escura é a de que este valor específico é quase idêntico a um número totalmente não relacionado, a densidade de energia associada a matéria. Em outras palavras, $\Omega_\Lambda^{(0)}$ é duplamente improvável: porque é muito pequeno em termos absolutos e porque o seu valor coincide (por um fator de dois ou três) com $\Omega_m^{(0)}$, sem nenhum motivo aparente. A densidade de matéria $\rho_m = \rho_m^{(0)}(1+z)^3$ coincide com a densidade cosmológica $\rho_\Lambda^{(0)}$ a (AMENDOLA; TSUJIKAWA, 2010):

$$z_c = \left(\frac{\Omega_\Lambda^{(0)}}{1 - \Omega_\Lambda^{(0)}} \right)^{1/3} - 1 \quad (5.16)$$

onde $\Omega_\Lambda^{(0)} = 0.7$, e $z_c \approx 0.3$. Este problema é chamado o *problema da coincidência*.

5.3 Modelo $\phi(t)$ CDM

Nós usamos o termo *quinta-essência* para designar um campo escalar canônico ϕ com um potencial $V(\phi)$ que interage com todas as outras componentes apenas através da gravidade padrão. O modelo de quinta-essência é, portanto, descrito pela ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} R + \mathcal{L}_\phi \right] + S_M, \quad \mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \quad (5.17)$$

onde $\kappa^2 = 8\pi G$ e R é o escalar de Ricci.

Nós consideramos um fluido perfeito com densidade de energia ρ_M , pressão P_M , e equação de estado $w_M = P_M/\rho_M$. Aqui o índice M é utilizado para um fluido perfeito geral (incluindo o caso de um fluido total) sem especificar matéria não-relativística ou radiação. Mais tarde, devemos utilizar o índice m para especificar matéria não-relativística. O fluido satisfaz a equação de continuidade, isto é,

$$\dot{\rho}_M + 3H(\rho_M + P_M) = 0 \quad (5.18)$$

O tensor de energia-momento da quinta-essência é calculado utilizando a seguinte relação:

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\phi)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (5.19)$$

Concluimos:

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi) \right] \quad (5.20)$$

Em um fundo FRW, a densidade de energia ρ_ϕ e a pressão P_ϕ do campo são

$$\rho_\phi = T_{00}(\phi) = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad P_\phi = \frac{1}{3}T_{ii}^{(\phi)} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (5.21)$$

o que nos dá a seguinte equação de estado

$$\omega_\phi \equiv \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} \quad (5.22)$$

No Universo plano ($K = 0$) as seguintes equações de movimento seguem das equações (2.42) e (2.43):

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}(\rho_{DE} + \rho_M) = \frac{\kappa^2}{3} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \rho_M \right] \quad (5.23)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2}(\rho + P) = -\frac{\kappa^2}{2} \left(\dot{\phi}^2 + \rho_M + P_M \right) \quad (5.24)$$

onde $\kappa^2 = 8\pi G$, $\rho = \rho_\phi + \rho_M$, e $P = P_\phi + P_M$. A variação da ação (5.17) com relação a ϕ temos que

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 \quad (5.25)$$

onde $V_{,\phi} \equiv dV/d\phi$. A equação de Klein-Gordon (5.25) pode ser igualmente obtida por meio da equação de continuidade $\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + P_\phi) = 0$, ou por combinação das equações (5.18), (5.23) e (5.24).

Durante a época de dominação da radiação ou da matéria, a densidade de energia do fluido ρ_M domina sobre o da quintessência, isto é $\rho_M \gg \rho_\phi$. Exigimos que ρ_ϕ acompanhe ρ_M de modo que a densidade de energia escura emerge em momentos tardios. Se este comportamento de rastreamento ocorre ou não depende da forma do potencial $V(\phi)$. Se o potencial é íngreme, de modo que a condição $\dot{\phi}^2 \gg V(\phi)$ é sempre satisfeita, a equação de estado do campo é dada por $\omega_\phi \simeq 1$ a partir de Eq.(5.22). Neste caso, a densidade de energia do campo, evolui como $\rho_\phi \propto a^{-6}$ o que diminui muito mais rapidamente do que a densidade do fluido de fundo.

Exigimos a condição $\omega_\phi < -1/3$ para realizar a aceleração tardia do tempo cósmico, que se traduz na condição $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$. Por isso, o potencial escalar precisa ser suficientemente raso para o campo evoluir lentamente ao longo do potencial.

5.4 Modelos $\omega(t)$ CDM

Estamos interessados em obter a equação de estado para a energia escura, isso pode ser feito através de observações de SN Ia, onde estimamos o parâmetro de Hubble $H(z)$ ao medir a distância de luminosidade $d_L(z)$. Com isso podemos reconstruir a equação de estado da energia escura $\omega_{DE}(z)$, no caso da quinta-essência podemos também encontrar o valor do potencial $V(\phi)$. No entanto esse método tem seus problemas, e uma forma de resolver é parametrizando a equação de estado com relação ao tempo, ou *redshift*. Podemos escrever essa parametrização da seguinte forma (AMENDOLA; TSUJIKAWA, 2010),

$$\omega_{DE}(z) = \sum_{n=0} \omega_n x_n(z) \quad (5.26)$$

onde ω_n é uma constante que tem seus valores baseados nas observações, e $x_n(z)$ são funções dependentes do *redshift*.

Nas seguintes subseções iremos ver diversas funções de $x_n(z)$ que especificam diferentes parametrizações da equação de estado, para descrever o *fluido quinta-essência*, e analisamos cada uma.

5.4.1 Parametrização Generalizada

A Parametrização Generalizada é uma equação de estado que engloba algumas outras parametrizações discutidas na literatura, como mostrado abaixo (BARBOZA et al., 2009):

Parametrização Linear: A equação de estado para a parametrização linear, é dada pelos autores Huterer e Cooray (1999), Weller e Albrecht (2002) e Linder (2002):

$$\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 z \quad (5.27)$$

onde definimos que a função é $x_n(z) = z$, sendo que ω_0 e ω_1 são constantes. No entanto essa equação é aplicável até um determinado valor de z , isso pode ser encontrado considerando que a densidade de energia escura deve ser subdominante no passado, esse valor está em torno de $z \sim 1$. Devido a aplicação somente em baixos redshifts não podemos utilizar o parâmetro R da CMB para restringir os valores.

Parametrização CPL: Essa parametrização foi proposta por Chevallier e Polarski (2000), e Linder (2002) dada por,

$$\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \frac{z}{1+z} \quad (5.28)$$

Essa equação generaliza o caso para a parametrização linear, e estende o intervalo para redshifts mais altos, que nos permite aplica-la até o redshift do último espalhamento $z=1100$, e com isso podemos utilizar o parâmetro R da CMB para impor vínculos na equação de estado.

Parametrização Logarítmica: Este modelo foi proposto por Efstathiou (1999), e sua equação de estado é

$$\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \ln(1+z) \quad (5.29)$$

essa parametrização é bem aproximada para alguns potenciais associados a campos

escalares.

A equação que generaliza essas três foi proposta por Barboza et al. (2009), em que

$$\omega(z) = \omega_0 - \omega_\beta \frac{(1+z)^{-\beta} - 1}{\beta} \quad (5.30)$$

Nós podemos ver que as parametrizações anteriores são obtidas impondo os seguintes limites na equação (5.30), para a linear temos, $\beta \rightarrow -1$, para a Logarítmica, $\beta \rightarrow 0$, e para a CPL, $\beta \rightarrow +1$, enquanto que $\forall \beta \neq (-1, 0, +1)$ essa parametrização admite um domínio de soluções muito maior.

A tabela 5.1, mostra em detalhes os valores dos parâmetros correspondentes a essa parametrização, sendo que os modelos (5) e (6), são dados por uma solução mais geral.

Tabela 5.1 - Modelos para a Parametrização Generalizada (BARBOZA et al., 2009).

Modelos	Parametrização	β	w'_0	w_β
2	Log.	0.0	-1.00	-0.29
3	Linear	-1.0	-0.98	0.10
4	CPL	+1.0	-0.98	0.10
5	Generalizada (1)	-0.5	-0.98	0.10
6	Generalizada (2)	0.1	-1.00	0.28

5.4.2 Parametrização Oscilante

Com intuito de resolver o problema da coincidência referente a cosmologia Λ CDM, a parametrização oscilante foi introduzida. A Equação de estado oscilante é (PACE et al., 2012):

$$\omega(a) = \omega_0 - A \text{sen}(B \ln a + \theta) \quad (5.31)$$

onde $a = 1/(1+z)$ é o fator de escala, A determina a amplitude das oscilações, B é a frequência enquanto que θ é a fase. Como podemos ver, o valor da equação de estado hoje é, $\omega(a=1) = \omega_0 - A \text{sen}\theta$, que é igual a ω_0 se a fase é $\theta = 0$.

Na Tabela 5.2 resumimos os valores para os parâmetros que caracterizam cada mo-

Tabela 5.2 - Modelos para a Parametrização Oscilante (PACE et al., 2012).

Modelos	ω_0	A	B	θ
7	-0.9	0.07	5.72	0
8	-0.9	0.07	2.86	0
9	-0.9	0.15	1.00	0
10	0.0	1.0	0.06	$\pi/2$
11	-1.0	1.5	0.032	$5\pi/18$

delo. Os modelos (7) e (8) têm a mesma amplitude, mas a frequência de oscilações muda por um fator de dois. Modelo (9) tem amplitude duas vezes maior e as oscilações são menos frequentes, com respeito aos modelos anteriores. Estes modelos permitem um estudo comparativo sobre a influência da amplitude e da frequência das oscilações. Modelos (10) e (11) tem um período muito longo e as oscilações não são ainda visíveis ao longo da história cósmica. Modelos (9) e (11) são também caracterizados por passar a barreira fantasma, $\omega = -1$, uma característica que corresponde ao melhor ajuste a distância luminosidade de SN Ia.

5.4.3 Efeito Casimir

O efeito de Casimir corresponde à força que age entre duas placas paralelas não carregadas. É usualmente atribuído à alteração no ponto zero da energia do vácuo electromagnético que se prolonga entre as placas em relação ao vácuo contido na mesma região na ausência de placas. A energia do ponto zero resulta da quantização do campo eletromagnético. Esta energia não é diretamente observável, mas a força entre as duas placas resulta da alteração da energia do ponto zero contido entre as placas quando estas últimas são afastadas uma da outra.

Uma outra equação de estado é obtida ao considerar as propriedades quânticas do vácuo usando o Efeito Casimir. No contexto da cosmologia, o efeito Casimir contribui no termo de expansão com a^{-4} (PACE et al., 2010),

$$E(a) = \sqrt{\Omega_m^{(0)} a^{-3} + \Omega_Q^{(0)} - \Omega_{cas}^{(0)} a^{-4}} \quad (5.32)$$

onde $\Omega_{cas}^{(0)}$ é a densidade da componente Casimir no tempo presente. Interpretando como uma equação de estado dependente do tempo, podemos usar a equação acima para encontrar a equação de estado, dada por

$$\omega(a) = -\frac{1}{3} \frac{3\Omega_Q^{(0)} a^4 + \Omega_{cas}^{(0)}}{\Omega_Q^{(0)} a^4 - \Omega_{cas}^{(0)}} \quad (5.33)$$

onde o valor de $\Omega_{cas}^{(0)}$ é descrito na tabela 5.3 para cada modelo adotado.

Tabela 5.3 - Modelos que incluem o efeito Casimir (PACE et al., 2012).

Modelos	ω_{cas}
12	$\Omega_{cass} = -3.5 \times 10^{-4}$
13	$\Omega_{cass} = -3.5 \times 10^{-3}$
14	$\Omega_{cass} = -3.5 \times 10^{-2}$

5.4.4 Modelo independente de Energia Escura

O último modelo que se deseja investigar nesse trabalho é um modelo independente de energia escura proposto por Corasaniti e Copeland (2003). Como mostrado antes a equação de estado depende do potencial, e estes são os responsáveis pela forma de parametrização. Neste caso, a equação proposta generaliza um conjunto de potenciais. Iremos analisar seis modelos que são descritos por uma única equação de estado dada por,

$$\omega(a) = \omega_0 + (\omega_m - \omega_0) \frac{1 + e^{a_m/\Delta_m}}{1 + e^{-(a-a_m)/\Delta_m}} \frac{1 - e^{(a-1)/\Delta_m}}{1 - e^{1/\Delta_m}} \quad (5.34)$$

Tabela 5.4 - Modelo Independente de Energia escura (PACE et al., 2012).

Modelos	ω_0	ω_m	a_m	Δ_m
15	-0.4	-0.27	0.18	0.5
16	-0.79	-0.67	0.29	0.4
17	-1.0	0.01	0.19	0.043
18	-0.96	-0.01	0.53	0.13
19	-1.0	0.1	0.15	0.016
20	-0.82	-0.18	0.1	0.7

Na Tabela 5.4 mostramos os parâmetros que descrevem esta equação de estado, os modelos (15) e (16), também conhecidos como modelo INV, correspondem ao potencial dado pela lei de potência inversa, $V(\phi) \sim 1/\phi^\alpha$; o modelo (17), SUGRA

(supergravity), com um potencial $V(\phi) \sim 1/\phi^\alpha e^{\phi^2/2}$; o modelo (18), 2EXP, surge de um potencial com duas funções exponenciais, $V(\phi) \sim e^{-\alpha\phi} + e^{\beta\phi}$; o modelo (19), é também chamado AS (Albrecht-Skordis model) e o último é o modelo CNR, proposto por Copeland et al. (2000).

Vimos nesse capítulo diferentes parametrizações que descrevem o modelo teórico de energia escura chamado quinta-essência, essas equações de estado são dependentes do tempo ao contrário da constante cosmológica que tem uma equação de estado constante. No próximo capítulo iremos analisar a influência dessas equações de estado na Taxa Cósmica de Formação Estelar (TCFE) confrontando com os dados observacionais e o modelo Λ CDM.

6 OBTENDO A TAXA CÓSMICA DE FORMAÇÃO ESTELAR A PARTIR DO CENÁRIO HIERÁRQUICO

A história da formação estelar no Universo é um observável fundamental para a compreensão do conjunto e evolução das galáxias, a produção de radiação ionizante e do enriquecimento químico de gás. Entre os diferentes rastreadores da Taxa Cósmica de Formação Estelar (TCFE), apenas dois tem relevância em alto *redshift* são a medida de densidade de luminosidade a partir de *surveys* de galáxias, e a taxa de longa duração das explosões de raios gama (LGRBs).

Vimos no capítulo 4 que a função de massa de halos foi derivada por Press e Schechter (1974). A medida que os halos colapsam agregam material de sua vizinhança. Sendo assim para obtermos a TCFE, precisamos obter a quantidade de gás que entra nos halos, que é descrita por um termo de *infall*. Por outro lado, a perda de material por eventos como ventos e explosão de supernovas corresponderia a um termo de *outflow*.

Começamos definindo a Função de massa proposta por Sheth e Tormen (1999), que apresenta melhor concordância com simulações numéricas de formação de estruturas. Usaremos essa função no lugar da função de massa de Press-Schechter (PEREIRA; MIRANDA, 2010):

$$F(\nu) = A \left(1 + \frac{1}{(a\nu)^p} \right) \left(\frac{\nu}{2} \right)^{1/2} \frac{\exp(-a\nu/2)}{\sqrt{\pi}} \quad (6.1)$$

onde $\nu = [\delta_c(z)/\sigma(M)]^2$, e $A=0,3222$, $a=0,707$, $p=0,3$ são constantes. A densidade numérica de halos é dada por,

$$n(M, z) = 2 \frac{\rho_0}{M^2} \left| \frac{d \ln(\sigma(M))}{d \ln(M)} \right| F(\nu) \quad (6.2)$$

A equação que governa a quantidade total de gás nos halos é dada pela seguinte relação (MIRANDA, 2012):

$$\dot{\rho}_g = -\frac{d^2 M_*}{dV dt} + \frac{d^2 M_{ej}}{dV dt} + a_b(t) \quad (6.3)$$

o primeiro termo representa as estrelas que são formadas a partir do gás contido no halo.

Usando a Lei de Schmidt (SCHMIDT, 1959), temos:

$$\frac{d^2 M_*}{dV dt} = \Psi(t) = k \rho_g \quad (6.4)$$

sendo $d^2 M_*/dV dt$ a taxa de conversão de gás em estrelas, e ρ_g é densidade do gás, e $k = 1/\tau_s$, em que τ_s é a escala característica de tempo para a formação estelar.

O segundo termo é a massa ejetada pelas estrelas por ventos e supernovas, é (PEREIRA; MIRANDA, 2010):

$$\frac{d^2 M_{ej}}{dV dt} = \int_{m(t)}^{140 M_\odot} (m - m_r) \Phi(m) \Psi(t - \tau_m) dm \quad (6.5)$$

No limite inferior da integral acima, $m(t)$ é a massa da estrela com tempo de vida t . No integrando, m_r é a massa da estrela remanescente.

O último termo é a taxa de acreção bariônica. A fração de bárions é obtida considerando que a densidade de bárions é proporcional a densidade de matéria escura, podemos calcular a fração usando a função de massa de Sheth e Tormem (PEREIRA; MIRANDA, 2010):

$$f_b = \frac{\int_{M_{min}}^{M_{max}} n(M, z) M dM}{\int_0^\infty n(M, z) M dM} \quad (6.6)$$

Os limites de integração de (6.6) representam as massas mínima e máxima de halos formados. Nós consideramos $M_{min} = 10^6 M_\odot$ (aproximadamente a massa de Jeans na recombinação) e $M_{max} = 10^{18} M_\odot$ (vide (PEREIRA; MIRANDA, 2010)).

Sendo assim a taxa de acreção é dada por

$$a_b(t) = \Omega_b \rho_c \left(\frac{dt}{dz} \right)^{-1} \left| \frac{df_b}{dz} \right| \quad (6.7)$$

lembrando que ρ_c é a densidade crítica, e dt/dz é a idade do universo dada pela equação 2.56 podemos reescrever:

$$\left| \frac{dt}{dz} \right| = \frac{9.78h^{-1}}{(1+z)E(z)} Gyr \quad (6.8)$$

onde $H_0 = 9.78h^{-1}$ Gyr e $E(z)$ é o termo de expansão.

Além disso na (6.5), o termo $\Phi(m)$ é a Função de massa inicial (IMF) proposta por Salpeter (1955):

$$\Phi(m) = Am^{-(1+x)} \quad (6.9)$$

onde x é a inclinação da IMF, sendo que $\phi(m)$ é normalizada através da relação:

$$A \int_{0.1M_{\odot}}^{140M_{\odot}} m\Phi(m)dm = 1 \quad (6.10)$$

Integração numérica da equação (6.3) nos fornece o valor de ρ_g , e assim podemos obter a taxa cósmica de formação estelar pela (6.4). Basta para isso reescrever $d^2M_*/dVdt$ como $\dot{\rho}_*$.

6.1 Resultados

Consideramos para todos os modelos de energia escura os seguintes parâmetros, $\Omega_m = 0,279$, $\Omega_b = 0,0463$, $\Omega_{DE} = 0,721$, $h = 0,7$ e $\sigma_8 = 0,821$ obtidos pelo WMAP-9 (BENNETT et al., 2013). Outros parâmetros importantes como: tempo de formação estelar foi adotado o valor de $\tau_s = 2,0Gyr$; usamos a massa mínima para os halos $M_{min} = 10^6 M_{\odot}$; e uma inclinação da IMF $x = 1,35$. Nosso objetivo é analisar a influência que diferentes equações de estado tem na TCFE, identificando dessa forma possíveis desvios em relação a equação de estado da constante cosmológica.

Na Tabela 6.1 apresentamos os valores de $\langle \varepsilon_* \rangle$ que representa a eficiência média de formação estelar dos halos dentro do intervalo em *redshift* [0-20], e o valor do *redshift* quando a taxa de formação estelar atinge o seu valor máximo para cada modelo proposto. Seguidos pelos gráficos, sendo que usamos o Modelo Λ CDM, que descreve uma equação de estado constante, como uma referência para verificar se as diferentes parametrizações de quinta-essência, em termos de equação de estado dependente do tempo, podem dar uma assinatura na TCFE diferente da dada pela constante cosmológica, e que ainda esteja em acordo com os dados observacionais

de $\dot{\rho}_*(z)$ até *redshift* ~ 5 .

Os dados observacionais utilizados foram retirados do trabalho de Hopkins (2004), Hopkins (2007), que consiste em medições de densidade de galáxias.

Tabela 6.1 - Taxa Cósmica de Formação Estelar para os Modelos Energia Escura. A Parametrização Generalizada é dada pelos modelos (2)-(6) vide (BARBOZA et al., 2009), para a parametrização oscilante, modelos de (7)-(11) (PACE et al., 2012), para o Efeito Casimir e o modelo aproximado (PACE et al., 2010) temos (12)-(20).

Modelo	Parametrização	$\langle \varepsilon_* \rangle$	z_*
Λ CDM	$\omega = -1$	0.320	3.51
2	Log	0.321	3.50
3	Linear	0.318	3.47
4	CPL	0.321	3.51
5	Generalizada (1)	0.319	3.50
6	Generalizada (2)	0.316	3.48
7	Oscilante (1)	0.314	3.50
8	Oscilante (2)	0.313	3.50
9	Oscilante (3)	0.312	3.50
10	Oscilante (4)	0.320	3.51
11	Oscilante (5)	0.343	3.48
12	Casimir 1	0.320	3.48
13	Casimir 2	0.325	3.32
14	Casimir 3	0.353	2.43
15	INV1	0.311	3.33
16	INV2	0.314	3.50
17	2EXP	0.320	3.51
18	AS	0.319	3.51
19	CNR	0.320	3.51
20	SUGRA	0.310	3.50

Nas Figuras 6.1 e 6.2 são apresentadas as TCFE para a parametrização Generalizada, dada pela equação (5.30), juntamente com o modelo Λ CDM para comparação. Os pontos observacionais foram obtidos do trabalho de Hopkins (2004), Hopkins (2007).

Como podemos ver pela Figura 6.1, nenhum dos modelos levando em consideração a parametrização generalizada, ou seja, os modelos (2)-(6) tem uma diferença significativa na TCFE em comparação com o modelo Λ CDM. No entanto, podemos verificar pequenas diferenças no caso do modelos (3) e (6), ambos tem uma TCFE um pouco menor que o modelos Λ CDM, na normalização são os que tiveram maior diferença para essa parametrização e o *redshift* em que a TCFE é máxima também é diferente para ambos os modelos com relação a constante cosmológica. Levando em consideração os pontos observacionais nenhum dos modelos pode ser excluído, já que todos concordam com esses dados.

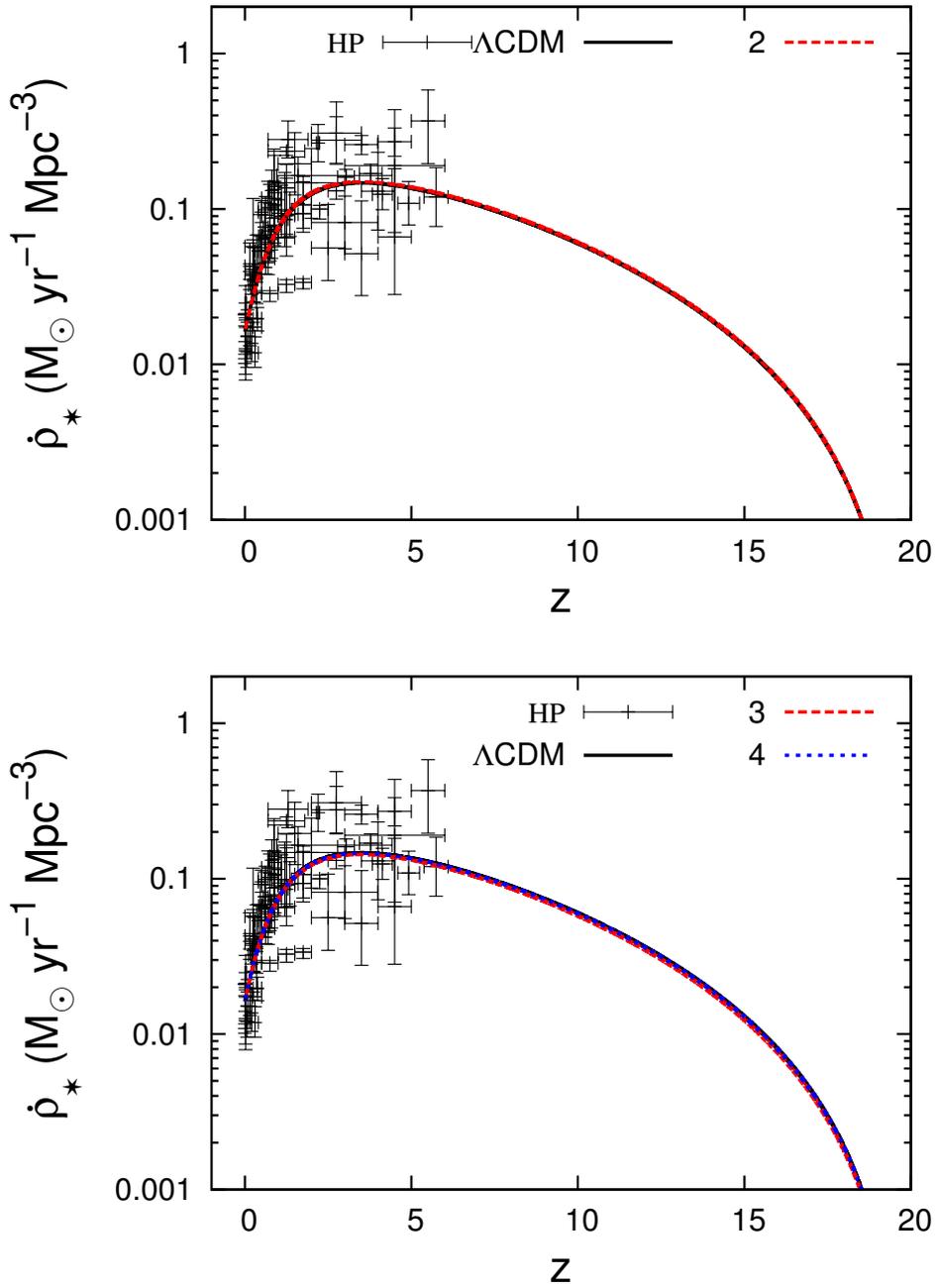


Figura 6.1 - TCFE para a Parametrização Generalizada

Na Figura 6.3, analisamos a parametrização oscilante, a caracterização de cada modelo assim como os respectivos valores para a normalização da TCFE e o redshift em que atinge o valor máximo é dado pela tabela 6.1. Novamente os pontos observacionais foram obtidos do trabalho de Hopkins (2004), Hopkins (2007), e todos os modelos estão de acordo com esses dados.

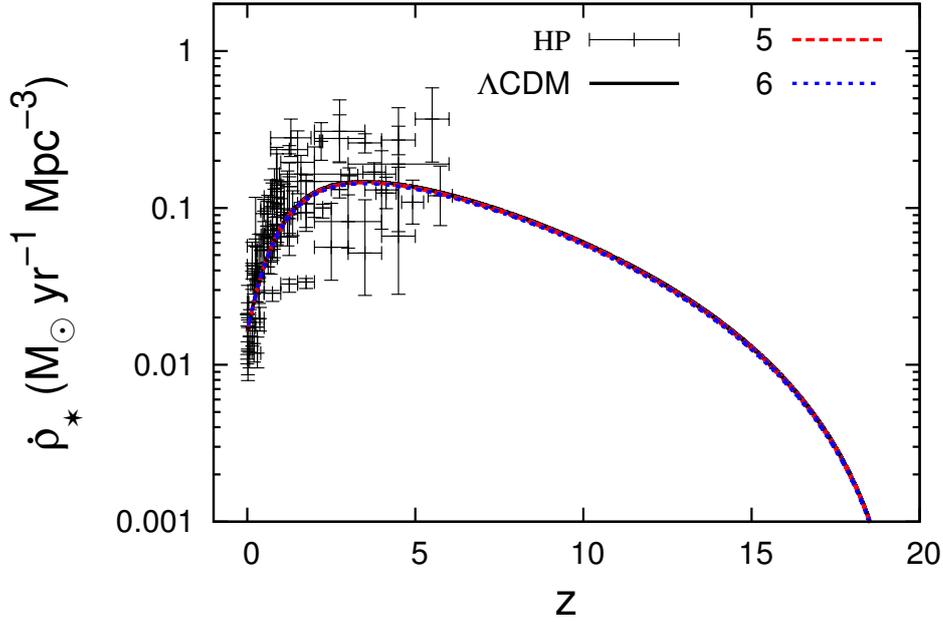


Figura 6.2 - TCFE para a Parametrização Generalizada

Para os Modelos (7)-(9), possuem características bem próximas entre eles, e em comparação com o modelo Λ CDM não tem muitas diferenças. Como analisado por Pace et al. (2012), o termo de expansão para esses modelos é maior em comparação com $H_{\Lambda\text{CDM}}$, o que podemos esperar um termo de *infall* maior do que para a constante cosmológica, no entanto essa variação é bem pequena para baixos *redshift* chegando a um valor máximo de $H_{DE}/H_\Lambda = 1.04$. Note que, na figura 6.3 existe uma pequena variação, sendo a TCFE um pouco menor, para esses modelos em comparação com a TCFE para a constante cosmológica.

Para o modelo (10), não é possível verificar nenhuma diferença com relação ao modelo Λ CDM, tanto a normalização e o z_* tem exatamente os mesmos valores. Isso era de se esperar como mostrado por Pace et al. (2012), esse modelo se comporta de forma idêntica com a constante cosmológica.

No caso do modelo (11) que como vemos abaixo apresentou maior diferença ao Λ CDM, como pode ser visto pelo termo de expansão apresentou uma variação mais significativa que os modelos anteriores, $H_{DE}/H_\Lambda = 0.94$ como esse termo é menor, ocorre o oposto dos modelos acima, ou seja, a TCFE da constante cosmológica é menor.

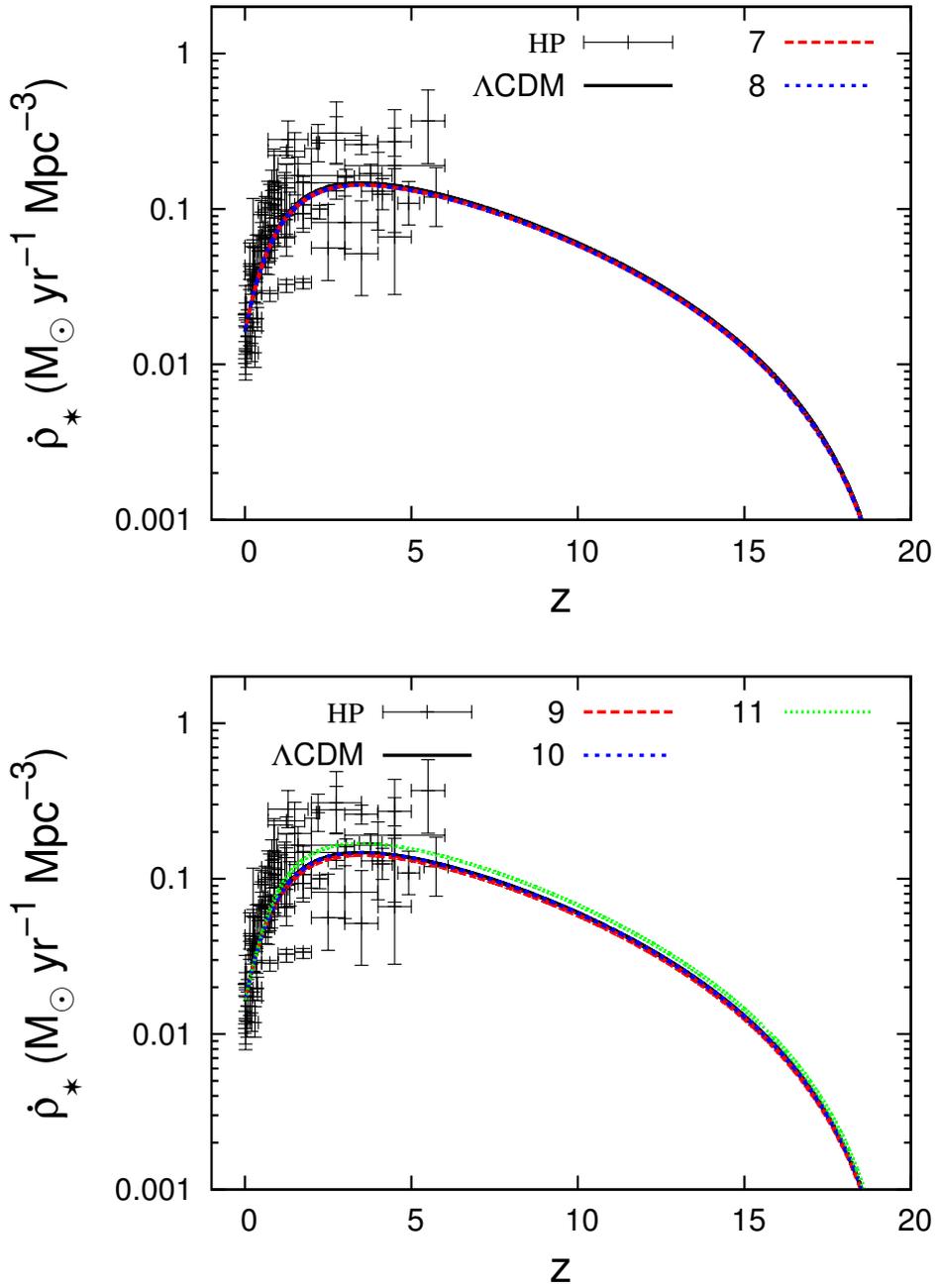


Figura 6.3 - TCFE para os modelos Oscilantes

Na Figura 6.4 mostramos os modelos para a parametrização do Efeito Casimir dado pela equação (5.33) de acordo com a Tabela 6.1.

Nesse caso ocorre o oposto ao modelo (11), a constante cosmológica produz amplitudes maiores, ou seja, o processo de *infall* da matéria bariônica nos halos é mais eficiente, para o mesmo conjunto de parâmetros, se o fluido de energia escura é a

constante cosmológica. Os modelos estão de acordo com os dados observacionais.

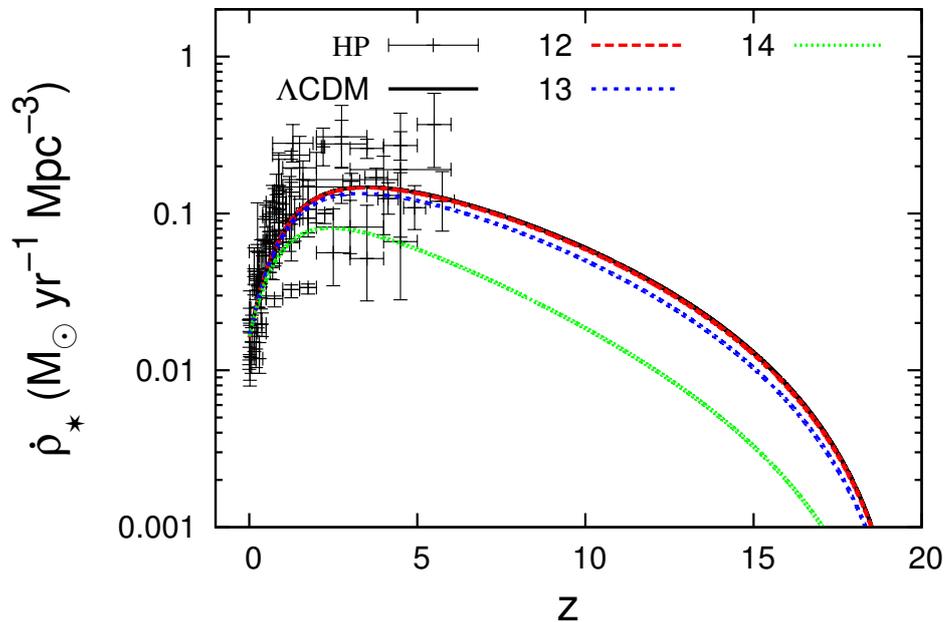


Figura 6.4 - TCFE para os modelos Casimir

Nas Figuras 6.5 e 6.6 mostramos os modelos da última parametrização, o modelo independente, vide (PACE et al., 2010). Os modelos correspondentes ao potencial descrito pela lei de potencia, INV, ou seja, os modelos (15) e (16), foram os que mais influenciaram a TCFE, o mesmo ocorre com o último modelo, SUGRA que tem uma amplitude menor que ao modelo Λ CDM. Outros modelos como, 2EXP e CNR, reproduzem o modelo Λ CDM. Novamente todos estão de acordo com os dados observacionais.

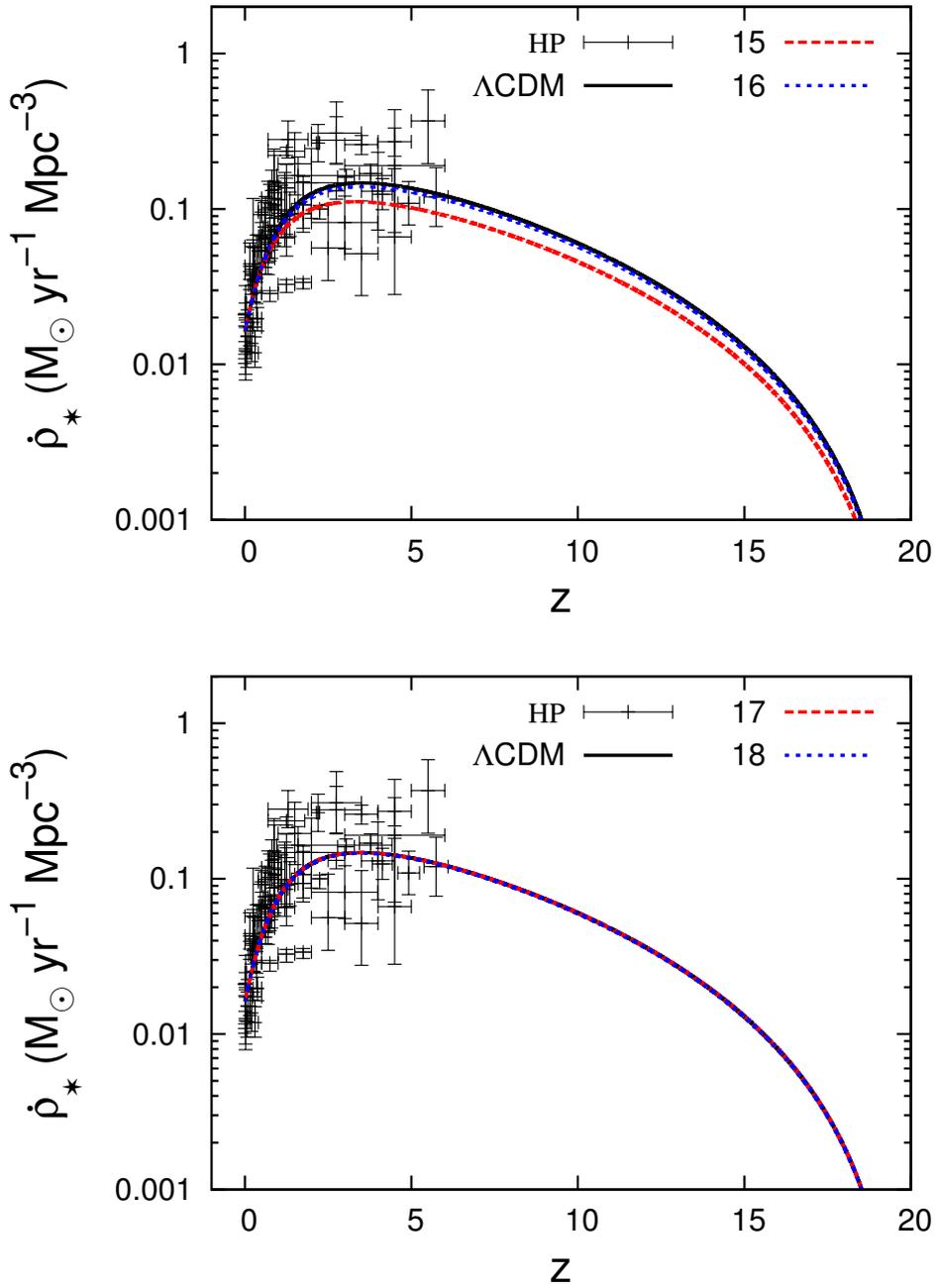


Figura 6.5 - TCFE para a Modelo aproximado

No caso do uso direto da TCFE, como um observável destinado a impor vínculos e limites a parametrização da energia escura, vemos que todos os modelos a exceção do (14) possuem uma evolução muito parecida.

Como o espalhamento, ou seja incertezas, dos dados observacionais da TCFE são muito grandes a *redshift* $z \gtrsim 1,5$ é impossível descartar qualquer um dos 20 modelos

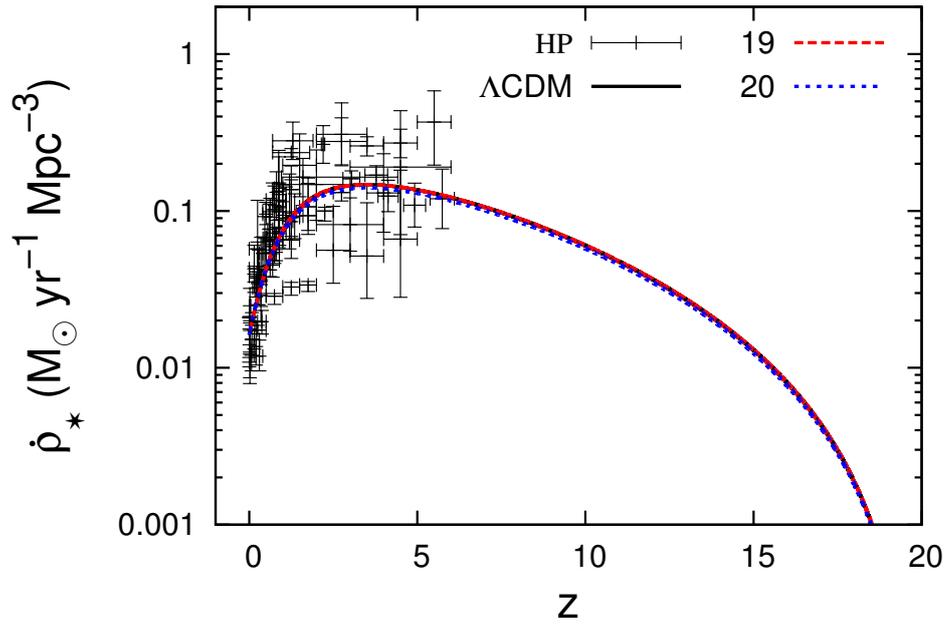


Figura 6.6 - TCFE para a Modelo aproximado

apresentados. Contudo, usando o critério da "simplicidade" (ou navalha de occam), como a constante cosmológica apresenta menos parâmetros livres, em relação aos demais modelos, o critério de simplicidade "nos força" a terminar esse capítulo colocando a constante cosmológica como o fluido de energia escura que melhor se ajusta aos dados da TCFE.

No próximo capítulo usaremos observações de *Long Gamma-Ray Burst* (LGRB) para analisar as diferentes TCFE obtidas para cada um dos fluidos de energia escura estudados nesse capítulo.

7 LONG GAMMA-RAY BURST

Como mencionado no capítulo 6 as observações de *Long Gamma-ray Burst* (LGRB) oferecem oportunidade de analisar a TCFE em altos *redshifts*. GRBs de longa duração ($t > 2s$) são detectáveis a distâncias cosmológicas e rastreiam a TCFE, uma vez que são geralmente associados ao colapso de estrelas massivas, *collapsars*. No entanto, o número de eventos é muito menor em comparação com a de galáxias a alto *redshift*, e mais importante, é provável que exista uma tendência a metalicidade, relacionado com um mecanismo de produção de GRB dependente das propriedades progenitoras. Veremos neste capítulo, que o uso dos dados de LGRBs pode ajudar a restringir as várias equações de estado, da energia escura, analisados no capítulo precedente.

7.1 Taxa de LGRB

Para produzir um LGRB por um *collapsar*, a estrela progenitora deve ser massiva o suficiente para formar um buraco negro. A relação entre a taxa de LGRB e a taxa de formação de buracos negros é dada pela seguinte parametrização (HAO; YUAN, 2013),

$$\dot{n}_{GRB}(z) \propto \Psi(z)\dot{n}_{BH}(z) \quad (7.1)$$

onde $\dot{n}_{BH}(z)$ é a taxa de formação de buracos negros e $\Psi(z)$ é a eficiência de formação de LGRB que é dependente do *redshift*.

Como sugerido pelo modelo *collapsar* (MACFADYEN; WOOSLEY, 1999), o modelo para $\Psi(z)$ é dado pela evolução da metalicidade cósmica. A eficiência de formação de LGRB pode ser descrita por uma forma analítica,

$$\Psi(Z_{th}, z) = \frac{\hat{\Gamma}[\alpha_1 + 2, (Z_{th}/Z_{\odot})^{\beta} 10^{0.15\beta z}]}{\Gamma(\alpha_1 + 2)} \quad (7.2)$$

onde $\hat{\Gamma}$ e Γ são as funções Gamma incompleta e completa, respectivamente, $\alpha_1 = -1.16$ é a inclinação da função de distribuição Schechter e $\beta = 2$ é o índice da lei de potencia da relação massa-metalicidade das galáxias. No entanto como analisado por Hao e Yuan, o modelo hierárquico para a TCFE é mais consistente com os dados de LGRB sem considerar um corte de metalicidade, sendo assim iremos adotar um valor $Z_{th} = 0$, e com isso $\Psi(z) = 1$.

A Taxa de formação de buracos negros $\dot{n}_{BH}(z)$ é dada por

$$n_{BH}(z) = \int_{m_{BH}}^{m_{sup}} \Phi(m) \dot{\rho}_*(t - \tau_m) dm \quad (7.3)$$

onde no limite inferior da integral, $m_{BH} = 40M_{\odot}$, corresponde ao valor da massa mínima necessária para produzir um buraco negro, $\phi(m)$ é a IMF e $\dot{\rho}_*(t - \tau_m)$ representa a TCFE na época de formação da estrela progenitora do buraco negro. Assim, τ_m representa o tempo de vida de uma estrela com massa M dentro do intervalo $40 \leq M/M_{\odot} \leq 140$.

7.2 Estatística K-S

Para comparar com as observações, nós precisamos obter a distribuição cumulativa de LGRB, e isso é dado pela seguinte relação

$$N(< z) = A \int_0^z \dot{n}_{BH}(z) \frac{dV}{dz} \frac{dz}{1+z} \quad (7.4)$$

onde A é uma constante que depende do tempo de observação, da cobertura do céu e do limite em fluxo do *survey*, e dV/dz é o volume co-móvel. A constante A pode ser removida ao normalizar a distribuição cumulativa, e isso é dado por

$$N(< z|z_{max}) = \frac{N(0, z)}{N(0, z_{max})} \quad (7.5)$$

Os dados observacionais são compostos por 62 LGRB tirados de Robertson e Ellis (2012). Construímos uma distribuição cumulativa dependente do *redshift*, desses dados, pela seguinte relação

$$F_n(z) = \frac{1}{n} \sum_i z_i \quad z_i \leq z \quad (7.6)$$

onde i é o número de valores z_i inferiores a z .

No teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S) considera-se a estatística

$$D = \max |F_n(z) - F(z)| \quad 0 \leq z \leq 5 \quad (7.7)$$

onde $F(z)$ corresponde a nossa distribuição cumulativa dada através de $N(< z|z_{max})$, conforme 7.5.

A qualidade da função cumulativa $F(z)$, obtida para cada modelo de energia escura em relação aos dados observacionais de LGRB, é medida através do parâmetro D que mede o maior afastamento entre as funções $F_n(z)$ e $F(z)$. O nível de confiança estatístico na determinação de D é feito através de um segundo parâmetro, chamado p . O melhor ajuste ocorre para baixos valores de D e altos valores de p . Assim, por exemplo, $p = 0,8$ significará que D foi determinado com nível de confiança de 80%. Em outras palavras, podemos dizer que, com confiança de 80%, o valor de D é menor que o dado através de 7.7.

7.3 Resultados

Como vimos no capítulo anterior praticamente todos os modelos concordavam com os dados observacionais da TCFE. Neste capítulo apresentamos uma outra forma de investigar a consistência dos modelos adotados.

Considerando os dados observacionais de 62 GRBs com *redshift* conhecidos da tabela de Robertson e Ellis (2012), usamos a estatística K-S para verificar a consistência dos modelos de TCFE apresentados no capítulo 6.

Na Tabela 7.1 temos na primeira coluna o modelo, e na segunda coluna a respectiva parametrização, na terceira coluna colocamos os valores de D , que correspondem a distância máxima entre as duas distribuições, e na última o valor da probabilidade, p .

Nas figuras abaixo temos as distribuições cumulativas para os dados de LGBR do satélite *swift* juntamente com o modelo Λ CDM para comparação.

Nas figuras 7.1 e 7.2, temos que os modelos (2), (3) e (6) são muito semelhantes ao modelo Λ CDM, com uma probabilidade de $p=0.644$, $p=0.656$ e $p=0.659$, respectivamente.

Para os modelos (4) e (5) obtemos uma probabilidade de $p=0.712$ e $p=0.691$.

Tabela 7.1 - Os valores dos parâmetros da estatística K-S.

Modelos	Parametrização	D	P
1	Λ CDM	8.91×10^{-2}	0.688
2	Log.	9.24×10^{-2}	0.644
3	Linear	9.15×10^{-2}	0.656
4	CPL	8.73×10^{-2}	0.712
5	Generalizada (1)	8.89×10^{-2}	0.691
6	Generalizada (2)	9.13×10^{-2}	0.659
7	Oscilante (1)	8.14×10^{-2}	0.788
8	Oscilante (2)	1.28×10^{-1}	0.240
9	Oscilante (3)	8.41×10^{-2}	0.754
10	Oscilante (4)	8.92×10^{-2}	0.688
11	Oscilante (5)	1.33×10^{-1}	0.208
12	Casimir 1	9.11×10^{-2}	0.661
13	Casimir 2	1.08×10^{-1}	0.438
14	Casimir 3	2.25×10^{-1}	2.93×10^{-3}
15	INV1	1.51×10^{-1}	0.105
16	INV2	7.95×10^{-2}	0.813
17	2EXP	8.91×10^{-2}	0.688
18	AS	8.68×10^{-2}	0.719
19	CNR	8.91×10^{-2}	0.688
20	SUGRA	8.07×10^{-2}	0.797

Considerando agora os modelos correspondentes a parametrização oscilante, os modelos (8) e (11) são desfavoráveis. Sendo que no caso do modelo (11), que de acordo com os resultados obtidos no capítulo anterior, sua amplitude na TCFE teve maiores influências em comparação ao modelo Λ CDM, com os dados de GRBs a probabilidade desse modelo ser consistente com os dados é de $p=0.208$.

O modelo (10) reproduz um modelo Λ CDM, como já obtido, tem uma probabilidade $p=0.688$.

Os mais favoráveis para essa parametrização correspondem aos modelos (7) e (9), com probabilidades iguais a $p=0.788$ e $p=0.754$, respectivamente.

Considerando a Figura 7.4, correspondente a parametrização dada pelo Efeito Casimir, o modelo (14) que teve maior influência na TCFE, de acordo com os dados do *swift* é desfavorável com uma $p=2.93 \times 10^{-3}$.

Finalizamos com o modelo aproximado, na figura 7.6. Novamente um dos modelos que teve maior influência na TCFE, como mostrado no capítulo anterior, com os dados de GRBs o modelo (15) é desfavorável com uma probabilidade $p=0.105$,

enquanto que o modelo (16) é o modelo mais favorável estudado, com uma probabilidade $p=0.813$. Outros como o modelo (18) e (20) também são mais consistentes com os dados do *swift*, com $p=0.719$ e $p=0.797$, respectivamente. E os modelos (17) e (19) reproduzem uma constante cosmológica.

No capítulo anterior verificamos que as TCFE preditas pelos 20 modelos, de energia escura aqui estudados, possuem toda evolução muito parecida com o *redshift*. Mesmo o modelo Casimir (3) que possui a maior diferença em relação ao Λ CDM, não pode ser excluído por causa das elevadas incertezas observacionais da TCFE a *redshifts* $z \geq 1,5$. Por outro lado, ao usarmos os dados de LGRB, verificamos que os modelos como Oscilante (2), Oscilante (5), Casimir (2) e Casimir (3) são desfavoráveis frente ao Λ CDM. Por outro lado, modelos como INV(2), SUGRA E Oscilante (1) se ajustam melhor aos dados do satélite *swift* do que o modelo Λ CDM. Os demais 11 modelos possuem, estatisticamente, o mesmo ajuste do Λ CDM aos dados de LGRBs.

No próximo capítulo reexaminamos essas equações de estado, da energia escura, sob o enfoque dos Fundos Estocásticos de Ondas Gravitacionais (FEOG) produzidas por sistemas binários em espiralação. Esses sistemas são os mais promissores para a detecção de ondas gravitacionais através dos grandes interferômetros, futuros, como *Advanced LIGO* (também chamado de LIGO III) e *Einstein Telescope*.

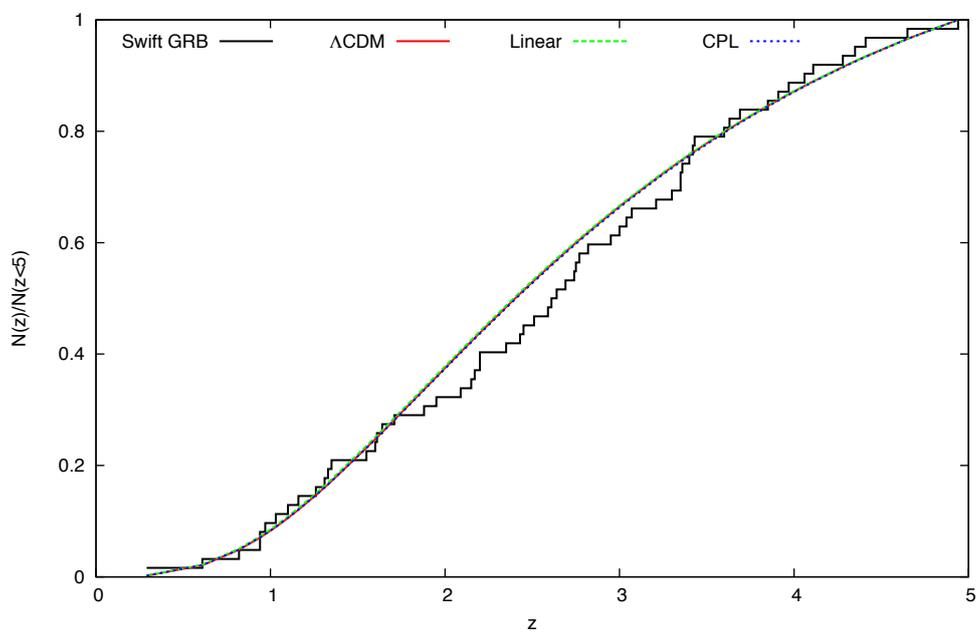
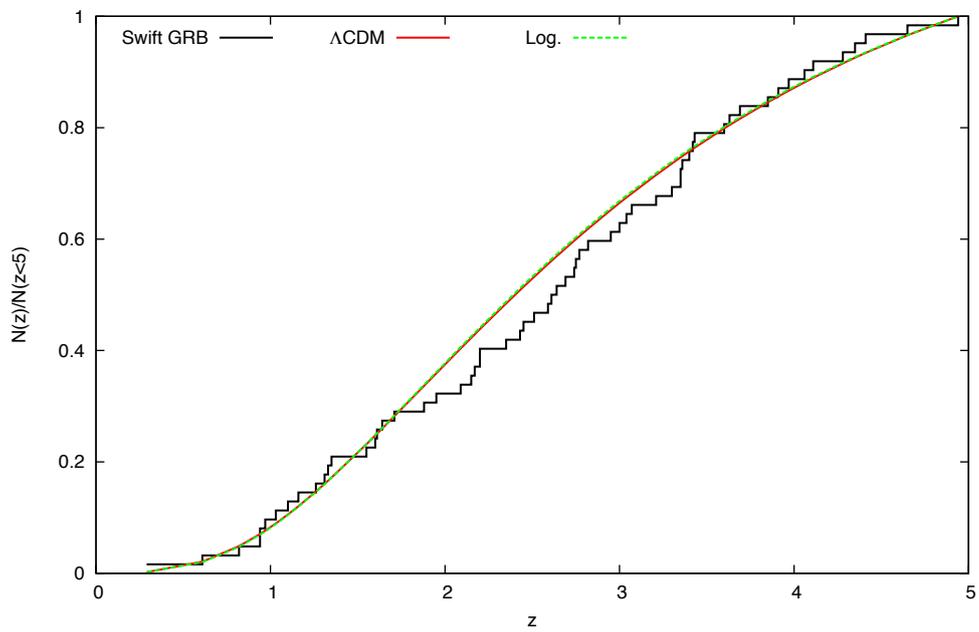


Figura 7.1 - LGRB para a Parametrização Generalizada

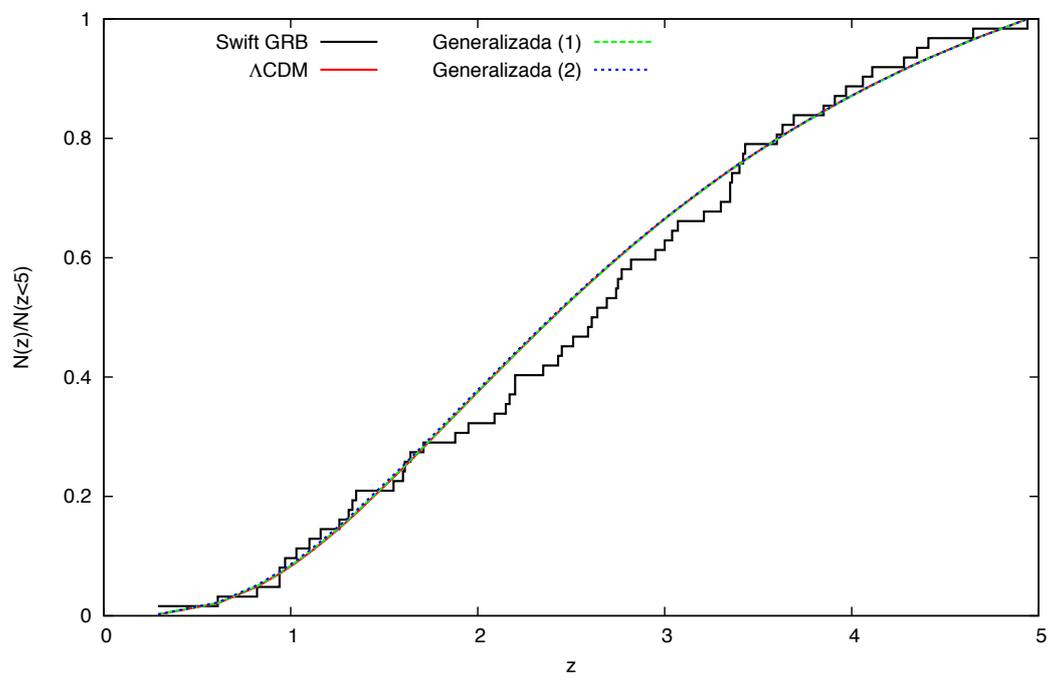


Figura 7.2 - LGRB para a Parametrização Generalizada

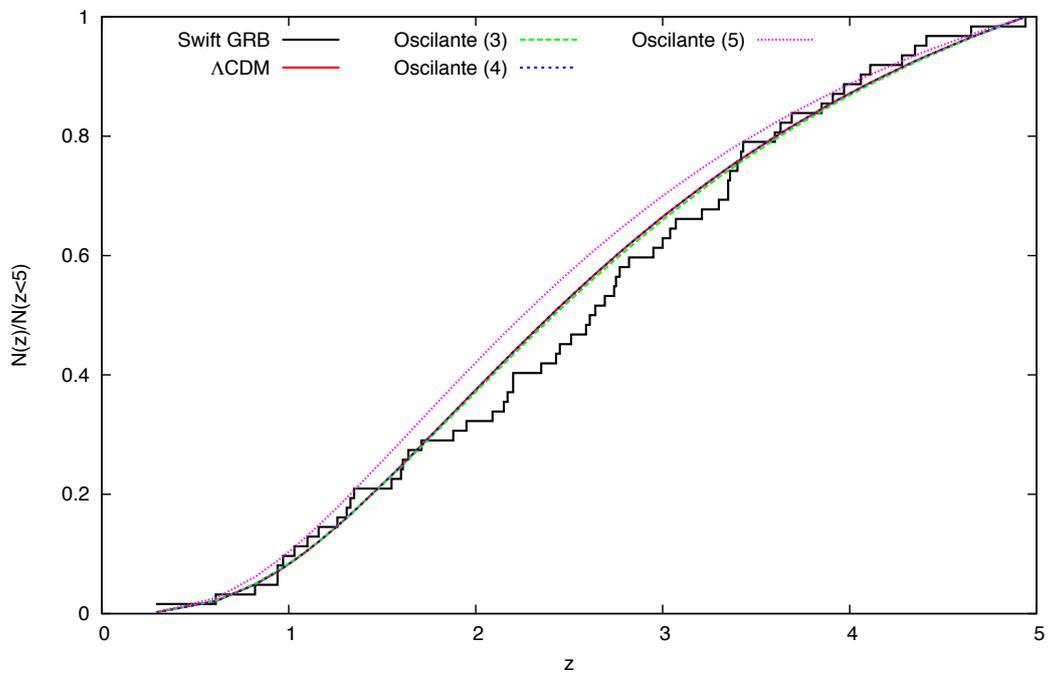
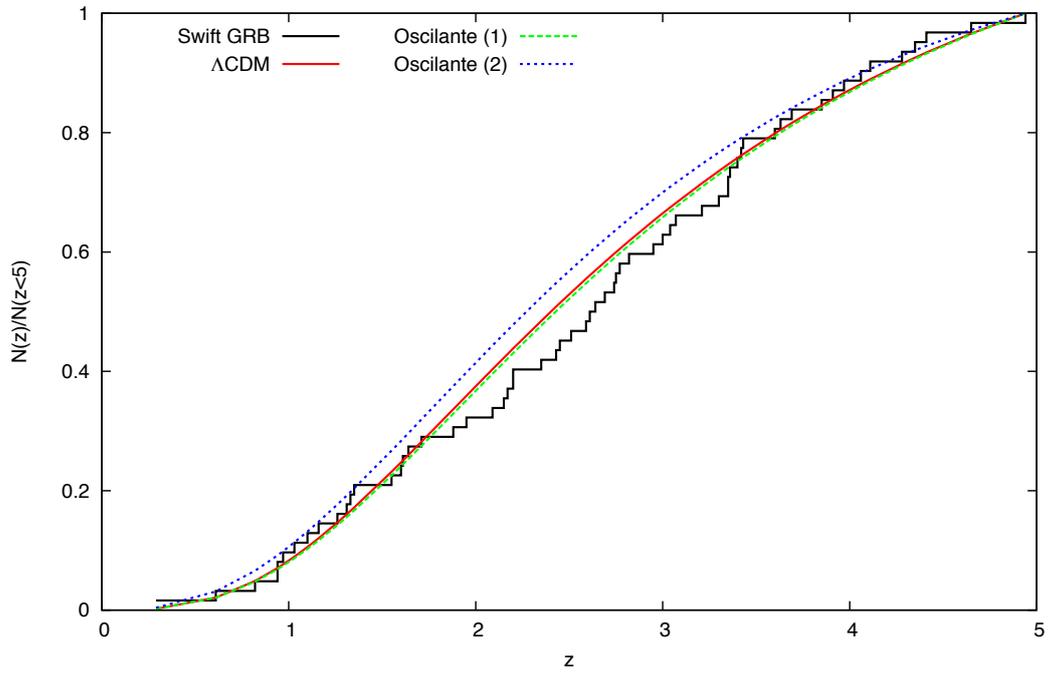


Figura 7.3 - LGRB para os modelos Oscilantes

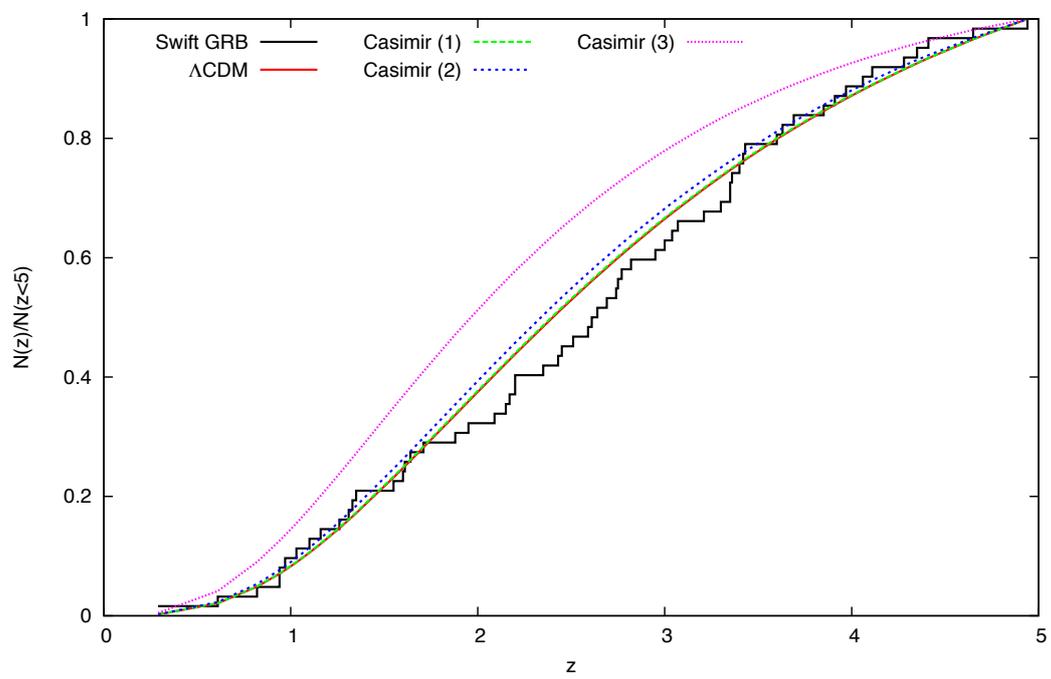


Figura 7.4 - LGRB para os modelos Casimir

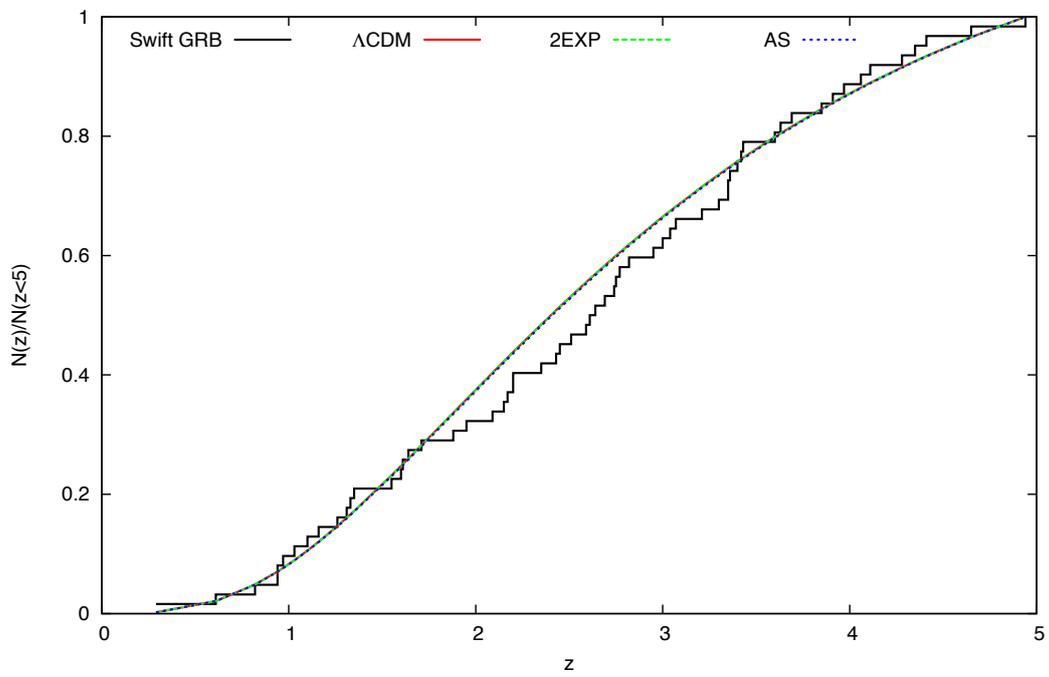
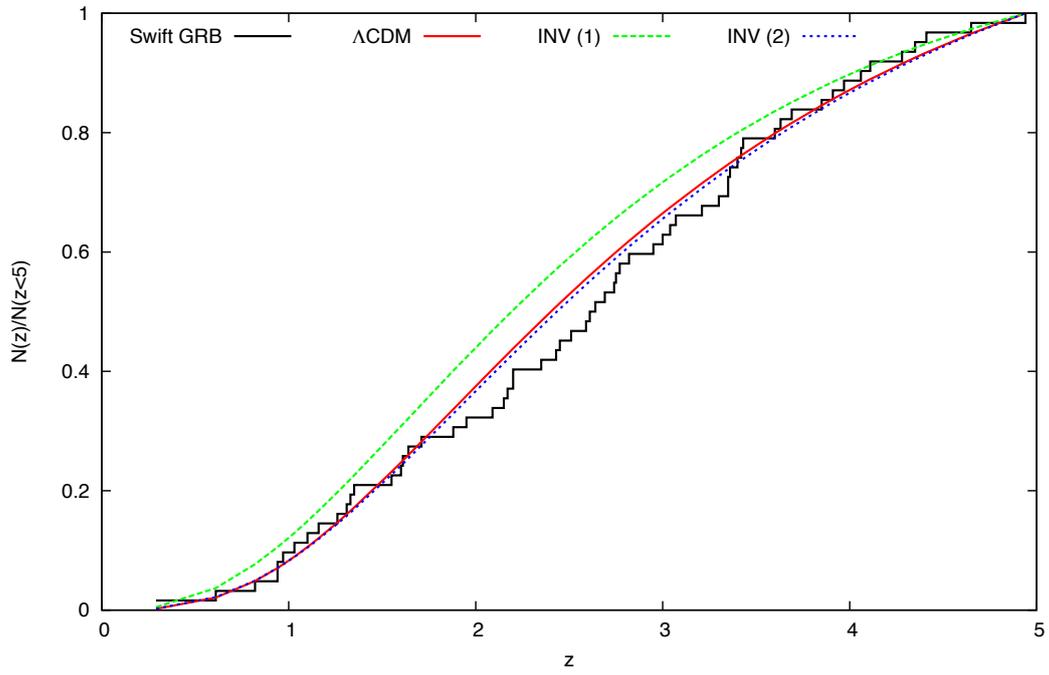


Figura 7.5 - LGRB para a Modelo aproximado

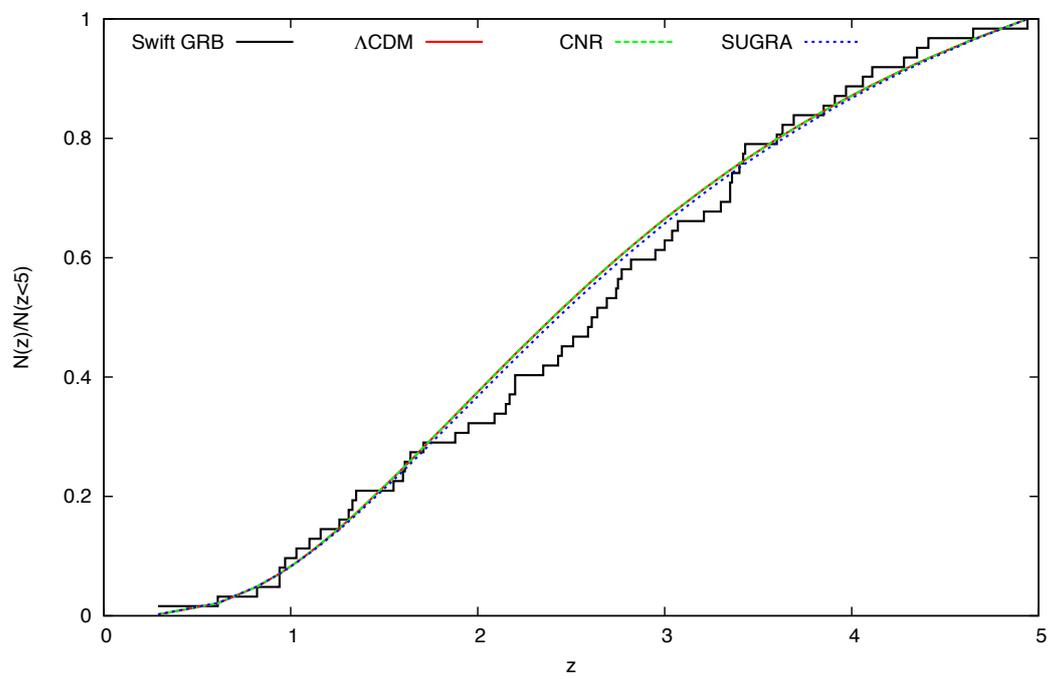


Figura 7.6 - LGRB para a Modelo aproximado

8 FUNDO ESTOCÁSTICO DE ONDAS GRAVITACIONAIS DE ORIGEM COSMOLÓGICA

Ondas Gravitacionais são produzidas por uma grande variedade de fontes astrofísicas e fenômenos cosmológicos, é bastante provável que o Universo é permeado por um fundo dessas ondas. Podemos citar, supernovas, colapso de estrelas para formar buracos negros, espiralação e coalescência de binárias compactas, queda de estrelas em buracos negros, e estrelas de nêutrons em rotação.

Como já sabemos, existem diversos modelos para descrever a energia escura, como vimos na seção 5.4, desta forma, o principal objetivo deste capítulo é explorar a possibilidade de utilizar a taxa cósmica de formação estelar para fornecer mais informações sobre o caráter temporal da equação de estado da energia escura, além de analisarmos a influência desses modelos nos fundos estocásticos de ondas gravitacionais produzidas por três diferentes fontes cosmológicas, que são, coalescência de binárias compactas, de duas estrelas de nêutrons (NS-NS), estrela de nêutron-buraco negro (NS-BH), e dois buracos negros (BH-BH).

Neste capítulo, na seção 8.1, estudamos a taxa de coalescência dos sistemas binários necessária para o cálculo do Fundo Estocástico de Ondas Gravitacionais (FEOG), na seção 8.2 obtemos a equação para o espectro do FEOG, e finalizamos na seção 8.3, com os resultados obtidos dos modelos apresentados.

8.1 Taxas de Coalescência

Para encontrarmos a taxa de coalescência precisamos assumir que esta rastreia a TCFE, mas com um tempo de atraso τ_d entre a formação do sistema binário e a fusão (REGIMBAU; HUGHES, 2009). Com isso temos

$$\dot{\rho}_c^0(z) = \dot{\rho}_c^0(0) \times \frac{\dot{\rho}_{*c}(z)}{\dot{\rho}_{*c}(0)} \quad (8.1)$$

onde $\dot{\rho}_c^0(z)$ é a taxa na qual o sistema binário é observado a coalescer em um *redshift* z . A conexão entre a TCFE e a taxa da coalescência da binária é dada por $\dot{\rho}_{*c}(z)$, conforme a relação

$$\dot{\rho}_{*c}(z) = \int_{\tau_0}^{t(z)} \frac{\dot{\rho}_{*c}(z_f)}{(1+z_f)} P(t_d) dt_d \quad (8.2)$$

onde $\dot{\rho}_*(z_f)$ é a TCFE, obtida em 6.4, $P(t_d)$ é a probabilidade por unidade de tempo da fusão após a formação do sistema, e o termo $(1 + z_f)$ é a dilatação do tempo devido a expansão do universo.

O tempo de atraso t_d é (REGIMBAU; HUGHES, 2009),

$$t_d = \frac{1}{H_0} \int_z^{z_f} \frac{dz'}{(1 + z')E(z')} \quad (8.3)$$

A Probabilidade $P(t_d)$ é dada por

$$P(t_d) \propto \frac{B}{t_d} \quad (8.4)$$

onde B é uma constante de normalização, que é obtida pela seguinte relação

$$B \int_{\tau_0}^{15\text{Gyr}} \frac{1}{t_d} dt_d = 1 \quad (8.5)$$

Dependendo do sistema binário o valor do tempo mínimo para a coalescência τ_0 tem um valor específico, sendo $\tau_0 = 20\text{Myr}$ para NS-NS, $\tau_0 = 10\text{Myr}$ para NS-BH, e $\tau_0 = 100\text{Myr}$ para BH-BH, vide (MIRANDA, 2012; BULIK et al., 2003).

Sendo assim, a taxa de fusão por unidade de *redshift* z , é dada por

$$\frac{dR_c^0}{dz} = \dot{\rho}_c^0(z) \frac{dV}{dz} \quad (8.6)$$

onde dV é o volume co-móvel dado pela equação 2.72.

8.2 Fundo Estocástico de Ondas Gravitacionais

O espectro do Fundo Estocástico de Ondas Gravitacionais é (MAGGIORE, 2008):

$$\Omega_{GW} = \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho_{GW}}{d\log \nu_{obs}} \quad (8.7)$$

em que ρ_{GW} é a densidade de Ondas Gravitacionais e ν_{obs} é a frequência observada.

Essa equação pode ser reescrita como

$$\Omega_{GW} = \frac{1}{c^3 \rho_c} \nu_{obs} F_{obs} \quad (8.8)$$

onde F_{obs} é o fluxo de ondas gravitacionais na frequência observada ν_{obs} integrada sobre todas as fontes cosmológicas.

O Fluxo recebido na Terra é dado por

$$F_{obs} = \int f_{\nu_{obs}} dR_c^0(z) \quad (8.9)$$

com $f_{\nu_{obs}}$ dado por

$$f_{\nu_{obs}} = \frac{1}{4\pi d_L^2} \frac{dE_{GW}}{d\nu} (1+z)^2 \quad (8.10)$$

lembrando que $d_L = r(z)(1+z)$ é a distância de luminosidade, $r(z)$ é a distância própria, e $\nu = \nu_{obs}(1+z)$ é a frequência no referencial da fonte.

Na aproximação quadrupolar, a densidade espectral emitida por um sistema binário, com as massas m_1 e m_2 é dada por

$$\frac{dE_{GW}}{d\nu} = K \nu^{-1/3} \quad (8.11)$$

onde

$$K = \frac{(G\pi)^{2/3}}{3} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^{1/3}} \quad (8.12)$$

Será considerado que o Fundo Estocástico de Ondas Gravitacionais tem seu valor de frequência máxima limitada pela *última órbita estável* do sistema (SATHYAPRAKASH, 2000),

$$\nu_{max} = 1.5 \left(\frac{M}{2.8M_\odot} \right)^{-1} \text{ kHz}, \quad (8.13)$$

onde M é a massa total do sistema, ou seja, $M = m_1 + m_2$.

Embora alguns autores critiquem o uso de (8.13) para determinar a máxima frequência de sistemas NS-NS, essa equação tem sido usada por diversos autores como Regimbau e Pacheco (2005), Regimbau e Hughes (2009), Pereira e Miranda (2010) e Miranda (2012) entre outros.

Um outro parâmetro importante é o *Duty Cycle* é definido como a razão da duração típica de um único *burst* e o intervalo de tempo médio entre eventos sucessivos (REGIMBAU; PACHECO, 2005; REGIMBAU; HUGHES, 2009).

$$D(z) = \int_0^z \bar{\tau} \frac{dR_c^0}{dz'} dz' \quad (8.14)$$

onde

$$\bar{\tau} = \frac{5c^5}{256\pi^{8/3}G^{5/3}} [(1+z')m_c]^{-5/3} f_L^{-8/3} \quad (8.15)$$

com f_L sendo a frequência mais baixa do detector e o m_c representa a massa *chirp* que é dada pela seguinte relação

$$m_c = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} \quad (8.16)$$

Existem três diferentes regimes para esse parâmetro. O primeiro é dado por, $D(z) < 0.1$, que chamamos de *shot noise regime*, que consiste em uma sequência de eventos amplamente espaçados, ou seja, as fontes podem ser resolvidas individualmente. O segundo caso em que, $0.1 < D(z) < 1.0$ é o *popcorn noise regime* que significa que o intervalo de tempo entre dois eventos sucessivos está próximo da duração de um único evento. Finalizamos com o terceiro caso em que $D(z) > 1$, nessa situação temos um fundo contínuo, ou seja, os sinais se sobrepõem.

8.3 Resultados

Como vimos anteriormente, o efeito da energia escura pode ser parametrizado por diversas equações de estado, 5.4, no nosso caso, estamos considerando aquelas que são dependentes do tempo. No total obtemos 20 modelos, e analisamos para 3 tipos de sistemas binários, estrelas de nêutrons - estrelas de nêutrons (NS-NS), estrela de

nêutron - buraco negro (NS-BH) e buraco negro - buraco negro (BH-BH) e também o espectro total das três fontes (NS-NS+NS-BH+BH-BH). Usando o formalismo visto neste capítulo obtemos o fundo estocástico de ondas gravitacionais (FEOG), para esses 20 modelos.

Consideramos para todos os modelos de energia escura os seguintes parâmetros, $\Omega_m = 0.279$, $\Omega_b = 0.0463$, $\Omega_{DE} = 0.721$, e $h = 0.7$ obtidos pelo WMAP-9 (BENNETT et al., 2013), o tempo de formação estelar, $\tau_s = 2.0Gyr$, usamos a massa mínima de formação dos halos $M_{min} = 10^6 M_\odot$, a inclinação da IMF, $x = 1.35$, e o tempo mínimo para a taxa de coalescência depende do sistema, $\tau_0 = 20Myr$ para NS-NS, $\tau_0 = 10Myr$ para NS-BH e $\tau_0 = 100Myr$ para BH-BH (MIRANDA, 2012).

A frequência inicial é em todos os casos de $\nu_{ini} = 10Hz$, e a frequência máxima depende do sistema utilizado, dado pela equação (8.13). No caso deste presente trabalho, nos consideramos as massas para o sistema NS-NS sendo $m_1 = m_2 = 1.4M_\odot$, que nos fornece uma frequência de $\nu_{max} = 1500Hz$. Para o sistema NS-BH, utilizamos $m_1 = 1.4M_\odot$ e $m_2 = 5.0M_\odot$, e conseqüentemente temos a frequência máxima em $\nu_{max} = 656Hz$. Para o sistema BH-BH, $m_1 = m_2 = 5.0M_\odot$ com uma frequência máxima em $\nu_{max} = 420Hz$.

Há um último ponto a considerar antes de calcular o espectro do FEOG. Este ponto está relacionado com o valor da taxa de fusão local, por unidade de volume, $\dot{\rho}_c^0(0)$. Esses valores são estimados para cada sistema e são dados por, $\dot{\rho}_c^0(0) = (0.01 - 10)Myr^{-1}Mpc^{-3}$ para NS-NS, $\dot{\rho}_c^0(0) = (0.001 - 1)Myr^{-1}Mpc^{-3}$ para NS-BH, (REGIMBAU; HUGHES, 2009). Neste trabalho, os valores adotados são $\dot{\rho}_c^0(0) = 1.0Myr^{-1}Mpc^{-3}$ para NS-NS, $\dot{\rho}_c^0(0) = 0.1Myr^{-1}Mpc^{-3}$ para NS-BH e $\dot{\rho}_c^0(0) = 0.01Myr^{-1}Mpc^{-3}$ para BH-BH vide (MIRANDA, 2012).

Na tabela 8.1 mostramos para os 20 modelos de energia escura, a Parametrização Generalizada é dada pelos modelos (2)-(6) vide (BARBOZA et al., 2009), para a parametrização oscilante, modelos de (7)-(11) (PACE et al., 2012), e para o Efeito Casimir pelos modelos (12)-(14) e para o modelo independente (15)-(20) (PACE et al., 2010), caracterizados pela Tabela 6.1, seus respectivos espectros de ondas gravitacionais no sistema NS-NS, em que atingem seu valor máximo e a frequência de pico, também colocamos os valores para a Duty Cycle em que o *redshift* atinge os valores de 0.1 e 1.0, e os valores do S/N para dois futuros detectores de Ondas Gravitacionais, o LIGO III, isto é *Advanced LIGO* e o Einstein Telescope (ET).

Tabela 8.1 - Espectro de Ondas Gravitacionais para sistema NS-NS para os Modelos Energia Escura.

N	Modelo	$\Omega_{GW_{max}}$	$\nu_p(Hz)$	$z_{DC}(0.1)$	$z_{DC}(1.0)$	S/N (LIGO)	S/N(ET)
1	Λ CDM	4.22×10^{-9}	382	0.23	0.53	1.44	3.32×10^2
2	Log	4.33×10^{-9}	382	0.23	0.53	1.47	3.40×10^2
3	Linear	4.12×10^{-9}	384	0.23	0.53	1.40	3.22×10^2
4	CPL	4.16×10^{-9}	382	0.23	0.53	1.42	3.27×10^2
5	Generalizada (1)	4.14×10^{-9}	383	0.23	0.53	1.41	3.25×10^2
6	Generalizada (2)	4.09×10^{-9}	384	0.23	0.53	1.39	3.20×10^2
7	Oscilante (1)	4.04×10^{-9}	380	0.23	0.55	1.38	3.18×10^2
8	Oscilante (2)	4.94×10^{-9}	418	0.16	0.35	1.61	3.72×10^2
9	Oscilante (3)	4.01×10^{-9}	382	0.23	0.54	1.37	3.16×10^2
10	Oscilante (4)	4.22×10^{-9}	382	0.23	0.53	1.44	3.32×10^2
11	Oscilante (5)	4.99×10^{-9}	394	0.21	0.45	1.67	3.85×10^2
12	Casimir (1)	4.20×10^{-9}	383	0.23	0.53	1.43	3.29×10^2
13	Casimir (2)	4.06×10^{-9}	393	0.23	0.53	1.35	3.11×10^2
14	Casimir (3)	3.18×10^{-9}	457	0.24	0.57	0.94	2.16×10^2
15	INV1	3.09×10^{-9}	401	0.25	0.63	1.04	1.40×10^2
16	INV2	3.91×10^{-9}	381	0.23	0.56	1.34	3.09×10^2
17	2EXP	4.22×10^{-9}	382	0.23	0.53	1.44	3.32×10^2
18	AS	4.17×10^{-9}	382	0.23	0.53	1.42	3.28×10^2
19	CNR	4.22×10^{-9}	382	0.23	0.53	1.44	3.32×10^2
20	SUGRA	3.96×10^{-9}	381	0.23	0.55	1.36	3.13×10^2

Nas Figuras 8.1 e 8.2 mostramos a densidade de ondas gravitacionais Ω_{GW} como uma função da frequência observada ν_{obs} , e seus valores de máximo dados pela tabela 8.1.

Analisando o FEOG fica mais evidente a influência da energia escura, do que na TCFE para os mesmos modelos, como vimos na Figura 6.1. Isso porque a influência de um determinado tipo de energia escura no termo de expansão, apesar de ter uma

pequena alteração na TCFE, no FEOG temos o termo de volume co-móvel, e a distância de Luminosidade no fluxo observado.

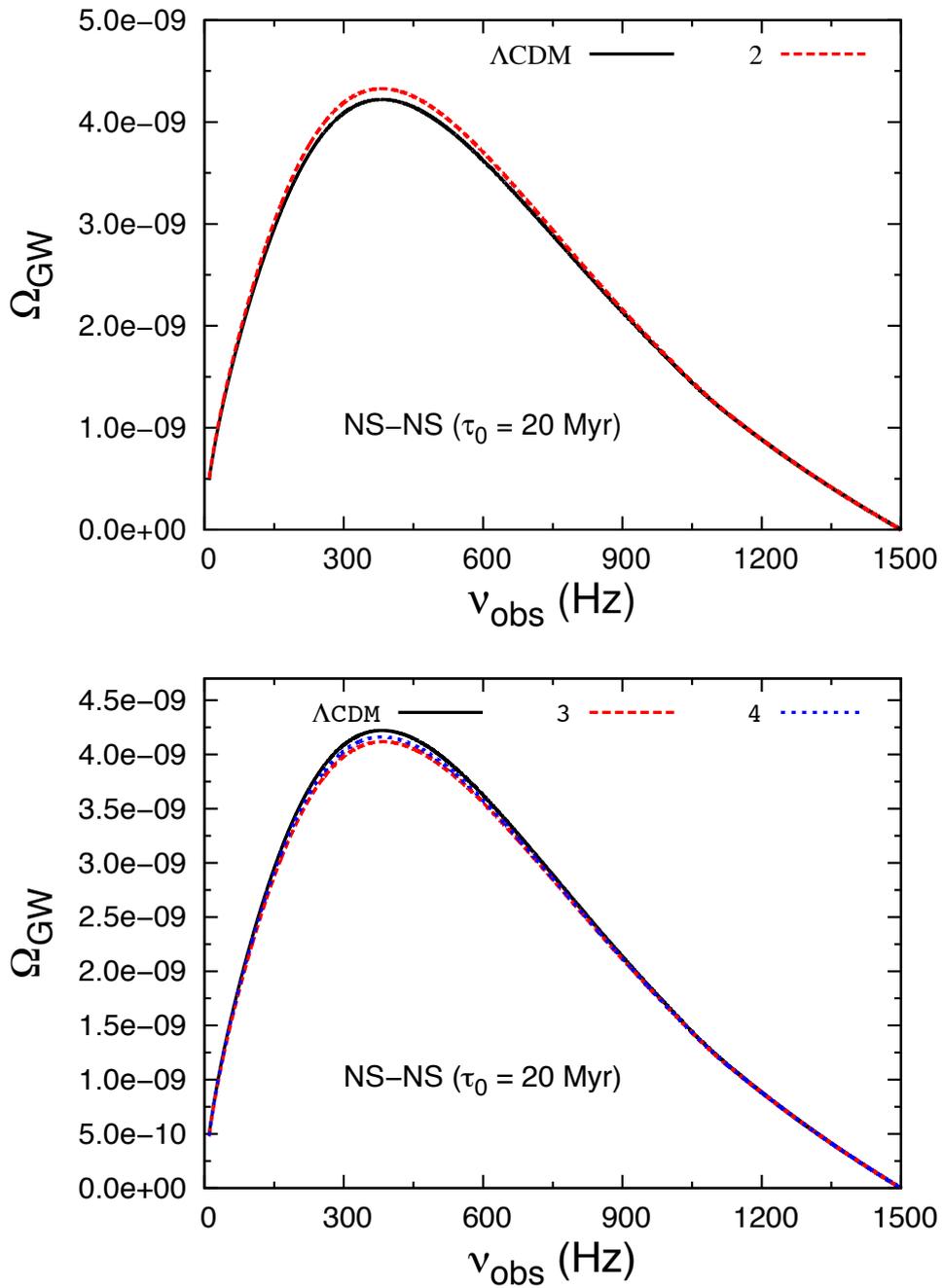


Figura 8.1 - FEOG em sistemas NS-NS para a parametrização Generalizada

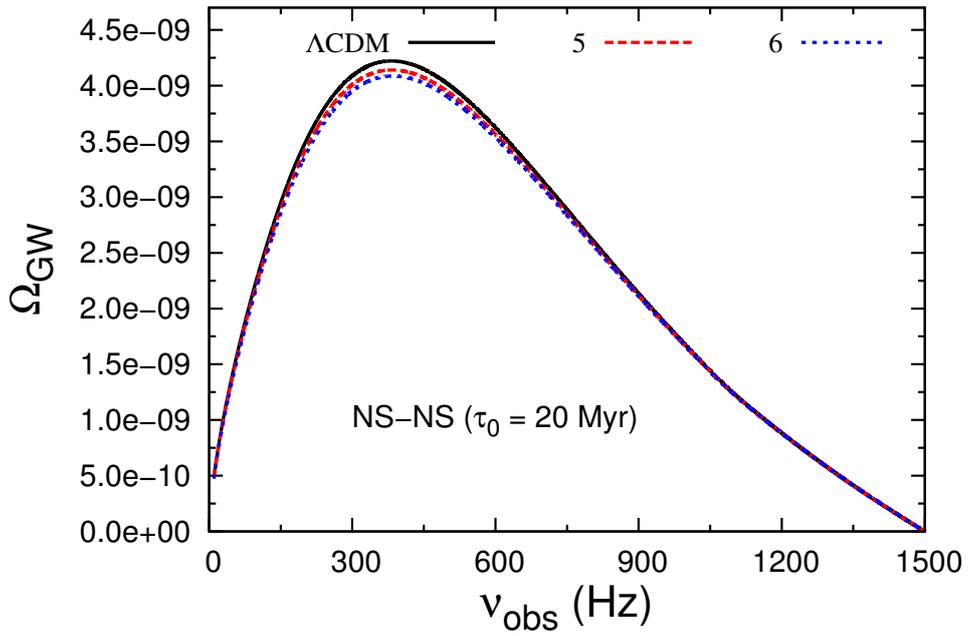


Figura 8.2 - FEOG em sistemas NS-NS para a parametrização Generalizada

Na Figura 8.3, baseando na análise do capítulo 6, vimos que os modelos (7)-(10) não têm muita influência na TCFE, e por isso esperamos uma pequena modificação no espectro de ondas gravitacionais, como visto acima. Dentre esses modelos como esperado, o modelo (10) deverá reproduzir exatamente uma constante cosmológica. Como esperado temos uma maior diferença no espectro para o modelo (11).

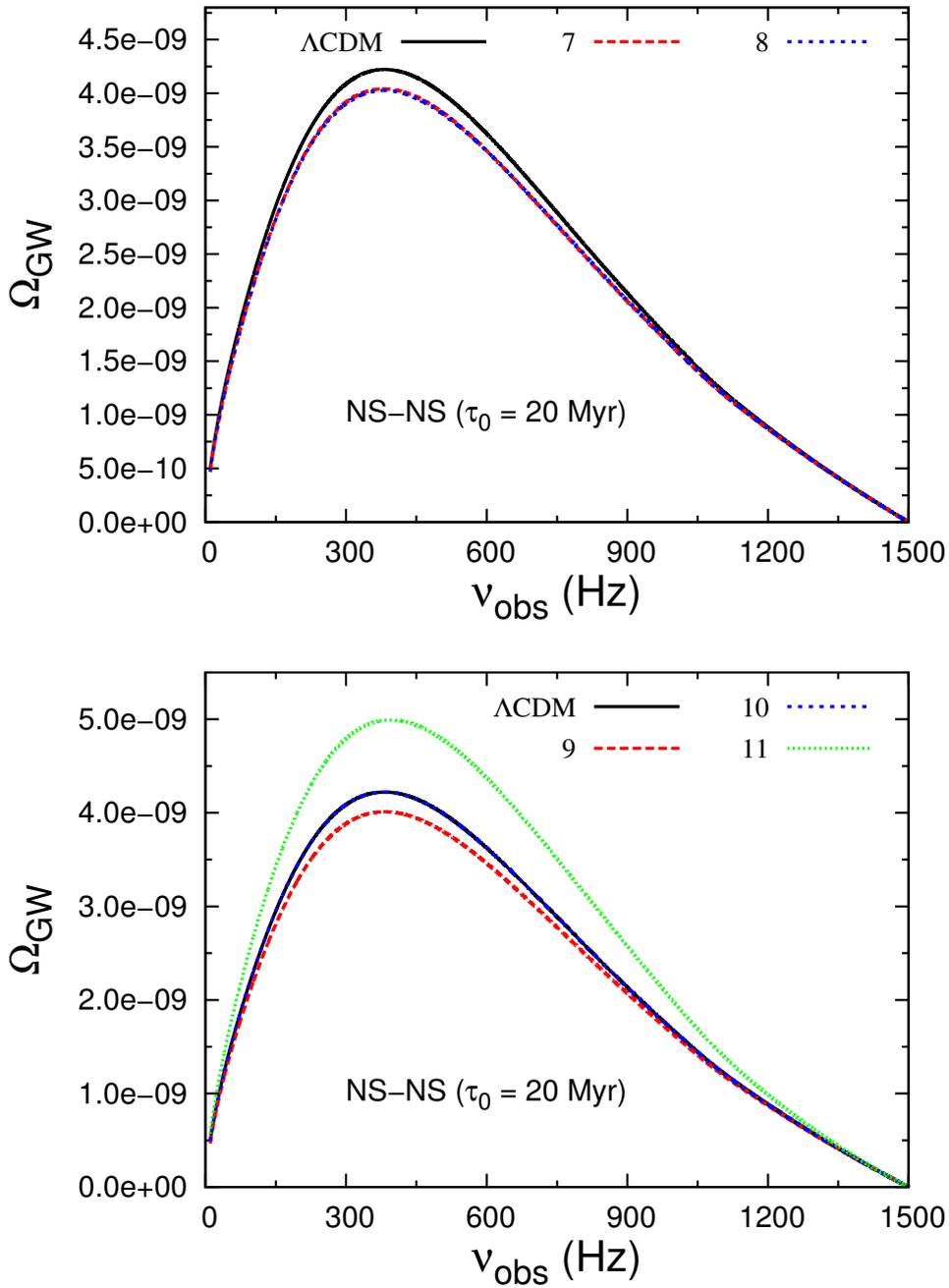


Figura 8.3 - FEOG em sistemas NS-NS para a parametrização Oscilante

Na figura 8.4, tivemos a mesma perspectiva que o modelo (11), como esperado a influência no FEOG é claramente maior para os modelos que tiveram uma diferença significativa no TCFE. Com isso o modelo (14) apresenta uma maior influência na FEOG.

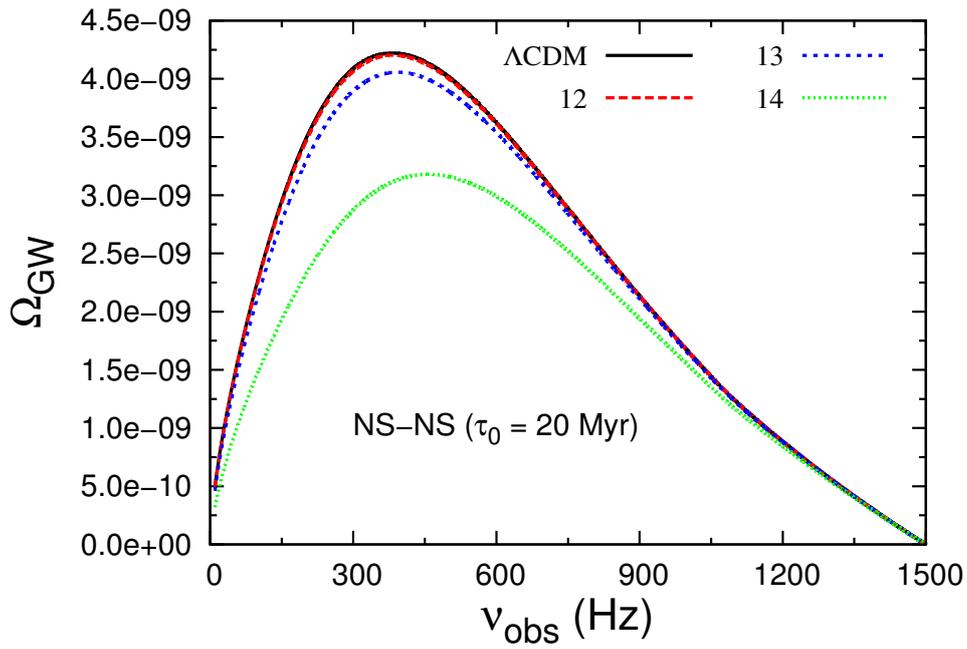


Figura 8.4 - FEOG em sistemas NS-NS para a parametrização Casimir

Nas figuras 8.5 e 8.6 mostramos os resultados para o modelo independente, sendo o modelo (15) e (16), ou INV, que corresponde ao potencial descrito por uma lei de potencia inversa e o modelo (20), também chamado de SUGRA, que tiveram maior influência na FEOG, enquanto que modelos como (17) e (19), 2EXP e CNR, reproduzem o modelo Λ CDM.

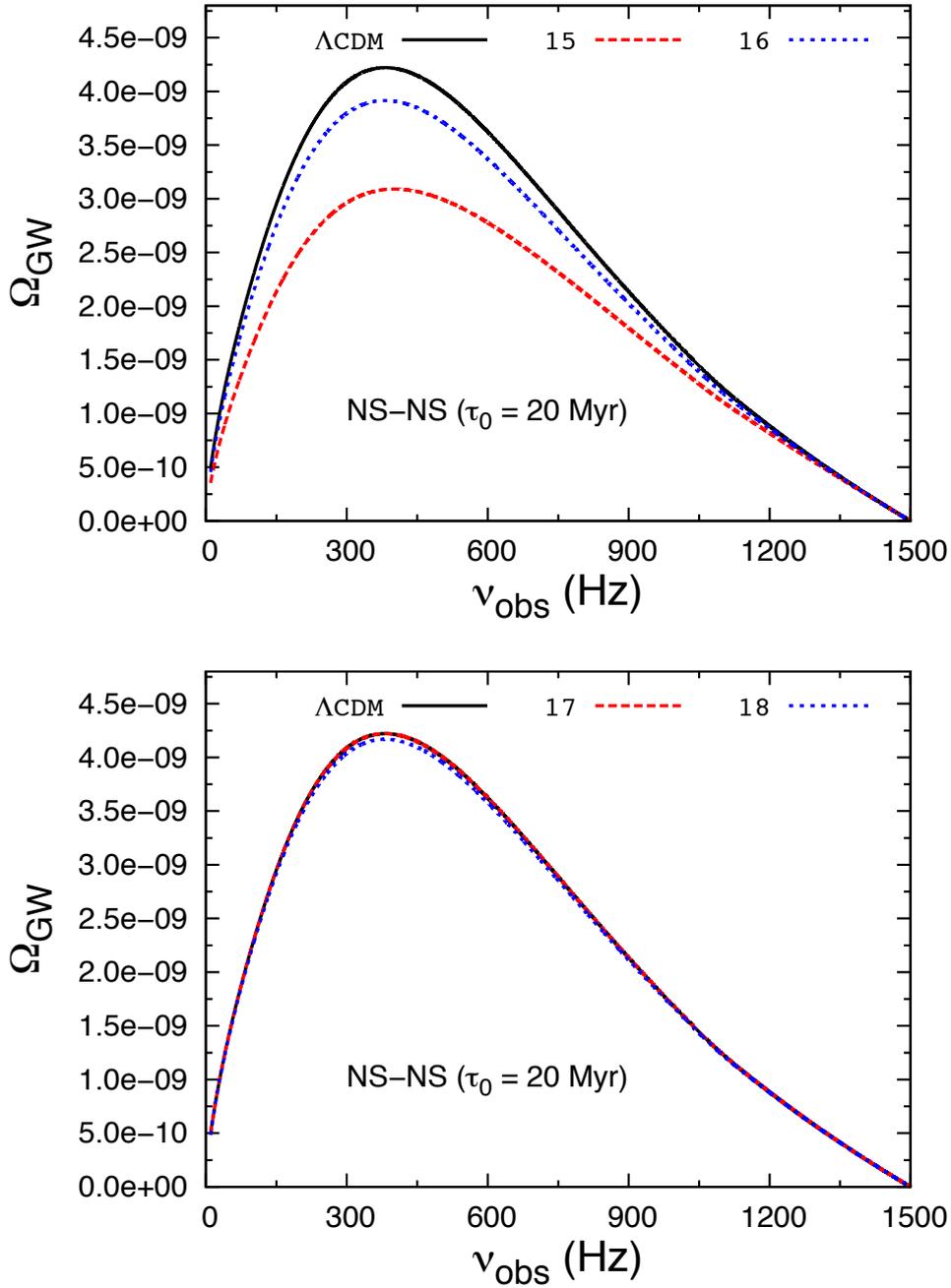


Figura 8.5 - FEOG em sistemas NS-NS para o Modelo Independente

Na tabela 8.2 mostramos para os 20 modelos de Energia escura, a Parametrização Generalizada é dada pelos modelos (2)-(6) vide (BARBOZA et al., 2009), para a parametrização oscilante, modelos de (7)-(11) (PACE et al., 2012), e para o Efeito Casimir pelos modelos (12)-(14) e para o modelo independente (15)-(20) (PACE et al., 2010), caracterizados pela Tabela 6.1, seus respectivos espectros de ondas gravitacionais em sistema NS-BH, em que atingem seu valor máximo e a frequência de pico, também

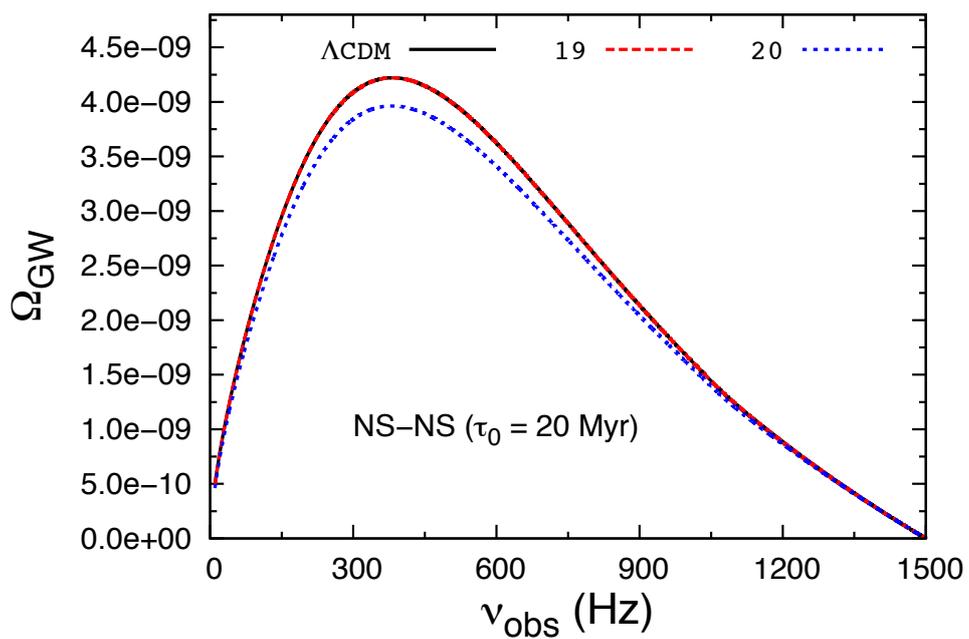


Figura 8.6 - FEOG em sistemas NS-NS para o Modelo Independente

colocamos os valores para a Duty Cycle em 0.1 e 1.0, e os valores do S/N para dois detectores de Ondas, o LIGO III e o Einstein Telescope.

Tabela 8.2 - Espectro de Ondas Gravitacionais para sistemas NS-BH para os Modelos Energia Escura.

N	Modelo	$\Omega_{GW_{max}}$	$\nu_p(Hz)$	$z_{DC}(0.1)$	$z_{DC}(1.0)$	S/N (LIGO)	S/N(ET)
1	Λ CDM	6.77×10^{-10}	163	0.80	5.00	4.09×10^{-1}	9.25×10^1
2	Log	6.94×10^{-10}	163	0.79	4.27	4.19×10^{-1}	9.47×10^1
3	Linear	6.60×10^{-10}	164	0.81	6.40	3.97×10^{-1}	8.98×10^1
4	CPL	6.67×10^{-10}	163	0.81	5.66	4.03×10^{-1}	9.12×10^1
5	Generalizada (1)	6.64×10^{-10}	164	0.81	5.97	4.01×10^{-1}	9.06×10^1
6	Generalizada (2)	6.55×10^{-10}	165	0.81	7.31	3.95×10^{-1}	8.93×10^1
7	Oscilante (1)	6.46×10^{-10}	163	0.84	12.50	3.92×10^{-1}	8.86×10^1
8	Oscilante (2)	6.44×10^{-10}	163	0.83	7.00	3.91×10^{-1}	8.83×10^1
9	Oscilante (3)	6.42×10^{-10}	164	0.83	7.00	3.88×10^{-1}	8.78×10^1
10	Oscilante (4)	6.77×10^{-10}	163	0.80	5.00	4.09×10^{-1}	9.25×10^1
11	Oscilante (5)	8.24×10^{-10}	169	0.63	2.34	4.89×10^{-1}	1.11×10^2
12	Casimir (1)	6.74×10^{-10}	164	0.80	5.15	4.06×10^{-1}	9.19×10^1
13	Casimir (2)	6.50×10^{-10}	168	0.81	9.97	3.83×10^{-1}	8.68×10^1
14	Casimir (3)	5.04×10^{-10}	197	0.89	7.00	2.62×10^{-1}	5.99×10^1
15	INV1	4.89×10^{-10}	172	1.03	7.00	2.93×10^{-1}	6.62×10^1
16	INV2	6.25×10^{-10}	163	0.86	7.00	3.80×10^{-1}	8.58×10^1
17	2EXP	6.77×10^{-10}	163	0.80	5.00	4.09×10^{-1}	9.25×10^1
18	AS	6.68×10^{-10}	163	0.81	5.57	4.04×10^{-1}	9.14×10^1
19	CNR	6.77×10^{-10}	163	0.80	5.00	4.09×10^{-1}	9.25×10^1
20	SUGRA	6.33×10^{-10}	163	0.85	7.00	3.84×10^{-1}	8.68×10^1

Os resultados obtidos considerando o caso do sistemas binários NS-BH, como mostrado na tabela 8.2, tem seus valores de $\Omega_{GW_{max}}$ menores que no caso anterior, isso porque a taxa de coalescência para esse sistema é menor do que para NS-NS, a maioria dos modelos tem seus valores próximos ao modelo Λ CDM, os valores na frequência de pico também são reduzidos. Temos alteração nos valores do Duty Cycle e no S/N para ambos os detectores, LIGO III e ET, ambos são influenciados pelo valor da taxa local de coalescência.

Com relação aos gráficos apresentados abaixo, eles mantem a forma do espectro para todos os modelos analisados anteriormente. Novamente, os modelos que mais influenciam a FEOG para o caso NS-BH, são os mesmos, os modelos (11) correspondente a parametrização oscilante, o modelo (14) sendo o efeito Casimir, os modelos (15), (16) e (20) são o modelo independente.

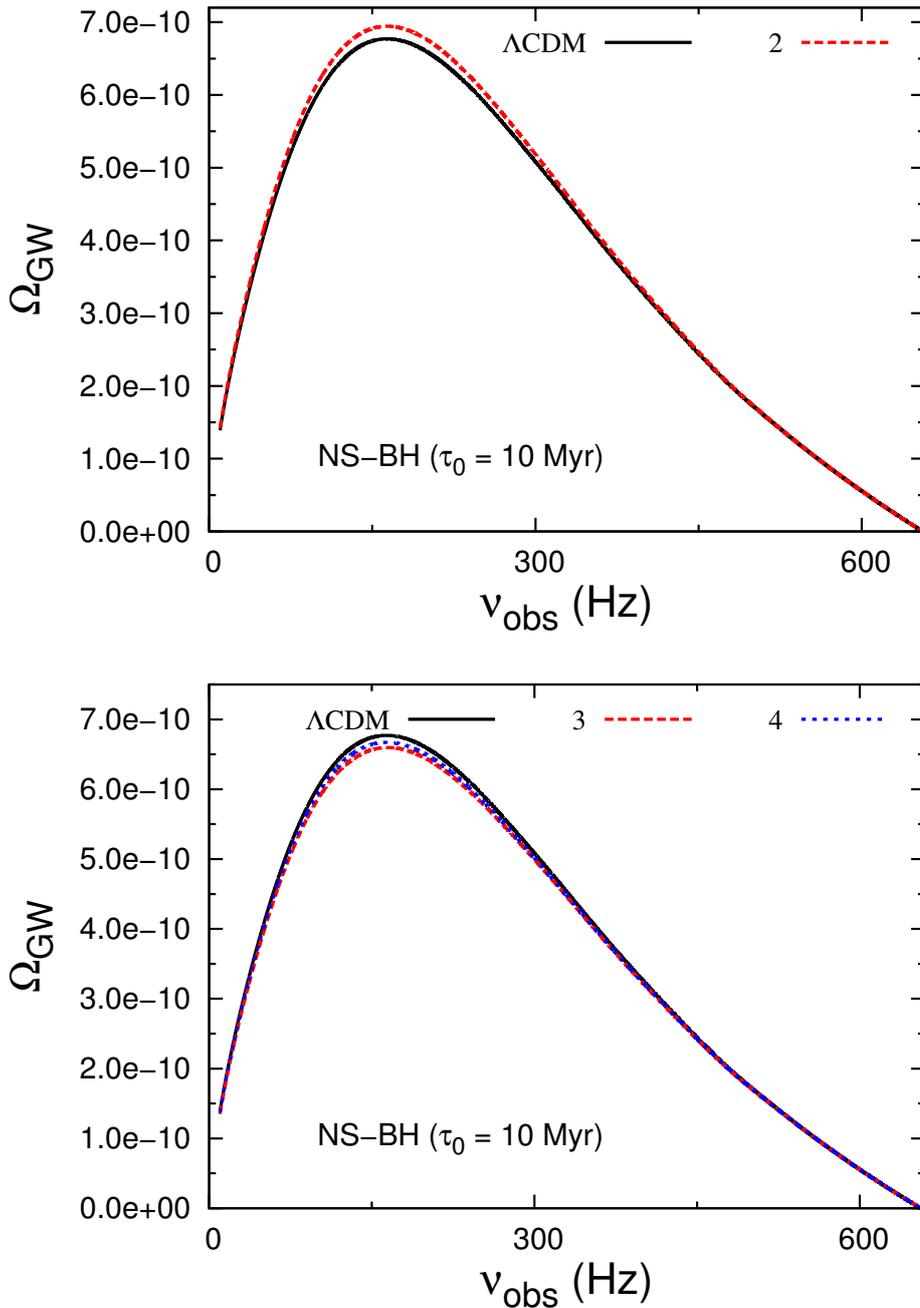


Figura 8.7 - FEOG em sistemas NS-BH para a parametrização Generalizada

Na tabela 8.3 mostramos para os 20 modelos de Energia escura, a Parametrização Generalizada é dada pelos modelos (2)-(6) vide (BARBOZA et al., 2009), para a parametrização oscilante, modelos de (7)-(11) (PACE et al., 2012), e para o Efeito Casimir pelos modelos (12)-(14) e para o modelo independente (15)-(20) (PACE et al., 2010), caracterizados pela Tabela 6.1, seus respectivos espectros de ondas gravitacionais em sistemas BH-BH, em que atingem seu valor máximo e a frequência de pico, e os

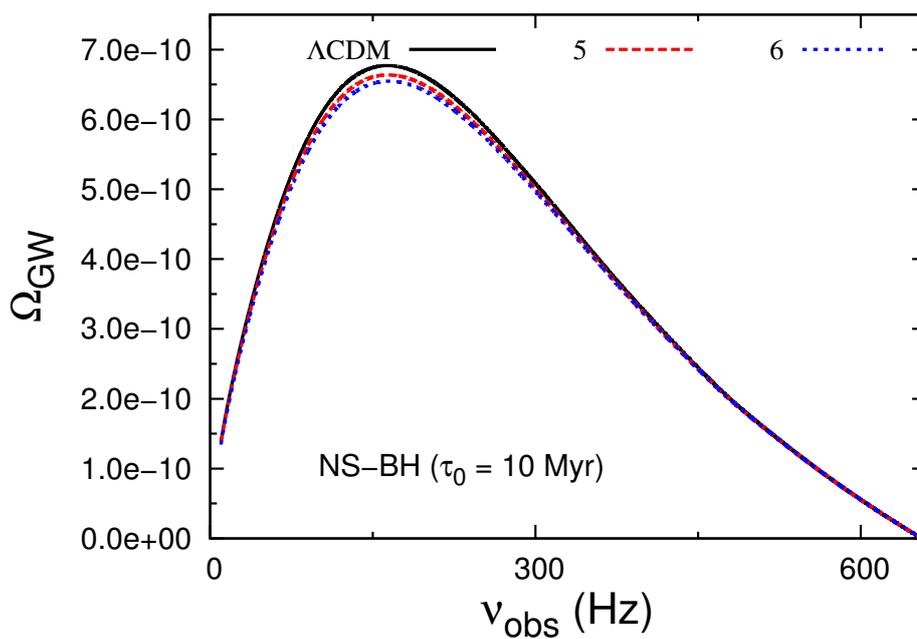


Figura 8.8 - FEOG em sistemas NS-BH para a parametrização Generalizada

valores do S/N para dois detectores de Ondas, o LIGO III e o Einstein Telescope. Os sistemas BH-BH tem sempre Duty Cycle < 0.1.

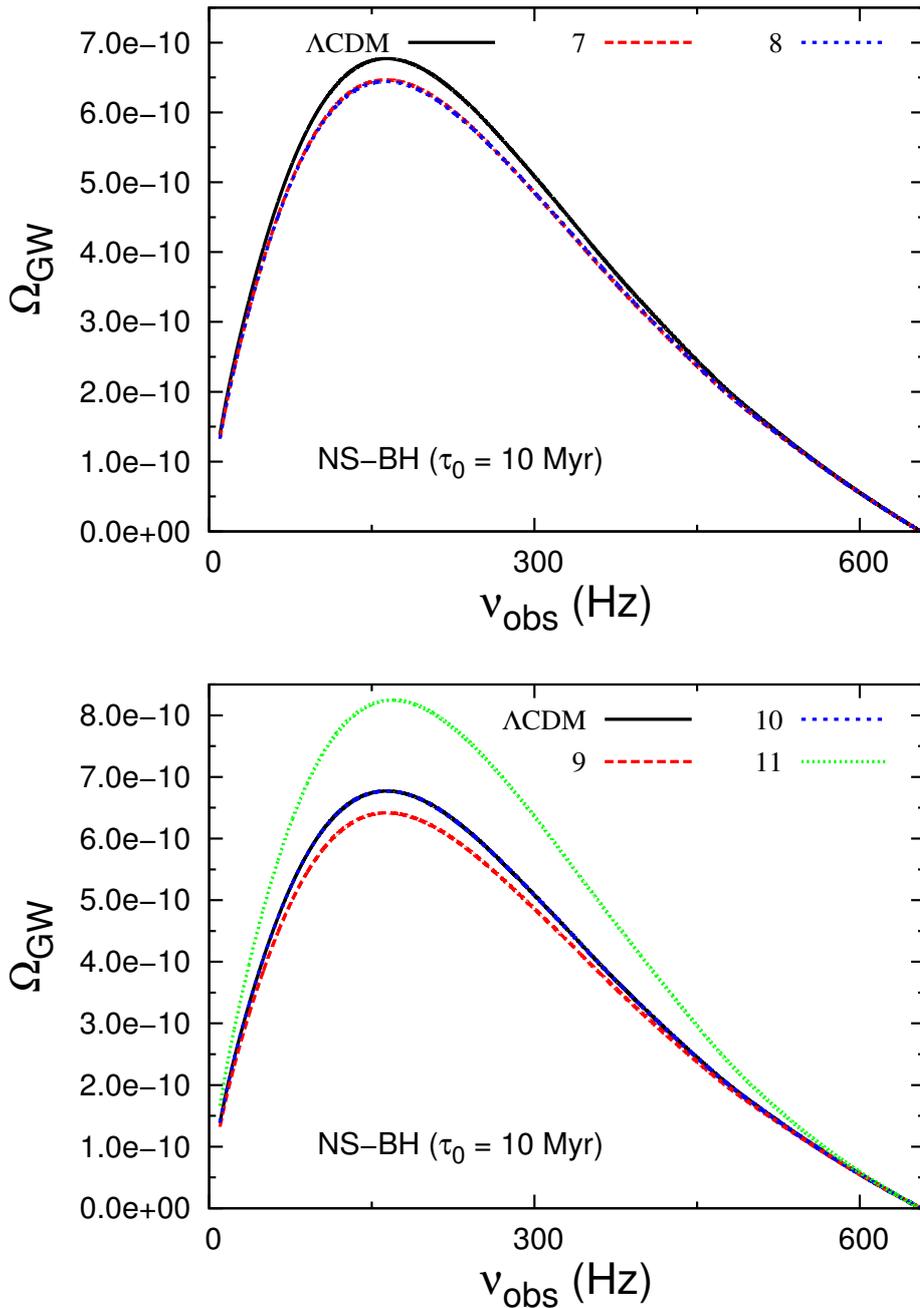


Figura 8.9 - FEOG em sistemas NS-BH para a parametrização Oscilante

Os resultados obtidos considerando o caso do sistema binário BH-BH, como mostrado na tabela 8.3, tem seus valores de $\Omega_{GW_{max}}$ menores que no caso anterior, isso porque a taxa de coalescência para esse sistema é menor do que para NS-NS e NS-BH, a maioria dos modelos tem seus valores próximos ao modelo Λ CDM, os valores na frequência de pico também são reduzidos. Temos alteração nos valores do Duty Cycle e no S/N para ambos os detectores, LIGO III e ET, ambos são influenciados

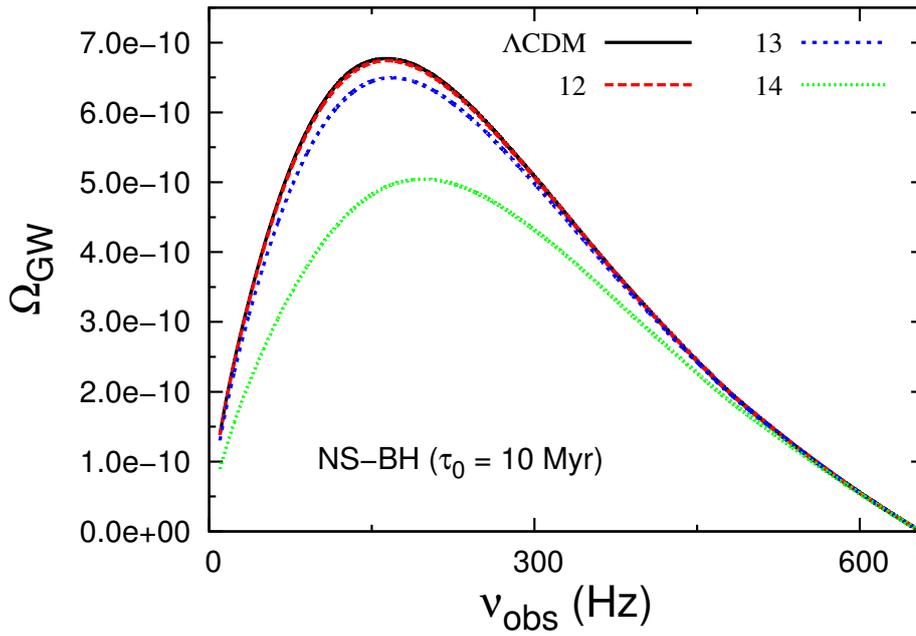


Figura 8.10 - FEOG em sistemas NS-BH para a parametrização Casimir

pelo valor da taxa local de coalescência.

Com relação aos gráficos apresentados abaixo, eles mantem a forma do espectro para todos os modelos analisados anteriormente. Novamente, os modelos que mais influenciam a FEOG para o caso BH-BH, são os mesmos, os modelos (11) correspondente a parametrização oscilante, o modelo (14) sendo o efeito Casimir, os modelos (15), (16) e (20) são o modelo independente.

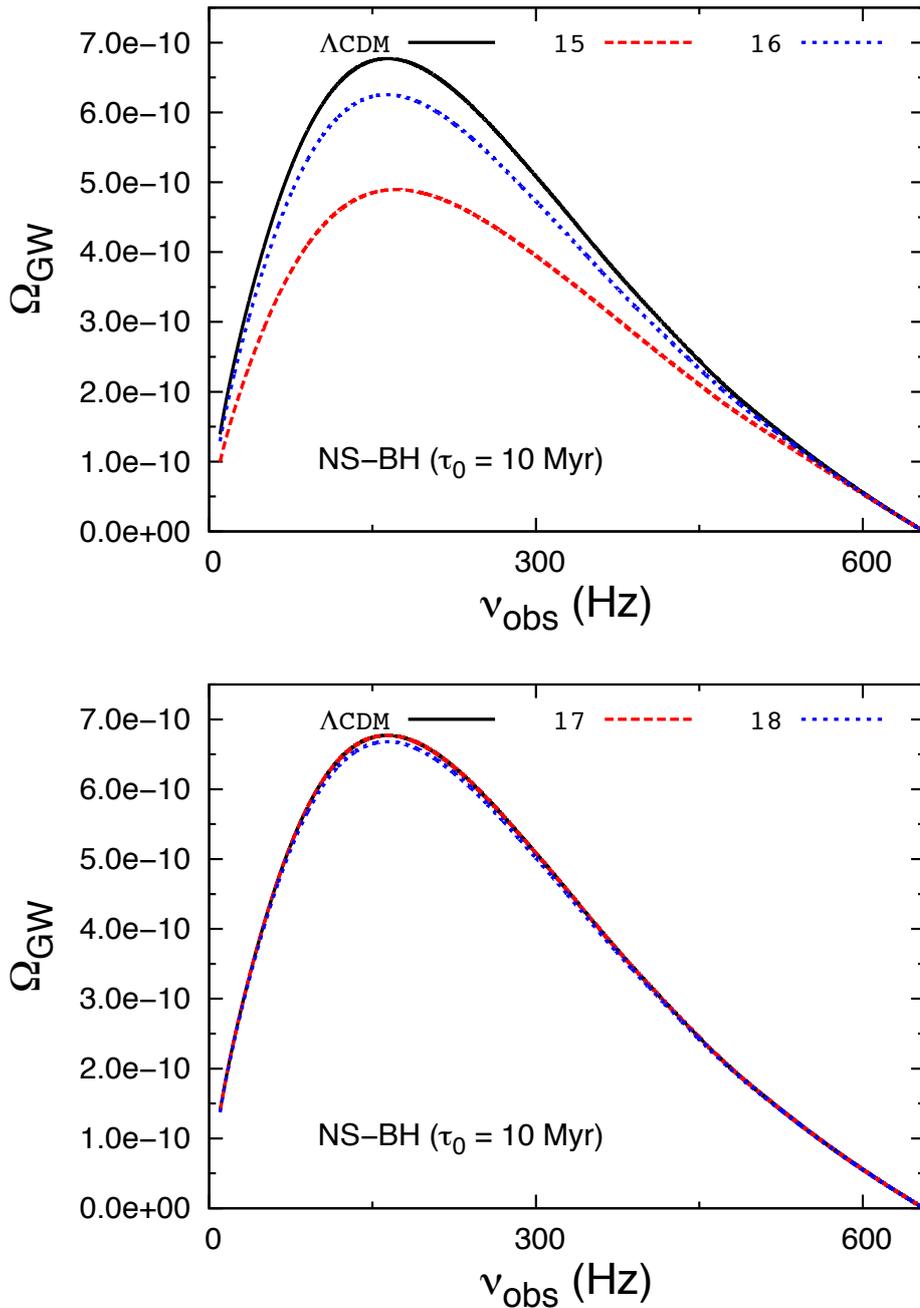


Figura 8.11 - FEOG em sistemas NS-BH para o Modelo Independente

Muito provavelmente, fundos estocásticos de ondas gravitacionais, de origem pré-galáctica, devem ser constituídos pelos sinais gerados por esses três sistemas: NS-NS; NS-BH; BH-BH (MIRANDA, 2012). Assim, na tabela 8.4 mostramos para os 20 modelos de energia escura, a Parametrização Generalizada é dada pelos modelos (2)-(6) vide (BARBOZA et al., 2009), para a parametrização oscilante, modelos de (7)-(11) (PACE et al., 2012), e para o Efeito Casimir pelos modelos (12)-(14) e para

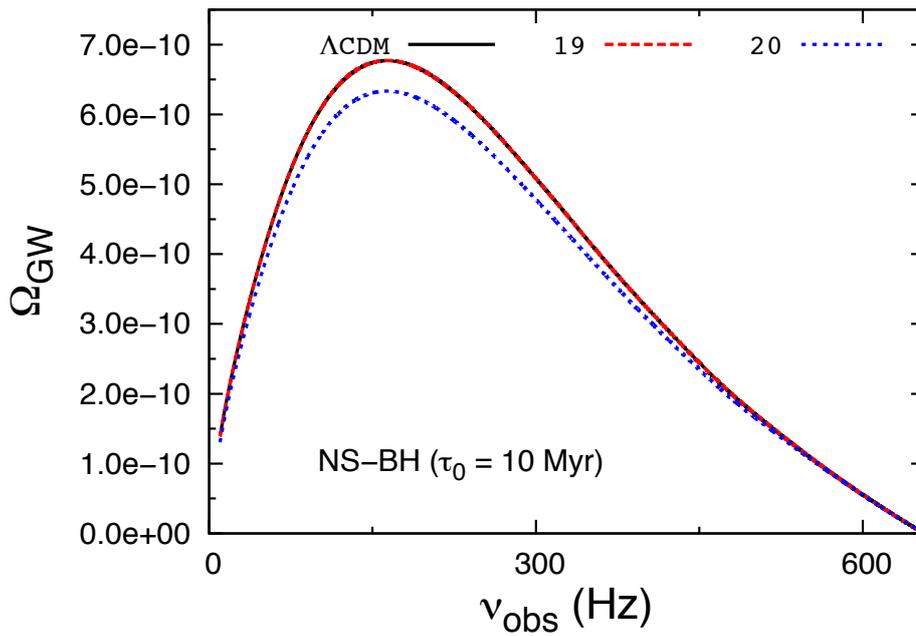


Figura 8.12 - FEOG em sistemas NS-BH para o Modelo Independente

o modelo independente (15)-(20) (PACE et al., 2010), caracterizados pela Tabela 6.1, seus respectivos espectros de ondas gravitacionais, em que atingem seu valor máximo e a frequência de pico, e os valores do S/N para dois futuros detectores de Ondas Gravitacionais, o LIGO III e o Einstein Telescope.

Tabela 8.3 - Espectro de Ondas Gravitacionais para sistemas BH-BH para os Modelos Energia Escura.

N	Modelo	$\Omega_{GW_{max}}$	$\nu_p(Hz)$	S/N (LIGO)	S/N(ET)
1	Λ CDM	1.33×10^{-10}	116	9.79×10^{-2}	2.17×10^1
2	Log	1.36×10^{-10}	115	1.00×10^{-1}	2.22×10^1
3	Linear	1.30×10^{-10}	116	9.52×10^{-2}	2.11×10^1
4	CPL	1.30×10^{-10}	116	9.66×10^{-2}	2.14×10^1
5	Generalizada (1)	1.30×10^{-10}	116	9.60×10^{-2}	2.13×10^1
6	Generalizada (2)	1.29×10^{-10}	116	9.46×10^{-2}	2.10×10^1
7	Oscilante (1)	1.27×10^{-10}	115	9.40×10^{-2}	2.08×10^1
8	Oscilante (2)	1.27×10^{-10}	115	9.37×10^{-2}	2.07×10^1
9	Oscilante (3)	1.26×10^{-10}	116	9.32×10^{-2}	2.06×10^1
10	Oscilante (4)	1.33×10^{-10}	116	9.78×10^{-2}	2.17×10^1
11	Oscilante (5)	1.59×10^{-10}	119	1.15×10^{-1}	2.56×10^1
12	Casimir (1)	1.32×10^{-10}	116	9.73×10^{-2}	2.16×10^1
13	Casimir (2)	1.28×10^{-10}	119	9.23×10^{-2}	2.05×10^1
14	Casimir (3)	1.02×10^{-10}	136	6.56×10^{-2}	1.48×10^1
15	INV1	9.86×10^{-11}	122	7.15×10^{-2}	1.59×10^1
16	INV2	1.23×10^{-10}	115	9.12×10^{-2}	2.02×10^1
17	2EXP	1.33×10^{-10}	116	9.79×10^{-2}	2.17×10^1
18	AS	1.31×10^{-10}	116	9.67×10^{-2}	2.17×10^1
19	CNR	1.33×10^{-10}	116	9.79×10^{-2}	2.14×10^1
20	SUGRA	1.25×10^{-10}	115	9.22×10^{-2}	2.04×10^1

Os resultados obtidos considerando o espectro total das três fontes astrofísicas que consideramos nesse trabalho, ou seja, NS-NS+NS-BH+BH-BH, como mostrado na tabela 8.4, tem seus valores de $\Omega_{GW_{max}}$ próximos ao sistema NS-NS, como já discutido anteriormente. Como o espectro total é a soma de três sistemas vemos uma pequena alteração com relação a tabela 8.1, a maioria dos modelos tem seus valores próximos ao modelo Λ CDM, os valores na frequência de pico também são reduzidos. Temos alteração nos valores do S/N para ambos os detectores, LIGO III e ET, que permanece na mesma ordem de grandeza dado pelo sistema NS-NS.

Com relação aos gráficos apresentados abaixo, eles mantem a forma do espectro para todos os modelos analisados anteriormente. Novamente, os modelos que mais influenciam a FEOG para o caso NS-NS+NS-BH+BH-BH, são os mesmos, os modelos (11) correspondente a parametrização oscilante, o modelo (14) sendo o efeito Casimir, os modelos (15), (16) e (20) são o modelo independente.

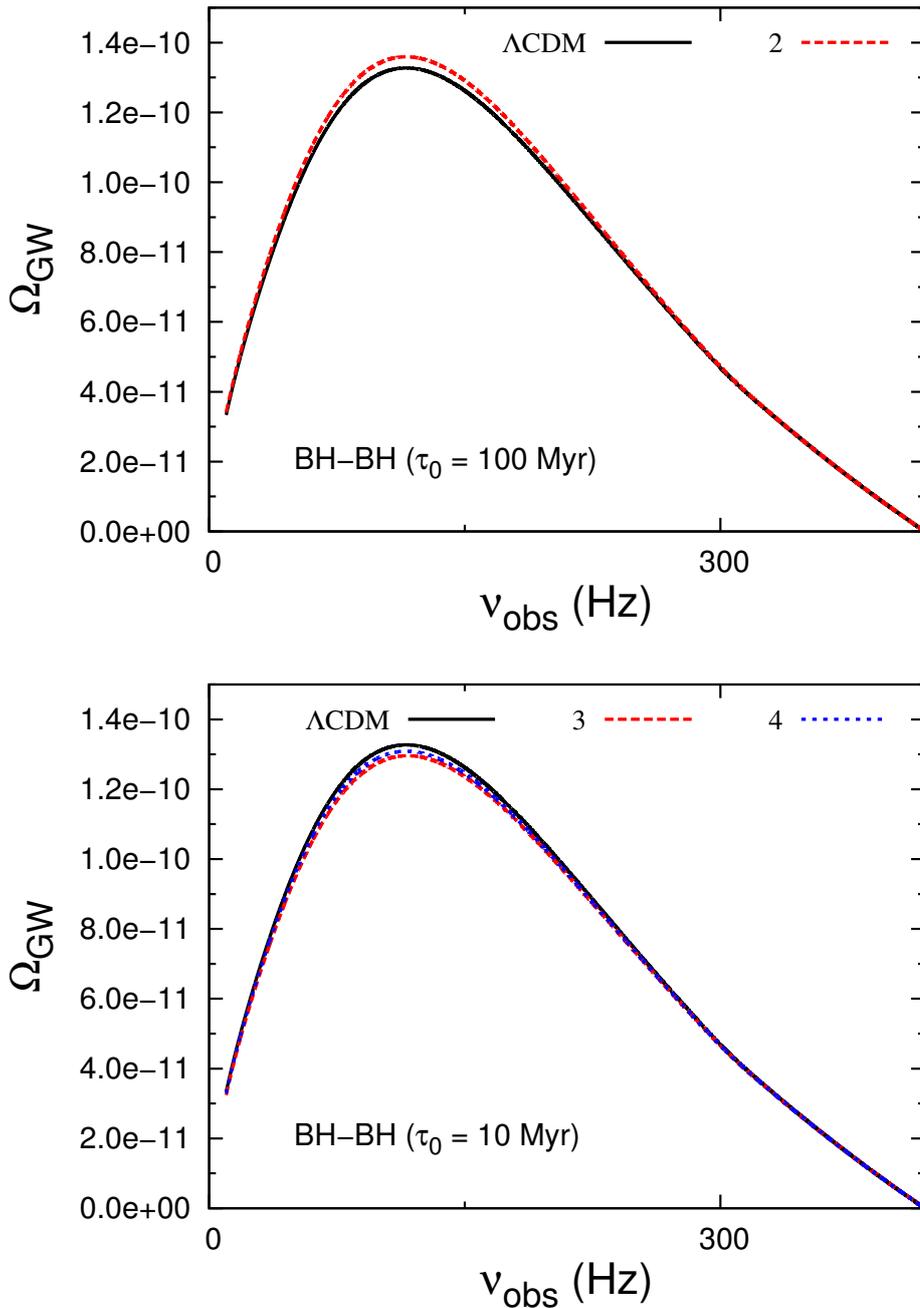


Figura 8.13 - FEOG em sistemas BH-BH para a parametrização Generalizado

Os resultados deste capítulo mostram que embora fundos estocásticos de ondas gravitacionais, pré-galácticas, possam atingir elevados valores de S/N, especialmente para o ET, os sinais produzidos pelos três sistemas binários (e o espectro integrado) não permitirá claramente superar o modelo ΛCDM da maior parte das equações de estado aqui apresentadas para o caso de quinta-essência. Dos cinco modelos que mais se destacaram do ΛCDM (modelos 11, 14, 15, 16 e 20) nos vemos que, 11, 14

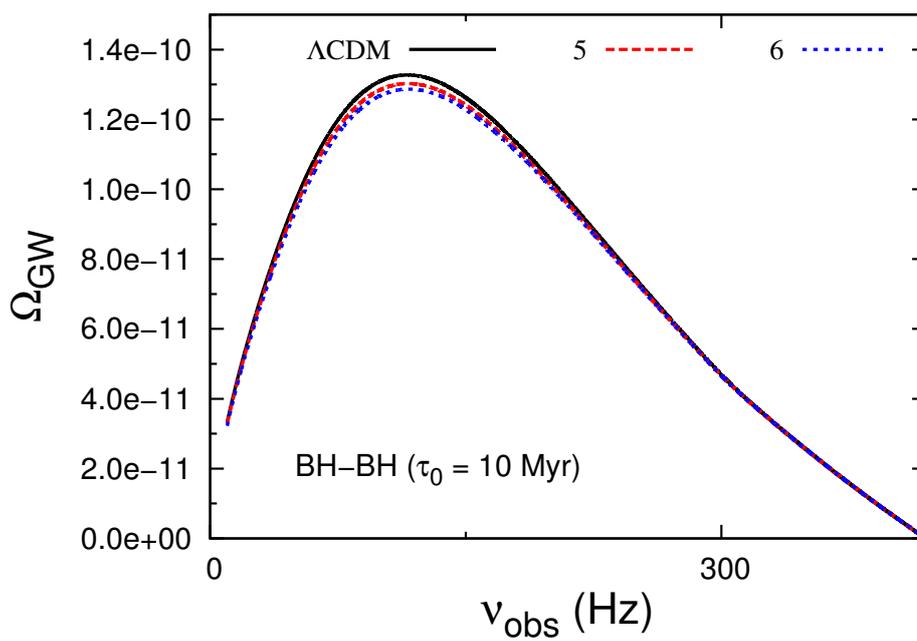


Figura 8.14 - FEOG em sistemas BH-BH para a parametrização Generalizado

e 15 são muito desfavorecidos pelos dados de LGRBs.

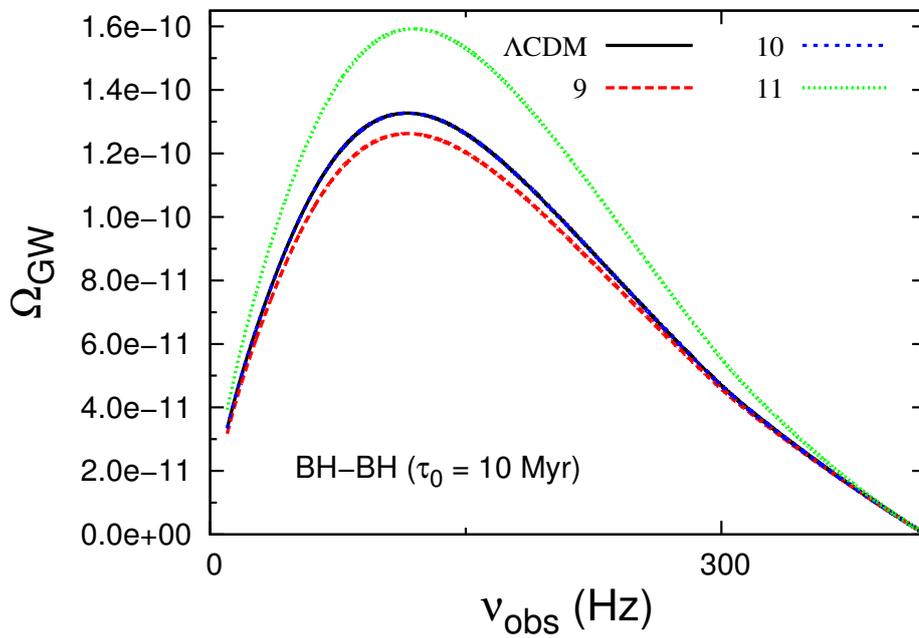
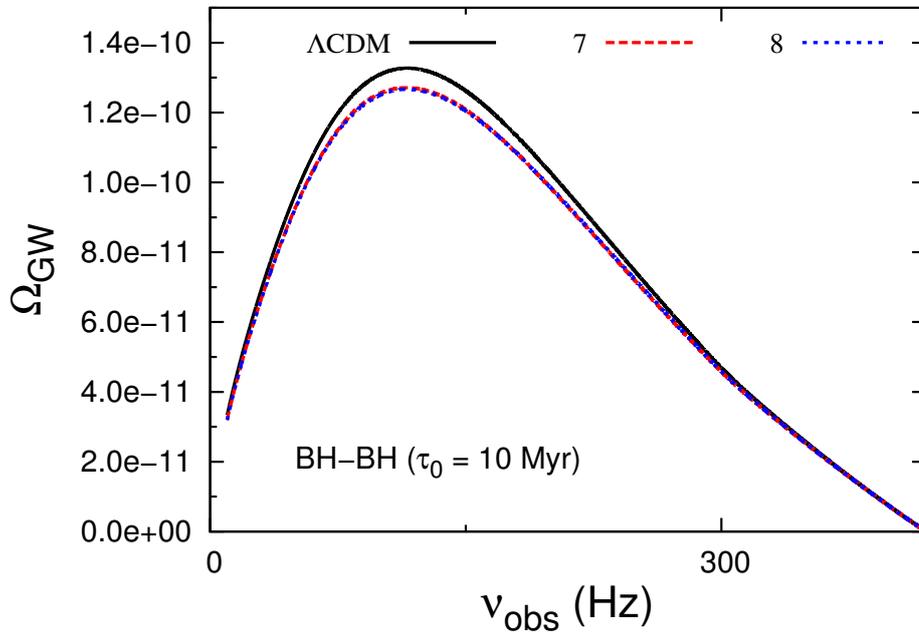


Figura 8.15 - FEOG em sistemas BH-BH para a parametrização Oscilante

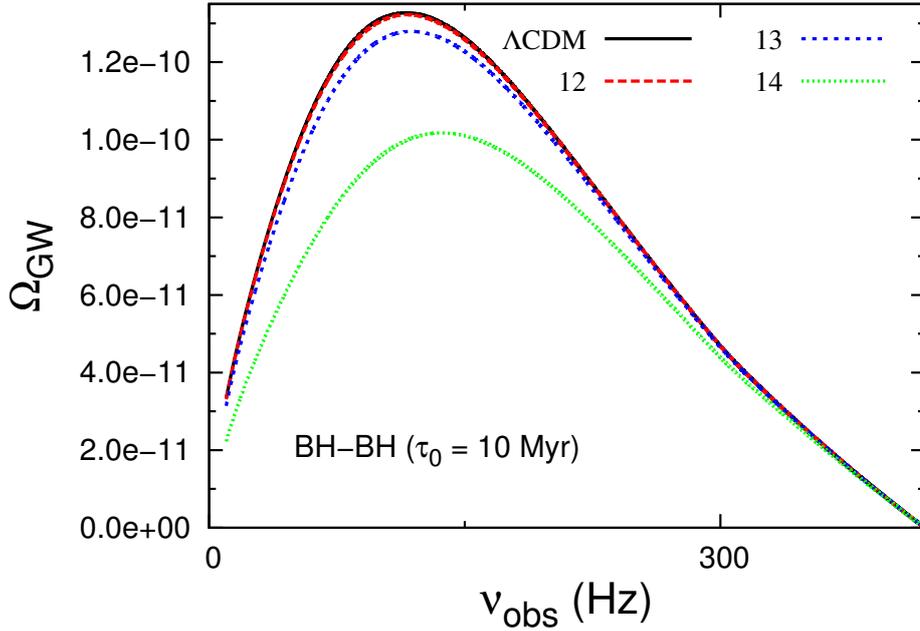


Figura 8.16 - FEOG em sistemas BH-BH para a parametrização Casimir

Tabela 8.4 - Espectro de Ondas Gravitacionais Total, NS-NS+NS-BH+BH-BH, para os Modelos Energia Escura.

N	Modelo	$\Omega_{GW_{max}}$	$\nu_p(Hz)$	S/N (LIGO)	S/N(ET)
1	Λ CDM	4.66×10^{-9}	324	1.95	4.46×10^2
2	Log	4.77×10^{-9}	324	1.99	4.56×10^2
3	Linear	4.54×10^{-9}	326	1.89	4.33×10^2
4	CPL	2.59×10^{-9}	325	1.92	4.40×10^2
5	Generalizada (1)	4.57×10^{-9}	325	1.91	4.37×10^2
6	Generalizada (2)	4.51×10^{-9}	326	1.88	4.31×10^2
7	Oscilante (1)	4.46×10^{-9}	324	1.87	4.28×10^2
8	Oscilante (2)	4.45×10^{-9}	324	1.86	4.26×10^2
9	Oscilante (3)	4.43×10^{-9}	325	1.85	4.24×10^2
10	Oscilante (4)	4.66×10^{-9}	324	1.95	4.46×10^2
11	Oscilante (5)	5.51×10^{-9}	330	2.28	5.21×10^2
12	Casimir (1)	4.64×10^{-9}	325	1.94	4.43×10^2
13	Casimir (2)	4.46×10^{-9}	332	1.83	4.19×10^2
14	Casimir (3)	3.45×10^{-9}	384	1.42	3.26×10^2
15	INV1	3.42×10^{-9}	338	1.41	3.22×10^2
16	INV2	4.33×10^{-9}	324	1.82	4.15×10^2
17	2EXP	4.66×10^{-9}	324	1.95	4.46×10^2
18	AS	4.60×10^{-9}	325	1.93	4.01×10^2
19	CNR	4.66×10^{-9}	324	1.95	4.46×10^2
20	SUGRA	4.38×10^{-9}	324	1.83	4.20×10^2

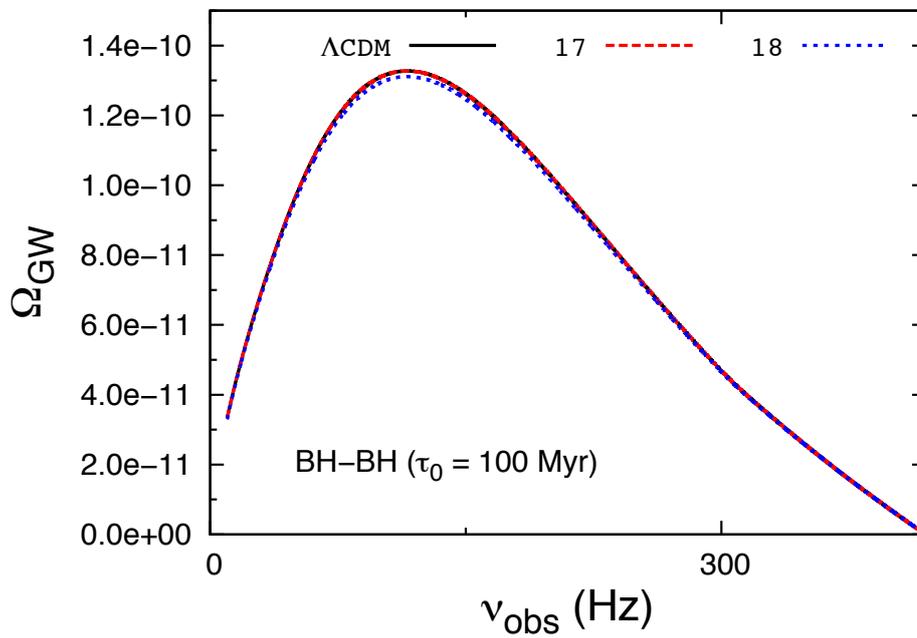
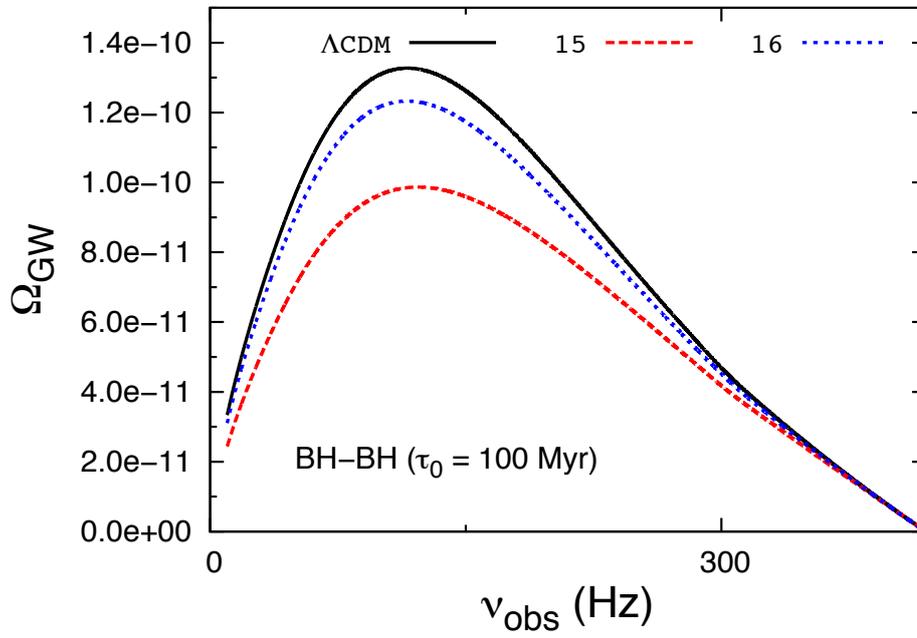


Figura 8.17 - FEOG em sistemas NS-NS para o Modelo Independente

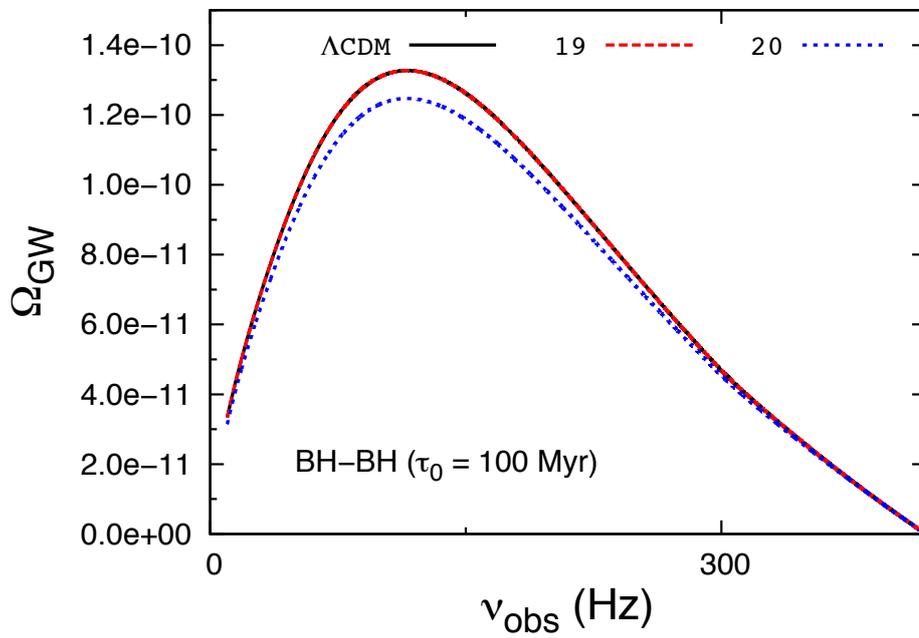


Figura 8.18 - FEOG em sistemas NS-NS para o Modelo Independente

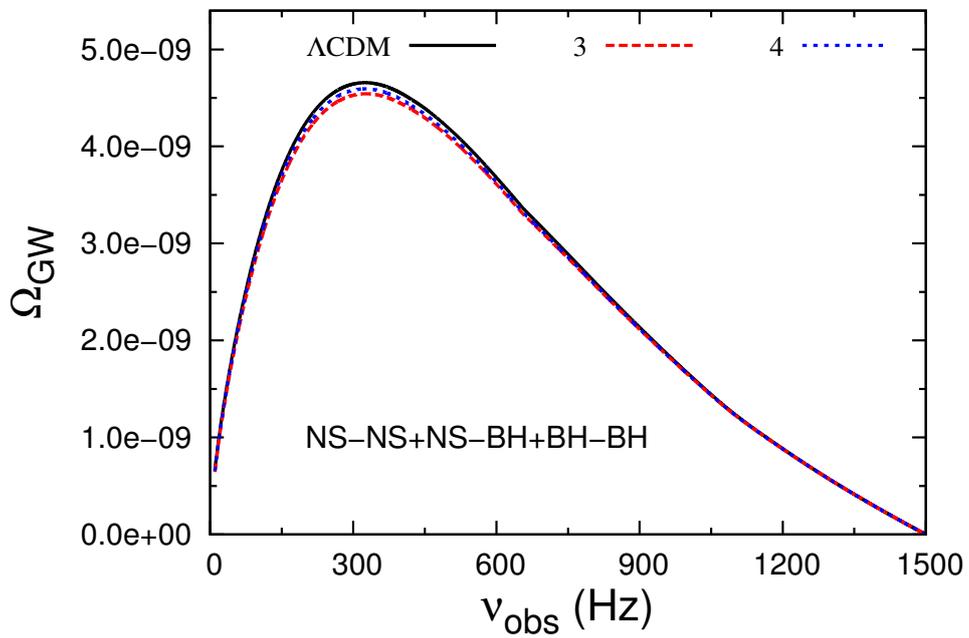
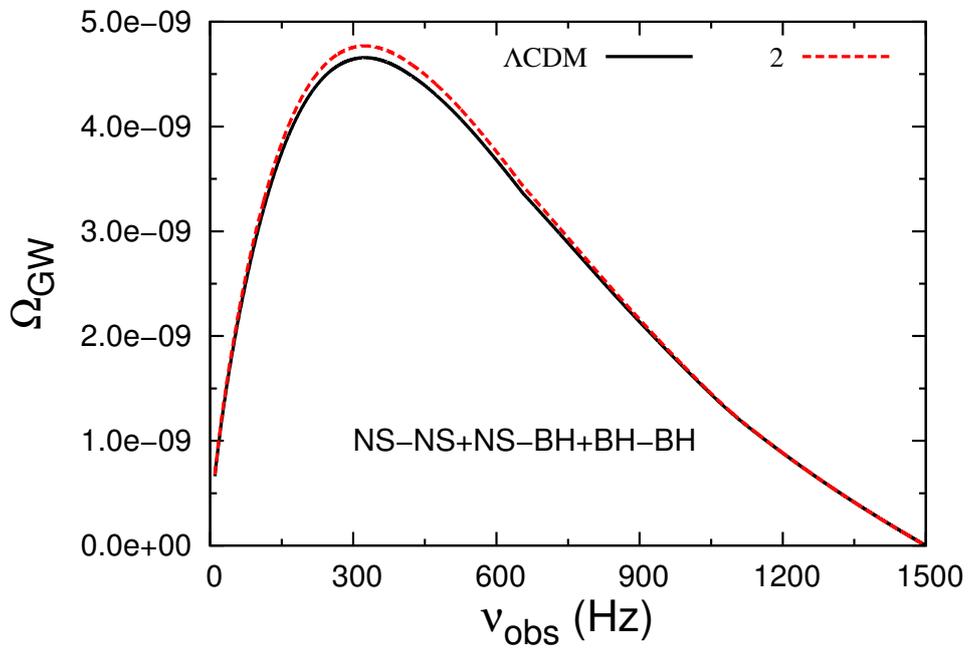


Figura 8.19 - FEOG em sistemas BH-BH para a parametrização Generalizado

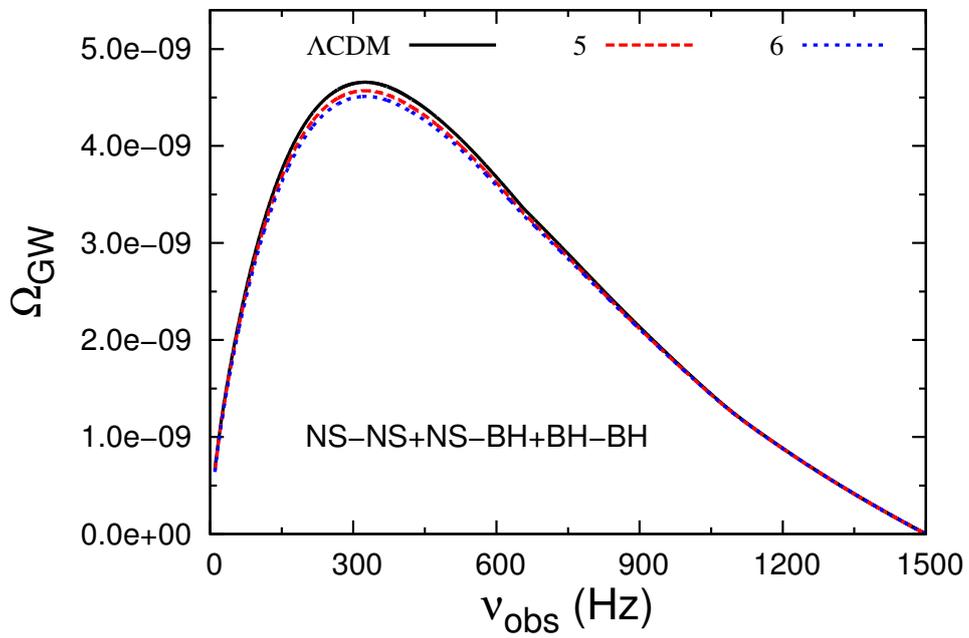


Figura 8.20 - FEOG em sistemas BH-BH para a parametrização Generalizado

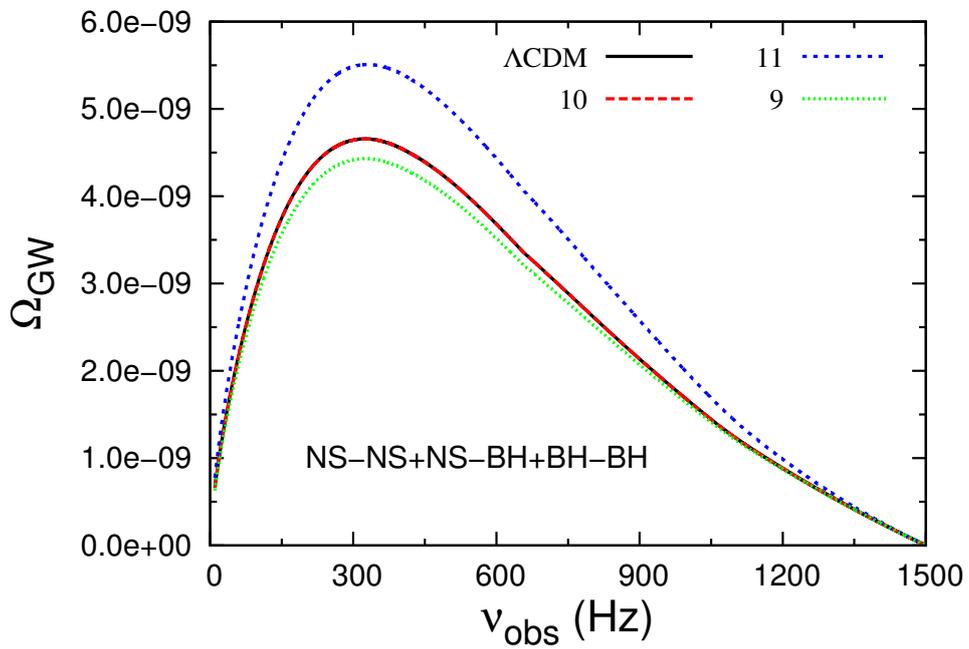
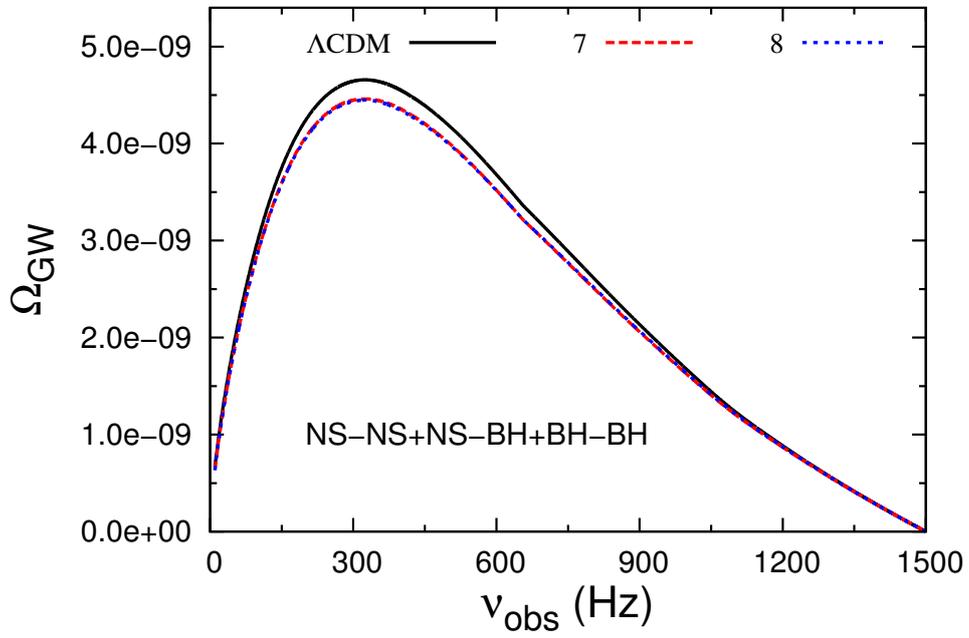


Figura 8.21 - FEOG em sistemas BH-BH para a parametrização Oscilante

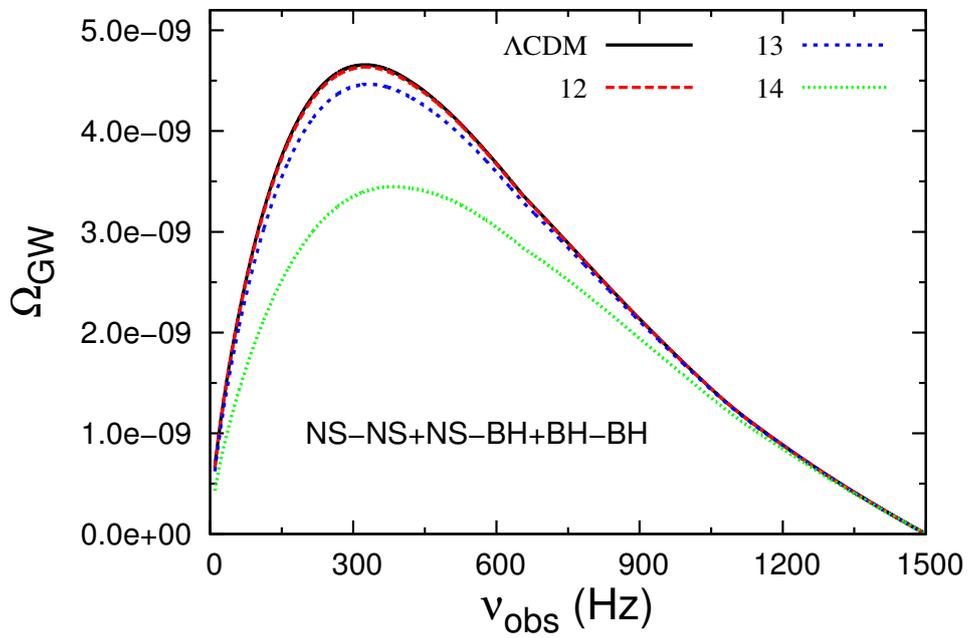


Figura 8.22 - FEOG em sistemas BH-BH para a parametrização Casimir

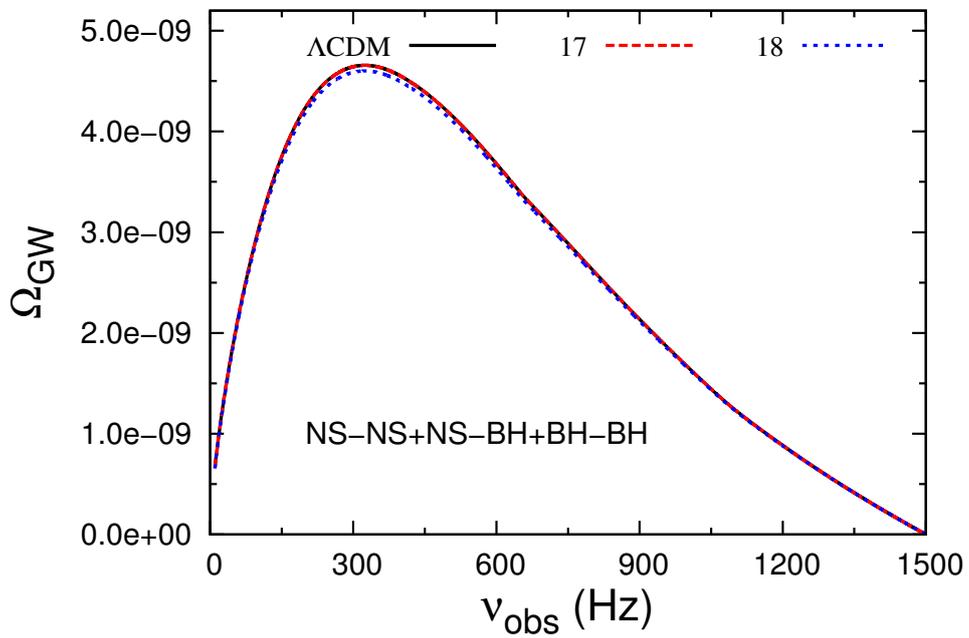
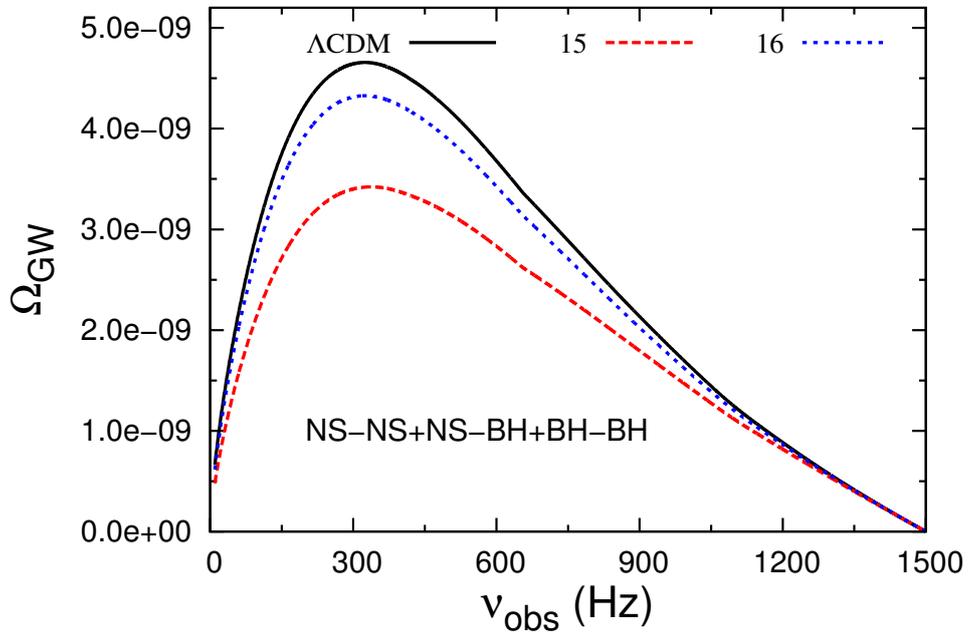


Figura 8.23 - FEOG em sistemas NS-NS para o Modelo Independente

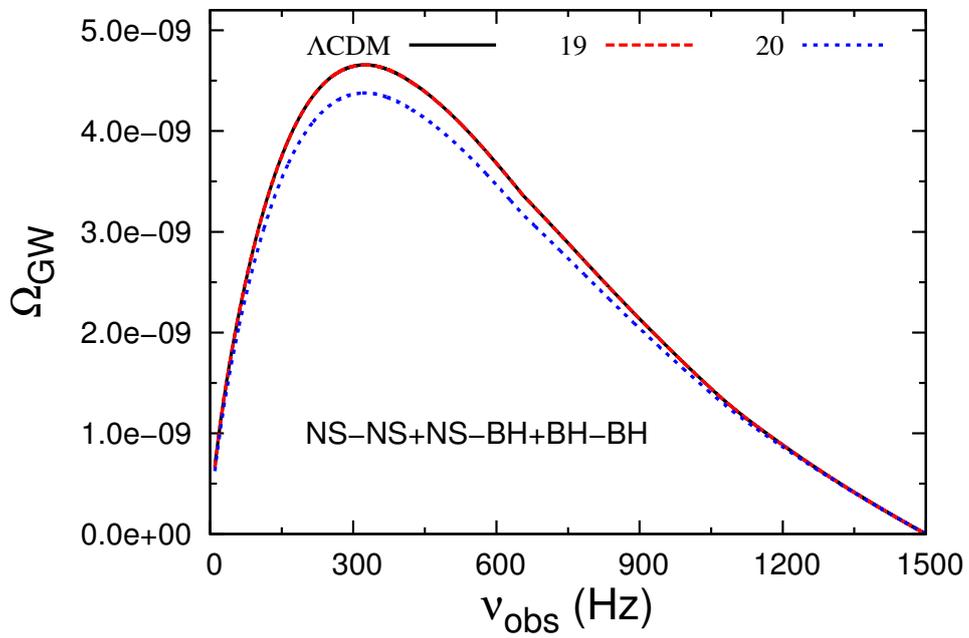


Figura 8.24 - FEOG em sistemas NS-NS para o Modelo Independente

9 CONCLUSÃO

Nessa proposta apresentamos uma forma de investigar a natureza da energia escura utilizando a TCFE, LGRB e o FEOG. Para este propósito foi estudado um modelo hierárquico de formação de estruturas, no cenário de energia escura, que utilizou o formalismo tipo Press-Schechter, adotando uma função de massa de halos de matéria escura. A partir deste formalismo obtemos a Taxa Cósmica de Formação Estelar (TCFE), e analisamos para diferentes equações de estado dependentes do tempo (*redshift*) confrontando com o modelo Λ CDM, que tem uma equação de estado constante no tempo. Vemos que os modelos que tiveram uma maior influência na TCFE foram as parametrizações oscilante, correspondentes ao modelo (11), para o efeito Casimir, dado pelo modelo (14), e para o modelos independente, os modelos (15), (16) e (20), correspondentes ao modelos INV e SUGRA.

Para analisar a consistência dos modelos de TCFE, utilizamos dados observacionais em GRBs e a estatística K-S, para o modelo Λ CDM obtemos uma probabilidade de $p=0.688$. Pelos resultados, encontramos 12 modelos desfavoráveis a energia escura, incluímos modelos que reproduzem a constante cosmológica, no entanto esses modelos contém mais parâmetros que o Λ CDM, por isso descartamos como favorável a energia escura. Os modelos mais consistentes com os dados do *swift* foram o modelo (16), correspondente ao potencial descrito por uma lei de potencia inversa, INV2, com uma probabilidade $p=0.813$. Outros 6 modelos são mais consistentes com os dados do que o modelo Λ CDM.

O Fundo Estocástico de Ondas Gravitacionais (FEOG), é influenciado pela TCFE, assim como efeitos geométricos causados pela taxa de expansão, que mudam dependendo da equação de estado que se usa. Como já vimos, os modelos que tiveram uma maior influência na TCFE, foram as parametrizações oscilante, correspondentes ao modelo (11), para o efeito Casimir, dado pelo modelo (14), e para o modelos independente, os modelos (15), (16) e (20), correspondentes ao modelos INV e SUGRA.

Considerando o conjunto de observáveis TCFE, LGRB e FEOG, vemos que existiria alguma possibilidade de identificar o caracter dependente do tempo, da equação de estado da energia escura, apenas para as diferentes equações de estado: Λ CDM, INV 2 e SUGRA. Considerando apenas LGRB poderíamos eliminar as equações de estado oscilante (2), oscilante (5), Casimir (2), Casimir (3) e INV 1. As equações de estado Log., Linear, CPL, Generalizada (1), Generalizada (2), Oscilantes (1), Oscilantes (3) e Oscilantes (4), 2EXP, AS, e CNR são estatisticamente muito parecidas com a equação de estado constante (Λ CDM). Assim, se aplicarmos o princípio da

simplicidade (Navalha de Occam) as equações de estado que poderiam ser avaliadas numa futura extensão deste trabalho são Λ CDM, INV 2 e SUGRA.

Terminamos essa monografia destacando que sob a análise que fizemos usando como observáveis: TCFE, LGRB, FEOG, nos parece que apenas duas equações de estado derivadas de modelos de quinta-essência permanecem ainda atrativas para futura extensão deste trabalho: INV 2 e SUGRA. Elas são atrativas pois ajustam melhor os dados observacionais a altos *redshifts* (LGRB) e possuem o mesmo comportamento do cenário Λ CDM a baixos *redshifts*.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AMENDOLA, L.; TSUJIKAWA, S. **Dark Energy**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. (Theory and Observations). 14, 68, 70
- BARBOZA, E. M. J.; ALCANIZ, J. S.; ZHU, Z. H.; SILVA, R. Generalized equation of state for dark energy. **Physical Review D**, v. 80, n. 4, p. 43521, ago. 2009. xiii, 71, 72, 80, 106, 111, 114, 118
- BENNETT, C. L.; LARSON, D.; WEILAND, J. L.; JAROSIK, N.; HINSHAW, G.; ODEGARD, N.; SMITH, K. M.; HILL, R. S.; GOLD, B.; HALPERN, M.; KOMATSU, E.; NOLTA, M. R.; PAGE, L.; SPERGEL, D. N.; WOLLACK, E.; DUNKLEY, J.; KOGUT, A.; LIMON, M.; MEYER, S. S.; TUCKER, G. S.; WRIGHT, E. L. Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results. **The Astrophysical Journal Supplement**, v. 208, n. 2, p. 20, out. 2013. 9, 79, 105
- BULIK, T.; BELCZYNSKI, K.; RUDAK, B. Astrophysical significance of detection of coalescing binaries with gravitational waves. **arXiv.org**, n. 2, p. 407–414, jul. 2003. 102
- CARROLL, S. **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity**. Benjamin Cummings, 2003. ISBN 0805387323. Disponível em: <http://www.amazon.com/Spacetime-Geometry-Introduction-General-Relativity/dp/0805387323>>. 6
- CHEVALLIER, M.; POLARSKI, D. Accelerating Universes with Scaling Dark Matter. **arXiv.org**, n. 0, p. 213–223, set. 2000. 71
- COPELAND, E. J.; NUNES, N. J.; ROSATI, F. Quintessence models in supergravity. **Physical Review D (Particles)**, v. 62, n. 1, p. 123503, dez. 2000. 75
- CORASANITI, P.; COPELAND, E. Model independent approach to the dark energy equation of state. **Physical Review D**, v. 67, n. 6, p. 063521, mar. 2003. 74
- D'INVERNO, R. A. **Introduction Einstein's Relativity**. [S.l.]: Oxford University Press, 1992. 3, 4, 8
- DODELSON, S. **Modern Cosmology**. [S.l.]: Academic Press, 2003. 4, 5, 10, 51

EFSTATHIOU, G. Constraining the equation of state of the Universe from Distant Type Ia Supernovae and Cosmic Microwave Background Anisotropies. **arXiv.org**, n. 3, p. 842–850, abr. 1999. 71

EINSTEIN, A. The Foundation of the General Theory of Relativity. **Annalen Phys.**, v. 49, n. S1, p. 769–822, 1916. 5, 19

HAO, J.-M.; YUAN, Y.-F. Is the Metallicity of the Progenitor of Long Gamma-Ray Bursts Really Low? **The Astrophysical Journal**, v. 772, n. 1, p. 42, jul. 2013. 89

HOPKINS, A. M. On the Evolution of Star-forming Galaxies. **The Astrophysical Journal**, v. 615, n. 1, p. 209–221, nov. 2004. 80, 81, 82

_____. Erratum: “On the Evolution of Star-forming Galaxies” (*ApJ*, 615, 209 [2004]). **The Astrophysical Journal**, v. 654, n. 2, p. 1175–1175, jan. 2007. 80, 81, 82

HUTERER, D.; COORAY, A. R. Gravitational lensing as a probe of Quintessence. **American Astronomical Society**, v. 194, p. 982, maio 1999. 71

JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. 3. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007. 29

LINDER, E. V. Exploring the Expansion History of the Universe. **arXiv.org**, n. 9, p. 91301, ago. 2002. 71

MACFADYEN, A. I.; WOOSLEY, S. E. Collapsars: Gamma-Ray Bursts and Explosions in. **The Astrophysical Journal**, v. 524, n. 1, p. 262–289, out. 1999. 89

MAGGIORE, M. **Gravitational Waves, Volume 1**. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 2008. (Theory and Experiments). 23, 29, 102

MIRANDA, O. D. Stochastic backgrounds of gravitational waves from cosmological sources - the role of dark energy. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 426, n. 4, p. 2758–2771, nov. 2012. vii, ix, 77, 102, 104, 105, 118

MO HOUJUN; VAN DER BOSH, F.; WHITE, S. **Galaxy Formation and Evolution**. [S.l.: s.n.], 2010. 12, 37, 52

NARLIKAR, J. V. **An Introduction to Cosmology**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. 3

PACE, F.; FEDELI, C.; MOSCARDINI, L.; BARTELMANN, M. Structure formation in cosmologies with oscillating dark energy. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 422, n. 2, p. 1186–1202, maio 2012. [xiii](#), [72](#), [73](#), [74](#), [80](#), [83](#), [106](#), [111](#), [114](#), [118](#)

PACE, F.; WAIZMANN, J. C.; BARTELMANN, M. Spherical collapse model in dark-energy cosmologies. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 406, n. 3, p. 1865–1874, ago. 2010. [xiii](#), [42](#), [73](#), [80](#), [85](#), [106](#), [111](#), [114](#), [119](#)

PADMANABHAN, T. **Structure Formation in the Universe**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1993. [37](#)

PEREIRA, E. d. S. **Uma contribuição ao estudo do Universo pré-galáctico**. 205 p. Tese (Doutorado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2012-02-24 2012. Disponível em: <http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m19/2012/01.24.16.15>. Acesso em: 16 abr. 2014. [31](#), [37](#), [52](#)

PEREIRA, E. S.; MIRANDA, O. D. Stochastic background of gravitational waves generated by pre-galactic black holes. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 401, n. 3, p. 1924–1932, jan. 2010. [77](#), [78](#), [104](#)

PERLMUTTER, S.; ALDERING, G.; GOLDHABER, G.; KNOP, R. A.; NUGENT, P.; CASTRO, P. G.; DEUSTUA, S.; FABBRO, S.; GOOBAR, A.; GROOM, D. E.; HOOK, I. M.; KIM, A. G.; KIM, M. Y.; LEE, J. C.; NUNES, N. J.; PAIN, R.; PENNYPACKER, C. R.; QUIMBY, R.; LIDMAN, C.; ELLIS, R. S.; IRWIN, M.; MCMAHON, R. G.; RUIZ-LAPUENTE, P.; WALTON, N.; SCHAEFER, B.; BOYLE, B. J.; FILIPPENKO, A. V.; MATHESON, T.; FRUCHTER, A. S.; PANAGIA, N.; NEWBERG, H. J. M.; COUCH, W. J.; PROJECT, S. C. Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae. **The Astrophysical Journal**, v. 517, n. 2, p. 565–586, jun. 1999. [1](#), [63](#)

PRESS, W. H.; SCHECHTER, P. Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation. **Astrophysical Journal**, v. 187, p. 425–438, fev. 1974. [55](#), [77](#)

REGIMBAU, T.; HUGHES, S. A. Gravitational-wave confusion background from cosmological compact binaries: Implications for future terrestrial detectors. **Physical Review D**, 2009. [101](#), [102](#), [104](#), [105](#)

- REGIMBAU, T.; PACHECO, J. A. de F. Stochastic Background from Coalescences of NS-NS Binaries. **arXiv.org**, n. 1, p. 455–461, dez. 2005. [104](#)
- RIESS, A. G.; FILIPPENKO, A. V.; CHALLIS, P.; CLOCCHIATTIA, A.; DIERCKS, A.; GARNAVICH, P. M.; GILLILAND, R. L.; HOGAN, C. J.; JHA, S.; KIRSHNER, R. P.; LEIBUNDGUT, B.; PHILLIPS, M. M.; REISS, D.; SCHMIDT, B. P.; SCHOMMER, R. A.; SMITH, R. C.; SPYROMILIO, J.; STUBBS, C.; SUNTZEFF, N. B.; TONRY, J. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. **arXiv.org**, n. 3, p. 1009–1038, maio 1998. [1](#), [63](#)
- ROBERTSON, B. E.; ELLIS, R. S. Connecting the Gamma Ray Burst Rate and the Cosmic Star Formation History: Implications for Reionization and Galaxy Evolution. **The Astrophysical Journal**, v. 744, n. 2, p. 95, jan. 2012. [90](#), [91](#)
- SALPETER, E. E. The Luminosity Function and Stellar Evolution. **Astrophysical Journal**, v. 121, p. 161, jan. 1955. [79](#)
- SATHYAPRAKASH, B. S. The gravitational wave symphony of the Universe. **arXiv.org**, n. 4, p. 457–475, dez. 2000. [103](#)
- SCHMIDT, M. The Rate of Star Formation. **The Astrophysical Journal**, 1959. [78](#)
- SHETH, R. K.; TORMEN, G. Large scale bias and the peak background split. **arXiv.org**, n. 1, p. 119–126, jan. 1999. [77](#)
- WEISBERG, J. M.; TAYLOR, J. H. The Relativistic Binary Pulsar B1913+16. **Radio Pulsars**, v. 302, p. 93, 2003. [19](#)
- WELLER, J.; ALBRECHT, A. Future supernovae observations as a probe of dark energy. **Physical Review D**, v. 65, n. 1, p. 103512, maio 2002. [71](#)

PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE

Teses e Dissertações (TDI)

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

Manuais Técnicos (MAN)

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

Notas Técnico-Científicas (NTC)

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programas de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

Relatórios de Pesquisa (RPQ)

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

Publicações Didáticas (PUD)

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

Publicações Seriadas

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Contam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

Programas de Computador (PDC)

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. Aceitam-se tanto programas fonte quanto os executáveis.

Pré-publicações (PRE)

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.