

Uma abordagem diferente na estatística do experimento Millikan

(A different approach to the statistics of the Millikan experiment)

N. Veissid¹, L.A. Pereira¹, A.F.V. Peña²

¹Laboratório Associado de Sensores e Materiais, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais,
São José dos Campos, SP, Brasil

²Departamento de Física, Química e Biologia, Faculdade de Ciências e Tecnologia,
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Presidente Prudente, SP, Brasil

Recebido em 1/3/2013; Aceito em 21/9/2013; Publicado em 6/2/2014

A experiência clássica de Millikan para a determinação da carga do elétron é muito interessante do ponto de vista de estudos estatísticos de medidas experimentais. Em uma experiência didática de laboratório de física, é sugerido dividir os valores da carga elétrica obtida pelo valor da carga do elétron e , desta forma, estabelecer experimentalmente que as gotas de óleo carregam números inteiros de elétrons. Este trabalho apresenta um algoritmo estatístico novo para tratamento das medidas e para o cálculo do melhor valor da carga do elétron em um experimento Millikan.

Palavras-chave: experimento Millikan, estatística, carga do elétron.

The classic Millikan experiment to determine the electron charge is very interesting from the point of view of statistics of experimental measurements. In a physics laboratory it is suggested to divide the obtained values of the electric charge by the value of an electron charge, and it is possible to experimentally establish that the oil droplets carry integer numbers of electrons. This work presents a new statistical algorithm for the treatment of measurements and for determining the best value of the electron charge in a Millikan experiment.

Keywords: Millikan experiment, statistics, electron charge.

1. Introdução

Em 1909, R.A. Millikan realizou uma série de experimentos que demonstraram que as cargas elétricas sempre acontecem em múltiplos inteiros de uma unidade elementar. Millikan também determinou o valor desta carga com uma precisão de 0,1%. Atualmente o experimento de Millikan é um sistema borrifador de gotículas de óleo ionizadas dentro de um campo elétrico orientado em sentidos alternados. A velocidade de ascensão de uma determinada gota de óleo dentro de um meio viscoso permite determinar a carga elétrica que a gota carrega. Ao mudar a polaridade do campo elétrico entre as placas, é possível inverter o sentido de movimento de uma gota, permitindo que a gota analisada fique na visada do observador por tempo suficiente para realizar várias medidas. Supondo apenas que a velocidade terminal da gota é proporcional à força agindo sobre ela é possível verificar que as cargas sempre ocorrem em múltiplos de uma unidade fundamental, cujo valor real é $1,602 \times 10^{-19}$ C [1].

O livro de Crease [2] relata várias curiosidades a respeito do experimento. Por exemplo, a defesa do físico Ehrenhaft a respeito da existência de subelétrons baseado nos dados do próprio Millikan. Outra curiosidade

foi a indicação do eminente físico Ernest Rutherford que a maior dificuldade do experimento residia na taxa de evaporação das gotículas de água. Desta forma, para resolver o problema, Millikan ou Fletcher [3] desenvolveram um método de borrifação de gotículas de óleo. Gotas minúsculas observadas desciam sob o efeito da gravidade e com aplicação do campo elétrico elas invertiam o sentido. Ligando e desligando o campo, a mesma gota pode ser observada varias vezes “passeando” pela visada do microscópio. Esta gota equilibrada [2] permite muitas medidas e, conseqüentemente, a possibilidade de realizar um estudo estatístico nos dados do experimento.

Em laboratórios de física, a execução do experimento Millikan tem como motivação mostrar que as gotículas de óleo possuem números inteiros de elétrons. Os valores obtidos experimentalmente das cargas elétricas são divididos pelo valor da carga elementar do elétron, ou seja, $1,602 \times 10^{-19}$ C e , deste modo, prova-se que essa carga elétrica está quantizada. Ela é um produto entre um número natural n e uma quantidade bem definida de carga e ($e, 2e, 3e, \dots, ne$). A estatística se restringe em fazer histogramas e verificar que as colunas mais altas estão centradas em valores múltiplos de e .

¹E-mail: veissid@las.inpe.br.

Para todo conjunto de pontos experimentais é necessário uma análise, ou seja, fazer um ajuste da melhor função que define estes pontos. Para definir o melhor conjunto de valores dos parâmetros ajustáveis de uma função é necessário partir de um critério. A teoria estatística estabelece a máxima probabilidade, que é entendida como o valor mínimo de χ^2 (chi-quadrado) [4]. Este critério é usado no trabalho e, também, é conhecido como método dos mínimos quadrados. Para o ajuste de um histograma o valor do chi-quadrado é dado pela Eq. (1) [5].

$$\chi^2 = \sum \frac{(N_i - n_i)^2}{n_i}, \quad (1)$$

onde N_i é a altura da coluna do histograma e n_i é o valor obtido no ajuste de uma função distribuição tipo gaussiana.

2. Fundamentação estatística do experimento Millikan

Os valores da Tabela 1 são de 100 medidas tomadas no dia primeiro de setembro de 2011 no laboratório de Estrutura da Matéria da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Unesp de Presidente Prudente por um dos autores deste trabalho (L.A.P.) que na época era estudante universitário.

Tabela 1 - Valores de 100 medidas de carga elétrica (em unidades de 10^{-19} C) nas gotas de óleo do experimento Millikan.

Medida	Valor	num	carga e	Medida	Valor	num	carga e
1	2,937	2	1,4685	2	4,935	3	1,645
3	6,062	4	1,5155	4	6,034	4	1,5085
5	6,301	4	1,57525	6	8,098	5	1,6196
7	5,968	4	1,492	8	4,222	3	1,40733
9	3,879	2	1,9395	10	5,101	3	1,70033
11	11,114	7	1,58771	12	7,564	5	1,5128
13	15,62	10	1,562	14	9,118	6	1,51967
15	8,217	5	1,6434	16	9,686	6	1,61433
17	9,221	6	1,53683	18	9,918	6	1,653
19	10,265	6	1,71083	20	12,000	8	1,500
21	11,342	7	1,62029	22	2,185	1	2,185
23	3,849	2	1,9245	24	3,914	2	1,957
25	3,342	2	1,671	26	3,883	2	1,9415
27	3,679	2	1,8395	28	3,902	2	1,951
29	4,021	3	1,34033	30	3,989	2	1,9945
31	3,415	2	1,7075	32	6,477	4	1,61925
33	5,709	4	1,42725	34	5,741	4	1,43525
35	7,888	5	1,5776	36	9,563	6	1,59383
37	11,238	7	1,60543	38	11,307	7	1,61529
39	10,398	6	1,733	40	10,813	7	1,54471
41	15,119	9	1,67989	42	15,377	10	1,5377
43	11,97	7	1,71	44	12,233	8	1,52913
45	11,58	7	1,65429	46	9,452	6	1,57533
47	9,512	6	1,58533	48	6,873	4	1,71825
49	2,603	2	1,3015	50	2,445	2	1,2225
51	4,179	3	1,393	52	7,199	4	1,79975
53	6,837	4	1,70925	54	5,02	3	1,67333
55	6,438	4	1,6095	56	1,966	1	1,966
57	4,826	3	1,60867	58	3,466	2	1,733
59	4,193	3	1,39767	60	4,034	3	1,34467
61	4,255	3	1,41833	62	3,658	2	1,829
63	3,176	2	1,588	64	4,573	3	1,52433
65	3,296	2	1,648	66	4,375	3	1,45833
67	3,567	2	1,7835	68	2,815	2	1,4075
69	4,737	3	1,579	70	3,801	2	1,9005
71	4,099	3	1,36633	72	3,835	2	1,9175
73	4,153	3	1,38433	74	5,122	3	1,70733
75	3,627	2	1,8135	76	3,427	2	1,7135
77	8,262	5	1,6524	78	5,57	3	1,85667
79	7,431	5	1,4862	80	6,575	4	1,64375
81	5,851	4	1,46275	82	8,042	5	1,6084
83	9,301	6	1,55017	84	10,454	7	1,49343
85	9,597	6	1,5995	86	10,469	7	1,49557
87	12,83	8	1,60375	88	10,493	7	1,499
89	10,572	7	1,51029	90	5,929	4	1,48225
91	6,119	4	1,52975	92	9,881	6	1,64683
93	7,787	5	1,5574	94	7,208	5	1,4416
95	9,029	6	1,50483	96	7,523	5	1,5046
97	6,962	4	1,7405	98	6,813	4	1,70325
99	7,252	5	1,4504	100	10,41	7	1,48714

A Tabela 1 mostra o número da medida e o valor da respectiva medida. A coluna “num” é o número de cargas inteiras da gotícula e foi calculado pela razão arredondada para inteiro entre a medida e o valor de $1,602 \times 10^{-19}$. A coluna “carga e” é o valor de cada carga obtido pela divisão do “valor” pelo “num”. Por exemplo, a medida 6 provavelmente corresponde a cinco elétrons e o valor da carga e é próximo do esperado $1,602 \times 10^{-19}$ C. As medidas 49 ($2,603 \times 10^{-19}$ C) e 50 ($2,445 \times 10^{-19}$ C), foram removidas porque a análise dos dados revela que provavelmente estas medidas estão acompanhadas de alguma incoerência, talvez algum tipo de erro, e atrapalha o método usado no trabalho. A seção “Critério para Rejeição de Medidas Experimentais” explica o motivo da eliminação destes dois pontos e, desta forma, a quantidade de medidas agora fica reduzida para 98 medidas.

A Fig. 1 mostra o histograma feito com as medidas da Tabela 1. O histograma mostra que a variação dos valores das cargas medidas foi entre 1×10^{-19} C e 16×10^{-19} C. Teoricamente, os picos deste histograma estariam centrados nos múltiplos da carga do elétron, $1,602 \times 10^{-19}$ C, mas devido a existência de erros sistemáticos e aleatórios estes picos estão mascarados e, provavelmente, centrados em múltiplos de algum outro valor.

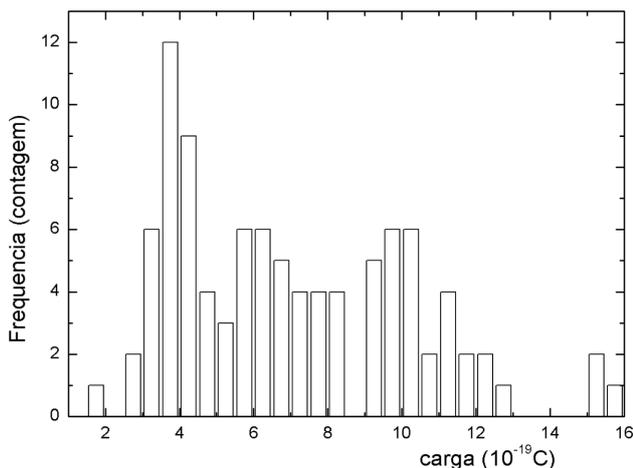


Figura 1 - Histograma dos valores medidos de carga elétrica mostrados na Tabela 1.

Sabendo-se que a carga do elétron é de $1,602 \times 10^{-19}$ C e dividindo-se com arredondamento para um número inteiro os valores da Tabela 1, obtém-se o histograma dado pela Fig. 2. No entanto, este artifício não é didático no sentido do cálculo da carga de um elétron porque este valor foi usado a priori. Os valores medidos estão acompanhados de erros sistemáticos e aleatórios e, portanto, o melhor valor da carga do elétron, do ponto de vista da estatística da medida, deve ser calculado. A equação da gaussiana da Fig. 2 é definida como y em função de x , onde y é a frequência e x é a carga elétrica. Nesta equação xc é o ponto central da gaussiana, w é a largura a meia altura

e A é a área sob a gaussiana. Os valores são mostrados no quadro da Fig. 2 e todos estes parâmetros foram obtidos pelo método dos mínimos quadrados no ajuste das colunas do histograma. Observa-se na Fig. 2 que apesar de termos usado o valor de $1,60 \times 10^{-19}$ C, o ajuste calculou um melhor valor de q para $1,5837 \times 10^{-19}$ C. Neste ponto do trabalho vale ressaltar que o símbolo q está sendo usado para a variável independente da carga do elétron para se calcular o valor de chi-quadrado e o símbolo e é usado para o resultado da carga do elétron.

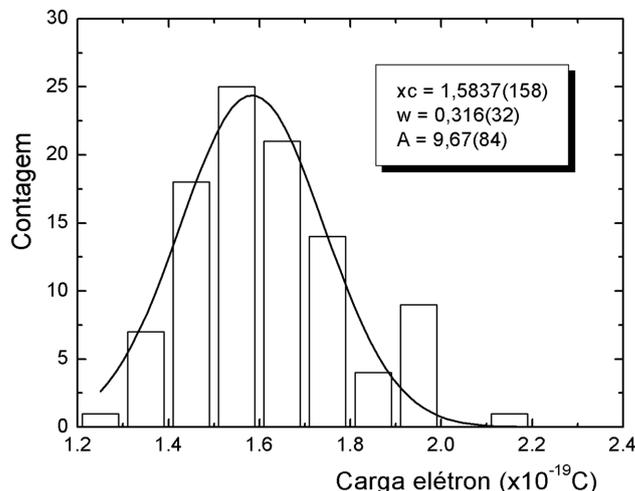


Figura 2 - Histograma dos valores medidos de cargas elétricas da Tabela 1, dividido pelo número de elétrons de cada gotícula.

O algoritmo usado neste trabalho é o cálculo do chi-quadrado da Eq. (1) em função da variação do valor da carga q obtido no ajuste. Onde o valor da carga q é a variável independente e foi escolhido variar entre $1,60 \times 10^{-19}$ C e $1,75 \times 10^{-19}$ C, com passo de $0,01 \times 10^{-19}$ C. Por exemplo, o histograma da Fig. 2 apresenta um chi-quadrado com valor de 57,6. Segundo a teoria de erros [4] o melhor valor para a carga do elétron é aquele que apresenta a maior probabilidade de acontecer, que corresponde ao menor valor de chi-quadrado.

Variando o valor da carga q temos que os valores das colunas “num” e “carga e” da Tabela 1 sofrem alterações. Por exemplo, a medida 89 com carga de $10,572 \times 10^{-19}$ C pode ter as seguintes cargas e :

- para $1,60 \times 10^{-19}$ C, temos “num” = 7 elétrons e, portanto, $e=1,510 \times 10^{-19}$ C;
- para $1,65 \times 10^{-19}$ C, temos “num” = 6 elétrons e, portanto, $e=1,762 \times 10^{-19}$ C;
- para $1,70 \times 10^{-19}$ C, temos “num” = 6 elétrons e, portanto, $e=1,762 \times 10^{-19}$ C e
- para $1,75 \times 10^{-19}$ C, temos “num” = 6 elétrons e, portanto, $e=1,762 \times 10^{-19}$ C.

Portanto, o histograma mostrado na Fig. 2 se modifica gradualmente e de modo sutil com a variação da

carga q e alcança uma configuração gaussiana boa para um determinado valor de chi-quadrado, ou melhor, para o menor valor do chi-quadrado que é dado pela Eq. (1).

3. Critério para rejeição de pontos experimentais

Segundo o algoritmo deste trabalho espera-se uma curva contínua ou bem comportada do valor do chi-quadrado em função do valor da carga do elétron. Desta forma, o valor ótimo da carga do elétron é calculado no ponto mínimo desta curva. No entanto, devido ao algoritmo proposto existem valores de cargas que estão no limiar n elétrons ou $n - 1$ elétrons. Por exemplo, a medida 50 que é $2,445 \times 10^{-19}$ C quando dividido pela carga q de $1,63 \times 10^{-19}$ C fornece de maneira arredondado o número inteiro de 2 e, em seguida, para

q de $1,64 \times 10^{-19}$ C fornece um número arredondado de uma unidade de elétron. Os valores de chi-quadrado para os dois casos são de 11,7 e 3273, respectivamente. A Fig. 3(B) mostra um histograma com uma coluna afastada no lado direito e a Fig. 3(A) não tem esta coluna. Este fato é causado pelo ponto 50 que sai da parte esquerda do histograma (A) e vai para a parte direita de (B), quando o valor de q muda de $1,63 \times 10^{-19}$ C para $1,64 \times 10^{-19}$ C. Consequentemente, em função deste fato, o valor do chi-quadrado sofre uma descontinuidade de 11,7 para 3273.

De maneira análoga, a Fig. 4 mostra o caso idêntico que o ponto 49 sofre quando o valor da carga q muda de $1,73 \times 10^{-19}$ C para $1,74 \times 10^{-19}$ C. O gráfico da Fig. 4(B) apresenta mais uma coluna afastada do histograma no lado direito. Em função destas explicações que estão ilustradas nas Figs. 3 e 4, foi eliminado da estatística os pontos de números 49 e 50 da Tabela 1.

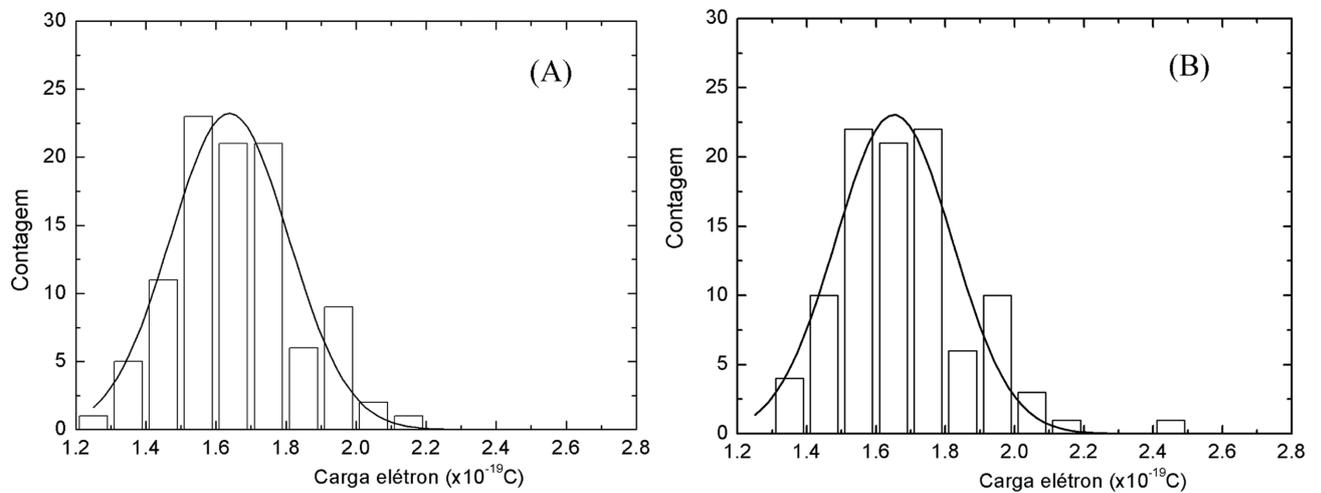


Figura 3 - Histograma dos valores medidos de cargas elétricas da Tabela 1, dividido pelo número de elétrons que compõe cada gotícula considerando carga do elétron de $1,63 \times 10^{-19}$ C e $1,64 \times 10^{-19}$ C nos gráficos (A) e (B), respectivamente.

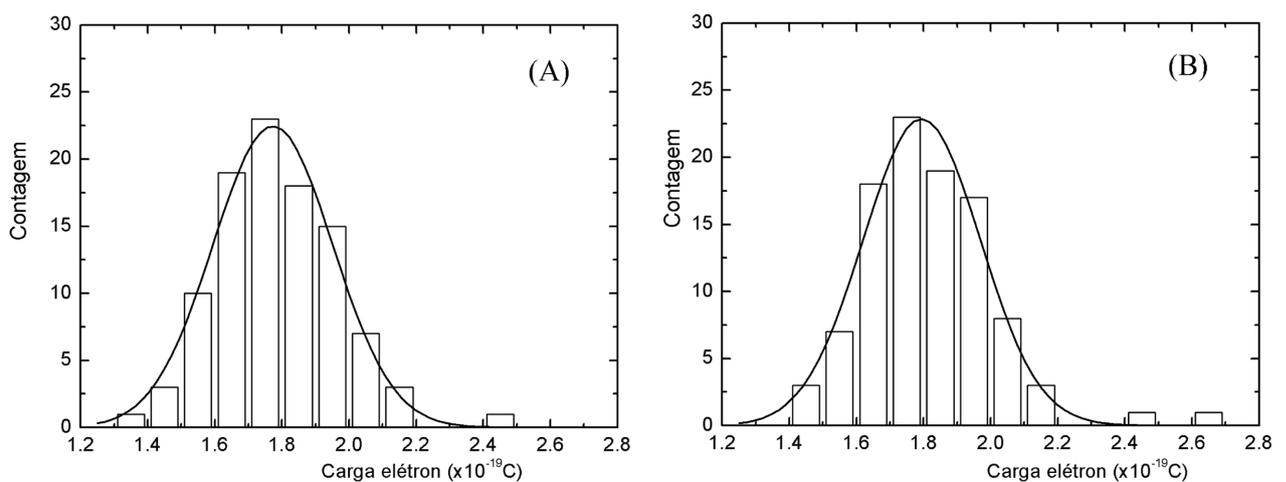


Figura 4 - Histograma dos valores medidos de cargas elétricas da Tabela 1, dividido pelo número de elétrons que compõe cada gotícula considerando carga do elétron de $1,73 \times 10^{-19}$ C e $1,74 \times 10^{-19}$ C nos gráficos (A) e (B), respectivamente.

O gráfico da variação do chi-quadrado em função de q , sem a remoção dos pontos 49 e 50, é mostrado na Fig. 5. Os picos da curva existentes nos valores de q em $1,65 \times 10^{-19}$ C e $1,78 \times 10^{-19}$ C são explicados por estes pontos, conforme mostrados nas Fig. 3 e 4.

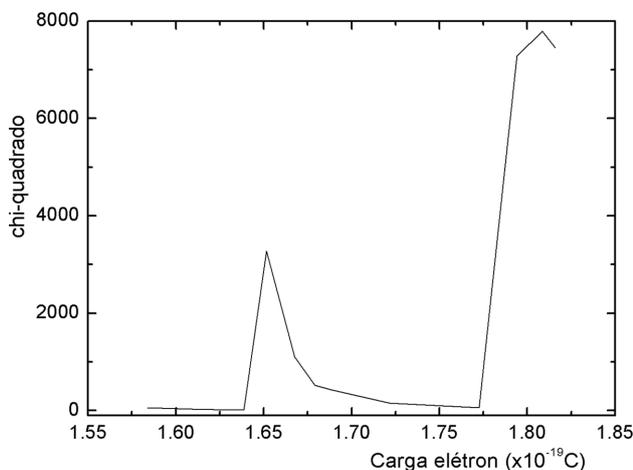


Figura 5 - Curva da variação do chi-quadrado com o valor de q , considerando os pontos 49 e 50 da Tabela 1.

4. Resultado

O critério numérico a ser adotado para se obter o melhor valor de q ou a melhor gaussiana é o método da máxima probabilidade [4], que corresponde o menor valor de chi-quadrado dado pela Eq. (1). Quanto menor for o valor de chi-quadrado significa que mais perfeita é a distribuição gaussiana. Vários valores para q foram experimentados e a Fig. 6 mostra o gráfico da variação do chi-quadrado em função do valor de q . Neste ponto, convém lembrar que os valores de q escolhidos foi entre $1,60 \times 10^{-19}$ C e $1,86 \times 10^{-19}$ C, com passos regulares de $0,01 \times 10^{-19}$ C, mas o valor de q obtido no ajuste de cada gaussiana é próximo do valor escolhido, por isso os pontos da Fig. 6 não estão igualmente espaçados. Por exemplo, o histograma da Fig. 2 foi feito para q de $1,60 \times 10^{-19}$ C e o ajuste revelou um valor de q de $1,587 \times 10^{-19}$ C.

A carga do elétron é determinada no mínimo da parábola da Fig. 6, que é dado pela Eq. (2). O ajuste ou “fitting” da parábola da Fig. 6 foi feito tomando os pontos de q entre $1,68 \times 10^{-19}$ C e $1,86 \times 10^{-19}$ C e fornecem os valores dos parâmetros (A, B e C) juntamente com seus respectivos desvios padrões, conforme mostrado no quadro da Fig. 6. Estes desvios padrões foram obtidos pelo método dos mínimos quadrados [4].

$$q = \frac{-B \cdot 10^{-19} \text{ C}}{2C} = \frac{1953 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{1080} = 1,808 \cdot 10^{-19} \text{ C.} \quad (2)$$

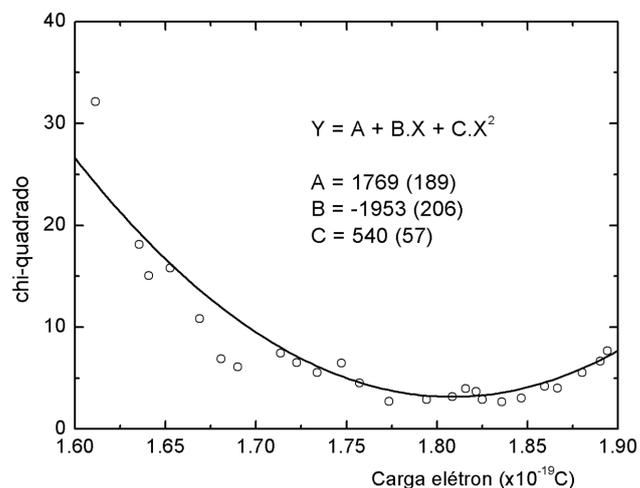


Figura 6 - Curva da variação do valor de chi-quadrado em função da carga q do elétron.

A incerteza da carga do elétron é obtida por propagação de erros usando os valores dados no quadro da Fig. 6. Esta incerteza é de $0,073 \times 10^{-19}$ C. Portanto, o valor da carga do elétron, com seu respectivo desvio padrão, obtido neste trabalho através do ajuste dos valores da Tabela 1 é dado pela Eq. (3).

$$q = 1,808(73) \cdot 10^{-19} \text{ C.} \quad (3)$$

A Fig. 7 ilustra de maneira bem didática que o histograma para q próximo de $1,81 \times 10^{-19}$ C é mais parecido com gaussiana do que o equivalente para q próximo de $1,60 \times 10^{-19}$ C.

5. Conclusão

A Fig. 6 mostra que o melhor valor para a carga do elétron no experimento Millikan realizado no laboratório da FCT - UNESP é $1,808 \times 10^{-19}$ C, com desvio padrão de $0,073 \times 10^{-19}$ C. Evidentemente que ele não é o valor real da carga do elétron, este valor é o valor obtido neste trabalho, usando os dados da Tabela 1, e o algoritmo mostrado. Este resultado para a carga q revela que o equipamento talvez tenha um erro sistemático. A diferença maior do que $0,2 \times 10^{-19}$ C entre o valor esperado e o valor calculado pelas medidas é superior do que dois desvios padrão e, desta forma, é impossível afirmar com certeza que esta diferença é um erro sistemático. Somente novas medidas podem definir melhor se o equipamento e o método estão produzindo erro sistemático ou é uma oscilação aleatória.

A Fig. 7 mostra a essência do trabalho que é procurar um valor para q que forneça um histograma parecido com uma curva gaussiana. Desta forma, pode-se observar de maneira clara que o valor próximo de $1,81 \times 10^{-19}$ C é melhor do que o valor esperado de $1,60 \times 10^{-19}$ C. Esta nova proposta de cálculo, para o valor da carga do elétron em um experimento Millikan, adiciona informação estatística ao nível universitário sem a necessidade de acrescentar modificações em aparatos experimentais já existentes em laboratórios de física.

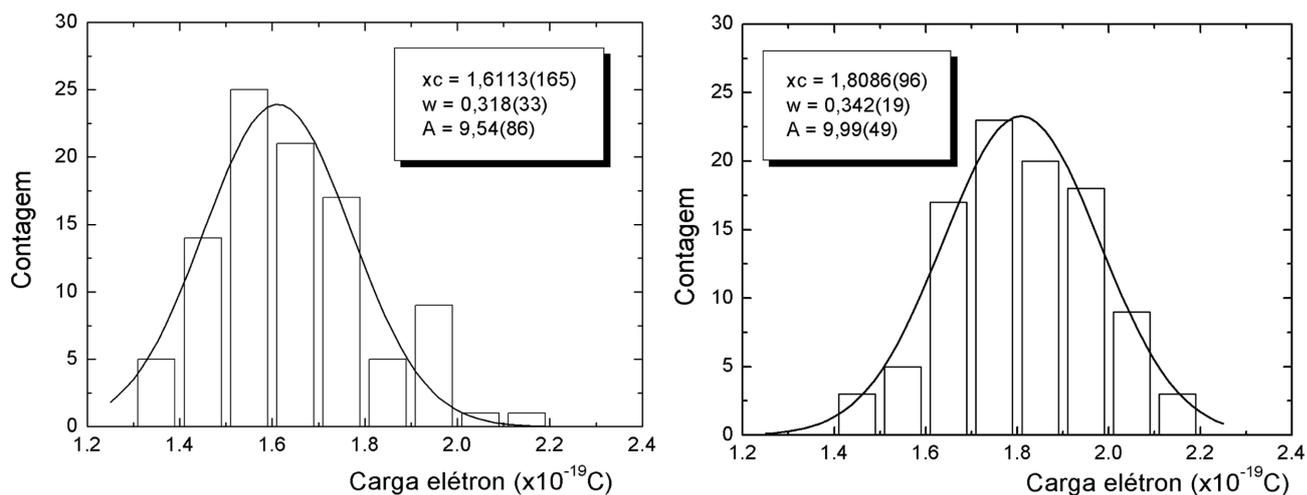


Figura 7 - Histograma das medidas da Tabela 1 considerando q próximo de $1,60 \times 10^{-19}$ C e q próximo de $1,81 \times 10^{-19}$ C.

Referências

- [1] P.A. Tipler e R.A. Llewellyn, *Física Moderna* (LTC, Rio de Janeiro, 2001).
- [2] R.P. Crease, *Os Dez Mais Belos Experimentos Científicos* (Ed. Jorge Zahar, Rio de Janeiro, 2006).
- [3] C.A. dos Santos, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **17**, 107 (1995).
- [4] J.H. Vuolo, *Fundamentos da Teoria de Erros* (Ed. Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1992).
- [5] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling, *Numerical Recipes in Pascal* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).