



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21b/2014/07.22.03.44-TDI

ESTUDO DA FUSÃO DOS MÉTODOS LQG/LTR E SDRE PARA O CONTROLE DE UMA CLASSE DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Suely Silva

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Paulo Giácomo Milani, aprovada em 28 de fevereiro de 2014.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP5W34M/3GMLDNP>>

INPE
São José dos Campos
2014

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE (RE/DIR-204):**Presidente:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Membros:

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Dr. Amauri Silva Montes - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espaciais (ETE)

Dr. André de Castro Milone - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dr. Joaquim José Barroso de Castro - Centro de Tecnologias Espaciais (CTE)

Dr. Manoel Alonso Gan - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr^a Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Maria Tereza Smith de Brito - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Maria Tereza Smith de Brito - Serviço de Informação e Documentação (SID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21b/2014/07.22.03.44-TDI

ESTUDO DA FUSÃO DOS MÉTODOS LQG/LTR E SDRE PARA O CONTROLE DE UMA CLASSE DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Suely Silva

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Paulo Giácomo Milani, aprovada em 28 de fevereiro de 2014.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP5W34M/3GMLDNP>>

INPE
São José dos Campos
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Silva, Suely.
Si38e Estudo da fusão dos métodos LQG/LTR e SDRE para o controle de uma classe de sistemas não lineares / Suely Silva. – São José dos Campos : INPE, 2014.
xxvi + 141 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21b/2014/07.22.03.44-TDI)

Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2014.

Orientador : Dr. Paulo Giacomo Milani.

1. Sistemas não lineares. 2. Controle LQG/LTR. 3. SDRE.
4. Estabilidade de Lyapunov. I.Título.

CDU 629.7.062.2



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aprovado (a) pela Banca Examinadora
em cumprimento ao requisito exigido para
obtenção do Título de **Doutor(a)** em
**Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica
Espacial e Controle**

Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza



Presidente / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Paulo Giacomio Milani



Orientador(a) / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Valdemir Carrara



Membro da Banca / INPE / SJC Campos - SP

Dr. José Jaime da Cruz



Convidado(a) / USP / São Paulo - SP

Dr. Takashi Yoneyama



Convidado(a) / ITA / SJC Campos - SP

Este trabalho foi aprovado por:

maioria simples

unanimidade

Aluno (a): **Suely Silva**

São José dos Campos, 28 de Fevereiro de 2014

“Knowing a great deal is not the same as being smart; intelligence is not information alone but also judgment, the manner in which information is coordinated and used.”

Carl Sagan, Cosmos (1980)

A minha mãe, quem primeiro despertou em mim o apreço pela educação e a meu pai, de quem herdei o gosto pela ciência.

AGRADECIMENTOS

Gostaria inicialmente de agradecer ao Dr. Paulo Giácomo Milani, meu Orientador, pela dedicação e esforço despendidos objetivando criar condições para que este trabalho pudesse ser realizado, seja solucionando problemas administrativos, seja provendo suporte acadêmico.

Agradeço também ao Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza pelo incentivo na finalização do trabalho e por toda a atenção e apoio que ele sempre oferece aos alunos, respondendo e esclarecendo, de forma didática e estimulante, questionamentos em diversas áreas acadêmicas.

Agradeço ao Dr. Luiz Antônio Waack Bambace pela sugestão sobre a forma de apresentação dos estudos para avaliação da região de estabilidade da técnica proposta neste trabalho.

Agradeço a todos os membros da Banca Examinadora pelas correções e revisões sugeridas. Em especial ao Dr. Takashi Yoneyama e ao Dr. José Jaime da Cruz pela paciência que tiveram no exame da versão preliminar do trabalho, gerando críticas construtivas que resultaram no enriquecimento do conteúdo.

Agradeço a todo o pessoal da Biblioteca e ao pessoal da Secretaria de Pós-graduação por toda ajuda que recebi durante o período de desenvolvimento do trabalho.

Agradeço em especial à Valdirene Moreira de Paula, secretária do curso de Pós-graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais, pela dedicação e gentileza no tratamento aos alunos, sempre nos auxiliando de forma eficiente.

Finalmente, agradeço ao meu marido, Silvano Vargas Prudêncio, e a minha filha, Débora Silva Prudêncio, que estiveram sempre a meu lado.

RESUMO

Este trabalho propõe uma técnica para o controle de sistemas não lineares que realiza uma extensão da metodologia LQG/LTR através da utilização dos conceitos da teoria SDRE. São apresentadas as condições para a aplicação da técnica e provas de estabilidade local para uma classe de sistemas não lineares. A técnica é, em primeiro lugar, apresentada com base na literatura disponível, onde se mostra que podem existir soluções ótimas e subótimas. Deriva-se uma prova da existência de soluções para o uso do modelo de compensação LQG/LTR aplicado a sistemas de controle não lineares, onde se apresenta que as condições de existência desse tipo de solução exigem apenas que o sistema seja Estabilizável e Detectável, permitindo que se possa aplicar o método iterativamente em uma malha de controle. São realizadas análises para verificação da preservação das propriedades da metodologia LQG/LTR quando aplicada ao caso não linear. Realizam-se comparações com a literatura, onde se mostra que melhores resultados podem ser conseguidos através do emprego desta técnica. Finalmente, apresentam-se os resultados de seu emprego para o controle de um sistema não linear que representa a dinâmica de um satélite artificial.

STUDY OF THE FUSION OF THE METHODS LQG/LTR AND SDRE FOR THE CONTROL OF A CLASS OF NONLINEAR SYSTEM

ABSTRACT

This work proposes a technique for the control of nonlinear systems that is an extension of the LQG/LTR methodology, obtained using the SDRE theory concepts. Conditions for the technique application are presented as well as proofs of local stability for one generic class of nonlinear systems. The technique is firstly presented based on the available literature, where it is shown that there may exist optimal and suboptimal solutions. One proof of the existence of solutions for the use of the LQG/LTR compensation model applied to nonlinear control systems is derived. Then it is presented that the conditions for the existence of this kind of solution requires only the stabilizability and the detectability of the system. These conditions allow the method to be applied iteratively in one control loop. An analysis is carried out to verify the preservation of the LQG/LTR methodology properties. Comparisons with the literature are performed, showing that better results can be obtained employing this technique. Finally, the results of its application for the control of a nonlinear system that represents an artificial satellite dynamics are presented.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
Figura 2.1 - Sistema de controle com realimentação.....	11
Figura 2.2 – Compromissos de projeto nos sistemas multivariáveis para a matriz de funções de transferência de malha aberta.	13
Figura 2.3 - Malha de realimentação multivariável.	15
Figura 2.4 - Estrutura da malha de realimentação objetivo.....	16
Figura 2.5 - Estrutura do Compensador LQG/LTR.	17
Figura 4.1 – Evolução dos estados do sistema em malha aberta.	42
Figura 4.2 – Autovalores de $A(x)$, avaliada para cada valor do vetor de estados.....	43
Figura 4.3 – Gráficos de Bode dos sistemas lineares obtidos com $A(x)$ avaliada.....	44
Figura 4.4 – Gráficos de Bode correspondentes ao primeiro e último sistema.....	44
Figura 4.5 – Ganho da malha objetivo para o sistema no instante inicial da	46
Figura 4.6 – Recuperação da malha objetivo à medida que ρ varia com os.....	47
Figura 4.7 – Gráficos dos ganhos em malha fechada para os sistemas lineares	48
Figura 4.8 – Resposta do sistema não linear em malha fechada para as condições iniciais $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$	48
Figura 4.9 – Sinal de controle do compensador, com $\rho = 10 - 6$, para as condições iniciais $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$	49
Figura 4.10 – Resposta do sistema não linear em malha fechada a uma	50
Figura 5.1 – Comparação entre $e(A_0 - H_0C_0)t$ e $\alpha e - \beta t$ ao longo do tempo.	59
Figura 5.2 – $h(x, x)$ em função de x_1 e x_2 para o compensador 1.....	60
Figura 5.3 – $h(x, x)$ em função de x_2 com x_1 fixo no valor 0,45.....	60
Figura 5.4 – Comparação entre $e(A_0 - B_0K_0C_0)t$ e $\alpha e - \beta t$ ao longo do tempo.	62
Figura 5.5 – $g(x)$ em função de x_1 e x_2	62
Figura 5.6 – $g(x)$ em função de x_1 para qualquer valor de x_2	63
Figura 5.7 – Resposta do sistema para condições iniciais $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$. (a)	64
Figura 5.8 – Comparação entre $e(A_0 - H_0C_0)t$ e $\alpha e - \beta t$ ao longo do tempo para a segunda implementação do compensador LQG/LTR	68
Figura 5.9 – Variação de $h(x, x)$ em função de x_1 e x_2 para a segunda implementação do compensador.....	68
Figura 5.10 – Gráfico de $h(x, x)$ em função de x_2 com x_1 fixo no valor 0,45.....	69
Figura 5.11 – Comparação entre $e(A_0 - B_0G_0C_0)t$ e $\alpha e - \beta t$ ao longo do tempo.....	70
Figura 5.12 – $g(x)$ em função de x_1 e x_2 para o segundo compensador.....	70
Figura 5.13 – $g(x)$ em função de x_1 para qualquer valor de x_2	71

Figura 5.14 – Resposta do sistema controlado pelo compensador do segundo caso para condições iniciais $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$. (a) Estados do sistema controlado; (b) Norma dos estados; (c) Sinal de controle; (d) Valor da função custo J	71
Figura 5.15 – Resposta do sistema controlado pelo compensador do segundo caso para condições iniciais $x_1 = -3$ e $x_2 = 0$. (a) Estados do sistema controlado; (b) Norma dos estados; (c) Sinal de controle; (d) Valor da função custo J	72
Figura 5.16 – Gráfico de Bode para o sistema linearizado ($fl1z$), no ponto.....	90
Figura 5.17 – Resposta temporal do sistema linearizado ($fl1z$), no ponto.....	90
Figura 5.18 – Localização dos polos de todos os sistemas lineares ($fl1z$) em.....	91
Figura 5.19 – Diagrama de Bode de todos os sistemas lineares ($fl1z$) que.....	91
Figura 5.20 – Localização dos polos dos sistemas (linearização $fl1z$) em torno.....	92
Figura 5.21 – Diagrama de Bode de todos os sistemas lineares (linearização.....	93
Figura 5.22 – Região de estabilidade em torno do ponto $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$ para	96
Figura 5.23 – Região de estabilidade em torno do ponto $x_1 = 6,98$ e $x_2 = -19,44$, calculada com a linearização da equação 5.113.....	97
Figura 5.24 – Região de estabilidade em torno do ponto $x_1 = 6,98$ e $x_2 = -19,44$, calculada com a linearização da equação 5.114.....	97
Figura 5.25 – Pontos na trajetória com condição inicial em (2, -2, 2. -2) dentro	98
Figura 5.26 – Região de estabilidade em torno do ponto (19,06, -167.63, 19.01,	99
Figura 6.1 - Valores singulares da malha objetivo.....	104
Figura 6.2 – Recuperação das características da malha objetivo.....	105
Figura 6.3 – Gráfico da magnitude das funções de transferência de malha.....	106
Figura 6.4 – Gráfico da magnitude das funções de transferência de malha.....	107
Figura 6.5 – Malha recuperada em cada ponto da trajetória dos estados.	108
Figura 6.6 - Evolução das posições angulares do satélite partindo das condições iniciais $\theta_1 = 1 rd$, $\theta_2 = -1 rd$ $\theta_3 = 0 rd$, $w_1 = -0,7$, $w_2 = -0,5$, $w_3 = 0,6$ e com referência $\theta_1 = -1.2 rd$, $\theta_2 = 0.6 rd$ $\theta_3 = 2 rd$	109
Figura 6.7 - Evolução das velocidades angulares do satélite partindo das condições iniciais $\theta_1 = 1 rd$, $\theta_2 = -1 rd$ $\theta_3 = 0 rd$, $w_1 = -0,7$, $w_2 = -0,5$, $w_3 = 0,6$	109
Figura 6.8 - Sinais de controle para condições iniciais $\theta_1 = 1 rd$, $\theta_2 = -1 rd$,.....	110
Figura 6.9 – Gráfico dos erros entre as saídas e a referência. (a) Erro em θ_1 ; (b) Erro em θ_2 ; (c) Erro em θ_3 ; (d) Norma do vetor de velocidades angulares.	110
Figura 6.10 – Posições angulares do satélite partindo das condições iniciais $\theta_1 = 1 rd$, $\theta_2 = -2 rd$ $\theta_3 = 2 rd$, $w_1 = 6,28$, $w_2 = -1$, $w_3 = 1$ para um comando de estabilização.	111

Figura 6.11 –Velocidades angulares do satélite partindo das condições iniciais $\theta_1 = 1 \text{ rd}$, $\theta_2 = -2 \text{ rd}$ $\theta_3 = 2 \text{ rd}$, $w_1 = 6,28$, $w_2 = -1$, $w_3 = 1$ para um comando de estabilização.	112
Figura 6.12 – Sinais de controle durante manobra de estabilização para condições iniciais $\theta_1 = 1 \text{ rd}$, $\theta_2 = -2 \text{ rd}$ $\theta_3 = 2 \text{ rd}$, $w_1 = 6,28$, $w_2 = -1$, $w_3 = 1$	112
Figura 6.13 – Gráfico dos ganhos principais da Malha Objetivo. e recuperação da mesma pela utilização dos parâmetros $\rho = 10$ e $\mu = 100$	114
Figura 6.14 – Posições angulares do satélite com condições iniciais $\theta_1 = 0.18 \text{ rd}$, $\theta_2 = -0.11 \text{ rd}$, $\theta_3 = 0.2 \text{ rd}$, $w_1 = 0.04$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = -0.12$ para um comando de estabilização ($\rho = 10$ e $\mu = 100$).	114
Figura 6.15 – Velocidades angulares do satélite com condições iniciais $\theta_1 = 0.18 \text{ rd}$, $\theta_2 = -0.11 \text{ rd}$, $\theta_3 = 0.2 \text{ rd}$, $w_1 = 0.04$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = -0.12$ para um comando de estabilização ($\rho = 10$ e $\mu = 100$).	115
Figura 6.16 – Sinais de controle durante manobra de estabilização para condições iniciais $\theta_1 = 0.18 \text{ rd}$, $\theta_2 = -0.11 \text{ rd}$ $\theta_3 = 0.2 \text{ rd}$, $w_1 = 0.04$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = -0.12$ ($\rho = 10$ e $\mu = 100$).	115

LISTA DE SÍMBOLOS

A, B, C	Matrizes de estados, entrada e observação
A_0	Matriz de estados avaliada na origem/ parte constante de $A(x)$
α	Constante
$\alpha(r)$	Função escalar contínua
B_0	Matriz de entrada avaliada na origem
B_e	Matriz de entradas do sistema com estado estendido
β	Constante
C_e	Matriz de observação do sistema com estado estendido
C^1	Classe de funções continuamente diferenciáveis
D	Domínio de uma função
$\Delta A(x)$	Parte variável de $A(x)$
$\Delta B(x)$	Parte variável de $B(x)$
$\Delta C(x)$	Parte variável de $C(x)$
$\Delta G(x)$	Parte variável de $G(x)$
$\Delta \Pi(x)$	Parte variável de $\Pi(x)$
$\Delta \Sigma(x)$	Parte variável de $\Sigma(x)$
δ	Região do espaço
$E(s)$	Transformada de Laplace da incerteza multiplicativa sobre a planta
$e(t)$	Erro entre a saída e a referência
e_e	Erro de estimação
e_m	limite sobre o erro de incerteza
η	Constante
η_1	Constante
η_2	Constante
f	Função
f_l	Aproximação por expansão em série de Taylor até o termo de primeira ordem excluindo os termos com derivadas
f_{l1}	Aproximação por expansão em série de Taylor até o

	termo de primeira ordem
$\Phi(s)$	Transformada de Laplace da matriz de transferência
G_A	Matriz de funções de transferência real da planta
GK	Função de transferência de malha aberta
$G_{KF}(s)$	Matriz de funções de transferência
$G(s)$	Matriz de funções de transferência da planta
g	Parte não linear de uma função
γ	Constante
H_2	Norma 2 de um sistema
H_∞	Norma infinita de um sistema
Γ	Matriz do ruído no processo
H	Ganho do Filtro de kalman
\mathcal{H}	Hamiltoniana do sistema
h	Função de saída do sistema
I_i	Momento de inércia em torno do eixo i
$I_{n \times n}$	Matriz identidade $n \times n$
J	Função custo
U	Matriz de ponderação sobre o ruído no processo
L	Constante de Lipschitz
K	Classe de função Kapa
K_ρ	Ganho do Regulador Linear Quadrático calculado usando uma parametrização com a variável ρ sobre a ponderação sobre do sinal de controle
K_∞	Classe de função Kapa infinita
ξ	Processo estocástico ruído branco no processo
L_j	matrizes simétricas com mesma dimensão de $\Pi(x)$ usada na expansão em série de potência de $\Pi(x)$
\mathcal{L}_e^m	Espaço de norma-e e dimensão u
$M(x)$	Matriz de controlabilidade dependente dos estados
λ_i	Autovalores de uma matriz
λ_{min}	Menor autovalor
μ	Parâmetro de controle
N_i	Torque no eixo i

$O(x)$	Matriz de observabilidade dependente dos estados
P	Matriz de ponderação utilizada na função de Lyapunov
p	Vetor de coestados
Π	Matriz de covariância solução da equação de Riccati no problema de controle ótimo
Π_0	Matriz de covariância solução da equação de Riccati no problema de controle ótimo avaliada na origem
Q	Matriz de ponderação sobre os estados
Q	Matriz definida positiva para solução da equação de Lyapunov
R	Matriz de ponderação sobre o sinal de controle
$\mathcal{R}^{m \times n}$	Conjunto de matrizes $m \times n$ com valores reais
r	Sinal de referência
ρ	Parâmetro
S	Função de Sensibilidade
Σ	Matriz de covariância solução da equação de Riccati no problema de estimação
Σ_0	Matriz de covariância solução da equação de Riccati no problema de estimação avaliada na origem
σ	Elemento da matriz $\Sigma(x)$ para um exemplo
$\bar{\sigma}$	Maior ganho principal
$\underline{\sigma}$	Menor ganho principal
T	Função de Sensibilidade Complementar
τ	Determinado instante de tempo
θ	Processo estocástico ruído branco na saída
θ_i	Deslocamento angular sobre o eixo i
u	Sinal de controle
V	Matriz de ponderação sobre o ruído de medida
$V(x)$	Função de Lyapunov
w_i	Ponto pertencente a um seguimento que liga a origem ao estado
ω_i	Velocidade angular no eixo i
x	Vetor de estados

x_c	Vetor de estados do compensador
\hat{x}	Vetor de estados estimados
x_{i0}	Componente i do estado inicial
y	Vetor de saídas
ε	variável temporária usada como argumento da função $\Pi(x)$ na expansão em série de potências
z	Vetor de estados estendido
\bar{z}	Vetor de estados avaliado em um ponto
\hat{z}	$z - \bar{z}$
$\ x\ _{\mathcal{L}}$	Norma \mathcal{L} de um vetor x
x^T	Transposto de um vetor x
\ll	É muito menor que

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

EKF	Extended Kalman Filter
LQG	Linear Quadratic Gaussian
LTR	Loop Transfer Recovery
MBC	Model Based Compensator
MIMO	Multiple Input, Multiple output
SDC	State Dependent Coefficient
SDRE	State Dependent Riccati Equation
SDC	State Dependent Coefficient

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
2 A TÉCNICA LQG/LTR.....	5
2.1. REVISÃO HISTÓRICA.....	5
2.2. METODOLOGIA	10
3 A TÉCNICA SDRE.....	21
3.1. REVISÃO HISTÓRICA.....	21
3.2. FORMULAÇÃO DA METODOLOGIA SDRE	23
3.2.1. <i>Solução da Equação de Riccati Dependente dos Estados</i>	29
3.2.2. <i>Metodologia SDRE aplicada ao Controle Ótimo e Subótimo</i>	31
3.2.3. <i>Metodologia SDRE aplicada à Estimação Ótima e Subótima</i>	33
4 LQG/LTR APLICADA A SISTEMAS NÃO LINEARES ATRAVÉS DA METODOLOGIA SDRE.....	37
4.1. PASSOS PARA APLICAÇÃO DA TÉCNICA.....	38
4.2. EQUAÇÕES DE ESTADO DO COMPENSADOR	40
4.3. EXEMPLO DE PROJETO.....	41
5 PROVAS DE ESTABILIDADE LOCAL.....	51
5.1. DEFINIÇÕES.....	51
5.1.1. <i>Condição de Lipschitz</i>	51
5.1.2. <i>Função Classe K</i>	52
5.1.3. <i>\mathcal{L} - Estabilidade</i>	52
5.2. ESTABILIDADE PARA UM SISTEMA COM SOLUÇÃO EXATA.....	52
5.2.1. <i>Projeto do Compensador 1</i>	54
5.2.2. <i>Projeto do Compensador 2</i>	64
5.3. APLICAÇÃO DO MÉTODO INDIRETO DE LYAPUNOV E VERIFICAÇÃO DA \mathcal{Lp} -ESTABILIDADE	72
5.4. ANÁLISE DA EXTENSÃO DAS PROPRIEDADES DO MÉTODO LQG/LTR PARA O CASO NÃO LINEAR.....	79
5.4.1. <i>Sistema Geral</i>	80
5.4.2. <i>Exemplo Numérico</i>	83
6 EXEMPLO DE APLICAÇÃO DA TÉCNICA LQG/LTR/SDRE PARA O CONTROLE DE UM SATÉLITE ARTIFICIAL	101
7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS.....	117
7.1.1. <i>Conclusões</i>	117
7.1.2. <i>Sugestões para Futuros Trabalhos</i>	118
ANEXO A – DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO $h(x, x)$	127
ANEXO B – TEOREMAS.....	129
ANEXO C – TUTORIAL PARA APLICAÇÃO DA TÉCNICA LQG/LTR VIA SDRE	139

1 INTRODUÇÃO

Desde que Doyle e Stein em 1981 (DOYLE; STEIN, 1981), utilizando o conceito de “Sensitivity Recovery” introduzido por Kwakernaak em 1969 (Kwakernaak, 1969), estabeleceram uma formulação explícita do procedimento Loop Transfer Recovery (LTR) para realimentação em sistemas multivariáveis utilizando o regulador Linear Quadrático Gaussiano (LQG), inúmeros trabalhos foram apresentados explorando os mais diversos aspectos relacionados a esta técnica. Uma rápida pesquisa bibliográfica revela sua aplicação em diferentes tipos de plantas diante das mais variadas situações como será mostrado na revisão histórica realizada neste trabalho. Pode-se verificar na literatura sua aplicação para o controle de robôs, submarinos, processos químicos, transportadores de correia, vazão e temperatura de fluidos, gases durante oxigenação sanguínea, discos rígidos, veículos espaciais, aviões, estruturas flexíveis, máquinas de gás e várias outras. Com o passar do tempo, outras tecnologias de controle robusto, por exemplo, a teoria H_∞ e μ synthesis, foram desenvolvidas e acabaram se firmando na solução dos problemas tratados pela técnica inicialmente proposta. Porém, a facilidade de utilização da técnica LQG/LTR para projeto, sua simplicidade, seu procedimento de projeto sistemático, os baixos custos computacionais envolvidos em sua aplicação, além de sua comprovada eficácia, fazem com que esta metodologia persista como alvo de interesse em controle de sistemas. Embora publicações sobre o tema tenham se tornado mais raras durante a última década, ainda é possível encontrar trabalhos que buscam se beneficiar das vantagens da técnica para o controle de sistemas lineares. No entanto existem poucos relatos sobre tentativas de extensão desta técnica para o controle de sistemas não lineares. Grunberg e Athans (1987), Chun e Wang (1988) e Han e Kim (2003) apresentaram extensões da ideia para sistemas não lineares, mas com restrições específicas sobre os sistemas tratados, faltando assim uma abordagem mais geral sobre o assunto.

Por outro lado, a técnica SDRE (State Dependent Riccati Equation), inicialmente proposta em 1962 (PEARSON, 1962), permite a extensão de propriedades do Regulador Linear Quadrático para sistemas não lineares. Ela passou a receber maior atenção durante a década de 1990. Um grande número de simulações foi conduzido demonstrando resultados positivos de aplicação desta técnica, levando à necessidade de estudos e análises para fortalecer a teoria de sustentação da técnica que até então era exígua. Atualmente esta teoria encontra-se relativamente madura, fato que aliado à suas características de simplicidade, baixo custo computacional com efetividade e sua aplicação de forma sistemática e geral, fazem dela uma escolha promissora para a solução de problemas de controle de sistemas não lineares. Ela tem sido usada na forma ótima e subótima tanto para controladores como para estimadores (BANKS et al, 2007).

Levando em conta os aspectos inerentes às duas técnicas descritas nos dois parágrafos anteriores, este trabalho propõe a utilização da metodologia SDRE para realizar uma extensão dos conceitos da técnica LQG/LTR para o controle de sistemas não lineares. Para testar a técnica proposta e avaliar seu desempenho, ela é aplicada para o controle de sistemas utilizados como exemplo em outro trabalho (BANKS et al, 2007) e os resultados obtidos são comparados. A técnica proposta é também testada através de sua aplicação a um sistema representativo da dinâmica de um satélite artificial.

O trabalho está dividido em sete capítulos, sendo que o Capítulo 1 contém a introdução ao tema. No Capítulo 2 é feita uma revisão histórica da metodologia LQG/LTR e são apresentados os conceitos teóricos relacionados à essa técnica. No Capítulo 3 a técnica SDRE é abordada, também com apresentação de uma revisão histórica sobre a mesma e da teoria subjacente.

O Capítulo 4 apresenta a descrição da classe de sistemas tratados neste trabalho. Apresenta também a questão de estabilidade da técnica proposta, em primeiro lugar, considerando as condições de aplicação do LQG/LTR/SDRE a

um caso exato e em seguida a estabilidade local para o caso mais genérico, onde é apresentada a extensão do conceito de Observabilidade e de Controlabilidade como condições de existência de solução (local) para a aplicação do mesmo método a uma classe mais ampla de sistemas não lineares. Ainda, neste capítulo é apresentada uma análise da extensão das propriedades do método LQG/LTR na aplicação da técnica proposta.

O Capítulo 5 apresenta a extensão dos conceitos da técnica LQG/LTR dentro do contexto da teoria SDRE. Um roteiro para projeto é sugerido e é apresentado o projeto de um compensador para um exemplo de sistema não linear. A análise da extensão das propriedades do método LQG/LTR neste caso particular é mostrada.

No capítulo 6 apresenta-se a aplicação da técnica aqui descrita para o controle de um satélite artificial, uma planta não linear e de amplo interesse não apenas acadêmico.

Finalmente, o Capítulo 7 apresenta as conclusões do trabalho.

2 A TÉCNICA LQG/LTR

2.1. Revisão Histórica

Uma revisão bibliográfica completa sobre a técnica LQG/LTR para apontar trabalhos de análise e aplicação da técnica seria um exercício árduo e produziria uma revisão bibliográfica demasiadamente extensa, assim procurou-se apresentar aqui apenas os trabalhos que tiveram papel decisivo no desenvolvimento da metodologia e colaboraram para a compreensão e difusão da mesma ou que estejam diretamente relacionados ao contexto deste trabalho.

Kwakernaak (1969) foi o primeiro a utilizar o conceito de “loop transfer recovery” durante análise da sensibilidade de sistemas em malha fechada com o regulador linear estocástico em sistemas multivariáveis. No entanto, não ocorreu nesta ocasião uma formalização de um procedimento definido baseado neste conceito. Mais tarde, em 1978, Doyle e Stein (Doyle; Stein,1978) retomaram o conceito com a apresentação de um procedimento de ajuste para controladores lineares com observadores de estado. Safonov *et al.* (1980) apresenta uma interpretação da Metodologia LQG/LTR onde é mostrado que todos os problemas de LQG no domínio do tempo são de norma H_2 ponderadas gerais entre várias funções de transferências do sistema de realimentação. Em 1981 com a publicação do artigo “Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis”, Doyle e Stein, abordando a generalização de técnicas clássicas de projeto de realimentação em sistemas de uma entrada e uma saída para os sistemas multivariáveis, formalizaram a técnica de “loop transfer recovery” (LTR) em conjunto com a formulação do regulador Linear Quadrático Gaussiano (LQG) e estabeleceram a partir deste trabalho a metodologia LQG/LTR. Passados alguns anos, observando que embora a metodologia reunisse todas as características que a viabilizavam para aplicação simples e direta, poucos trabalhos sobre a técnica em si ou sobre sua utilização haviam sido publicados até então, Athans (1986) buscando

atender ao objetivo de aplicações práticas sistematizou em um tutorial o procedimento de maneira pragmática tornando simples sua utilização. Seguindo a formalização apresentada no tutorial citado, Martin et al (1986) ilustra de forma didática a aplicação do procedimento em um projeto de sistema de controle de realimentação multivariável para um submersível. Grunberg (1986) e Grunberg e Athans (1987) apresentam uma metodologia de projeto de compensadores dinâmicos não lineares para sistemas multivariáveis não lineares baseada na metodologia LQG/LTR. Os trabalhos mostram a extensão da idéia de loop-shaping para sistemas não lineares. A estabilidade em malha fechada é garantida através da utilização de um controlador baseado em observador de estados de acordo com um teorema de Safonov (1980). O procedimento utiliza O Filtro de Kalman Estendido (EKF). Os resultados apresentados mostraram que a recuperação da robustez na entrada da planta foi realizada como no caso linear, porém a recuperação na saída só é realizada sob condições restritas. A metodologia apresentada foi nomeada de Nonlinear Model-Based-Compensator with Loop-Operator-Recovery (NMBC/LOR). À mesma época, Stein e Athans (1987) apresentaram outro tutorial sobre a metodologia LQG/LTR que estende as suas ideias básicas para uma estrutura de projeto mais formal e geral, apresentando o método para os sistemas multivariáveis como uma solução específica de balanceamento com norma H_2 entre as funções de sensibilidade e sensibilidade complementar no domínio da frequência. No mesmo trabalho, embora reforçando o fato de que o método LQG/LTR não se aplica diretamente ao projeto de controle de sistemas de fase não-mínima, várias opções para tratar estes problemas foram discutidas. Chun e Wang (1988) partindo de um experimento onde foi aplicada a técnica LQG/LTR no projeto de um controlador para uma versão linearizada de um processo biológico não linear de crescimento de bactérias investigaram o efeito da aplicação do Filtro de Kalman Estendido em conjunto com o mesmo regulador linear aplicado na versão linear. Os resultados mostraram que a habilidade de rastreamento do sistema com o EKF melhorou na ausência de perturbações no modelo e se manteve estável na presença de perturbações

nos casos em que os valores das covariâncias dos ruídos utilizados são os mesmos daqueles utilizados no caso linear. No entanto quando estes valores foram mudados o sistema em malha fechada tornou-se instável. Constatou-se assim que as propriedades de robustez do sistema com o EKF dependem da seleção de uma série apropriada de covariâncias para os ruídos. Concluiu-se então que a simples substituição do Filtro de Kalman Linear por um EKF em um projeto de controle robusto com LQG/LTR não parece melhorar o desempenho do sistema em malha fechada nem com respeito às características de rastreamento nem com respeito à robustez diante da presença de perturbações no modelo. Zhang e Freudenberg (1990) apresentaram um estudo sobre a aplicação da metodologia LQG/LTR para sistemas de fase não mínima, observando que sob determinadas suposições de inversão da planta, as propriedades de realimentação desejadas eram perfeitamente recuperadas nas direções ortogonais às direções dos zeros de fase não mínima e que as limitações impostas por estes zeros podem ser incorporadas no projeto da realimentação de estados permitindo a sua recuperação através da técnica LTR. Mais direcionados para os resultados em aplicações da técnica, Mora et al (1996) publicaram uma investigação sobre o controle do movimento relativo translacional e rotacional entre dois veículos espaciais, considerando 6 graus de liberdade e influência de flexibilidade devida à existência de painéis solares. Foi feita a comparação para o controle da planta considerada através da utilização de quatro técnicas para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas. As técnicas testadas foram as metodologias LQG/LTR e “Pole-placement” representando procedimentos clássicos e controle H_∞ e μ -Synthesis representando as tecnologias mais modernas. Para o caso estudado observou-se que o controlador μ apresentou melhores propriedades de robustez e uma resposta adequada para perturbações causadas pela flexibilidade dos painéis solares, tendo sido, portanto recomendado nos casos em que a flexibilidade pode provocar forte impacto no desempenho do controlador. Foi verificado que os controladores H_∞ e LQG/LTR mostraram boa rejeição a distúrbios, principalmente em face de

forças e torques indesejáveis. Foi ainda observada para estes controladores uma degradação em seu desempenho mostrando sensibilidade a distúrbios provocados pela influência da flexibilidade nos painéis solares. Sobre o controlador projetado utilizando “Pole-Placement” houve considerável dificuldade em alcançar o desempenho desejado relativo à robustez, ou mesmo o desempenho nominal em razão do grande número de parâmetros envolvidos no projeto. Finalmente Gang e Guangzhong (2000) mostraram que uma escolha apropriada das matrizes de peso sobre os estados e sinais de controle e a manipulação das matrizes de covariância do ruído nas medidas e processo em conjunto com acréscimos prévios eventualmente necessários sobre a planta, o regulador Linear Quadrático Gaussiano pode apresentar desempenho correspondente ao da técnica LTR, sugerindo a aplicação da técnica diretamente sem dividir o procedimento em dois passos de acordo com a formalização de Doyle e Stein (1981).

Muitos outros trabalhos foram publicados durante o período descrito, na maior parte apresentando aplicações da técnica para os mais diversos tipos de planta. Especialmente no controle de atitude de veículos espaciais foram descritas muitas aplicações demonstrando resultados com desempenho superior na comparação com outras técnicas principalmente para sistemas envolvendo a influência da dinâmica de estruturas flexíveis. Estes por representarem sistemas mais complexos envolvendo incertezas causadas por erros de modelagem, frequentemente requerem técnicas de controle mais sofisticadas e motivaram inúmeros estudos sobre a aplicação da técnica LQG/LTR. Apenas para exemplificar o caráter de problemas tratados com o controlador LQG usando “loop transfer recovery” no âmbito do controle de atitude de veículos espaciais alguns trabalhos serão mencionados por serem representativos dos demais. Chen (1987) projetou um pré-compensador para manobras de translação de um veículo espacial e utilizou a técnica LQG/LTR para garantir o controle, com precisão, da velocidade e posição do veículo nas manobras. O compensador resultante foi integrado em um autopiloto que foi

testado em um simulador de um Space Shuttle. Lahdhiri e Alouani (1993) aplicaram a técnica para o controle de velocidade e ângulo de pitch para um satélite em órbita da Terra. Tsai et al (2004) propuseram uma unificação das técnicas “EigenStructure Assignment” e LQG/LTR para o projeto de um controlador para um satélite com spin equipado com um volante de inércia, buscando superar as limitações existentes nas duas técnicas separadas. Moscati (1992) apresenta a aplicação do método LQG/LTR para estabilização em três eixos de um satélite composto por uma parte rígida e três painéis flexíveis, tendo como atuadores um volante de inércia e duas rodas de reação acopladas à parte rígida. Foram consideradas no projeto incertezas devidas às dinâmicas não modeladas dos painéis e à variação do acoplamento giroscópico, provocado pela mudança de velocidade do volante de inércia. Souza (1992) realizou o projeto de um sistema de controle robusto para o controle de atitude e supressão de vibrações de uma configuração da Estação espacial MB-1 utilizando uma versão modificada do procedimento PRLQG (Parameter Robust Linear Quadratic Gaussian), o qual representa uma extensão da técnica LQG/LTR que permite o tratamento de variações paramétricas. A modificação foi introduzida para assegurar a robustez de estabilidade diante de incertezas estruturadas e não estruturadas. Flora (1995) considerando o projeto de um sistema de controle de atitude para um satélite composto por uma plataforma rígida e dois apêndices flexíveis, desenvolveu controladores utilizando as técnicas LQG/LTR e H_∞ e realizou uma comparação entre os dois projetos considerando o desempenho do sistema nos dois casos.

No que diz respeito à apresentação da teoria ligada à técnica, Cruz (1996) apresenta uma descrição completa e detalhada da metodologia e um roteiro prático para sua implementação.

2.2. Metodologia

A teoria de controle para sistemas multivariáveis (MIMO) foi fundamentada desde o início nos conhecimentos adquiridos através de anos de aplicação das técnicas de controle para os sistemas de uma entrada e uma saída (SISO). Os métodos empregados para os sistemas MIMO partiram de tentativas de considerá-los como um conjunto de sistemas SISO até um tratamento geral sem negligenciar os acoplamentos existentes entre as várias entradas e saídas. Muitas das abordagens utilizadas para os sistemas MIMO consistem em generalizações das técnicas para os sistemas SISO. A metodologia LQG/LTR é uma generalização da técnica de “looping-shaping” para sistemas SISO, muito consagrada por aplicações bem sucedidas em sistemas industriais que geralmente são SISO ou possuem baixo acoplamento. A extensão da técnica “loop-shaping”, no entanto, não pode ser realizada diretamente, uma vez que o conceito de ganho utilizado em sistemas SISO tem significado diferente nos sistemas MIMO. Atualmente a abordagem utilizada é executar o loop-shaping utilizando os valores singulares da matriz de função de transferência, considerando que estes oferecem uma definição de ganho para o sistema. A ideia é que os compromissos impostos sobre os ganhos das funções de sensibilidade e sensibilidade complementar nos projetos de controle para os sistemas SISO sejam no caso dos sistemas MIMO cumpridos pelos ganhos principais das funções de sensibilidade e sensibilidade complementar.

Considere-se então o sistema de controle representado na Figura 2.1, onde K é a matriz de funções de transferência do compensador, G é a matriz de funções de transferência da planta, r é o sinal de referência, u é o sinal de controle, y é o sinal de saída, d é o ruído de processo ou perturbação e n é o ruído de medida.

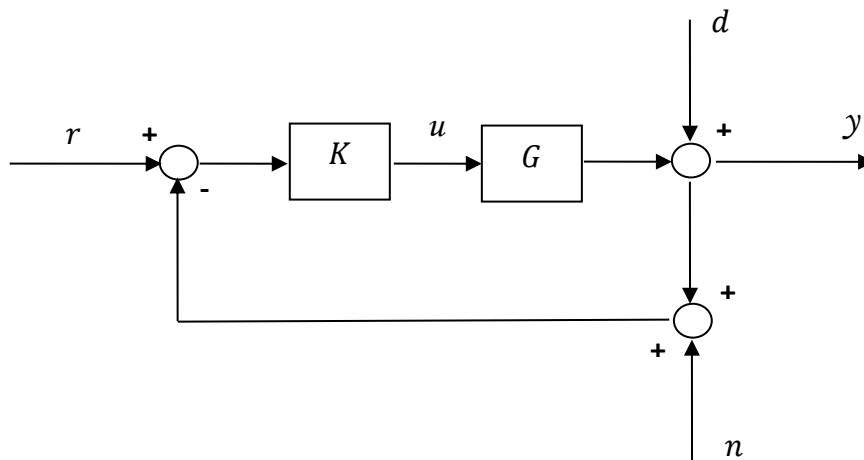


Figura 2.1 - Sistema de controle com realimentação.

De acordo com as definições nas equações 2.1 e 2.2 para as funções de sensibilidade e sensibilidade complementar respectivamente, tem-se para sistemas MIMO as relações expressas nas equações 2.3 e 2.4.

$$S = (I + GK)^{-1} \quad (2.1)$$

$$T = GK(I + GK)^{-1} \quad (2.2)$$

$$y(s) = T(s)r(s) + S(s)d(s) - T(s)n(s) \quad (2.3)$$

$$u(s) = K(s)S(s)[r(s) - n(s) - d(s)] \quad (2.4)$$

Destas relações inferem-se as seguintes diretrizes para projeto:

- Obter $\bar{\sigma}(S)$ pequeno para obtenção de boa rejeição aos distúrbios;
- Obter $\bar{\sigma}(T)$ pequeno para atenuação dos ruídos de medida;
- Obter $\bar{\sigma}(T) \approx \underline{\sigma}(T) \approx 1$ para rastreamento do sinal de referência;
- Obter $\bar{\sigma}(KS)$ pequeno para redução da energia de controle associada ao ruído de medida;

- Obter $\bar{\sigma}(T)$ pequeno para obtenção de robustez de estabilidade na presença de incertezas modeladas como uma perturbação multiplicativa na saída.

Considerando as relações existentes entre os ganhos principais das funções S e T e os ganhos principais da matriz de função de transferência de malha aberta $L = GK$ descritas em Skogestad (2005) os requisitos apontados acima podem ser aproximados pelos seguintes objetivos em malha aberta:

- I. Fazer $\underline{\sigma}(GK)$ grande para rejeição a distúrbios;
- II. Fazer $\bar{\sigma}(GK)$ pequeno para atenuação dos ruídos;
- III. Fazer $\underline{\sigma}(GK)$ grande para obter bom rastreamento da referência;
- IV. Fazer $\bar{\sigma}(GK)$ pequeno para redução da energia de controle;
- V. Fazer $\bar{\sigma}(GK)$ pequeno para robustez de estabilidade diante da presença de incertezas multiplicativas na saída.

Os requisitos i e iii são válidos e importantes nas regiões de baixa frequência e os requisitos ii, iv e v são válidos e importantes nas regiões de altas frequências. A Figura 2.2 ilustra o compromisso entre estes objetivos.

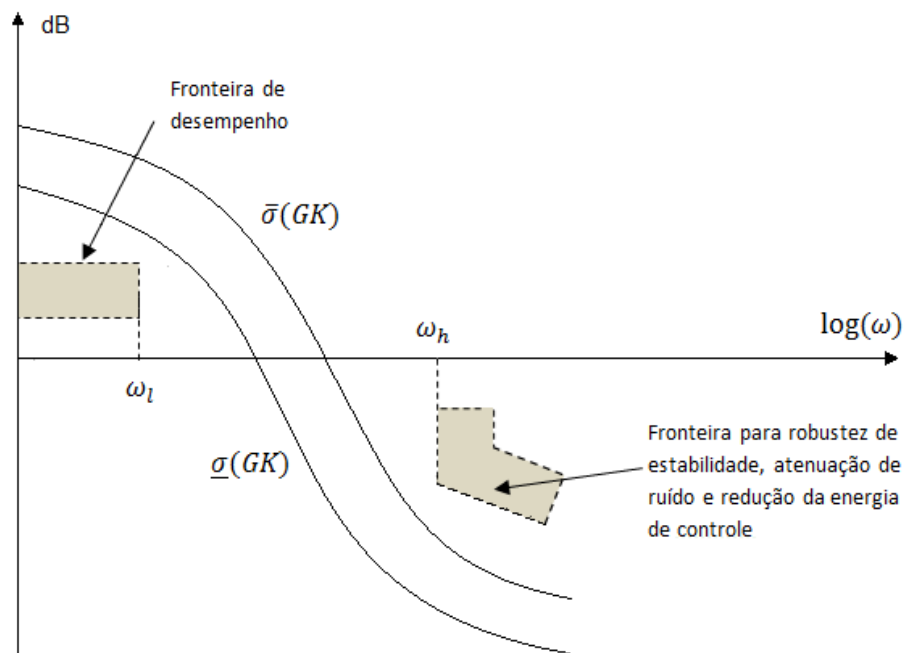


Figura 2.2 – Compromissos de projeto nos sistemas multivariáveis para a matriz de funções de transferência de malha aberta.

O objetivo do projeto é encontrar um compensador K que assegure a estabilidade do sistema em malha fechada ao mesmo tempo em que mantenha $\bar{\sigma}(GK)$ e $\underline{\sigma}(GK)$ fora da região sombreada, mostrada na Figura 2.2, para a obtenção de bom desempenho e robustez da estabilidade.

A ideia da técnica LQG/LTR para realizar o loop-shaping com o regulador LQG que apresenta estabilidade garantida, é a utilização do conceito de recuperação de sensibilidade proposto por Kwakernaak (1969) para alcançar as propriedades de desempenho desejadas.

A seguir serão apresentados os passos básicos para a aplicação da técnica LQG/LTR de acordo com a abordagem prática sugerida em Athans (1986).

Em primeiro lugar é necessário realizar um estudo da planta a ser controlada e de acordo com os objetivos a serem alcançados definir um modelo da planta

para projeto. Este modelo deve incluir a dinâmica do processo físico a ser controlado e incrementos (por exemplo, a adição de um integrador) inseridos pelo projetista para atender especificações especiais de desempenho sobre rastreamento de comando ou rejeição a distúrbios.

Assume-se que o modelo da planta é linear e invariante no tempo com m entradas, m saídas e n estados, obedecendo às equações:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.5)$$

$$y = Cx$$

Sendo $x = x(t)$ e $u = u(t)$.

A matriz de função de transferência $G(s)$ do modelo da planta é uma matriz quadrada $m \times m$ dada por

$$G(s) = C\Phi(s)B \quad (2.6)$$

onde,

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \quad (2.7)$$

É assumido que o par $[A, B]$ é estabilizável e que o par $[A, C]$ é detectável.

As incertezas sobre o sistema podem ser modeladas de várias maneiras (Skogestad, 2005), mas na exposição do método LQG/LTR aqui apresentada serão considerados apenas erros de modelagem refletidos sobre a saída da planta. As incertezas são representadas usando a estrutura multiplicativa, ou seja, a matriz de função de transferência real $G_A(s)$ é representada por:

$$G_A(s) = [I + E(s)]G(s) \quad (2.8)$$

É assumido que

$$\bar{\sigma}E(j\omega) < e_m(j\omega) \quad (2.9)$$

onde, $e_m(j\omega)$ é o limite sobre o erro de incerteza e é considerado conhecido como parte do processo de modelagem.

No projeto do compensador $K(s)$, o modelo da planta é inserido em uma malha de realimentação como mostrado na Figura 2.3

$K(s)$ será especificado de forma a atender os requisitos já discutidos. Assume-se $K(s)$ linear invariante no tempo com m entradas e m saídas, como consequência da hipótese sobre as dimensões da matriz de funções de transferência da planta.

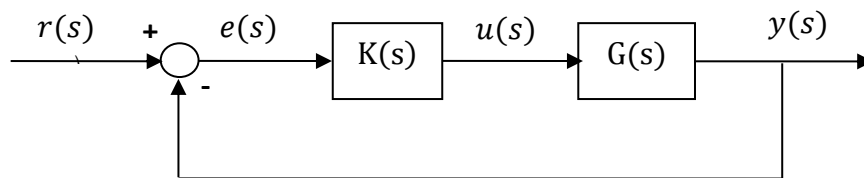


Figura 2.3 - Malha de realimentação multivariável.

A aplicação da técnica LQG/LTR é feita em dois passos. No primeiro passo define-se uma malha de realimentação objetivo que deve satisfazer as especificações sobre o desempenho e de robustez da estabilidade. O segundo passo consiste em encontrar o compensador $K(s)$ que pode ser ajustado de maneira direta para fazer com que o desempenho do sistema de realimentação mostrado na Figura 2.3 aproxime o desempenho da malha de realimentação alvo definida no primeiro passo.

A malha de realimentação objetivo, mostrada na figura 2.4 é definida pelos parâmetros C e $\Phi(s)$ do modelo da planta e por uma matriz H constante $m \times n$ chamada matriz de ganho do filtro.

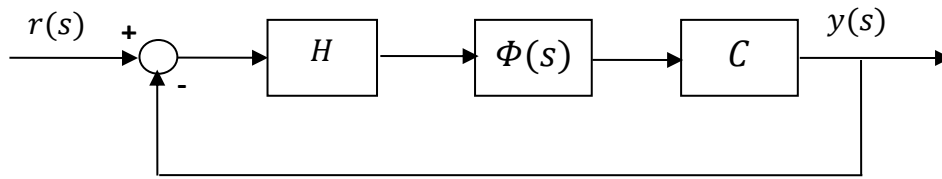


Figura 2.4 - Estrutura da malha de realimentação objetivo.

Quebrando a malha na saída obtém-se a matriz função de transferência associada à malha de realimentação objetivo que será denominada $G_{KF}(s)$.

$$G_{KF}(s) = C\Phi(s)H \quad (2.10)$$

As matrizes função de sensibilidade e sensibilidade complementar para o sistema podem ser escritas como:

$$S_{KF}(s) = (I + G_{KF}(s))^{-1} \quad (2.11)$$

$$T_{KF}(s) = (I + G_{KF}(s))^{-1}G_{KF}(s) \quad (2.12)$$

Uma vez garantida a estabilidade da malha nominal, para assegurar a robustez de estabilidade, a seguinte desigualdade deve ser válida em todas as frequências ω :

$$\bar{\sigma}(T(j\omega)) < 1/e_m \quad (2.13)$$

As propriedades de rastreamento de comandos e rejeição a distúrbios no domínio da frequência são avaliadas a partir das relações expressas nas equações 2.3 e 2.4.

Tendo encontrado a matriz H que confere a $G_{KF}(s)$ as características desejadas deve-se construir o compensador $K(s)$ da Figura 2.3 tal que o comportamento do sistema realimentado aproxime-se do comportamento da malha de realimentação da Figura 2.4. Deve-se então encontrar $K(s)$ tal que a

relação $G(j\omega)K(j\omega) \approx G_{KF}(s)$ seja satisfeita nas regiões de frequências relevantes para obtenção das características desejadas para o desempenho.

O compensador LQG/LTR é um compensador baseado no modelo da planta (MBC). Sua estrutura contém uma réplica do modelo da planta juntamente com duas malhas de realimentação. Em uma das malhas está a matriz de ganho K_c e na outra a matriz de ganho H . Estas duas matrizes são os parâmetros livres utilizados no projeto. A estrutura do controlador evidenciando as duas malhas é mostrada na Figura 2.5

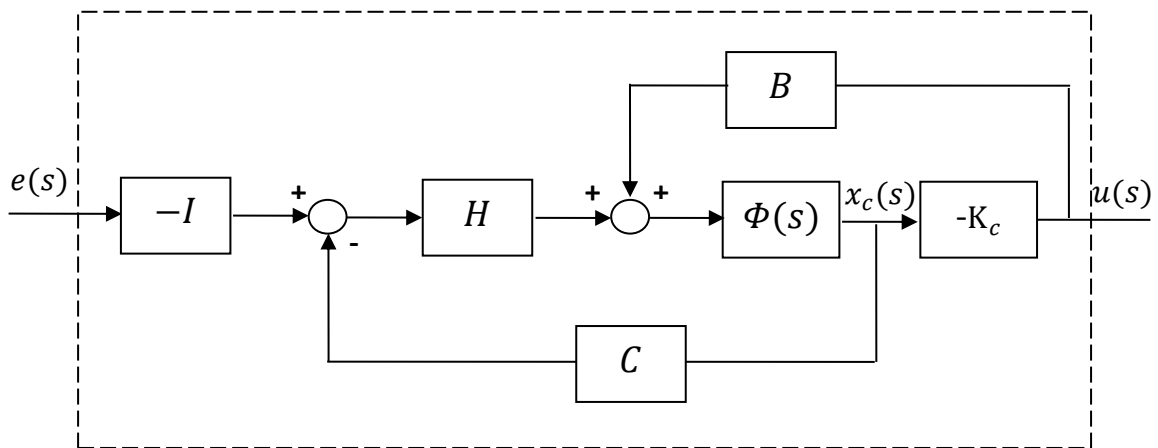


Figura 2.5 - Estrutura do Compensador LQG/LTR.

Da Figura 2.5.

tem-se

$$u(s) = K(s)e(s) \quad (2.14)$$

$$K(s) = G(sI - A + BK_c + HC)^{-1}H \quad (2.15)$$

Sendo $x_c(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados do compensador, então

$$\dot{x}_c = (A - BK_c - HC)x_c - He \quad (2.16)$$

$$u = -K_c x_c \quad (2.17)$$

onde $e = e(t) = r(t) - y(t)$ e $r(t)$ é o sinal de referência.

Como a matriz de ganho do filtro H determinada na definição da malha de realimentação objetivo é fixa, então o único parâmetro de projeto restante é a matriz K_c , que é chamada de matriz de ganhos de controle. Esta matriz é obtida pela solução do problema do regulador Linear Quadrático, ou seja, é calculada através da solução da equação algébrica de Riccati como segue:

$$0 = -\Pi A - A^T \Pi - C^T C + \frac{1}{\rho} \Pi B^T \Pi \quad (2.18)$$

$$K_c = \frac{1}{\rho} B^T \Pi \quad (2.19)$$

para $\rho \rightarrow 0$ (“cheap control”).

Da equação 2.6 tem-se $G(s) = C\Phi(s)B$.

Se os zeros de transmissão de $G(s)$ são todos de fase mínima então para todos os pontos verifica-se

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} C(sI - A)^{-1} B K_c (sI - A + B K_c + H C)^{-1} H \rightarrow C(sI - A)^{-1} H \quad (2.20)$$

Que resulta em:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} G(s)K(s) \rightarrow G_{KF}(s) \quad (2.21)$$

Assim o procedimento realiza a recuperação das características da malha de realimentação objetivo.

A matriz H , por sua vez, pode ser encontrada através da utilização de um Filtro de Kalman fictício definido por:

$$\dot{x} = Ax + \Gamma \xi \quad (2.22)$$

$$y = Cx + \theta \quad (2.23)$$

onde, Γ é uma matriz $n \times m$, $\xi(t)$ é um processo ruído branco com média zero e intensidade igual à matriz identidade e $\theta(t)$ é um processo ruído branco, com média zero e matriz de intensidade igual a μI , onde I é a matriz identidade $m \times m$.

A matriz H é obtida de

$$H = \frac{1}{\mu} \Sigma C^T \quad (2.24)$$

e Σ é encontrada através da solução da equação de Riccati mostrada em

$$0 = A\Sigma + \Sigma A^T + \Gamma\Gamma^T - \frac{1}{\mu} \Sigma C^T C \Sigma \quad (2.25)$$

Observa-se que a matriz Γ e o escalar μ são os parâmetros utilizados para a especificação da matriz H .

3 A TÉCNICA SDRE

A metodologia SDRE é um procedimento que realiza uma extensão da teoria do Regulador Linear Quadrático para sistemas não lineares. O método consiste em reescrever as equações dinâmicas do sistema não linear no formato clássico de representação das equações de estado de um sistema linear. Realizando para isto uma fatoração das equações não lineares de tal forma que seus coeficientes passam a ser dependentes dos estados (SDC).

3.1. Revisão Histórica

A metodologia SDRE foi introduzida em Pearson (1962), onde foi apresentada como um procedimento para aplicação de um índice de desempenho quadrático para otimização de um sistema não linear e não estacionário através de uma aproximação linear dependente do tempo e do estado. Durante as três décadas que se seguiram uns poucos trabalhos foram publicados utilizando os conceitos da técnica. Garrard et Clark (1967) , Burghart (1969) e Werli e Cook (1975) apresentaram soluções para o controle sub-ótimo de sistemas não lineares. Cloutier, D'Souza, e Mracek (1996) desenvolveram uma teoria para otimalidade, estabilidade e robustez relacionada com a técnica SDRE e Mracek e Cloutier (1998) apresentaram uma avaliação da técnica a partir de sua aplicação em dois projetos de controle para o problema de referência (benchmark problem) proposto por Bupp *et al* (1998) para teste de controle de sistemas não lineares. A partir destes dois trabalhos a técnica SDRE tornou-se alvo de maior interesse e então surgiram vários trabalhos apresentando sua utilização em situações diversificadas. Dentre outros, os trabalhos a seguir exemplificam estas aplicações: Beeler (2000) faz extensão da técnica para rastreamento com realimentação e estimação não linear de estados para o controle de crescimento de filme em reator de deposição de vapor químico. Bogdanov e Wan (2003) utilizaram a técnica para controle autônomo de um helicóptero juntamente com um compensador feedforward não linear. Zhang et al (2005) demonstraram uma aplicação da tecnologia

SDRE para um sistema de transporte flexível com comprimentos arbitrariamente variantes. Naik e Singh (2007) trataram do controle autônomo de mergulho de um veículo subaquático. Medagam et al (2009) apresentaram um sistema de controle adaptativo baseado em SDRE para o controle de velocidade e campo de um motor. Banks et al (2011) mostraram resultados de uma abordagem baseada em SDRE para controle terapêutico de infecção por HIV. Abdelrahman et al (2011) desenvolveram um método não linear para controle de atitude de um satélite com barras magnéticas baseado em SDRE. Souza e Gonzáles (2011) apresentaram a aplicação do método SDRE em conjunto com o Filtro de Kalman para o projeto de um sistema de controle de um simulador. Souza e Gonzáles (2012) aplicaram a teoria SDRE e o Filtro de Kalman ao projeto de um sistema de controle de atitude de satélites. Massari e Zamaro (2014) propuseram a aplicação da técnica para o controle do movimento relativo acoplado de órbita e atitude de um formation flying. (2013). Diante da apresentação de bons resultados em um grande número de trabalhos de caráter mais experimental e baseados em simulações houve a necessidade do desenvolvimento de uma base teórica consistente para a metodologia SDRE e surgiram trabalhos com este propósito. Erdem (2001) encontrou condições analíticas para estabilização assintótica global para uma classe de sistemas não lineares de segunda ordem. Uma comparação da aplicação da técnica SDRE com a técnica Feedback Linearization é feita neste trabalho e os resultados teóricos são demonstrados experimentalmente para um sistema de rastreamento de uma bola com levitação magnética em tempo real. Beeler (2004) sugeriu variações sobre a técnica SDRE para tratar o problema menos estudado da existência de não linearidades nas variáveis de controle. Banks et al (2007) abordaram de forma didática o problema de convergência assintótica do estimador e do sistema compensado e discutiram métodos numéricos para aproximação da solução do método SDRE. Çimen (2008) fez uma revisão da teoria desenvolvida sobre a metodologia SDRE para solução de problemas de controle não linear e discutiu a existência de soluções, a estabilidade e otimalidade associadas à tecnologia. O trabalho

ainda ressalta a capacidade, a flexibilidade e a forma sistemática de projeto que são características da técnica. Chang e Chung (2009) introduziram uma estratégia nova baseada em análise de contração para investigar a estabilidade não linear da metodologia. Çimen (2010) analisou a seleção das matrizes do modelo colocado na estrutura de aplicação da técnica SDRE e sistematizou a execução do projeto utilizando SDRE para sistemas em conformidade ou não com a estrutura básica e condições necessárias para aplicação da técnica. Atualmente encontram-se trabalhos desenvolvidos na direção de realizar avaliações do desempenho da técnica em aplicações com hardware na malha e em tempo real. Souza e Arena (2013) utilizaram a técnica SDRE para o controle e estimação de estados no controle de um modelo não linear geral de um simulador de movimento para manobras de rastreamento de ângulos grandes. O bom desempenho e robustez da técnica foram comprovados através de simulações com o modelo. Jung et al (2013) aplicaram a técnica para sincronização de atitude para um *formation flying* e um simulador baseado em uma mesa de mancal ar foi desenvolvido para validar o controle proposto em tempo real.

3.2. Formulação da Metodologia SDRE

Considere o sistema não linear descrito na equação

$$\dot{x} = f(x) + g(x, u) \tag{3.1}$$

$$x(0) = x_0$$

onde $x \in \mathcal{R}^n$ e $u \in \mathcal{R}^m$, $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ é uma função não linear de classe C^1 e $g(x, u)$ é da forma $g(x, u) = B(x)u$, com $B(x): \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{n \times m}$ uma matriz de funções não lineares de classe C^1 .

Considere ainda o seguinte índice quadrático de desempenho para otimização da entrada de controle do sistema na equação 3.1:

$$J(x_0, u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3.2)$$

Onde $Q \in \mathcal{R}^{n \times n}$ é uma matriz de ponderação sobre os estados, simétrica, semidefinida positiva, e $R \in \mathcal{R}^{m \times m}$ é uma matriz de ponderação sobre o controle, simétrica, definida positiva.

Seguindo o mesmo princípio utilizado para os sistemas lineares a otimalidade sobre o controle pode ser estabelecida através de condições sobre a Hamiltoniana do sistema.

A Hamiltoniana para o problema do índice de desempenho mostrado na equação 3.2 sujeito ao vínculo imposto pelo sistema da equação 3.1 pode ser escrita como:

$$\mathcal{H}(x, u, p) = \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u + p^T (f(x) + B(x)u) \quad (3.3)$$

onde $p = p(t) \in \mathcal{R}^m$ é o vetor dos coestados.

As condições necessárias para o controle ótimo são

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = f(x) + B(x)u \quad (3.4)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -Qx - \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)^T p - \left(\frac{\partial (B(x)u)}{\partial x} \right)^T p \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = Ru + B^T(x)p = 0 \quad (3.6)$$

E as condições de contorno

$$x(0) = x_0 \quad (3.7)$$

$$p(t_f) = 0, \quad t_f \rightarrow \infty \quad (3.8)$$

O controle ótimo é obtido a partir da equação 3.6 como:

$$u = -R^{-1}B^T(x)p \quad (3.9)$$

A solução para o vetor de coestados é encontrada através de uma equação algébrica de Riccati, seguindo um procedimento análogo ao método de varredura, utilizado na solução do problema do Regulador Linear Quadrático.

Para aplicar este procedimento o sistema mostrado na equação 3.1 é reescrito de acordo com uma estrutura que se aproxima da estrutura das equações de estado lineares. Esta estrutura é obtida utilizando para os estados e controle coeficientes que são escritos em função dos estados. A representação do sistema é dita estar parametrizada na forma de coeficientes dependentes dos estados (State Dependent Coefficients-SDC). A equação 3.10 mostra esta estrutura.

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u \quad (3.10)$$

Onde $A(x) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ e $B(x) \in \mathcal{R}^{n \times m}$.

Utilizando esta representação e admitindo-se um coestado da forma:

$$p = \Pi(x)x \quad (3.11)$$

A substituição desta equação em 3.12 resulta em:

$$u(x) = -R^{-1}B^T(x)\Pi(x)x \quad (3.12)$$

Derivando a equação 3.11 obtém-se:

$$\dot{p} = \Pi(x)\dot{x} + \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi(x)}{\partial x_i} \dot{x}_i \right] x \quad (3.13)$$

Da a equação 3.10 tem-se $f(x) = A(x)x$, então

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial(A(x)x)}{\partial x}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial a_{1n}}{\partial x_1} x_n & \dots & a_{1n} + \frac{\partial a_{1n}}{\partial x_n} x_1 + \dots + \frac{\partial a_{1n}}{\partial x_n} x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} + \frac{\partial a_{n1}}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial a_{n1}}{\partial x_1} x_n & \dots & a_{nn} + \frac{\partial a_{n1}}{\partial x_n} x_1 + \dots + \frac{\partial a_{nn}}{\partial x_n} x_n \end{bmatrix}$$

com $a_{ij} = a_{ij}(x)$.

Assim:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = A(x) + \sum_{i=1}^n x_i \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{1i}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial A_{1i}}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial A_{ni}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial A_{ni}}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Adotando a notação $\frac{\partial A_{1 \rightarrow n, i}}{\partial x}$, utilizada em Beeler(2004), para representar a matriz na equação 3.15 tem-se

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial(A(x)x)}{\partial x} = A(x) + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial A_{1 \rightarrow n, i}}{\partial x} \quad (3.15)$$

Da mesma forma

$$\frac{\partial(B(x)u)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial b_{11}}{\partial x_1} u_1 + \dots + \frac{\partial b_{1n}}{\partial x_1} u_n & \dots & \frac{\partial b_{1n}}{\partial x_n} u_1 + \dots + \frac{\partial b_{1m}}{\partial x_n} u_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial b_{n1}}{\partial x_1} u_1 + \dots + \frac{\partial b_{1n}}{\partial x_1} u_n & \dots & \frac{\partial b_{n1}}{\partial x_n} u_1 + \dots + \frac{\partial b_{nm}}{\partial x_n} u_m \end{bmatrix}$$

com $b_{ij} = b_{ij}(x)$.

$$\frac{\partial(B(x)u)}{\partial x} = \sum_{i=1}^m u_i \begin{bmatrix} \frac{\partial B_{1i}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial B_{1i}}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial B_{ni}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial B_{ni}}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Utilizando a notação $\frac{\partial B_{1 \rightarrow n, i}}{\partial x}$ para a matriz de derivadas, resulta

$$\frac{\partial(B(x)u)}{\partial x} = \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial B_{1 \rightarrow n, i}}{\partial x} \quad (3.17)$$

Com a substituição das equações 3.11, 3.13, 3.15 e 3.17 na equação 3.5 tem-se:

$$\begin{aligned} & \Pi(x)\dot{x} + \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}(x)\dot{x}_i \right] x = -Qx \\ & - \left[A^T(x) + \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{\partial A_{1 \rightarrow n, i}}{\partial x}(x) \right)^T + \sum_{i=1}^m u_i \left(\frac{\partial B_{1 \rightarrow n, i}}{\partial x}(x) \right)^T + \right] \Pi(x)x \end{aligned} \quad (3.18)$$

Agora, substituindo-se a expressão para o controle ótimo da equação 3.12 na equação de estados 3.10 e inserindo o resultado no lugar de \dot{x} na equação 3.18 vem

$$\begin{aligned} & \Pi(x)[A(x)x - B(x)R^{-1}B^T(x)\Pi(x)x] + \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}(x)\dot{x}_i \right] x = -Qx \\ & - \left[A^T(x) + \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{\partial A_{1 \rightarrow n, i}}{\partial x}(x) \right)^T + \sum_{i=1}^m u_i \left(\frac{\partial B_{1 \rightarrow n, i}}{\partial x}(x) \right)^T + \right] \Pi(x)x \end{aligned} \quad (3.19)$$

Colocando x em evidência e reescrevendo esta equação resulta:

$$\begin{aligned} & \Pi(x)A(x) + A^T(x)\Pi(x) - \Pi(x)B(x)R^{-1}B^T(x)\Pi(x) + Q \\ & + \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{\partial A_{1 \rightarrow n, i}}{\partial x}(x) \right)^T \Pi(x) + \sum_{i=1}^m u_i \left(\frac{\partial B_{1 \rightarrow n, i}}{\partial x}(x) \right)^T \Pi(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}(x) \dot{x}_i = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

A substituição da solução $\Pi(x)$ da equação 3.20 na equação 3.12 resulta no controle ótimo para o problema de controle representado pelas equações 3.1 e 3.2. Considerando apenas a primeira linha da equação 3.20 e desprezando os demais termos, no caso em que eles possam ser assumidos pequenos, obtém-se uma solução subótima para o problema. A suposição de que os termos desprezados são pequenos é válida nos casos em que as funções não lineares que aparecem na equação 3.1 sejam funções Lipschitz. A importância dos termos desconsiderados é dependente de cada sistema e quantifica a diferença entre a solução ótima e a subótima (BEELEER, 2004). Em Çimen (2008) foram feitas análises para avaliação da solução sub-ótima comparada à solução ótima, concluindo-se que em geral a solução subótima se aproxima muito da solução ótima no domínio de interesse para operação do sistema. Ademais, uma quantificação relativa da magnitude dos termos da segunda linha pode ser realizada calculando-se o valor destes termos.

Considerando então uma solução $\Pi(x)$ que satisfaz a primeira linha da equação 3.20, tem-se

$$\Pi(x)A(x) + A^T(x)\Pi(x) - \Pi(x, u)B(x)R^{-1}B^T(x)\Pi(x) + Q = 0 \quad (3.21)$$

$$u(x) = -R^{-1}B^T(x)\Pi(x)x \quad (3.22)$$

O conjunto de equações 3.21 e 3.22 constitui-se na solução sub-ótima para o problema de controle não linear representado nas equações 3.1 e 3.2. A equação 3.21 é a equação de Riccati dependente dos estados (SDRE).

Ocorrendo que a solução $\Pi(x)$ satisfaça a segunda linha da equação 3.20, então a solução é ótima. Banks et al (2007) definiram a relação expressa na segunda da equação 3.20 e reescrita abaixo, como o “Critério para Otimalidade” da solução.

$$\sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{\partial A_{1 \rightarrow n, i}}{\partial x} (x) \right)^T \Pi(x) + \sum_{i=1}^m u_i \left(\frac{\partial B_{1 \rightarrow n, i}}{\partial x} (x) \right)^T \Pi(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} (x) \dot{x}_i = 0 \quad (3.23)$$

3.2.1. Solução da Equação de Riccati Dependente dos Estados

A solução da equação 3.20 que fornece o controle ótimo pode, para alguns casos, ser encontrada analiticamente, porém é um problema difícil e às vezes impossível. O mesmo acontece com a solução da equação 3.21 em conjunto com a equação 3.22, que fornece um controle subótimo. O problema pode ser resolvido aplicando-se técnicas numéricas. Beeler (2004) apresenta duas alternativas para o problema. A primeira, também utilizada por Wernli e Cook (1974) é a utilização de uma expansão em séries de potência para aproximação da solução das equações 3.21 e 3.22. Para resolver o problema subótimo de acordo com este procedimento a solução da equação 3.21 é escrita sob a forma

$$\Pi(x, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j L_j(x) \quad (3.24)$$

onde ε é uma variável temporária e L_j são matrizes simétricas com mesma dimensão de $\Pi(x)$ a serem calculadas.

Representa-se A e B como:

$$\begin{aligned} A(x, \varepsilon) &= A_0 + \varepsilon \Delta A(x) \\ B(x, \varepsilon) &= B_0 + \varepsilon \Delta B(x) \end{aligned} \quad (3.25)$$

sendo A_0 e B_0 partes constantes e $\Delta A(x)$ e $\Delta B(x)$ partes variáveis de $A(x)$ e $B(x)$, respectivamente.

Substituindo-se estas equações na equação de Riccati dependente dos estados (equação 3.21) e igualando a zero os agrupamentos dos termos de mesma potência de ε resulta em:

$$L_0 A_0 + A_0^T L_0 - L_0 B_0 R^{-1} B_0^T L_0 + Q = 0 \quad (3.26)$$

$$L_1 (A_0 - B_0 R^{-1} B_0^T L_0) + (A_0^T - L_0 B_0 R^{-1} B_0^T) L_1 + L_0 \Delta A + \Delta A^T L_0 - L_0 (B_0 R^{-1} \Delta B^T + \Delta B R^{-1} B_0^T) L_0 = 0 \quad (3.27)$$

$$L_j (A_0 - B_0 R^{-1} B_0^T L_0) + (A_0^T - L_0 B_0 R^{-1} B_0^T) L_j + L_{j-1} \Delta A + \Delta A^T L_{j-1} - \sum_{i=1}^{j-1} (L_i B_0 R^{-1} B_0^T L_{j-1}) - \sum_{i=0}^{j-1} L_i (B_0 R^{-1} \Delta B^T + \Delta B R^{-1} B_0^T) L_{j-1-i} \quad (3.28)$$

$$- \sum_{i=1}^{j-2} L_i \Delta B R^{-1} \Delta B^T L_{j-2-i} = 0$$

Estas equações podem ser resolvidas iterativamente para obter os valores de L_j . Estes valores são substituídos na equação 3.22 utilizando $\varepsilon = 1$ (Wernli; Cook, 1974), obtendo-se para N termos:

$$u(x) = -R^{-1} B^T(x) \sum_{j=0}^N L_j(x) x \quad (3.29)$$

Em Banks et al (2007) é afirmado que este algoritmo converge para a solução da equação 3.21 sob a suposição de continuidade sobre $A(x)$ e $B(x)$. Porém o desempenho do método varia de acordo com a distância até o ponto em torno

do qual é feita a expansão, sendo que distante deste ponto os termos de mais alta ordem são imprecisos e poderão deteriorar o sinal de controle calculado. Desta forma observa-se que o aumento do número de termos na série não necessariamente resulta em melhoria no desempenho (Beeler, 2004). Em alguns casos constata-se mesmo uma degradação, como é demonstrado em um exemplo em (BANKS et al, 2007).

A segunda alternativa é a solução iterativa, em tempo real, das equações de Riccati congeladas para os valores do estado a cada iteração. Neste caso as equações de controle são resolvidas repetidamente de acordo com a evolução dos estados do sistema. As equações 3.21 e 3.22 tomam a forma:

$$\Pi_{n+1}A(x_n) + A^T(x_n)\Pi_{n+1} - \Pi_{n+1}B(x_n)R^{-1}B^T(x_n)\Pi_{n+1} + Q = 0 \quad (3.30)$$

$$u_{n+1} = -R^{-1}B^T(x_n)\Pi_{n+1}x_n \quad (3.31)$$

Sendo x_n e u_n o estado e o controle a cada passo n de tempo.

Este último procedimento assegura um desempenho superior ao método de expansão em série de potência, desde que os intervalos de atualização das soluções sejam suficientemente pequenos, pois neste caso as soluções da Equação de Riccati Dependente dos estados são exatas a cada intervalo e não aproximadas como no primeiro caso.

Outras alternativas podem ser utilizadas para a solução da equação de Riccati dependente dos estados em 3.20, por exemplo, Banks et al (2007) apresentam um esquema de interpolação que pode ser utilizado para obtenção de soluções *off-line*.

3.2.2. Metodologia SDRE aplicada ao Controle Ótimo e Subótimo

Um aspecto fundamental para a aplicação da técnica SDRE para controle ótimo ou subótimo é a garantia sobre a controlabilidade do sistema. Considerando novamente a parametrização do sistema não linear descrita na equação 3.10

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u$$

Observa-se que para que a solução da equação 3.20 ou da equação 3.21 defina uma lei de controle ótima ou subótima e garanta as propriedades de estabilidade do sistema em malha fechada é necessário que o par $[A(x), B(x)]$ seja controlável para todos os valores dos estados dentro do domínio onde se deseja o controle do sistema.

Para o sistema não linear parametrizado com os coeficientes dependentes dos estados, sob a forma expressa na equação 3.10, define-se a matriz de controlabilidade associada à parametrização do sistema como:

$$M(x) = [B(x) \quad A(x)B(x) \quad \dots \quad A^{m-1}(x)B(x)] \quad (3.32)$$

Assim para a garantia da existência das soluções ótima ou subótima, a parametrização do sistema deve ser tal que a matriz de controlabilidade $M(x)$ em 3.32 deve ser de posto completo para todo x dentro do domínio de interesse. Neste caso, diz-se que a parametrização $A(x)$ do sistema é controlável.

Note-se que esta definição de controlabilidade está relacionada à parametrização do sistema e difere da definição usual de controlabilidade para sistemas não lineares baseada no cálculo de Colchetes de Lie (Hangos et al, 2004).

A parametrização do sistema sob a forma de coeficientes dependentes dos estados não é única. De fato, Cloutier et al (1996) mostraram que existem infinitas parametrizações para o sistema da equação 3.1, no caso Multivariável. Assim a escolha da parametrização deve ser feita com cautela para possibilitar a satisfação das restrições sobre $A(x)$ e $B(x)$ com respeito à controlabilidade.

Poderão ocorrer situações em que não será possível para determinado sistema a escolha de uma parametrização que previna este problema. Em alguns casos a matriz B poderá mesmo se tornar nula impedindo que o sinal de controle tenha influência sobre os estados. Beeler (2004) relata algumas sugestões para solucionar este problema pontualmente. Çimen (2008) sugere também formas para colocar o sistema em conformidade com a estrutura apropriada.

Observa-se ainda que a restrição sobre a controlabilidade da parametrização pode ser abrandada valendo-se da definição de estabilizabilidade da parametrização, a saber, a parametrização $A(x)$ é dita ser estabilizável, se o par $[A(x), B(x)]$ for estabilizável para todo x .

3.2.3. Metodologia SDRE aplicada à Estimação Ótima e Subótima

A teoria SDRE também é aplicada para a estimação de estados de sistemas não lineares (Banks et al, 2007). Neste caso considera-se o sistema da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \Gamma\xi \\ y &= C(x)x + \theta\end{aligned}\tag{3.33}$$

onde $x \in \mathcal{R}^n$ e $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ é uma função não linear de classe C^1 , $C(x): \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{n \times p}$ uma matriz de funções não lineares de classe C^1 . $\xi(t) \in \mathcal{R}^n$, é um processo estocástico ruído branco com média zero e intensidade E . $\theta(t) \in \mathcal{R}^p$, é um processo ruído branco, com média zero e matriz de intensidade igual a θ .

As equações em 3.33 são colocadas na forma parametrizada com os coeficientes dependentes dos estados como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(x)x + \Gamma\xi \\ y &= C(x)x + \theta\end{aligned}\tag{3.34}$$

O desenvolvimento do equacionamento do estimador é realizado como no caso linear. Então, definindo-se \hat{x} como o vetor de estados estimados e \tilde{y} como o erro entre a saída medida e a saída calculada a partir dos estados estimados, tem-se

$$\hat{y} = C(\hat{x})\hat{x}$$

$$\tilde{y} = C(x)x - C(\hat{x})\hat{x}$$

$$\dot{\hat{x}} = A(\hat{x})\hat{x} + H(\hat{x})\tilde{y}$$

A matriz de ganhos $H(\hat{x})$ que resulta na estimação subótima dos estados é obtida, como no caso linear, de forma dual ao problema de controle considerando uma função custo da forma:

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\hat{x}^T U \hat{x} + \hat{u}^T V \hat{u}) dt \quad (3.35)$$

e a solução da seguinte equação de Riccati dependente dos estados dual:

$$A(x)\Sigma(x) + \Sigma(x)A^T(x) - \Sigma(x)C(x)^T V^{-1} C(x)\Sigma(x) + U = 0 \quad (3.36)$$

Sendo $\Sigma(x)$ a solução equação 3.36, o ganho do estimador no caso subótimo é calculado de modo análogo ao caso do regulador através da relação

$$H(x) = \Sigma(x)C^T(x)V^{-1} \quad (3.37)$$

O equacionamento completo do sistema com o estimador toma a forma

$$\dot{x} = A(x)x \quad (3.38)$$

$$y = C(x)x$$

$$\dot{\hat{x}} = A(\hat{x})\hat{x} + H(\hat{x})(C(x)x - C(\hat{x})\hat{x})$$

$$H(x) = \Sigma(x)C^T(x)V^{-1}$$

Para assegurar a convergência do erro de estimação para zero é necessário que o sistema obedeça às restrições sobre a matriz de observabilidade que deve apresentar posto completo para todos os valores dos estados. Neste caso, a matriz de observabilidade é definida como:

$$O(x) = \begin{bmatrix} C(x) \\ C(x)A(x) \\ \vdots \\ C(x)A^{n-1}(x) \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Novamente, como no caso da definição de controlabilidade, é necessário destacar que esta definição de observabilidade se aplica à parametrização e não ao sistema não linear propriamente dito, ou seja, se 3.39 for satisfeita diz-se que a parametrização do sistema é observável e não que o sistema não linear é observável. A observabilidade do sistema não linear pode ser determinada utilizando cálculo de Colchetes de Lie (HANGOS et al, 2004).

Da mesma forma que para o problema de controle a restrição sobre a observabilidade pode ser abrandada para a condição de detectabilidade do sistema assegurada pela escolha de uma parametrização detectável para todos os valores dos estados.

4 LQG/LTR APLICADA A SISTEMAS NÃO LINEARES ATRAVÉS DA METODOLOGIA SDRE

A proposta inicial para aplicação da técnica LQG/LTR via metodologia SDRE é realizar uma imitação do emprego da técnica para sistemas lineares, seguindo onde possível, o mesmo procedimento do caso linear e introduzindo ajustes para adequação ao caso não linear. O projeto do compensador LQG/LTR via SDRE para o sistema não linear é realizado considerando o sistema parametrizado na forma SDC e utilizando as soluções subótimas dos problemas de controle e estimação descritos no Capítulo 3. A malha objetivo do compensador é determinada considerando a matriz $A(x)$ avaliada em um ponto x representativo da faixa de operação prevista para o sistema e os ganhos do compensador são variantes em função dos estados, calculados a cada intervalo de amostragem do sistema.

A avaliação do desempenho do compensador é realizada sob a suposição de que as propriedades e características do sistema em malha fechada, analisadas dentro de regiões limitadas em torno de todos os pontos de uma trajetória do sistema, se aproximam, dentro de cada região, das propriedades e características do sistema linear obtido pela linearização do sistema original em torno de um determinado ponto nesta região. Assume-se que na vizinhança de cada ponto, as propriedades do sistema linearizado em torno deste ponto, são indicativas das propriedades do sistema não linear naquela região. Assim, o desempenho do compensador com respeito a especificações no domínio da frequência pode ser avaliado considerando a satisfação destas especificações pelos sistemas lineares que aproximam o sistema não linear em cada ponto dentro de um conjunto que cobre toda a extensão de variação dos estados dentro da faixa prevista de operação do sistema.

Os sistemas lineares que aproximam o sistema original utilizados no projeto podem ser obtidos através da fixação de valores constantes para as matrizes $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$ correspondentes a uma determinada parametrização do sistema na forma SDC e calculadas para cada valor do vetor de estados.

Naturalmente antes de iniciar o projeto devem-se verificar as condições para a aplicação das duas técnicas. Assim, de acordo com o exposto nos capítulos anteriores, é necessário assegurar que a parametrização do sistema sob a forma SDC seja detectável e estabilizável, garantindo as soluções das equações de Riccati para obtenção dos ganhos do filtro e do regulador a cada passo de atualização dos estados. Deve-se verificar a validade da condição de Lipschitz sobre a função que descreve a dinâmica do sistema para garantir o bom desempenho da técnica. Também é necessário averiguar a ocorrência de zeros de transmissão no semiplano direito para toda a faixa de variação dos valores dos parâmetros, a fim de aplicar medidas, quando possível, para minimização do impacto destes zeros no desempenho do sistema, dependendo da localização dos mesmos.

Uma vez atendidas as condições mencionadas, o projeto de um compensador LQG/LTR/SDRE é realizado da mesma forma que no caso linear, apenas acrescentando que a escolha dos parâmetros de projeto tem que levar em consideração o desempenho do sistema em todo o intervalo de variação dos valores dos estados na faixa prevista de operação do sistema.

4.1. Passos para Aplicação da Técnica

Seguindo um procedimento análogo ao apresentado em Cruz (1996), Os passos para aplicação da técnica são:

- i. Escrever as equações do sistema no formato padrão para aplicação da técnica LQG/LTR como nas equações 2.5 e com os coeficientes dependentes dos estados como na equação 3.10.

Assim, o sistema não linear deve ser escrito como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(x)x + B(x)u \\ y &= C(x)x\end{aligned}\tag{4.1}$$

Neste passo, verificar as condições de estabilizabilidade e detectabilidade dos pares $A(x), B(x)$ e $A(x), C(x)$, as quais deverão ser asseguradas para toda a faixa de operação do sistema. A parametrização deverá ser previamente substituída caso os testes de estabilizabilidade e detectabilidade não sejam satisfeitos;

- ii. Realizar a avaliação dos erros de modelagem;
- iii. Preparar o modelo da planta para projeto verificando a necessidade de acréscimos, na malha direta para satisfação de requisitos de projeto, por exemplo, a adição de integradores para eliminação do erro em regime estacionário.
- iv. Estabelecer o desempenho desejado, traduzido na escolha da malha objetivo, baseada nas especificações no domínio do tempo ou no domínio da frequência;
- v. Determinar um ponto x representativo da faixa de operação prevista para o sistema e calcular as matrizes $A(x)$ e $B(x)$ para definir um sistema linear que representa o sistema não linear naquele ponto e que será utilizado como ponto de partida para escolha dos valores dos parâmetros de projeto;
- vi. Escolher as matrizes de ponderação U e V que aparecem na função custo em 3.35 como $U = \Gamma\Gamma^T$ e $V = \mu I$ em conformidade com a metodologia LQG/LTR, sendo que Γ e μ são escolhidos para realização do loop shaping dentro das fronteiras de estabilidade e desempenho, tendo como base o sistema definido no item v. (Neste passo é feito o cálculo da matriz de ganho do estimador $H(x)$, obtida da solução da equação de Riccati em 3.36);
- vii. Realizar a variação do parâmetro ρ (definido na seção 2.2) e determinar o ganho do compensador $K_c(x) = -R^{-1}B^T(x)\Pi(x)$ (sendo $R = \rho I$ e $\Pi(x)$)

a solução da equação de Riccati 3.21), para cada valor de ρ , até a obtenção da recuperação da malha objetivo;

- viii. Variar os estados dentro da faixa prevista para operação do sistema e realizar ajustes nos parâmetros de projeto, caso seja necessário, para que o desempenho do sistema seja o desejado em toda a faixa de variação dos estados.

É importante ressaltar que na forma apresentada acima o projeto é realizado tomando como base um sistema linear e que embora as matrizes de ganhos do estimador e controlador variam de acordo com os valores dos estados, os parâmetros μ e ρ são fixos e não variam com os estados. Existe, porém a possibilidade de utilizar esses parâmetros também variantes com os estados ou por faixas de valores dos estados, caso seja verificado que a abordagem descrita acima e utilizada neste trabalho não garanta o desempenho desejado para o sistema em toda a faixa de operação.

4.2. Equações de Estado do Compensador

Considerando a representação do sistema não linear na forma SDC como na equação 3.10 ou em 4.1, verifica-se que os ganhos do controlador e do estimador obtidos de acordo com a metodologia SDRE também podem ser descritos parametrizados como dependentes dos estados. E, assim, as equações 2.16 e 2.17, que fornecem a dinâmica do compensador LQG/LTR, podem ser reescritas como:

$$\dot{x}_c = (A(x_c) - B(x_c)K_c(x_c) - H(x_c)C(x_c))x_c - H(x_c)e \quad (4.2)$$

$$u = -K_c(x_c)x_c \quad (4.3)$$

$$e = r - y \quad (4.4)$$

4.3. Exemplo de Projeto

Esta seção apresenta um exemplo de projeto de um compensador para um sistema não linear utilizando a técnica proposta seguindo a metodologia descrita no início deste Capítulo e na seção 4.1. O sistema a ser compensado foi originalmente apresentado em Markman e Katz (2000) e Banks et al (2007) utilizaram-no como exemplo, mostrando a solução analítica de aplicação da técnica SDRE convencional e também a solução através do método proposto por eles. Às equações dinâmicas deste sistema foi incorporada a equação da variável de medida para a utilização do exemplo no projeto do compensador LQG/LTR/SDRE. Assim considera-se o sistema descrito pelas seguintes equações:

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{4.5}$$

$$\dot{x}_2 = x_1^3 + u$$

$$y = x_1 \tag{4.6}$$

sujeito às condições iniciais $x_{10} = 2$ e $x_{20} = -2$.

Em malha aberta este sistema apresenta um tempo de escape, para as condições iniciais consideradas, menor que 2 segundos. Figura 4.1 mostra a evolução dos estados durante uma simulação de 1,4 segundos.

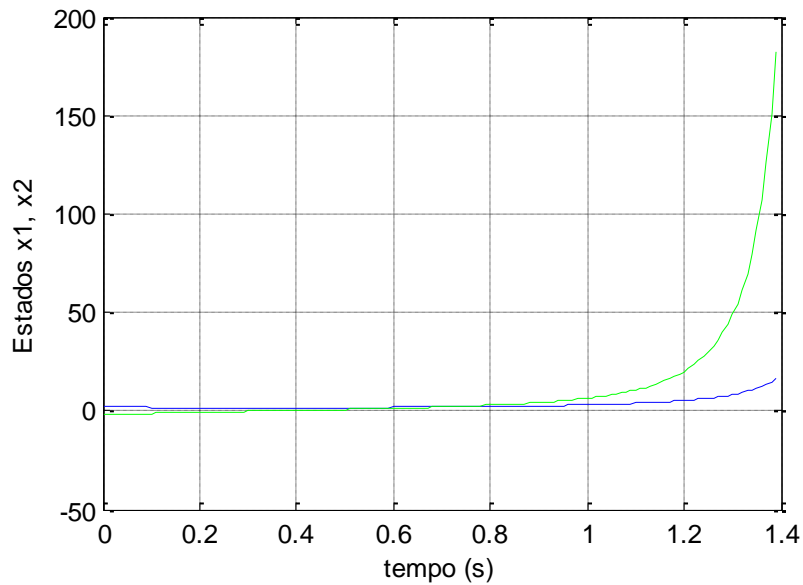


Figura 4.1 – Evolução dos estados do sistema em malha aberta.

O objetivo do compensador é a obtenção de um sistema em malha fechada que force a convergência dos estados para a origem em um tempo menor que 1 segundo e com um erro em regime estacionário menor que 0.02.

O projeto do compensador LQG/LTR/SDRE para o sistema não linear é realizado, como descrito no início deste Capítulo, sob a suposição de que as propriedades e características do sistema se aproximam, dentro de uma região limitada, das propriedades e características do sistema linear obtido pela linearização do sistema original em torno de um determinado ponto nesta região. Assim o projeto do compensador é realizado considerando a satisfação das especificações de projeto pelos sistemas lineares obtidos para um conjunto de pontos que cobre toda a extensão de variação dos estados dentro da faixa prevista de operação do sistema.

Uma parametrização sob a forma SDC para o sistema não linear representado pelas equações 4.5 e 4.6 pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x_1^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4.7)$$

$$y = [1 \ 0]x_1 \quad (4.8)$$

Considerando a variação dos estados no mesmo período de 1,4 segundos, a cada intervalo de amostragem fica definido um sistema linear representado pela equação 4.7 com a matriz $A(x)$ avaliada naquele ponto. A Figura 4.2 mostra um gráfico com os valores dos polos de cada sistema linear obtido no período considerado. Na Figura 4.3 são apresentados os Gráficos de Bode para os mesmos sistemas lineares e na Figura 4.4 os Gráficos de Bode para o primeiro e último sistema linear obtido no período.

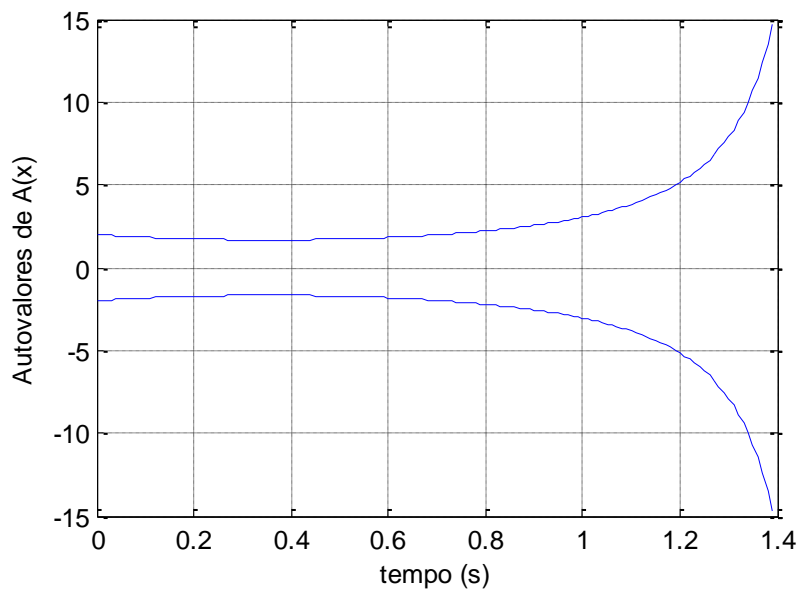


Figura 4.2 – Autovalores de $A(x)$, avaliada para cada valor do vetor de estados no período de 0 a 1,4 segundos.

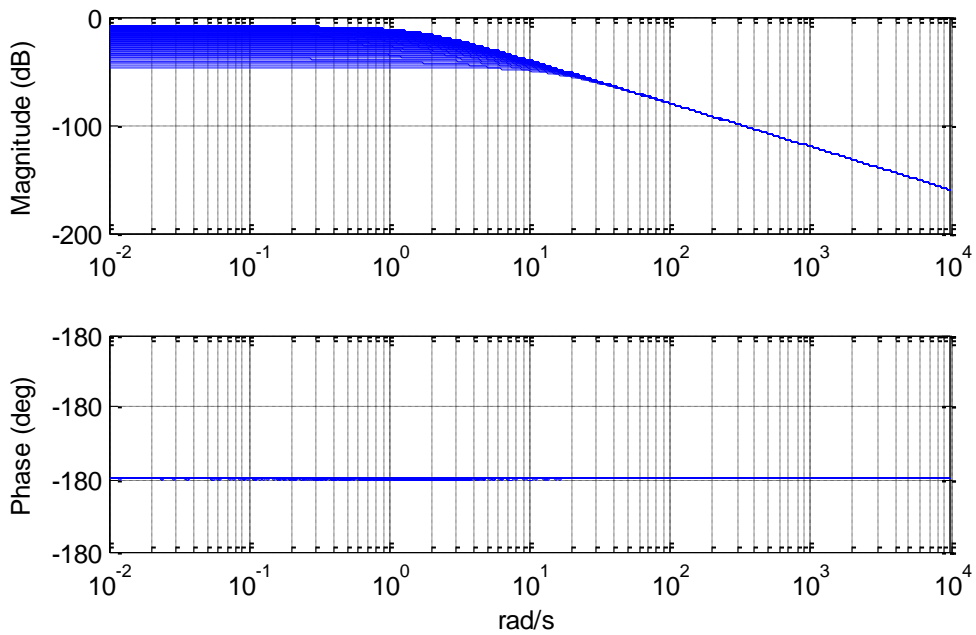


Figura 4.3 – Gráficos de Bode dos sistemas lineares obtidos com $A(x)$ avaliada para cada valor do vetor de estados no período de 0 a 1,4 segundos.

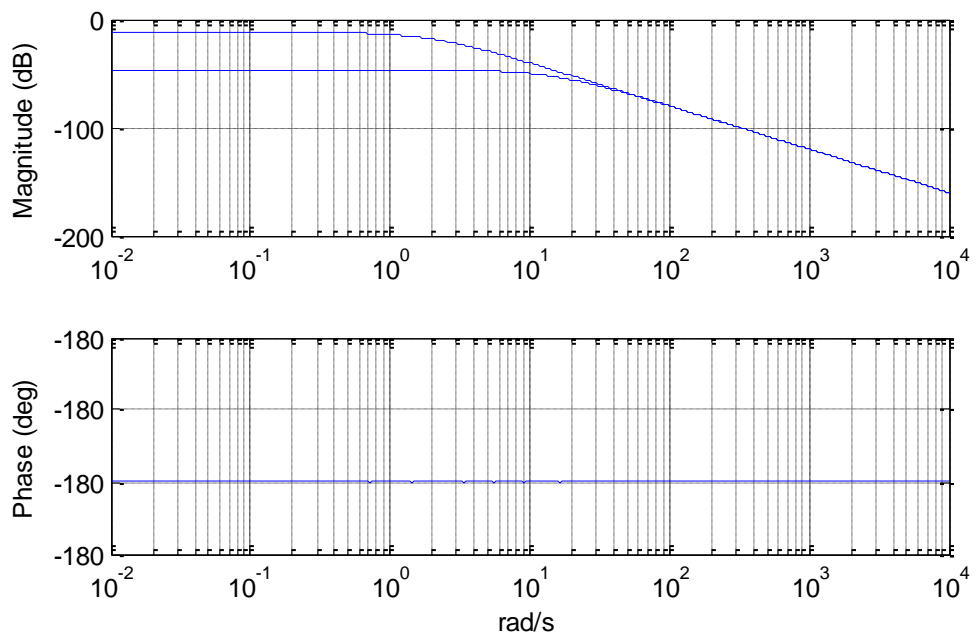


Figura 4.4 – Gráficos de Bode correspondentes ao primeiro e último sistema linear obtido no período de simulação de 0 a 1,4 segundos.

Para este exemplo, $B(x)$ e $C(x)$ não dependem dos estados e possuem os valores constantes $B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $C(x) = [1 \ 0]$. Assim as matrizes de controlabilidade e observabilidade definidas nas equações 3.32 e 3.39 também serão constantes, independente dos estados e com os seguintes valores:

$$M(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$O(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Verificando-se $M(x)$ e $O(x)$ possuem posto completo e que, portanto a parametrização SDC escolhida é detectável e observável.

Neste exemplo não serão feitas considerações sobre erros de modelagem e foi verificado através de análise prévia que não será necessário incluir compensadores na entrada da planta para a satisfação das especificações consideradas. Também foi verificado que sistemas lineares associados ao sistema não linear, na faixa de variação dos estados considerada, não possuem zeros e, portanto neste caso não existe a preocupação com a existência de zeros no semiplano direito. Assim, o primeiro passo para o projeto do compensador para este sistema é a definição das características da malha objetivo.

A especificação sobre o tempo de resposta do sistema pode ser aproximada por uma especificação sobre sua largura de banda tomando como base as relações entre estas duas características para os sistemas lineares de segunda ordem e estabelecendo uma aproximação para o sistema não linear. Desta forma, o projeto é feito objetivando uma largura de banda de no mínimo 4 rad/s para a obtenção de um tempo de assentamento menor ou igual a 1 segundo. Também é levada em consideração para a escolha dos parâmetros de projeto a capacidade do sistema em malha fechada de seguir uma referência, mas somente com a finalidade de satisfazer a especificação de erro em regime

estacionário com respeito à manutenção do sistema na origem em regime estacionário.

Seguindo as recomendações para o projeto do compensador LQG/LTR (CRUZ,1996; ATHANS, 1986) a matriz U é escolhida da forma $U = \Gamma\Gamma^T$, com $\Gamma = B$ e $V = \mu$, com $\mu = 10^{-4}$. Esses valores são mantidos constantes para todo o intervalo de variação dos estados e a equação de Riccati é resolvida em tempo real a cada intervalo de amostragem. A Figura 4.5 mostra o gráfico da magnitude da função de transferência da malha objetivo para esta configuração, com os estados em seus valores iniciais.

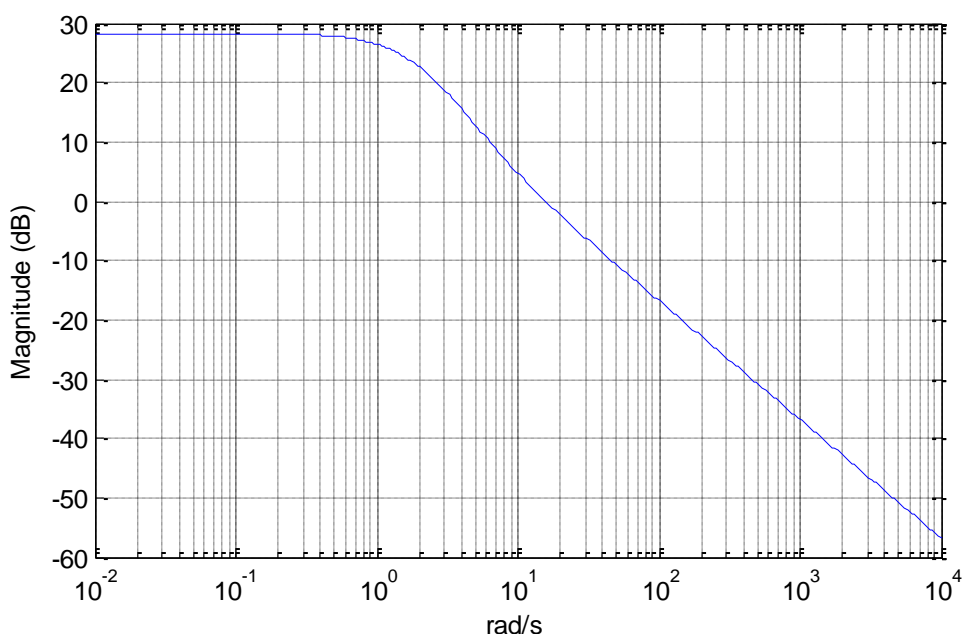


Figura 4.5 – Ganho da malha objetivo para o sistema no instante inicial da simulação com $U = \Gamma\Gamma^T$ e $\mu = 10^{-4}$.

Observa-se que para o valor de μ escolhido a frequência de corte da malha objetivo é de aproximadamente 15,63 rad/s, o que deve resultar em uma largura de banda suficientemente grande para assegurar o tempo de assentamento especificado.

Para realizar a recuperação da malha objetivo escolhe-se as matrizes Q e R como $Q = C^T C$ e $R = \rho$ (CRUZ,1996; ATHANS, 1986). A Figura 4.6 apresenta a recuperação do formato das características da malha objetivo à medida que o parâmetro ρ recebe os valores 1, 10^{-2} , 10^{-4} e 10^{-6} .

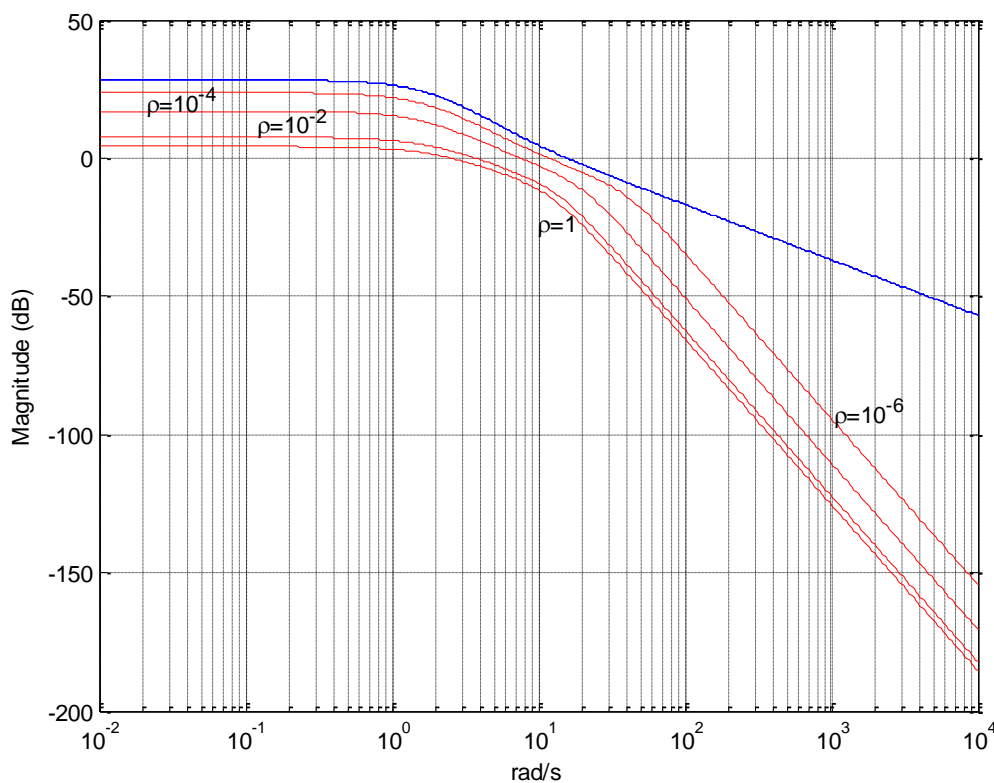


Figura 4.6 – Recuperação da malha objetivo à medida que ρ varia com os valores 1, 10^{-2} , 10^{-4} e 10^{-6}

Na Figura 4.7 são apresentados os gráficos dos ganhos em malha fechada para os sistemas lineares em toda a faixa de variação dos estados durante a simulação, com $\rho = 10^{-6}$.

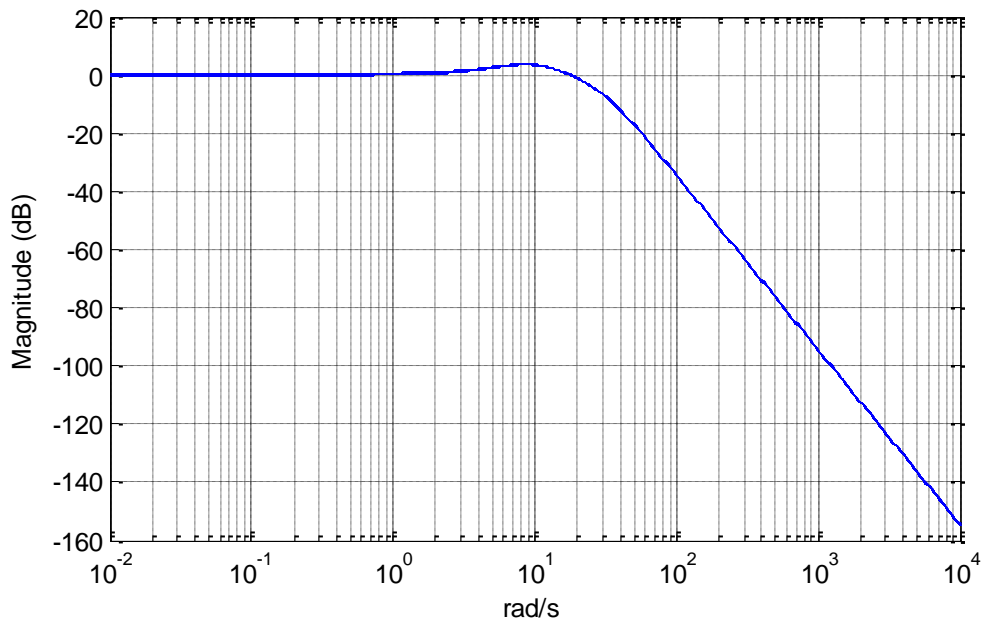


Figura 4.7 – Gráficos dos ganhos em malha fechada para os sistemas lineares em toda a faixa de variação dos estados para $\rho = 10^{-6}$.

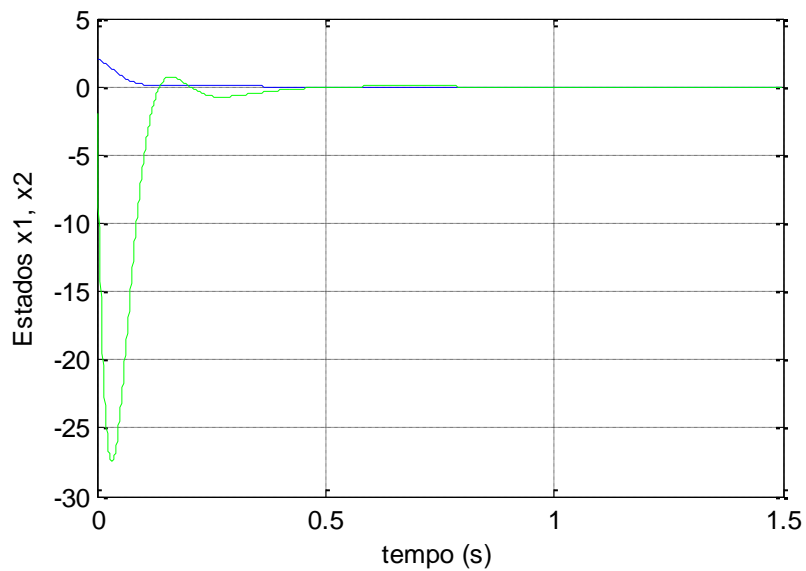


Figura 4.8 – Resposta do sistema não linear em malha fechada para as condições iniciais $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$.

A Figura 4.8 apresenta a resposta do sistema não linear em malha fechada quando $\rho = 10^{-6}$ e a Figura 4.9 mostra a variação do sinal de controle no período de simulação.

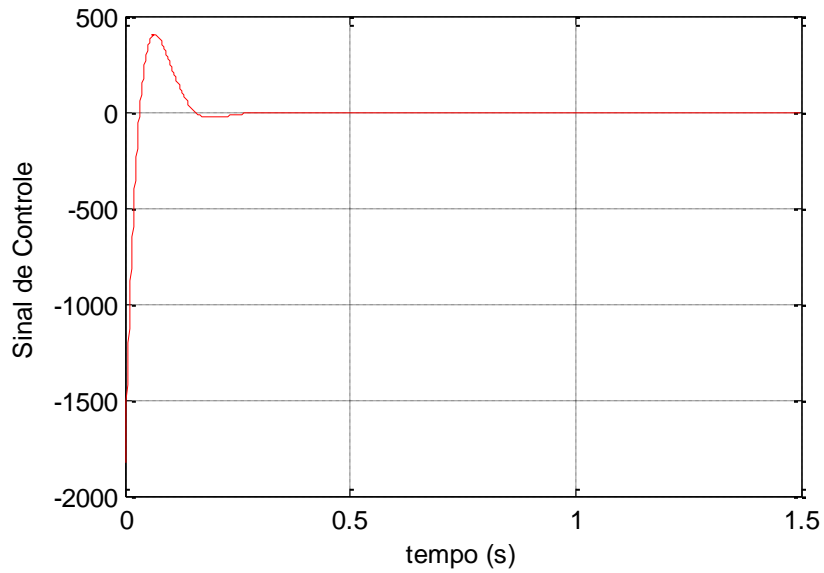


Figura 4.9 – Sinal de controle do compensador, com $\rho = 10^{-6}$, para as condições iniciais $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$.

Para avaliação da capacidade de rastreamento do sistema compensado é mostrada na Figura 4.10 a resposta a uma entrada degrau Unitário.

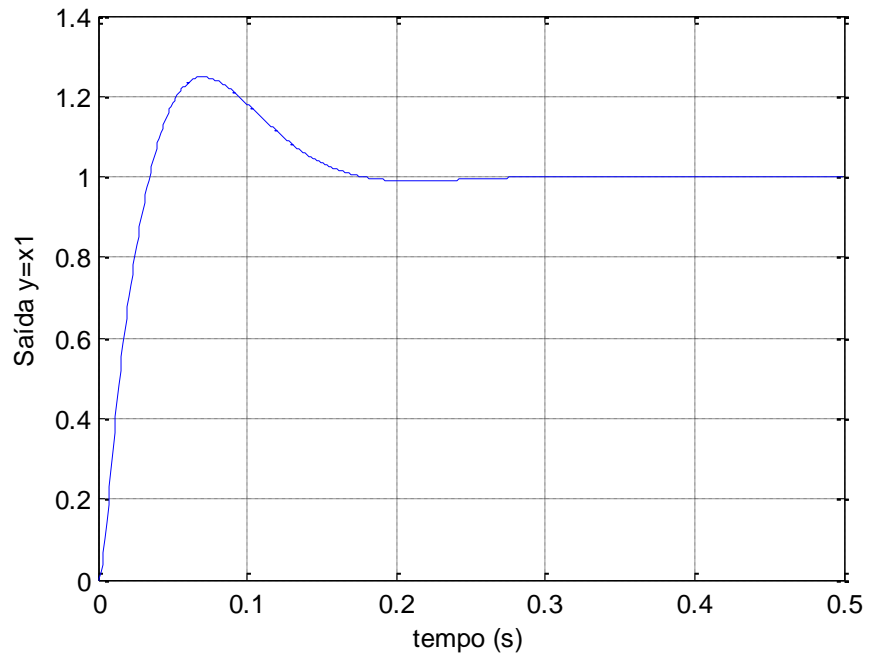


Figura 4.10 – Resposta do sistema não linear em malha fechada a uma entrada Degrau Unitário.

5 PROVAS DE ESTABILIDADE LOCAL

Como apontado sobre as condições de aplicação da técnica LQG/LTR/SDRE no Capítulo 4, a existência do ganho de realimentação deve ser assegurada a cada iteração da malha de controle. O presente método apresenta essa característica. No entanto, neste trabalho estenderam-se as condições de existência de uma solução para um determinado tipo de sistema baseando-se apenas nas condições de Observabilidade e de Controlabilidade, o que se demonstra garante a existência de uma solução para a equação de Riccati dependente dos estados. Essas condições de existência serão apresentadas nas seções que se seguem.

Primeiramente serão apresentados alguns conceitos e definições utilizados nos teoremas em que se fundamenta o desenvolvimento das provas.

5.1. Definições

5.1.1. Condição de Lipschitz

Uma função $f(x): \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$, é dita ser L -Lipschitz ou Lipschitz em x , se para $L \geq 0$ a condição

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \quad (5.1)$$

é satisfeita para todos x_1 e x_2 em alguma vizinhança de x_0 , onde L é chamada de constante de Lipschitz.

A condição de Lipschitz representa um limite sobre o quão rápido uma função sofre mudanças. Para cada par de pontos no gráfico da função, o valor absoluto da inclinação da linha que conecta estes pontos não é maior que a constante de Lipschitz, no caso em que a função tem imagem real. Uma função de classe C^1 é Lipschitz.

5.1.2. Função Classe K

Uma função escalar contínua $\alpha(r)$ definida para $r \in [0, a)$ é dita pertencer à classe K se ela é estritamente crescente e tal que $\alpha(0) = 0$.

Ela é dita pertencer à classe K_∞ se $a = \infty$ e $\alpha(r) \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow \infty$.

5.1.3. \mathcal{L} - Estabilidade

Sendo

$$\mathcal{L}_e^m = \{u | u_\tau \in \mathcal{L}^m, \forall \tau \in [0, \infty)\}$$

e u_τ um truncamento de u definido como

$$u_\tau(t) = \begin{cases} u(t), & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$$

então, um mapeamento $H : \mathcal{L}_e^m \rightarrow \mathcal{L}_e^q$ é \mathcal{L} - estável se existe uma função α classe K , definida em $[0, \infty)$, e uma constante não negativa β tal que

$$\|(Hu)_\tau\|_{\mathcal{L}} \leq \alpha\|u_\tau\|_{\mathcal{L}} + \beta \quad (5.2)$$

para todo $u \in \mathcal{L}_e^m$ e $\tau \in [0, \infty)$. O mapeamento H é de ganho-finito \mathcal{L} - estável se existem constantes γ e β tal que

$$\|(Hu)_\tau\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma\|u_\tau\|_{\mathcal{L}} + \beta \quad (5.3)$$

para todo $u \in \mathcal{L}_e^m$ e $\tau \in [0, \infty)$. O índice e em \mathcal{L}_e^m se refere ao tipo de norma usada para definir o espaço e m é a dimensão do sinal u .

5.2. Estabilidade para um Sistema com Solução Exata

Nesta seção o sistema utilizado no exemplo do projeto do compensador no Capítulo 4 é retomado para a realização de um estudo sobre a estabilidade do sistema compensado utilizando a técnica LQG/LTR/SDRE. A análise da estabilidade será realizada de forma similar à apresentada em Banks et al

(2007), utilizando o mesmo procedimento empregado lá, com a finalidade de realizar comparações.

As equações do sistema em malha aberta já apresentadas em 4.5 são

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^3 + u \end{aligned} \quad (5.4)$$

Utilizando a mesma parametrização SDC do Capítulo 4, vem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x_1^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (5.5)$$

Com esta parametrização, $A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x_1^2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

As equações do compensador LQG/LTR/SDRE são, como mostrado em 4.2 e 4.3 e, as seguintes:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= (A(x) - B(x)K_c(x_c) - H(x_c)C(x_c))x_c(t) - H(x_c)e(t) \\ u(t) &= -K_c(x_c)x_c(t) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Para este exemplo $r = 0$ e assim, substituindo a expressão do sinal de controle na equação de estados, o sistema compensado pode ser representado pelas equações:

$$\dot{x} = A(x)x - B(x)K_c(x_c)x_c \quad (5.7)$$

$$\dot{x}_c = (A(x_c) - B(x_c)K_c(x_c) - H(x_c)C(x_c))x_c + H(x_c)C(x)x \quad (5.8)$$

A prova de estabilidade para este sistema é apresentada nesta seção para duas soluções de controle utilizando a fusão das técnicas LQG/LTR e SDRE. As duas soluções serão denominados no desenvolvimento que segue como compensador 1 e compensador 2. Nos dois casos é estabelecido como objetivo do projeto obter características de resposta temporal semelhantes às obtidas em Banks et al (2007) para as mesmas condições iniciais.

5.2.1. Projeto do Compensador 1

Para o projeto do primeiro compensador foi assumido como vetor de saídas do sistema a ser controlado o próprio vetor de estados, ou seja, a matriz $C(x)$ é constante e igual a matriz Identidade, e as matrizes de ponderação sobre os estados e sobre o sinal de controle são escolhidas idênticas às utilizadas em Banks et al (2007).

Embora este caso não apresente a situação possível para aplicação da técnica LQG/LTR (sendo a matriz $C(x)$ igual a identidade, não existe razão para estimação dos estados, além deste fato tornar o problema não indicado para aplicação da técnica LQG/LTR, uma vez que com esta matriz C o sistema fica com o número de saídas maior que o número de entradas, violando uma das condições para recuperação do desempenho na saída da planta), ele foi aqui considerado com a finalidade de realizar a comparação entre a implementação de Banks et al (2007) e a implementação sugerida neste trabalho.

O vetor de saídas considerado para o compensador 1 toma a forma de

$$y = [x_1 \quad x_2]^T \quad (5.9)$$

E assim, $C(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

As matrizes de controlabilidade e observabilidade dependentes dos estados são respectivamente:

$$M(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$O(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Assim, $M(x)$ e $O(x)$ possuem posto 2 independente do valor de x_1 e portanto verifica-se que o sistema é controlável e observável a cada passo de amostragem para qualquer extensão da faixa de operação do sistema.

As matrizes de ponderação que aparecem nas funções custo em 3.2 e 3.35 foram especificadas como: $U = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$, $V = 0.01$, $Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ e $R = 1/2$.

O ganho do controlador é obtido pela matriz $\Pi(x)$, que é a solução da equação de Riccati mostrada em 3.21 com a substituição dos valores de $A(x)$ e $B(x)$, bem como de Q e R estipulados.

Assim tem-se

$$\Pi(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{x_1^4 + 1} \sqrt{\frac{x_1^2 + \sqrt{x_1^4 + 1}}{2} + \frac{1}{4}} & \frac{x_1^2 + \sqrt{x_1^4 + 1}}{2} \\ \frac{x_1^2 + \sqrt{x_1^4 + 1}}{2} & \sqrt{\frac{x_1^2 + \sqrt{x_1^4 + 1}}{2} + \frac{1}{4}} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

como solução da equação de Riccati referente ao regulador, enquanto que o resultado para a solução da equação de Riccati, referente ao estimador, mostrada em 3.36 é

$$\Sigma(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \sigma^2 + 0.02\sigma} & \sigma \\ \sigma & \sqrt{1 - \sigma^2 + 0.02x_1^2\sigma} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

onde σ é dada por

$$\sigma = \frac{10^{-2}(x_1^2 - 10^4) + \sqrt{(1 + 10^{-4})x_1^4 + 10^4 + 1}}{x_1^2 + 1} \quad (5.14)$$

Em $x = 0$ as duas matrizes assumem os valores:

$$\Pi(0) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

e

$$\Sigma(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0,005 \\ 0,005 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Adicionalmente sabe-se que $\Pi_0 = \Pi(0)$ e $\Sigma_0 = \Sigma(0)$ são soluções respectivamente das equações

$$\Pi_0 A_0 + A_0^T \Pi_0 - \Pi_0 B_0 R^{-1} B_0 + Q = 0 \quad (5.17)$$

$$A_0 \Sigma_0 + \Sigma_0 A_0^T - \Sigma_0 C_0^T V^{-1} C_0 \Sigma_0 + U = 0 \quad (5.18)$$

onde, $A_0 = A(0)$, $B_0 = B(0)$ e $C_0 = C(0)$

Agora, representando as matrizes $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$ na forma

$$A(x) = A_0 + \Delta A(x) \quad (5.19)$$

$$B(x) = B_0 + \Delta B(x) \quad (5.20)$$

$$C(x) = C_0 + \Delta C(x) \quad (5.21)$$

as matrizes $\Pi(x)$ e $\Sigma(x)$ podem ser escritas como

$$\Pi(x) = \Pi_0 + \Delta \Pi(x) \quad (5.22)$$

$$\Sigma(x) = \Sigma_0 + \Delta \Sigma(x) \quad (5.23)$$

enquanto que os ganhos do controlador e do estimador são

$$K_c(x) = K_{c0} + \Delta K_c(x) \quad (5.24)$$

$$H(x) = H_0 + \Delta H(x) \quad (5.25)$$

Para este primeiro caso tem-se

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_1^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

$$B_0 = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta B(x) = 0_{2 \times 1} \quad (5.27)$$

$$C_0 = C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta C(x) = 0_{2 \times 2} \quad (5.28)$$

$$H_0 = \Sigma_0 C_0^T V^{-1} = \begin{bmatrix} 100 & 0,005 \\ 0,005 & 100 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Como $\Delta B(x) = 0$, $\Delta C(x) = 0$, $B_0 = B$ e $C_0 = C$ então $\Delta K_c(x) = R^{-1} B_0^T \Delta \Pi(x)$ e $\Delta H(x) = \Delta \Sigma(x) C_0^T V^{-1}$

Assim,

$$\Delta K_c(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + \sqrt{x_1^4 + 1} - 1 & \sqrt{2x_1^2 + 2\sqrt{x_1^4 + 1} + 1} - \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$\Delta H(x) = \begin{bmatrix} 100\sqrt{1 - \sigma^2 + 0,02\sigma} - 1 & 100\sigma - 0,5 \\ 100\sigma - 0,5 & 100\sqrt{1 - \sigma^2 + 0,02x_1^2\sigma} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

com σ calculado pela equação 5.14.

Considerando que as matrizes B e C são constantes, as equações 5.7 e 5.8 tornam-se:

$$\dot{x}(t) = A(x)x - BK_c(x_c)x_c \quad (5.32)$$

$$\dot{x}_c(t) = (A(x) - BK_c(x_c) - H(z)C)x_c + H(z)Cx_c \quad (5.33)$$

O erro de estimação de estados definido como $e_e(t)$, associado ao estimador do compensador pode ser avaliado da relação:

$$e_e = x - x_c \quad (5.34)$$

Utilizando as equações 5.32 e 5.33 tem-se

$$\dot{e}_e(t) = A(x)x - A(x_c)x_c - H(x_c)C e_e \quad (5.35)$$

Substituindo as relações $A(x) = A_0 + \Delta A(x)$, $A(x_c) = A_0 + \Delta A(x_c)$, $H(x_c) = H_0 + \Delta H(x_c)$ e $C = C_0$ em 5.35, vem:

$$\dot{e}_e = (A_0 - H_0 C_0) e_e + \Delta A(x)x - \Delta A(x_c)z - \Delta H(x_c)C_0 e_e \quad (5.36)$$

de onde observa-se que a dinâmica do erro para este primeiro caso não depende de $B(x)$ ou $B(z)$, o que torna possível utilizar os mesmos argumentos apresentados em Banks et al (2007) para verificar que o erro de estimação converge local e assintoticamente para a origem. Em Banks et al (2007) é mostrado que o erro converge desde que seja possível encontrar α e β que permita assegurar a que relação $\|e^{(A_0 - H_0 C_0)t}\| \leq \alpha e^{-\beta t}$ seja obedecida e que a origem $x = 0$ seja estável tal que exista um estado inicial $\|x_0\| < \delta$, com $\delta \in (0, \epsilon/2]$ de forma que $\|x\| < \epsilon/2$ seja satisfeito. Sob estas condições é possível encontrar um η , com $\eta > h(x, \hat{x})$ e $\eta < \beta/\alpha$ (a formulação de $h(x, \hat{x})$ pode ser consultada no Anexo A) de forma que $\|x_e\| < \epsilon/2$, o que resulta na convergência do estado estimado para o estado real.

Utilizando o valor de H_0 dado em 5.29, tem-se

$$A_0 - H_0 C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0,005 \\ 0,005 & 1 \end{bmatrix}$$

Que apresenta os autovalores $\lambda_{1,2} = -1 \mp 0,005$.

Escolhendo-se $\alpha = 1.05$ e $\beta = 40$ a relação $\|e^{(A_0 - H_0 C_0)t}\| \leq \alpha e^{-\beta t}$ é satisfeita. A Figura 5.1 mostra a comparação entre estas duas funções ao longo do tempo.

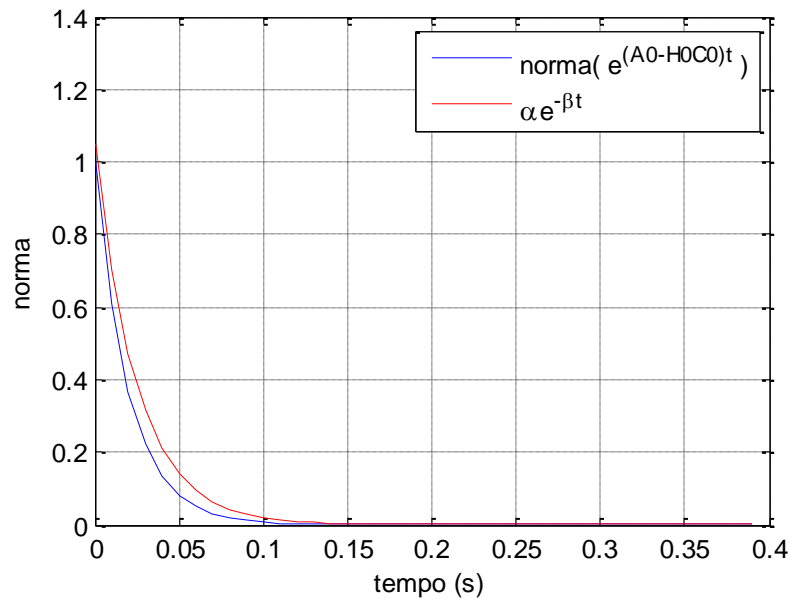


Figura 5.1 – Comparação entre $\|e^{(A_0 - H_0 C_0)t}\|$ e $\alpha e^{-\beta t}$ ao longo do tempo.

Na Figura 5.2 é apresentado o gráfico de uma estimativa da variação da norma $\|h(x, \hat{x})\|$ em função dos valores dos estados ao se afastarem da origem. A Figura 5.3 mostra a mesma variação, porém congelando o valor de x_1 para ressaltar o valor alcançado pela norma de $h(x, \hat{x})$. Destas figuras é possível observar que para $|x_1| \leq 0,45$ e $|x_2| \leq 0,45$ tem-se $\|h(x, \hat{x})\| < 38,00$, verificando-se que as relações $\eta < \beta/\alpha$ e $\eta > \|h(x, \hat{x})\|$ são satisfeitas. A estimativa de $\|h(x, \hat{x})\|$ foi realizada utilizando $k_a = 1$ e assumindo que na região considerada $\hat{x} \approx x$ de forma que $\|\Delta H(\hat{x})\| \approx \|\Delta H(x)\|$.

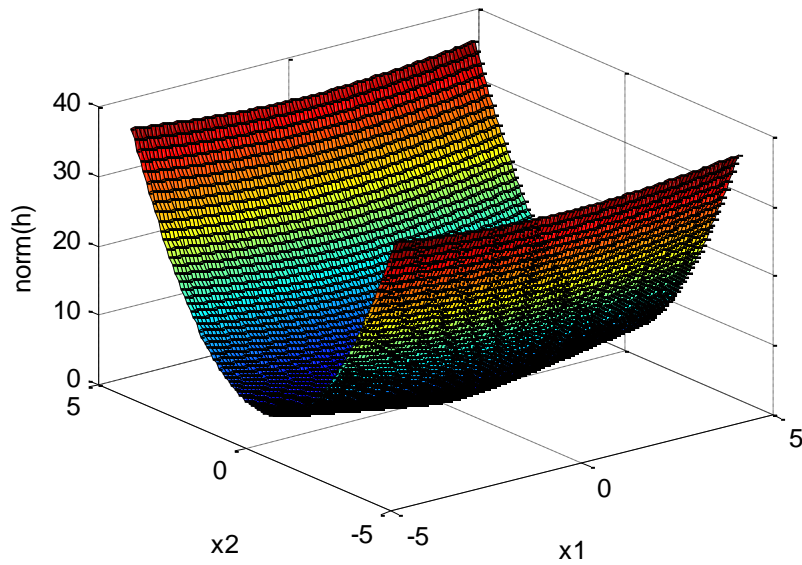


Figura 5.2 – $\|h(x, \hat{x})\|$ em função de x_1 e x_2 para o compensador 1.

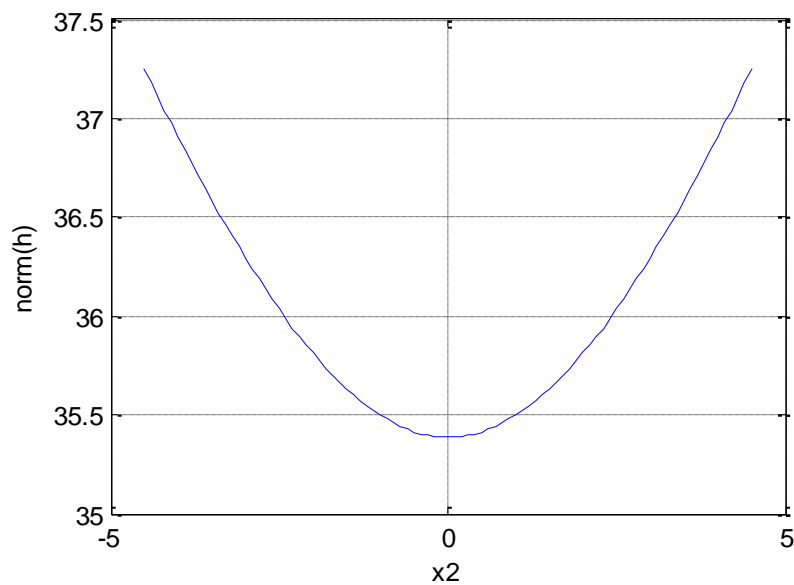


Figura 5.3 – $\|h(x, \hat{x})\|$ em função de x_2 com x_1 fixo no valor 0,45.

Uma vez verificada a convergência do estimador, a análise da estabilidade do sistema controlado pelo sinal de controle, dado pela equação 5.6, é feita separadamente utilizando o mesmo procedimento de Banks et al (2007), considerando-se os estados estimados iguais aos estados reais.

Desta forma, assumindo $x_c = x$ na equação 5.6 e substituindo em 5.7 vem

$$\dot{x}(t) = A(x)x - B(x)K_c(x)x(t) \quad (5.37)$$

Substituindo as relações 5.19, 5.20 e 5.24 nesta equação, tem-se

$$\dot{x}(t) = (A_0 + B_0K_{c0})x + h(x) \quad (5.38)$$

$$h(x) = g(x)x \quad (5.39)$$

$$g(x) = \Delta A(x) - B(x)\Delta K_c(x) - \Delta B(x)K_{c0} \quad (5.40)$$

Como para este exemplo $\Delta B(x) = 0$, então

$$g(x) = \Delta A(x) - B(x)\Delta K_c(x) \quad (5.41)$$

Substituindo-se os valores de $\Delta A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_1^2 & 0 \end{bmatrix}$, $B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\Delta K_c(x)$ dado em 5.30 tem-se para este primeiro caso

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2x_1^2 + \sqrt{x_1^4 + 1} - 1 & \sqrt{2x_1^2 + 2\sqrt{x_1^4 + 1} + 1} - \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

De acordo com Banks et al (2007), a estabilidade do estado em torno da origem é assegurada desde que exista $\zeta > \|g(x)\|$ e seja possível encontrar α e β tal que $\|e^{(A_0 - B_0K_{c0})t}\| \leq \alpha e^{-\beta t}$. Como foram usadas, neste caso, as mesmas matrizes de ponderação daquele trabalho, os mesmos valores para ζ , α e β são escolhidos para mostrar a estabilidade do sistema controlado. Então, com $\alpha = 4$ e $\beta = 0.866$ verifica-se que $\zeta = \beta/\alpha = 0.2165$ pode ser usado como limite superior da norma de $g(x)$ para uma estimativa da região de atração do equilíbrio na origem. As figuras Figura 5.4 , Figura 5.5 e Figura 5.6 mostram

graficamente estas relações. Observa-se que enquanto $|x_1| \leq 0.5$ a norma $\|g(x)\|$ é limitada por ζ .

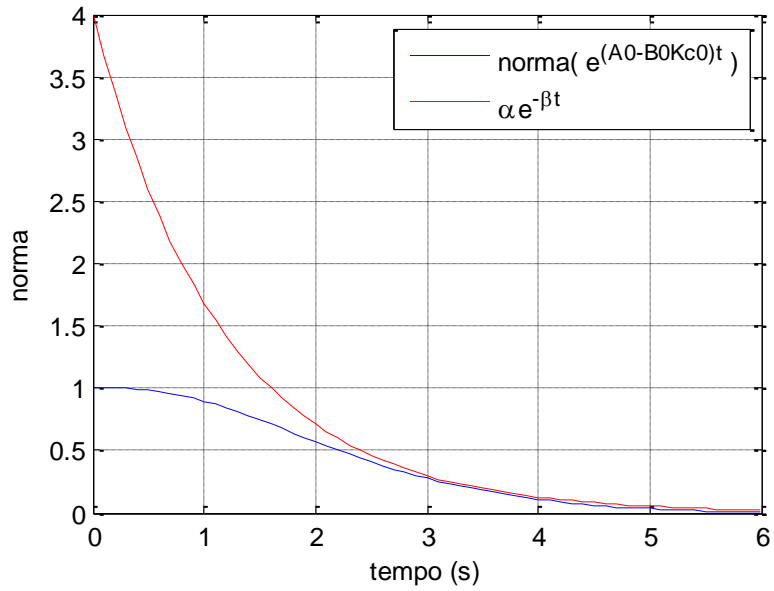


Figura 5.4 – Comparação entre $\|e^{(A_0 - B_0 K_{c0})t}\|$ e $\alpha e^{-\beta t}$ ao longo do tempo.

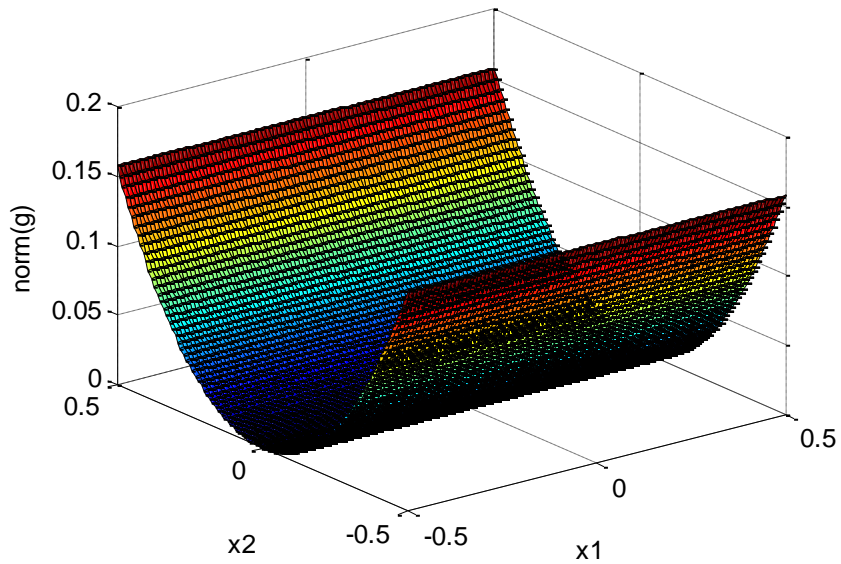


Figura 5.5 – $\|g(x)\|$ em função de x_1 e x_2 .

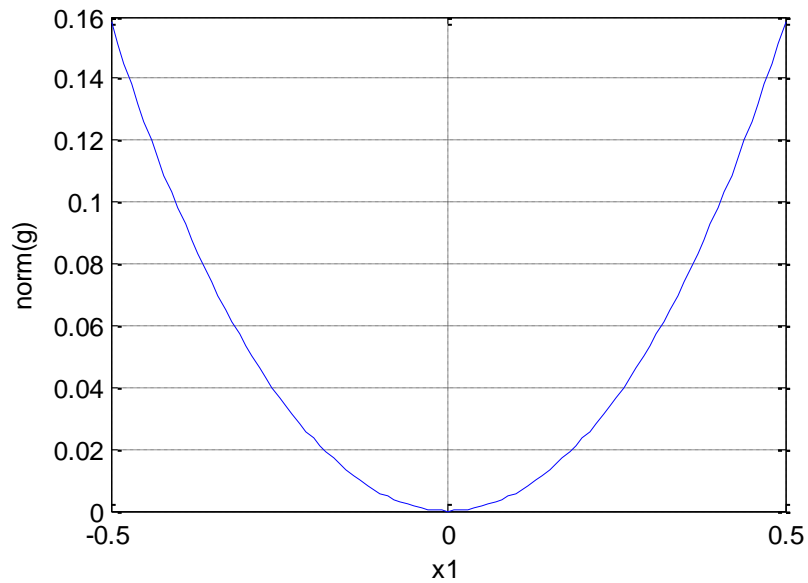


Figura 5.6 – $\|g(x)\|$ em função de x_1 para qualquer valor de x_2 .

Da mesma forma que em Banks et al (2007), verifica-se também aqui, pelas simulações numéricas, que a região de atração em torno da origem, na aplicação do compensador LQG/LTR/SDRE a este exemplo e utilizando o compensador 1, é de fato maior que a estimativa produzida por esta análise. A Figura 5.7 apresenta os resultados da aplicação da técnica LQG/LTR/SDRE para este primeiro caso apresentado. Observa-se que, sem a consideração de incertezas ou ruídos no processo ou nas medidas, os resultados são idênticos aos obtidos em Banks et al (2007). O mesmo é verificado para outras condições iniciais.

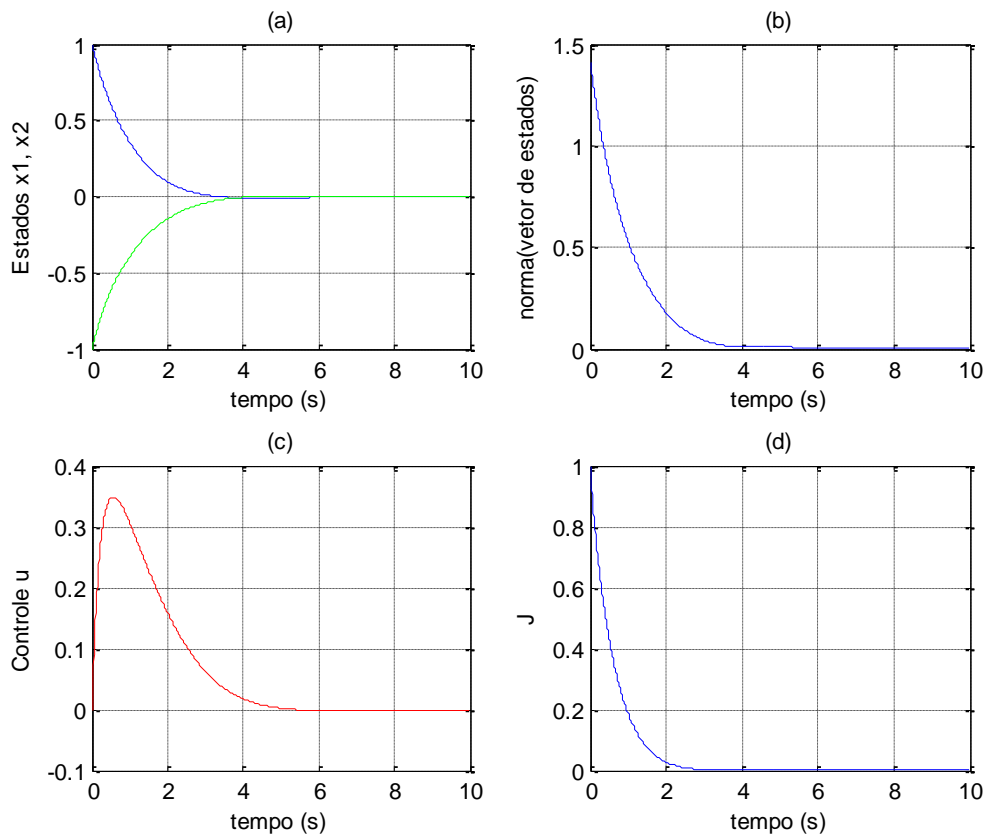


Figura 5.7 – Resposta do sistema para condições iniciais $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$. (a) Estados do sistema controlado; (b) Norma dos estados; (c) Sinal de controle; (d) Valor da função custo J .

5.2.2. Projeto do Compensador 2

A segunda solução apresentada para este exemplo considera o vetor de saídas do sistema definido como:

$$y = x_1 \tag{5.43}$$

Assim tem-se $C(x) = [1 \ 0]$.

Logo, para o segundo caso, as matrizes de controlabilidade e observabilidade dependente dos estados são respectivamente:

$$M(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

$$O(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

as quais também apresentam posto completo, o que implica na controlabilidade e observabilidade do sistema para qualquer valor dos estados.

As matrizes de ponderação que aparecem nas funções custo em 3.2 e 3.353.2 foram especificadas como: $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $V = 0,01CC^T = 0,01$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $R = 0,01$.

A solução da equação de Riccati em 3.21 para esses valores resulta na matriz $\Pi(x)$ dependente dos estados:

$$\Pi(x) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{x_1^4 + 100} \sqrt{2x_1^2 + 2\sqrt{x_1^4 + 100} + 100}}{100} & \frac{x_1^2 + \sqrt{x_1^4 + 100}}{100} \\ \frac{x_1^2 + \sqrt{x_1^4 + 100}}{100} & \frac{\sqrt{2x_1^2 + 2\sqrt{x_1^4 + 100} + 100}}{100} \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

enquanto que o resultado para a solução da equação de Riccati, referente ao estimador em 3.36 é:

$$\Sigma(x) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2x_1^2 + 2\sqrt{x_1^4 + 100} + 100}}{100} & \frac{x_1^2 + \sqrt{x_1^4 + 100}}{100} \\ \frac{x_1^2 + \sqrt{x_1^4 + 100}}{100} & \frac{\sqrt{x_1^4 + 100} \sqrt{2x_1^2 + 2\sqrt{x_1^4 + 100} + 100}}{100} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

Em $x = 0$ as duas matrizes assumem os valores:

$$\Pi(0) = \begin{bmatrix} \sqrt{30}/5 & 1/10 \\ 1/10 & \sqrt{30}/50 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

e

$$\Sigma(0) = \begin{bmatrix} \sqrt{30}/5 & 0 \\ 1/10 & \sqrt{30}/5 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

Utilizando-se estas expressões obtêm-se as relações abaixo:

$$K_c(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + \sqrt{x_1^4 + 100} & \sqrt{2x_1^2 + 2\sqrt{x_1^4 + 100} + 100} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

$$H(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{2x_1^2 + 2\sqrt{x_1^4 + 100} + 100} \\ x_1^2 + \sqrt{x_1^4 + 100} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

$$\Delta K_c(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + \sqrt{x_1^4 + 100} - 10 & \sqrt{2x_1^2 + 2\sqrt{x_1^4 + 100} + 100} - 2\sqrt{30} \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

$$\Sigma(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + \sqrt{x_1^4 + 100} & \sqrt{2x_1^2 + 2\sqrt{x_1^4 + 100} + 100} \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

$$\Delta \Sigma(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + \sqrt{x_1^4 + 100} - 10 & \sqrt{2x_1^2 + 2\sqrt{x_1^4 + 100} + 100} - 2\sqrt{30} \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

$$H_0 = \begin{bmatrix} 2\sqrt{30} \\ 10 \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

$$K_{c0} = [10 \quad 2\sqrt{30}] \quad (5.56)$$

$$\Delta K_c(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + \sqrt{x_1^4 + 100} - 10 & \sqrt{2x_1^2 + 2\sqrt{x_1^4 + 100} + 100} - 2\sqrt{30} \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

$$\Delta H(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{2x_1^2 + 2\sqrt{x_1^4 + 100} + 100} - 2\sqrt{30} \\ x_1^2 + \sqrt{x_1^4 + 100} - 10 \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

Daí obtêm-se:

$$A_0 - H_0 C_0 = \begin{bmatrix} -2\sqrt{30} & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = -9,949$ e $\lambda_2 = -1,005$

e

$$A_0 - B_0 K_{c0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -2\sqrt{30} \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

com os autovalores idênticos aos anteriores, $\lambda_1 = -9,949$ e $\lambda_2 = -1,005$.

Seguindo o mesmo procedimento aplicado no caso anterior verifica-se, para o estimador que, com a escolha dos valores $\alpha = 1.5$ e $\beta = 0.88$ é possível assegurar um limite para a norma $\|e^{(A_0 - H_0 C_0)t}\|$ através da função $\alpha e^{-\beta t}$. Esta relação pode ser visualizada na Figura 5.8. Na Figura 5.9 é mostrado o gráfico de $h(x, \hat{x})$, de onde se pode notar que enquanto $|x_1| < 0,3$ e $|x_2| < 0,3$ o valor de $h(x, \hat{x})$ se mantêm abaixo de 0,57, que é menor que a relação $\alpha/\beta = 0,58$. Assim, verifica-se a existência de $\eta > h(x, \hat{x})$, satisfazendo $\beta - \eta\alpha > 0$, suficiente para assegurar a convergência para a origem. A Figura 5.10 apresenta a variação de $h(x, \hat{x})$ para x_1 fixo no maior valor da faixa testada enquanto x_2 varia ao longo de toda a faixa.

Para o controlador neste segundo caso os valores para α e β podem ser respectivamente 1,6 e 0,9, resultando na relação $\alpha/\beta = 0,56$.

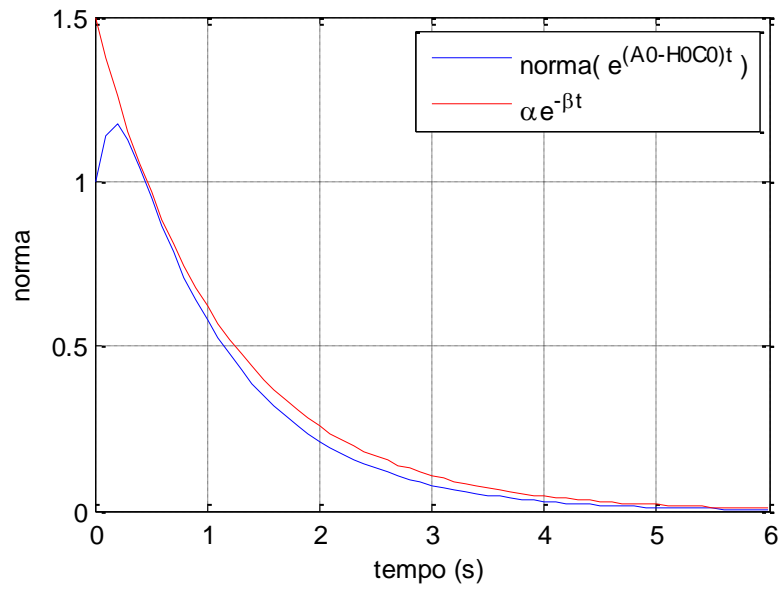


Figura 5.8 – Comparação entre $\|e^{(A_0-H_0C_0)t}\|$ e $\alpha e^{-\beta t}$ ao longo do tempo para a segunda implementação do compensador LQG/LTR .

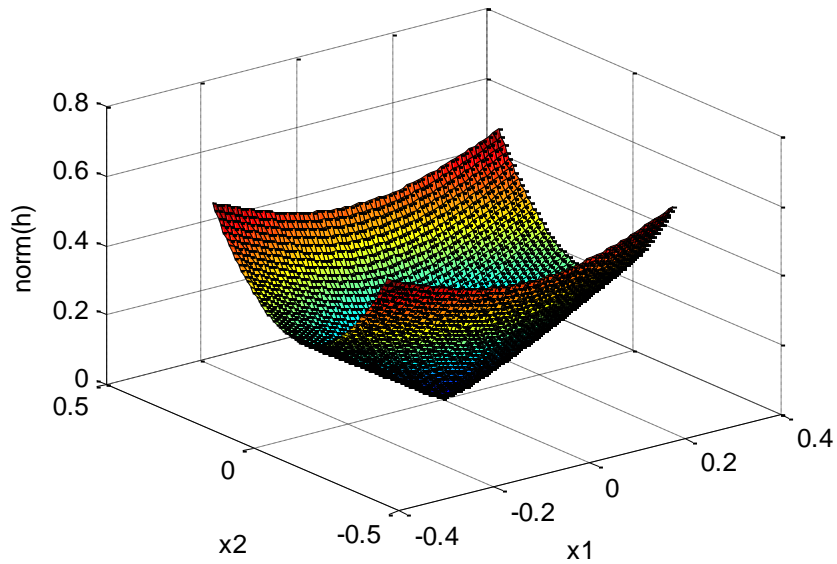


Figura 5.9 – Variação de $h(x, \hat{x})$ em função de x_1 e x_2 para a segunda implementação do compensador.

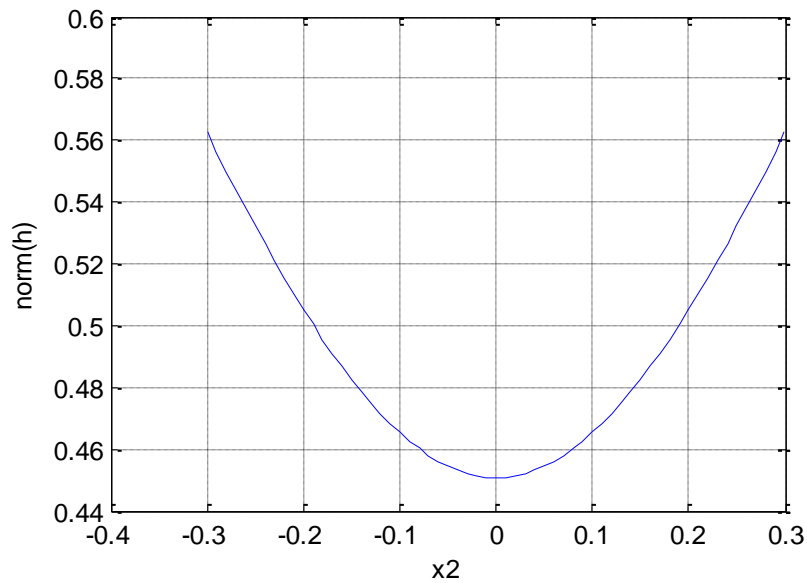


Figura 5.10 – Gráfico de $h(x, \hat{x})$ em função de x_2 com x_1 fixo no valor 0,45.

A Figura 5.11 mostra a limitação de $\|e^{(A_0 - B_0 K_{co})t}\|$ pela função $\alpha e^{-\beta t}$ para este caso.

Novamente $g(x)$ é calculado da equação 5.41, utilizando agora a expressão para $\Delta G(x)$ dada na equação 5.52. A norma é calculada para variações de x_1 e x_2 na faixa de -1,7 até 1,7. O resultado é apresentado na Figura 5.12, onde se observa que para esta faixa a norma permanece abaixo de 0,51, ficando assim demonstrado que existe um $\zeta > \|g(x)\|$ menor que a razão $\alpha/\beta = 0,56$.

As figuras Figura 5.14 e Figura 5.15 mostram respectivamente os resultados da aplicação do compensador 2 para a condição inicial onde $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$ e para a condição inicial com $x_1 = 3$ e $x_2 = 0$. Nos dois casos observa-se que a simulação numérica demonstra que a região de atração é superior à estimada analiticamente.

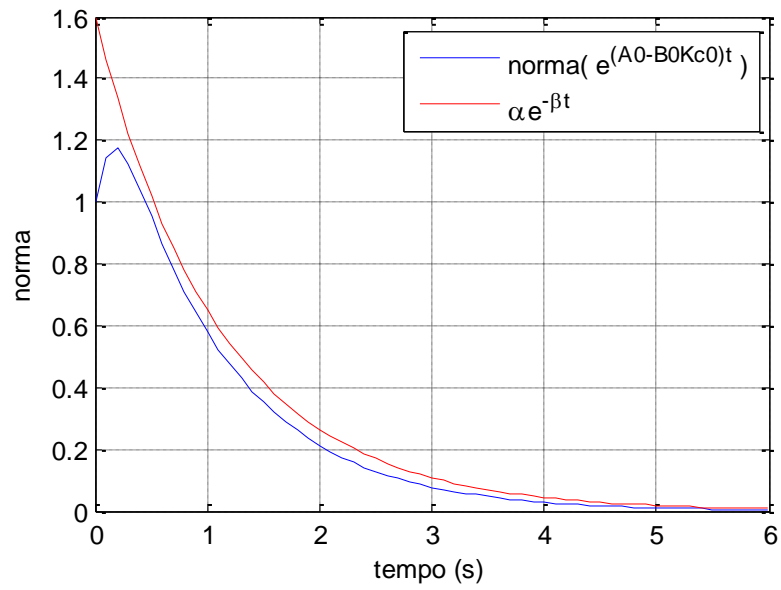


Figura 5.11 – Comparação entre $\|e^{(A_0-B_0G_0)t}\|$ e $\alpha e^{-\beta t}$ ao longo do tempo.

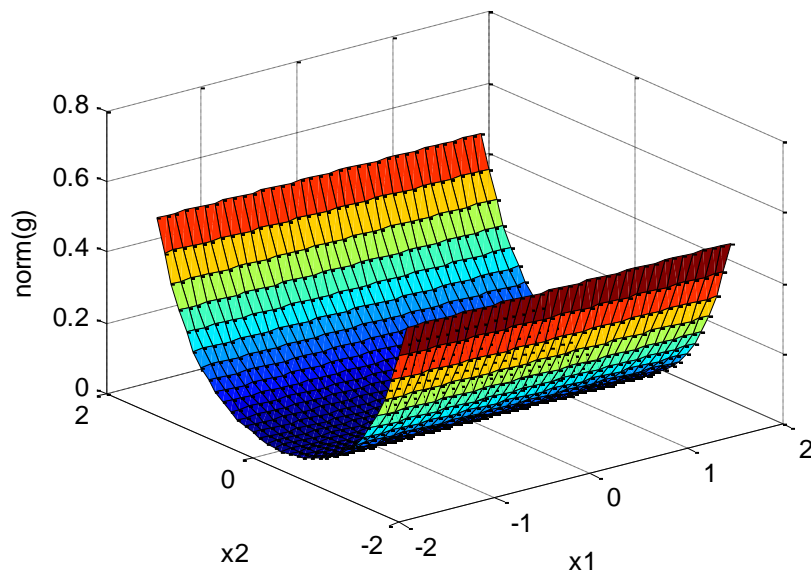


Figura 5.12 – $\|g(x)\|$ em função de x_1 e x_2 para o segundo compensador.

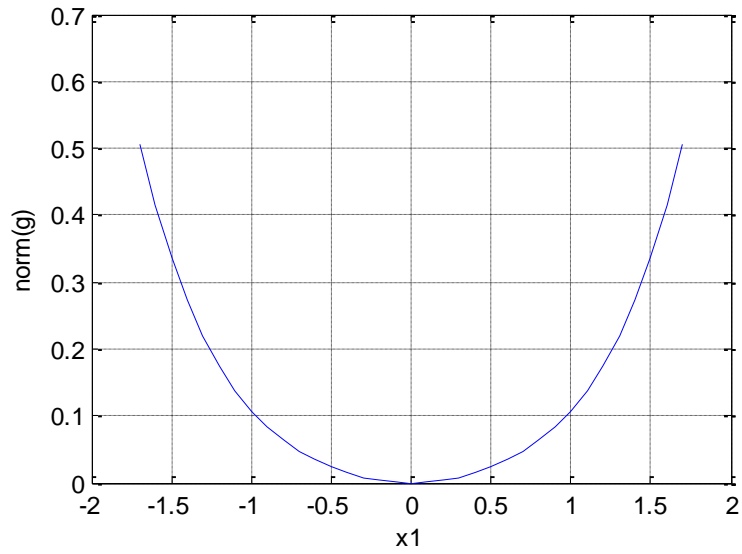


Figura 5.13 – $\|g(x)\|$ em função de x_1 para qualquer valor de x_2 .

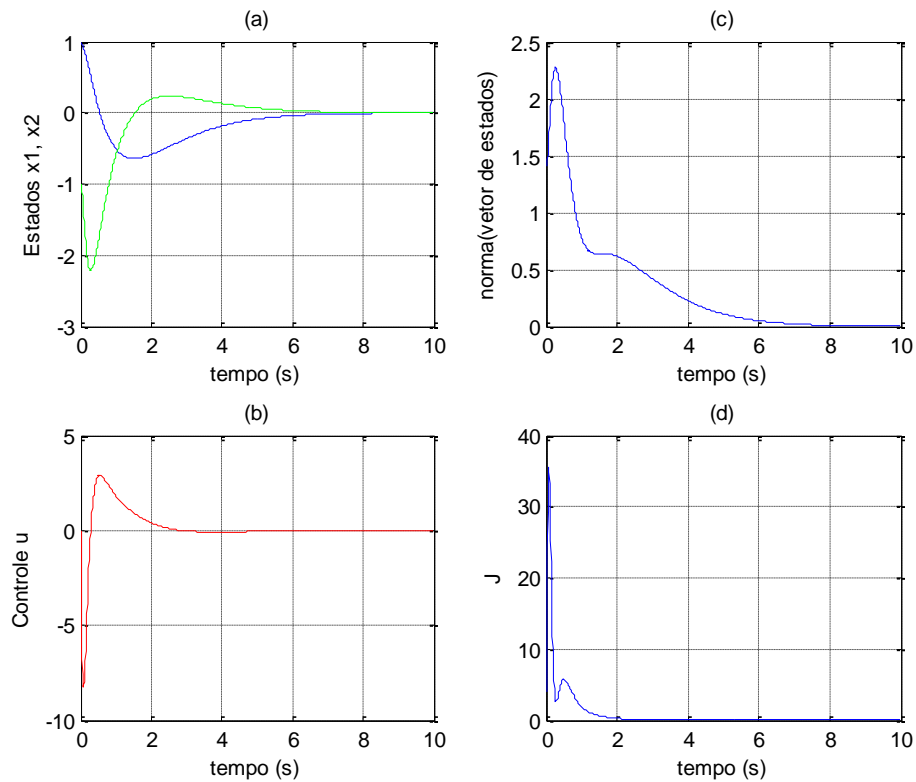


Figura 5.14 – Resposta do sistema controlado pelo compensador do segundo caso para condições iniciais $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$. (a) Estados do sistema controlado; (b) Norma dos estados; (c) Sinal de controle; (d) Valor da função custo J .

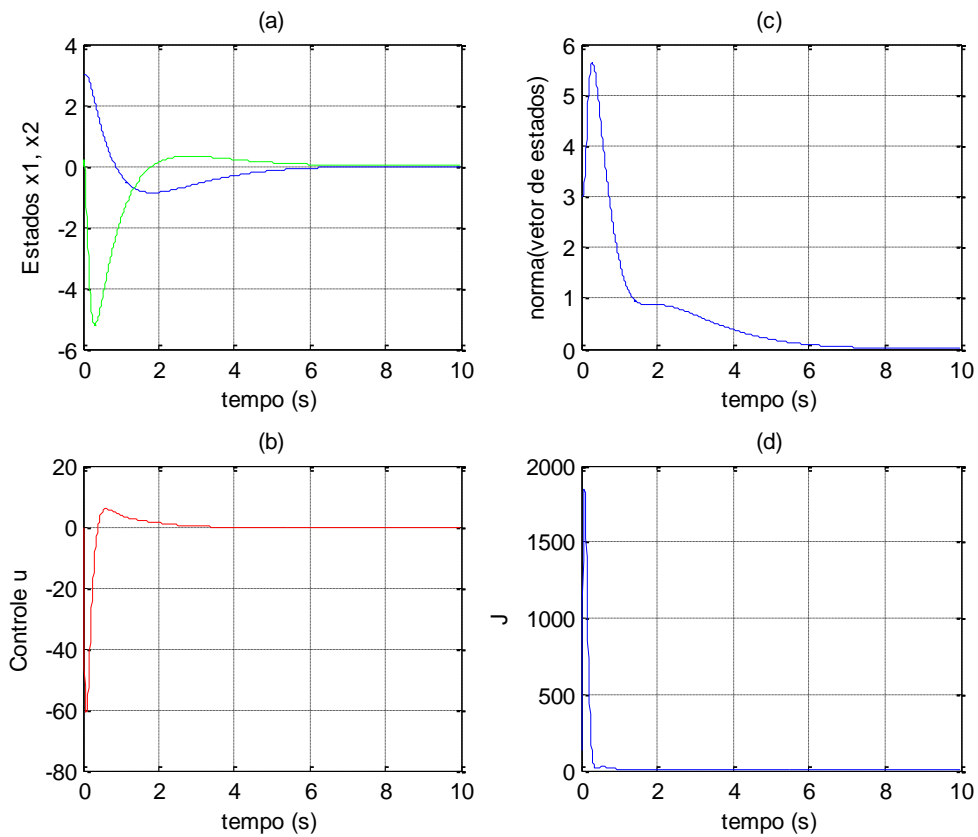


Figura 5.15 – Resposta do sistema controlado pelo compensador do segundo caso para condições iniciais $x_1 = -3$ e $x_2 = 0$. (a) Estados do sistema controlado; (b) Norma dos estados; (c) Sinal de controle; (d) Valor da função custo J .

5.3. Aplicação do Método Indireto de Lyapunov e Verificação da \mathcal{L}_p -Estabilidade

Assumindo que o sistema não linear considerado na equação 3.1 possa ser parametrizado na forma de coeficientes dependente dos estados, uma representação da dinâmica do sistema é mostrada nas equações em 4.1, as quais são reescritas abaixo.

$$\dot{x}(t) = A(x)x(t) + B(x)u \quad (5.61)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (5.62)$$

Como já indicado na seção 4.2 as equações de estado do compensador são da forma:

$$\dot{x}_c = (A(x_c) - B(x_c)K_c(x_c) - H(x_c)C)x_c - H(x_c)e \quad (5.63)$$

$$u = -K_c(x_c)x_c \quad (5.64)$$

Lembrando que $e = r - y$, substituindo-se a equação 5.64 na equação 5.61 e rearranjado os termos, obtém-se as seguintes equações para o sistema compensado:

$$\dot{x} = A(x)x - B(x)K_c(x_c)x_c \quad (5.65)$$

$$\dot{x}_c = H(x_c)Cx + (A(x_c) - B(x_c)K_c(x_c) - H(x_c)C)x_c - H(x_c)r \quad (5.66)$$

Definindo um novo vetor de estados estendido z como

$$z = \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

Tem-se a partir das equações 5.65, 5.66, e 5.67 as seguintes equações para a dinâmica do estado estendido:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A(x) & -B(x)K_c(x_c) \\ H(x_c)C & A(x_c) - B(x_c)K_c(x_c) - H(x_c)C \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0_{n \times p} \\ H(x_c) \end{bmatrix} r \quad (5.68)$$

$$y(t) = [C \quad 0_{p \times n}]z(t) \quad (5.69)$$

ou

$$\dot{z} = A_e(z)z + B_e(z)r \quad (5.70)$$

$$y = C_e z \quad (5.71)$$

com

$$A_e(z) = \begin{bmatrix} A(x) & -B(x)K_c(x_c) \\ H(x_c)C & A(x_c) - B(x_c)K_c(x_c) - H(x_c)C \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

$$B_e(z) = \begin{bmatrix} 0_{n \times p} \\ H(x_c) \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

$$C_e = [C \quad 0_{p \times n}] \quad (5.74)$$

Então, definindo

$$f(z) = A_e(z)z + B_e(z)r \quad (5.75)$$

e

$$h(z) = C_e z \quad (5.76)$$

Tem-se

$$\dot{z} = f(z) \quad (5.77)$$

$$y = h(z) \quad (5.78)$$

Para a realização da prova de estabilidade do sistema o problema é dividido em duas etapas. Inicialmente, a prova é realizada para o caso em que $r = 0$, utilizando o Método Indireto de Lyapunov (Khalil, 2002). Depois para o caso em que $r \neq 0$, utilizando o primeiro resultado e um teorema de estabilidade baseado na relação entrada e saída do sistema (\mathcal{L}_p -Estabilidade).

Parte 1: $r = 0$

Para este caso, a equação 5.68 é simplificada para

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A(x) & -B(x)K_c(x_c) \\ H(x_c)C & A(x_c) - B(x_c)K_c(x_c) - H(x_c)C \end{bmatrix} z \quad (5.79)$$

ou

$$\dot{z} = f(z) = A_e(z)z \quad (5.80)$$

Assim, $f(z)$ é um mapeamento, continuamente diferenciável em z , do domínio $D \subset \mathcal{R}^n$ em \mathcal{R}^n , de acordo com as suposições para aplicação da técnica SDRE indicadas na seção 3.2.

A origem $z = 0$ em D é um ponto de equilíbrio, pois $f(0) = 0$, que é sempre válido para os sistemas que podem ser expressos sob a forma com coeficientes dependentes dos estados.

Pelo Teorema do Valor Médio (descrito no Anexo B)

$$f_i(z) = f_i(0) + \frac{\partial f_i}{\partial z}(w_i)z \quad (5.81)$$

onde w_i é um ponto no segmento que conecta z à origem. Desde que o segmento $\overline{z0} \subset D$ e $f(0) = 0$, então

$$f_i(z) = \frac{\partial f_i}{\partial z}(w_i)z = \frac{\partial f_i}{\partial z}(0)z + \left[\frac{\partial f_i}{\partial z}(w_i) - \frac{\partial f_i}{\partial z}(0) \right] z$$

Logo

$$f(z) = A_{e0}z + g(z) \quad (5.82)$$

onde $A_{e0} = \frac{\partial f}{\partial z}(0)$ e $g_i(z) = \left[\frac{\partial f}{\partial z}(w_i) - \frac{\partial f}{\partial z}(0) \right] z$

Então $g_i(z) \leq \left\| \frac{\partial f_i}{\partial z}(w_i) - \frac{\partial f_i}{\partial z}(0) \right\| \|z\|$

Como $\frac{\partial f}{\partial z}$ é contínua tem-se

$$\frac{\|g(z)\|}{\|z\|} \rightarrow 0 \text{ quando } \|z\| \rightarrow 0$$

Desta forma numa vizinhança próxima da origem é possível aproximar o sistema não linear representado na equação 5.80 por sua linearização em torno da origem

$$\dot{z} = A_{e0}z \quad (5.83)$$

onde, $A_{e0} = \frac{\partial f}{\partial z}(0)$

$$A_{e0} = A_e(0) = \begin{bmatrix} A(0) & -B(0)K_c(0) \\ H(0)C & A(0) - B(0)K_c(0) - H(0)C \end{bmatrix}$$

Como o par A, B e o par A, C satisfazem as condições para existência da solução do problema LQG/LTR a cada valor assumido pelos estados, sabe-se que A_{e0} é Hurwitz, pois seus autovalores são a união dos autovalores do Filtro de Kalman e do controlador ótimo, com os valores de A, B e C congelados no instante em que o estado está na origem.

Pelo Método Indireto de Lyapunov, sabe-se que se $z = 0$ é um ponto de equilíbrio do sistema representado em 5.80 e $f: D \rightarrow \mathcal{R}^n$ é continuamente

diferenciável em D na vizinhança da origem, então a origem é assintoticamente estável se o sistema linearizado, representado em 5.83, for Hurwitz.

Prova:

Sendo A_{e0} Hurwitz, pois seus autovalores são a união dos autovalores do Filtro de Kalman e do controlador ótimo, então para qualquer matriz Q simétrica positiva definida, a solução P da Equação de Lyapunov ($PA_{e0} + A_{e0}^T P = -Q$) é positiva definida.

Escolhendo $V(z) = z^T P z$ como uma função de Lyapunov candidata para o sistema não linear. A derivada de $V(z)$ ao longo das trajetórias do sistema é dada por

$$\dot{V}(z) = z^T P f(z) + f^T(z) P z$$

$$\dot{V}(z) = z^T P [A_{e0} x + g(z)] + [z^T A_{e0}^T + g^T(z)] P z$$

$$\dot{V}(z) = z^T (P A_{e0} + A_{e0}^T P) z + 2z^T P g(z)$$

$$\dot{V}(z) = -z^T (Q) z + 2z^T P g(z)$$

Então

$$\dot{V}(z) = -z^T Q z + 2z^T P g(z) \quad (5.84)$$

O primeiro termo do lado direito em 5.84 é negativo definido e

$$\frac{\|g(z)\|_2}{\|z\|_2} \rightarrow 0 \text{ quando } \|z\|_2 \rightarrow 0$$

Assim para algum $\gamma > 0$, existe $r > 0$ tal que $\|g(z)\|_2 < \gamma \|z\|_2$, $\forall \|z\|_2 < r$

Então, $\dot{V}(z) < -z^T Q z + 2\gamma \|P\|_2 \|z\|_2^2$, $\forall \|z\|_2 < r$

Por outro lado, $z^T Q z \geq \lambda_{\min}(Q) \|z\|_2^2$, onde λ_{\min} é o autovalor mínimo de Q e λ_{\min} é real e positivo.

Assim $\dot{V}(z) < -[\lambda_{\min}(Q) - 2\gamma \|P\|_2] \|z\|_2^2, \forall \|z\|_2 < r$.

Escolhendo $\gamma < (1/2)\lambda_{\min}(Q)/\|P\|_2$, $\dot{V}(z)$ é definida negativa e portanto a origem é assintoticamente estável.

Utilizando a relação expressa em 5.84, Chobotov (1991) apresenta um procedimento para obtenção da extensão da região de estabilidade para o sistema não linear sem a necessidade de realizar a integração das equações do sistema. O procedimento consiste em calcular a fronteira para a estabilidade onde se tem $\dot{V}(z) = 0$. Desta forma, igualando-se o lado direito da equação 5.84 a zero tem-se

$$z^T Q z = 2z^T P g(z) \quad (5.85)$$

Esta expressão pode ser utilizada para a determinação da região em torno da origem até onde é válida a estabilidade do sistema não linear representado na equação 5.82 ou originalmente na equação 5.80.

Se a matriz Q for a matriz identidade a equação 5.85 será

$$z^T z = 2z^T P g(z) \quad (5.86)$$

A escolha da matriz P ou Q é arbitrária e de acordo com Chobotov (1991) uma escolha ótima não é geralmente conhecida.

É possível também verificar, pelos teoremas 4.15 e o Corolário 4.3 de Khalil (2002), que o sistema não linear considerado é localmente exponencialmente estável (os dois teoremas são mostrados no Anexo B).

Parte 2: $r \neq 0$

Novamente considerando o sistema representado nas equações 5.77 e 5.78

$$\dot{z} = f(z)$$

$$y = h(z)$$

$f(z)$ é continuamente diferenciável e assumindo que suas derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial z} = A_e + \frac{\partial A_e}{\partial z} + \frac{\partial B_e}{\partial z} r$$

é limitada e uniforme em t , para r limitado e $\|C_e z\| \leq \eta_1 \|z\| + \eta_2 \|r\|$.

Assim, pelo corolário 5.1 em Khalil (2002), sendo a origem $z = 0$ um ponto de equilíbrio exponencialmente estável do sistema não forçado $f(z)$, como mostrado na parte 1 deste desenvolvimento, então existe uma constante $r_0 > 0$ tal que para cada $\|z_0\| < r_0$, o sistema representado por 5.77 e 5.78 seja \mathcal{L}_p estável sinal pequeno-ganho finito. Se todas as suposições forem válidas globalmente e a origem $z = 0$ for um ponto de equilíbrio exponencial global de $f(z)$, então para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, o sistema não linear em 5.77 e 5.78 é \mathcal{L}_p estável de ganho finito para $p \in [1, \infty]$. O teorema 5.1 e o corolário 5.1 de Khalil (2002) são mostrados no Anexo B.

5.4. Análise da Extensão das Propriedades do Método LQG/LTR para o Caso Não Linear

Nesta seção são mostradas análises sobre a extensão das propriedades do método LQG/LTR para o caso não linear. A verificação da validade das propriedades de recuperação de desempenho da metodologia LQG/LTR é realizada através da análise do sistema compensado linearizado em torno de cada ponto da trajetória seguida pelos estados, assumindo que o fato destas aproximações lineares possuírem determinadas propriedades seja um

indicativo de que o sistema não linear compensado apresente as mesmas propriedades dentro de uma região em torno dos pontos de linearização.

Na seção 5.4.1 a análise é feita de uma forma mais geral e na seção 5.4.2 o mesmo procedimento é repetido para um exemplo numérico utilizando o sistema tratado na seção 4.3.

5.4.1. Sistema Geral

Novamente considere o sistema definido na equação 5.75 e que representa o sistema não linear compensado escrito em função do vetor de estados estendido $z = \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$.

$$f(z) = A_e(z)z + B_e(z)r \quad (5.87)$$

A expansão em série de Taylor, até o termo de primeira ordem, para a função que representa o sistema não linear em 5.87 em torno de um ponto \bar{z} é:

$$f(z) = A_e(\bar{z})\bar{z} + B_e(\bar{z})r + \frac{\partial}{\partial z} (A_e(z)z + B_e(z)r)|_{z=\bar{z}}(z - \bar{z}) \quad (5.88)$$

Diferenciando o termo entre parênteses vem

$$f(z) = A_e(\bar{z})\bar{z} + B_e(\bar{z})r + \left(A_e(\bar{z}) + \sum_{i=1}^{2n} z_i \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{e1i}}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial A_{e1i}}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial A_{eni}}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial A_{eni}}{\partial z_n} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^p r_i \begin{bmatrix} \frac{\partial B_{e1i}}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial B_{e1i}}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial B_{eni}}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial B_{eni}}{\partial z_n} \end{bmatrix} \right)_{z=\bar{z}} (z - \bar{z})$$

Utilizando as notações $\frac{\partial A_{1 \rightarrow n, i}}{\partial x}$ e $\frac{\partial B_{1 \rightarrow n, i}}{\partial x}$ para as matrizes de derivadas, como foi feito na seção 3.2, tem-se

$$\begin{aligned}
f(z) &= A_e(\bar{z})\bar{z} + B_e(\bar{z})r \\
&+ \left(A_e(z) + \sum_{i=1}^{2n} z_i \frac{\partial A_{e1 \rightarrow n,i}}{\partial z} + \sum_{i=1}^p r_i \frac{\partial B_{e1 \rightarrow 2n,i}}{\partial z} \right)_{z=\bar{z}} (z - \bar{z})
\end{aligned} \tag{5.89}$$

Efetuada as multiplicações e agrupando os termos em z e \bar{z} seguem as duas equações:

$$\begin{aligned}
f(z) &= A_e(\bar{z})\bar{z} + B_e(\bar{z})r + A_e(\bar{z})z - A_e(\bar{z})\bar{z} \\
&+ \sum_{i=1}^{2n} \bar{z}_i \left(\frac{\partial A_{e1 \rightarrow n,i}}{\partial z} \right)_{z=\bar{z}} z - \sum_{i=1}^{2n} \bar{z}_i \left(\frac{\partial A_{e1 \rightarrow n,i}}{\partial z} \right)_{z=\bar{z}} \bar{z} \\
&+ \sum_{i=1}^p r_i \left(\frac{\partial B_{e1 \rightarrow 2n,i}}{\partial z} \right)_{z=\bar{z}} z - \sum_{i=1}^p r_i \left(\frac{\partial B_{e1 \rightarrow 2n,i}}{\partial z} \right)_{z=\bar{z}} \bar{z} \\
f(z) &= \left(A_e(\bar{z}) + \sum_{i=1}^{2n} \bar{z}_i \left(\frac{\partial A_{e1 \rightarrow n,i}}{\partial z} \right)_{z=\bar{z}} + \sum_{i=1}^p r_i \left(\frac{\partial B_{e1 \rightarrow 2n,i}}{\partial z} \right)_{z=\bar{z}} \right) z \\
&+ B_e(\bar{z})r - \left(\sum_{i=1}^{2n} \bar{z}_i \left(\frac{\partial A_{e1 \rightarrow n,i}}{\partial z} \right)_{z=\bar{z}} + \sum_{i=1}^p r_i \left(\frac{\partial B_{e1 \rightarrow 2n,i}}{\partial z} \right)_{z=\bar{z}} \right) \bar{z}
\end{aligned}$$

Agora definindo o termo independente como \bar{r} e como $f_{l1}(z)$ a expansão de $f(z)$ até o termo de primeira ordem, tem-se a seguinte expressão para $f_{l1}(z)$:

$$f_{l1}(z) = \left(A_e(\bar{z}) + \sum_{i=1}^{2n} \bar{z}_i \left(\frac{\partial A_{e1 \rightarrow n,i}}{\partial z} \right)_{z=\bar{z}} + \sum_{i=1}^p r_i \left(\frac{\partial B_{e1 \rightarrow 2n,i}}{\partial z} \right)_{z=\bar{z}} \right) z \tag{5.90}$$

$$+B_e(\bar{z})r - \bar{r}$$

Assim $f_{l1}(z)$ em 5.90 representa o sistema linear que aproxima o sistema não linear compensado em uma região em torno de um ponto genérico \bar{z} . As matrizes de funções $A(z)$ e $B(z)$ são contínuas de classe C^1 e se os elementos destas matrizes forem funções com constante de Lipschitz pequenas as matrizes de derivadas em 5.90 terão pouco efeito sobre as propriedades e desempenho do sistema representado por $f_{l1}(z)$ e então a expressão para a função que aproxima o sistema não linear em cada ponto poderá ser simplificada como:

$$f_l(z) = A_e(\bar{z})z + B_e(\bar{z})r \quad (5.91)$$

Observa-se que esta última expressão é, em cada ponto \bar{z} , a função para o próprio sistema linear obtido da compensação da forma SDC do sistema não linear avaliada naquele ponto. Este fato permite afirmar que sendo válidas as suposições feitas sobre o sistema, as características e propriedades do sistema não linear compensado serão próximas daquelas apresentadas pelo sistema utilizado no projeto do compensador. E desta forma assume-se que as propriedades do compensador LQG/LTR são aproximadamente preservadas na aplicação da técnica proposta neste trabalho para os sistemas não lineares.

Outra forma de visualizar este resultado é reescrevendo a equação 5.89 na forma

$$f(z) = A_e(\bar{z})z + B_e(\bar{z})r + \left(\sum_{i=1}^{2n} z_i \frac{\partial A_{e1 \rightarrow n,i}}{\partial z} + \sum_{i=1}^p r_i \frac{\partial B_{e1 \rightarrow 2n,i}}{\partial z} \right)_{z=\bar{z}} (z - \bar{z}) \quad (5.92)$$

Sob as mesmas suposições já indicadas, os termos entre parênteses são considerados pequenos, e se, além deste fato, $(z - \bar{z})$ também for muito pequeno, então o terceiro termo de 5.92 pode ser desprezado e novamente tem-se

$$f_l(z) = A_e(\bar{z})z + B_e(\bar{z})r$$

Assim se $(z - \bar{z}) \ll 1$ fica assegurado que pelo menos em uma região bem pequena as propriedades e características do sistema não linear em malha fechada pelo compensador LQG/LTR/SDRE serão semelhantes às especificadas para o projeto. Como os ganhos do compensador são atualizados a todo intervalo de amostragem, se este intervalo for pequeno, é possível garantir o bom desempenho do sistema compensado.

As suposições sobre os sistemas para os quais a técnica proposta pode ser aplicada garantem que os termos entre parênteses na equação 5.92 sejam pequenos, porém o grau de influência destes termos só poderá ser avaliado para cada sistema particular. Esta avaliação pode ser realizada através do cálculo destes termos em tempo real e da comparação do valor calculado com os demais termos da equação.

Finalmente, ressalta-se que se o sistema linearizado em um ponto for estável, utilizando a abordagem apresentada em Chobotov (1991), descrita na seção 5.3, é possível determinar a região de estabilidade para o sistema não linear em torno dos pontos de linearização. A determinação é feita através do cálculo da fronteira de estabilidade utilizando a expressão dada na equação 5.85.

5.4.2. Exemplo Numérico

5.4.2.1. Estudo das Propriedades do Sistema

A fim de realizar comparações a análise realizada nesta seção será sobre o sistema compensado estudado no Capítulo 4.

As equações do sistema em malha aberta são:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^3 + u \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{5.93}$$

E a parametrização na forma SDC é:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x_1^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (5.94)$$

Então, $A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x_1^2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $C = [1 \ 0]$

A dinâmica do sistema em malha fechada é descrita por

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A(x) & -BK_c(x_c) \\ H(x_c)C & A(x_c) - BK_c(x_c) - H(x_c)C \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0_{n \times p} \\ H(x_c) \end{bmatrix} r \quad (5.95)$$

Onde, r é a referência, $K_c(x) = R^{-1}B^T\Pi(x)$ e $H(x) = \Sigma(x)C^TV^{-1}$, $V = \mu$ e $R = \rho$. $\Pi(x)$ e $\Sigma(x)$ são as soluções das equações de Riccati dependentes dos estados relativas respectivamente ao regulador e ao filtro.

Utilizando os parâmetros de projeto como no exemplo da seção 4.3, isto é, $U = BB^T$, $\mu = 10^{-4}$, $Q = C^TC$ e $\rho = 10^{-6}$, então as soluções das equações

$$\Pi(x)A(x) + A^T(x)\Pi(x) - \frac{1}{\rho}\Pi(x)BB^T\Pi(x) + C^TC = 0 \quad (5.96)$$

$$A(x)\Sigma(x) + \Sigma(x)A^T(x) - \frac{1}{\mu}\Sigma(x)C^TC\Sigma(x) + BB^T = 0 \quad (5.97)$$

Resultam em

$$K_c(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + \sqrt{x_1^4 + 10^6} & \sqrt{2x_1^2 + 2\sqrt{x_1^4 + 10^6}} \end{bmatrix} \quad (5.98)$$

$$H(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{2x_1^2 + 2\sqrt{x_1^4 + 10^4}} \\ x_1^2 + \sqrt{x_1^4 + 10^4} \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

Lembrando que $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e que $x_c = \begin{bmatrix} x_{c1} \\ x_{c2} \end{bmatrix}$ vem

$$z = [x_1 \quad x_2 \quad x_{c1} \quad x_{c2}]^T$$

$$K_c(x_c) = \begin{bmatrix} x_{1c}^2 + \sqrt{x_{c1}^4 + 10^6} & \sqrt{2x_{c1}^2 + 2\sqrt{x_{c1}^4 + 10^6}} \end{bmatrix}$$

$$BK_c(x_c) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_{1c}^2 + \sqrt{x_{c1}^4 + 10^6} & \sqrt{2x_{c1}^2 + 2\sqrt{x_{c1}^4 + 10^6}} \end{bmatrix}$$

$$H(x_{1c}) = \begin{bmatrix} \sqrt{2x_{c1}^2 + 2\sqrt{x_{c1}^4 + 10^4}} \\ x_{c1}^2 + \sqrt{x_{c1}^4 + 10^4} \end{bmatrix}$$

$$H(x_{1c})C = \begin{bmatrix} \sqrt{2x_{c1}^2 + 2\sqrt{x_{c1}^4 + 10^4}} & 0 \\ x_{c1}^2 + \sqrt{x_{c1}^4 + 10^4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(x_c) - BK_c(x_c) - H(x_c)C$$

$$= \begin{bmatrix} -\sqrt{2x_{c1}^2 + 2\sqrt{x_{c1}^4 + 10^4}} & 1 \\ -x_{c1}^2 - \sqrt{x_{c1}^4 + 10^4} - \sqrt{x_{c1}^4 + 10^6} & -\sqrt{2x_{c1}^2 + 2\sqrt{x_{c1}^4 + 10^6}} \end{bmatrix}$$

Substituindo estas expressões na equação 5.95 o sistema não linear em malha fechada pelo compensador LQG/LTR/SDRE toma a seguinte forma

$$\dot{z} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1^2 & 0 & -x_{1c}^2 - \sqrt{x_{c1}^4 + 10^6} & -\sqrt{2x_{c1}^2 + 2\sqrt{x_{c1}^4 + 10^6}} \\ -\sqrt{2x_{c1}^2 + 2\sqrt{x_{c1}^4 + 10^4}} & 0 & -\sqrt{2x_{c1}^2 + 2\sqrt{x_{c1}^4 + 10^4}} & 1 \\ x_{c1}^2 + \sqrt{x_{c1}^4 + 10^4} & 0 & -x_{c1}^2 - \sqrt{x_{c1}^4 + 10^6} - \sqrt{x_{c1}^4 + 10^4} & -\sqrt{2x_{c1}^2 + 2\sqrt{x_{c1}^4 + 10^6}} \end{bmatrix} z$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2x_{c1}^2 + 2\sqrt{x_{c1}^4 + 10^4}} \\ x_{c1}^2 + \sqrt{x_{c1}^4 + 10^4} \end{bmatrix} r \quad (5.100)$$

Então para este exemplo

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1^2 & 0 & -x_{1c}^2 - \sqrt{x_{c1}^4 + 10^6} & -\sqrt{2x_{c1}^2 + 2\sqrt{x_{c1}^4 + 10^6}} \\ -\sqrt{2x_{c1}^2 + 2\sqrt{x_{c1}^4 + 10^4}} & 0 & -\sqrt{2x_{c1}^2 + 2\sqrt{x_{c1}^4 + 10^4}} & 1 \\ x_{c1}^2 + \sqrt{x_{c1}^4 + 10^4} & 0 & -x_{c1}^2 - \sqrt{x_{c1}^4 + 10^6} - \sqrt{x_{c1}^4 + 10^4} & -\sqrt{2x_{c1}^2 + 2\sqrt{x_{c1}^4 + 10^6}} \end{bmatrix}$$

e

$$B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2x_{c1}^2 + 2\sqrt{x_{c1}^4 + 10^4}} \\ x_{c1}^2 + \sqrt{x_{c1}^4 + 10^4} \end{bmatrix}$$

Lembrando, da equação 5.90, que a função $f_{11}(z)$ dada por

$$f_{11}(z) = \left(A_e(\bar{z}) + \sum_{i=1}^{2n} \bar{z}_i \left(\frac{\partial A_{e1 \rightarrow n, i}}{\partial z} \right)_{z=\bar{z}} + \sum_{i=1}^p r_i \left(\frac{\partial B_{e1 \rightarrow 2n, i}}{\partial z} \right)_{z=\bar{z}} \right) z + B_e(\bar{z})r + \bar{r} \quad (5.101)$$

é a função linear que aproxima a função não linear da forma $f(z) = A_e(z)z + B_e(z)r$

Calculando os termos desta equação vem

$$A_e(\bar{z}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \bar{x}_1^2 & 0 & -\bar{x}_{1c}^2 - \sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^6} & -\sqrt{2\bar{x}_{c1}^2 + 2\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^6}} \\ \sqrt{2\bar{x}_{c1}^2 + 2\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^4}} & 0 & -\sqrt{2\bar{x}_{c1}^2 + 2\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^4}} & 1 \\ x_{c1}^2 + \sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^4} & 0 & -\bar{x}_{c1}^2 - \sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^6} - \sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^4} & -\sqrt{2\bar{x}_{c1}^2 + 2\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^6}} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} \bar{z}_i \left(\frac{\partial A_{e1 \rightarrow n, i}}{\partial Z} \right)_{z=\bar{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\bar{x}_1^2 & 0 & -2\bar{x}_{1c}^2 - \frac{2\bar{x}_{1c}^4}{\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^6}} - \frac{2\bar{x}_{c1}^3 + 2\bar{x}_{c1}\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^6}}{\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^6}\sqrt{2\bar{x}_{c1}^2 + 2\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^6}}} x_{c2} & 0 \\ 0 & 0 & x_1 \bar{x}_{c1} \frac{\sqrt{2\bar{x}_{c1}^2 + 2\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^4}}}{\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^4}} - \frac{\bar{x}_{c1}^2 \sqrt{2\bar{x}_{c1}^2 + 2\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^4}}}{\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^4}} & 0 \\ 0 & 0 & 2x_1 \bar{x}_{c1} + \frac{2\bar{x}_{c1}^3 \bar{x}_1}{\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^4}} - 2\bar{x}_{c1}^2 - \frac{2\bar{x}_{c1}^4}{\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^6}} - \frac{2\bar{x}_{c1}^4}{\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^4}} - \frac{2\bar{x}_{c1}^2 + 2\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^6}}{\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^6}\sqrt{2\bar{x}_{c1}^2 + 2\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^6}}} x_{c2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_e(\bar{z}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{x}_{c1} \frac{\sqrt{2\bar{x}_{c1}^2 + 2\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^4}}}{10^3 \sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^4}} r & 0 \\ 0 & 0 & 2\bar{x}_{c1} \frac{\bar{x}_{c1}^2 + 1}{\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^4}} r & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^p r_i \left(\frac{\partial B_{e1 \rightarrow 2n, i}}{\partial Z} \right)_{z=\bar{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r \bar{x}_{c1} \frac{\sqrt{2\bar{x}_{c1}^2 + 2\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^4}}}{\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^4}} & 0 \\ 0 & 0 & 2r \bar{x}_{c1} \frac{\bar{x}_{c1}^2 + 1}{\sqrt{\bar{x}_{c1}^4 + 10^4}} & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo as definições

$$A_l = A_e(\bar{z}) \tag{5.102}$$

$$B_l = B_e(\bar{z}) \quad (5.103)$$

$$R_a = \sum_{i=1}^{2n} \bar{z}_i \left(\frac{\partial A_{e1 \rightarrow n, i}}{\partial z} \right)_{z=\bar{z}} \quad (5.104)$$

$$R_b = \sum_{i=1}^p r_i \left(\frac{\partial B_{e1 \rightarrow 2n, i}}{\partial z} \right)_{z=\bar{z}} \quad (5.105)$$

Então, para este exemplo as duas funções aproximadas para o sistema não linear compensado podem ser escritas como

$$f_{l1}(z) = (A_l + R_a)z + (B_l + R_b)r + \bar{r} \quad (5.106)$$

com $\bar{r} = (R_a + R_b)\bar{z}$

e

$$f_l(z) = A_l z + B_l r \quad (5.107)$$

Utilizando estas equações é possível realizar um exame da natureza e feições do sistema não linear controlado pelo compensador LQG/LTR/SDRE em cada ponto de uma determinada trajetória.

Considerando então a trajetória seguida pelos estados do sistema não linear em malha fechada com o compensador da seção 4.3, sujeitos às condições iniciais apresentadas naquela seção, ou seja, $x_{10} = 2$ e $x_{20} = -2$, neste mesmo ponto o sistema linear que aproxima o não linear é obtido da equação 5.106 ou da equação 5.107 pela substituição de $\bar{x}_1 = 2$ $\bar{x}_2 = -2$ $\bar{x}_{c1} = 2$ $\bar{x}_{c2} = -2$, os quais são os valores dos estados no ponto desejado, nas expressões para A_l , B_l , R_a e R_b .

Procedendo desta forma tem-se, no ponto $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$, o seguinte sistema linear representado por $f_{l1}(z)$ e obtido pela equação 5.106:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & -1012 & -44.81 \\ 14,43 & 0 & -14.43 & 1 \\ 104,08 & 0 & -1104 & -44.81 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 14,43 \\ 104,08 \end{bmatrix} r + \quad (5.108)$$

Cujos polos encontram-se em $\lambda_{1,2} = -22.41 \mp 22.32i$ e $\lambda_{3,4} = -7.21 \mp 6.32i$.

Enquanto que para $f_l(z)$ obtido pela equação 5.107 tem-se

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1004 & -44.81 \\ 14,43 & 0 & -14.43 & 1 \\ 104,08 & 0 & -1104 & -44.81 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 14,43 \\ 104,08 \end{bmatrix} r \quad (5.109)$$

Com em $\lambda_{1,2} = -22.41 \mp 22.32i$ e $\lambda_{3,4} = -7.21 \mp 6.93i$.

Nos resultados que se seguem a linearização utilizada foi aquela da equação 5.108 (linearização com mais termos) uma vez que a da equação 5.109 representa o sistema na forma SDC para cada ponto, possuindo desta forma todas as características do projeto. O diagrama de Bode para o sistema representado por $f_{l1}(z)$ é mostrado na Figura 5.16 Na Figura 5.17 é apresentada a resposta do sistema linearizado no ponto $(2, -2)$ à condição inicial neste mesmo ponto. Na Figura 5.18 é mostrada a localização dos polos de todos os sistemas obtidos da linearização $f_{l1}(z)$ do sistema não linear em malha fechada em torno de todos os pontos da trajetória de simulação de 1,5 s, com condição inicial em $(2, -2)$ e intervalo de amostragem de 1 ms.

As curvas de ganho e fase para todos os sistemas lineares, representados por $f_{l1}(z)$, nos pontos da trajetória de resposta do sistema não linear à condição inicial $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$, são mostradas sobrepostas na Figura 5.19

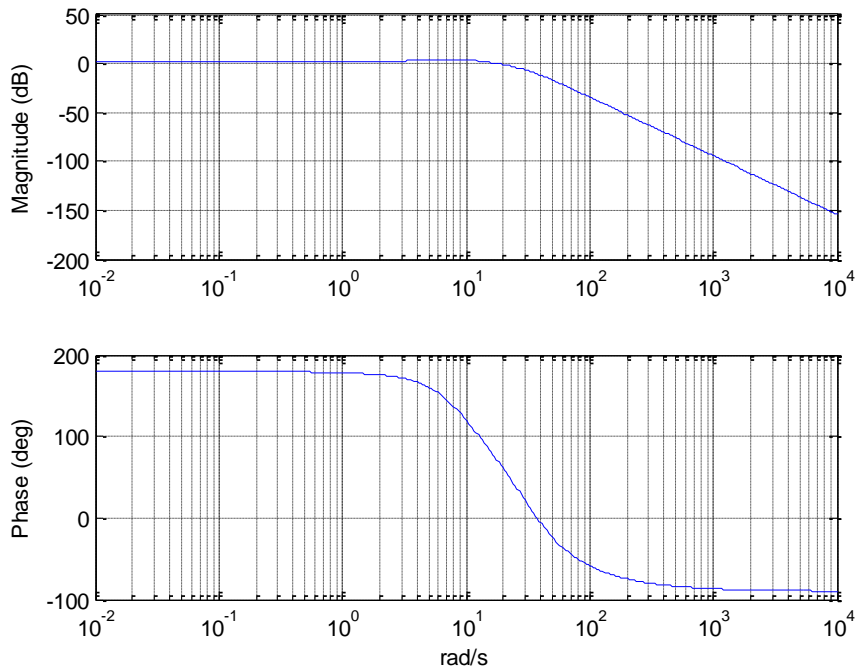


Figura 5.16 – Gráfico de Bode para o sistema linearizado ($f_{l1}(z)$), no ponto $(2, -2)$.

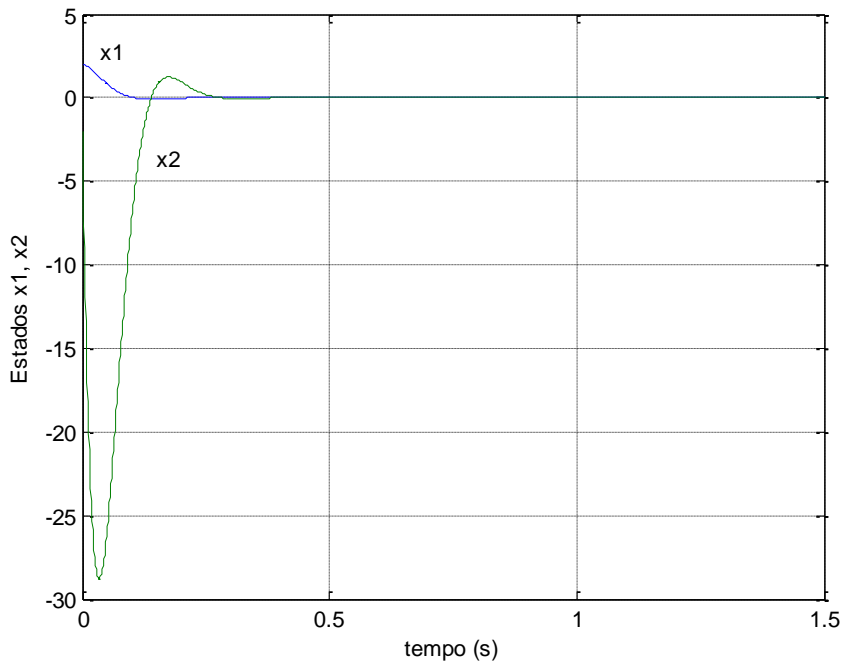


Figura 5.17 – Resposta temporal do sistema linearizado ($f_{l1}(z)$), no ponto $(2, -2)$, para a condição inicial $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$.

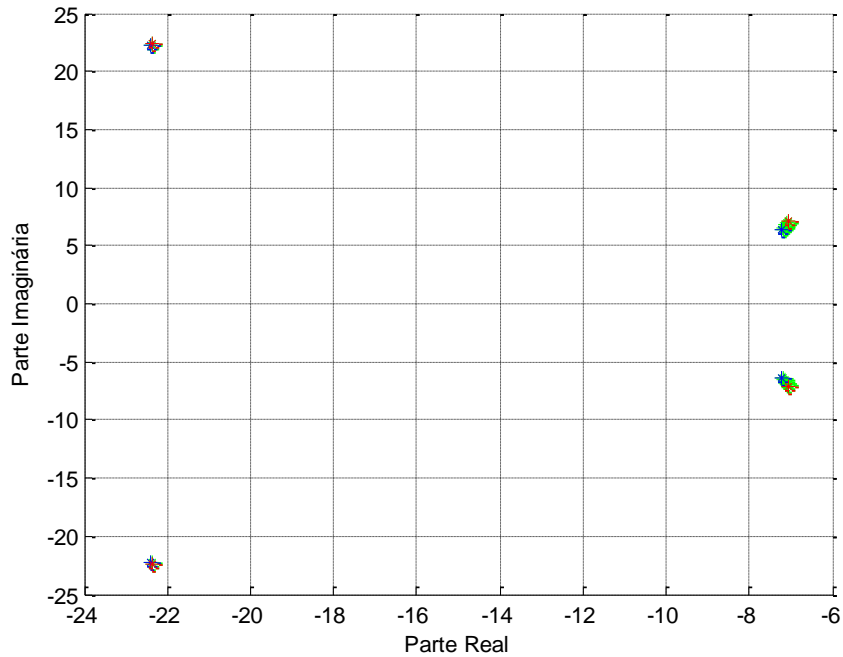


Figura 5.18 – Localização dos polos de todos os sistemas lineares ($f_{l1}(z)$) em torno de cada ponto da trajetória no período de simulação de 1,5 s com condição inicial $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$.

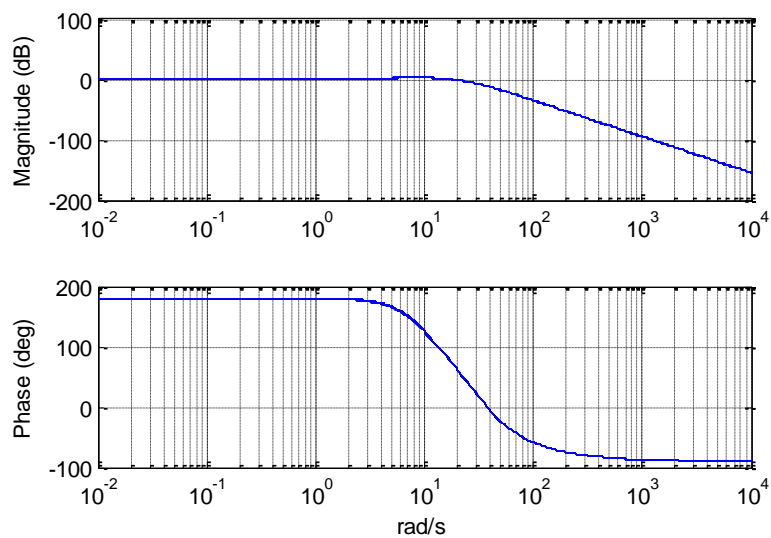


Figura 5.19 – Diagrama de Bode de todos os sistemas lineares ($f_{l1}(z)$) que aproximam o sistema não linear em cada ponto da trajetória para uma simulação de 1,5 s da resposta do sistema à condição inicial $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$.

Foram também realizadas simulações para verificar o comportamento das linearizações em pontos mais distantes da origem que as condições iniciais nas quais se baseou o projeto. Por exemplo, foi considerada a trajetória do sistema não linear controlado iniciando-se em $x_1 = 6$ e $x_2 = 5$. A Figura 5.20 mostra as regiões de concentração dos polos dos sistemas lineares para o mesmo período e a Figura 5.21 apresenta o gráfico do ganho e fase das linearizações em torno dos pontos da trajetória durante 1,5 s.

Foi verificado que para valores mais altos dos estados, por exemplo, para $\|x\| \geq 40$ a linearização $f_{l1}(z)$ da equação 5.108 passa a ter em determinados casos comportamento instável, apresentando um polo no semiplano direito, próximo ao eixo imaginário. Assim, para estes trechos esta linearização não é útil para demonstrar qualquer característica desejável pra o sistema não linear em estudo.

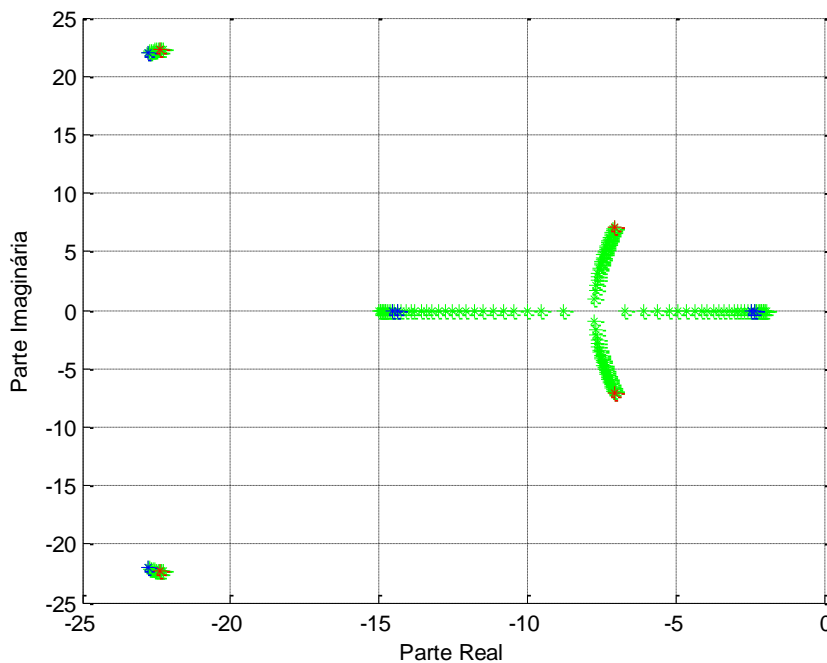


Figura 5.20 – Localização dos polos dos sistemas (linearização $f_{l1}(z)$) em torno de cada ponto da trajetória no período de simulação, para condição inicial $x_1 = 6$ e $x_2 = 5$.

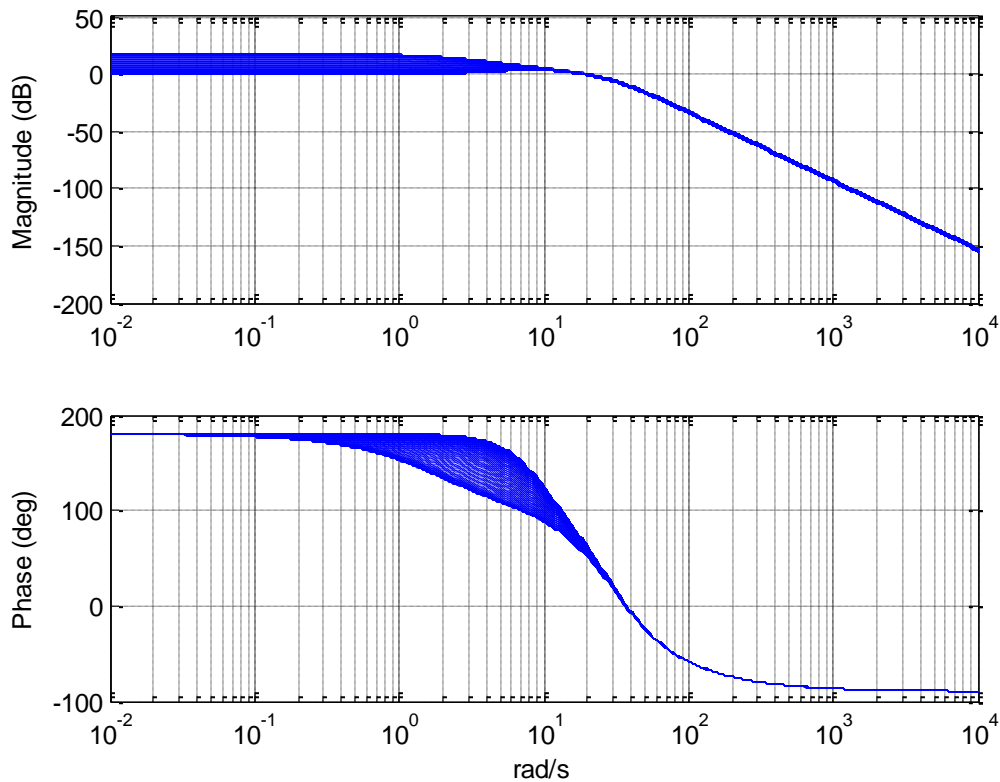


Figura 5.21 – Diagrama de Bode de todos os sistemas lineares (linearização $f_{l1}(z)$) que aproximam o sistema não linear em cada ponto da trajetória formada pela resposta do sistema não linear à condição inicial $x_1 = 6$ e $x_2 = 5$.

Observa-se pelos resultados das simulações apresentados nas figuras que a linearização do sistema não linear em malha fechada, em cada ponto de uma trajetória, preserva as propriedades da malha objetivo do projeto, indicando que o sistema não linear apresenta aproximadamente as características desejadas. Observou-se ainda que à medida que os estados se afastam da origem os gráficos de resposta em frequência para os sistemas linearizados apresentam um aumento da largura de banda e do ganho em malha fechada, mas preservam a estabilidade do sistema.

5.4.2.2. Avaliação da Região de Estabilidade

Esta seção apresenta resultados de uma análise do alcance da região de estabilidade do sistema não linear compensado em torno dos pontos onde ocorrem as linearizações. A avaliação é feita através do Método Indireto de Lyapunov, utilizando o procedimento sugerido em Chobotov (1991).

Como indicado na seção 5.3 a fronteira de estabilidade pode ser determinada pela seguinte equação:

$$z^T Q z = 2z^T P g(z) \quad (5.110)$$

A matriz P é calculada pela equação de Lyapunov como:

$$P A^T + \bar{A}^T P = -Q$$

onde, \bar{A} é a matriz de funções de transferência do sistema linearizado no ponto.

Para determinar a região de estabilidade em torno de um ponto representado pelo vetor de estados \bar{z} , o vetor de estados z na equação 5.110 deve ser substituído por $\hat{z} = z - \bar{z}$. Assim 5.110 é reescrita como

$$\hat{z}^T Q \hat{z} = 2\hat{z}^T P g(\hat{z}) \quad (5.111)$$

A região de estabilidade é determinada realizando a comparação entre os dois lados da equação 5.111 para um conjunto de pontos em uma região testada.

Para o cálculo de $g(\hat{z})$ são utilizadas as funções que representam o sistema não linear original e o sistema linearizado em função de \hat{z} .

Desconsiderando o termo do sinal de referência a função do sistema não linear em função de \hat{z} é escrita como

$$f_{NL}(\hat{z}) = A_e(\hat{z})\hat{z} \quad (5.112)$$

E a função linearizada em torno de \bar{z} em função de \hat{z} será

$$f_L(\hat{z}) = (A_e(\bar{z}) + R_a)\hat{z} \quad (5.113)$$

ou

$$f_L(\hat{z}) = A_e(\bar{z})\hat{z} \quad (5.114)$$

Dependendo se é utilizada a linearização da equação 5.90 ou 5.91 e lembrando que a linearização da equação 5.90 só poderá ser usada nos pontos em que for estável. O termo R_a foi definido em 5.104.

Desta forma, $g(\hat{z})$ pode ser calculada fazendo a diferença $f_{NL}(\hat{z}) - f_L(\hat{z})$.

Assim

$$g(\hat{z}) = (A_e(\hat{z}) - A_e(\bar{z}))\hat{z} \quad (5.115)$$

ou

$$g(\hat{z}) = (A_e(\hat{z}) - A_e(\bar{z}) - R_a)\hat{z} \quad (5.116)$$

Lembrando que $z = [x_1 \ x_2 \ x_{c1} \ x_{c2}]^T$ e portanto $\hat{z} = [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2 \ \hat{x}_{c1} \ \hat{x}_{c2}]^T$, para testar a região de estabilidade em torno de um ponto qualquer foi desenvolvido um algoritmo que cria uma grade de pontos de teste variando \hat{x}_1 e \hat{x}_2 dentro de limites pré-determinados, realiza-se o cálculo de $g(\hat{z})$ para cada ponto da malha e faz-se a comparação entre os dois lados da equação 5.111. Os

valores de \hat{x}_{c1} e \hat{x}_{c2} foram ajustados iguais aos valores de \hat{x}_1 e \hat{x}_2 respectivamente. A matriz Q foi arbitrariamente escolhida como

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

A Figura 5.22 mostra a região de estabilidade em torno do ponto $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$, com resultado idêntico para a linearização da equação 5.113 ou 5.114. Os pontos com o símbolo +(verde) foram verificados como estáveis.

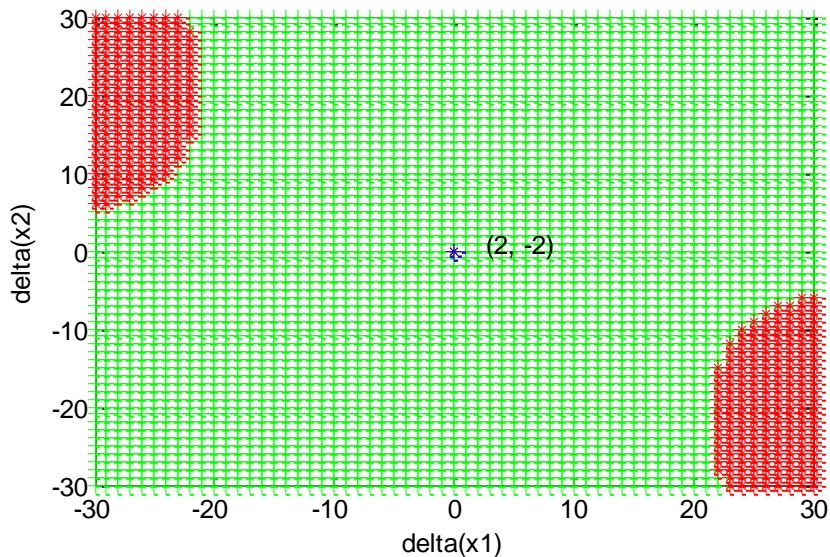


Figura 5.22 – Região de estabilidade em torno do ponto $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$ para o sistema não linear compensado determinada utilizando a linearização da equação 5.113 ou 5.114.

Na Figura 5.23 é mostrada a região de estabilidade em torno do ponto (6,98, -19,44) calculada usando a linearização da equação 5.113 e a Figura 5.24 mostra a região de estabilidade em torno do mesmo ponto calculada usando a linearização da reequação 5.114.

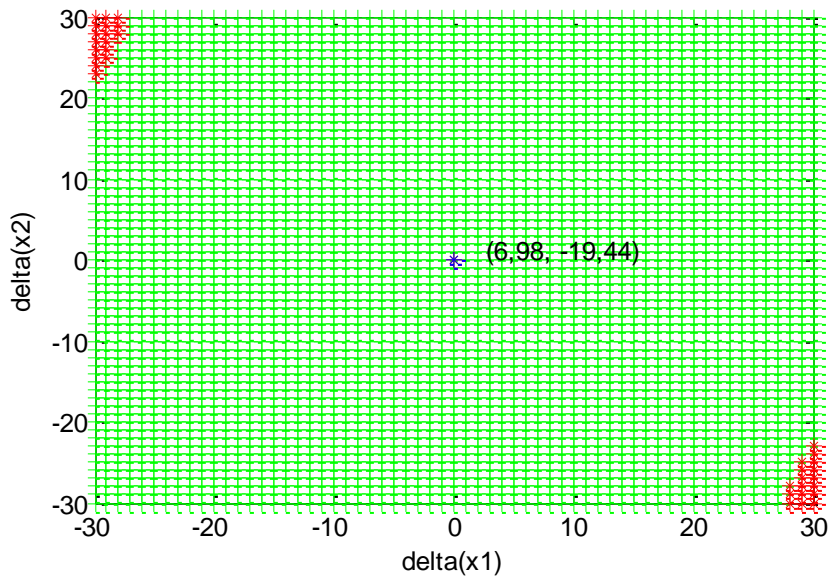


Figura 5.23 – Região de estabilidade em torno do ponto $x_1 = 6,98$ e $x_2 = -19,44$, calculada com a linearização da equação 5.113.

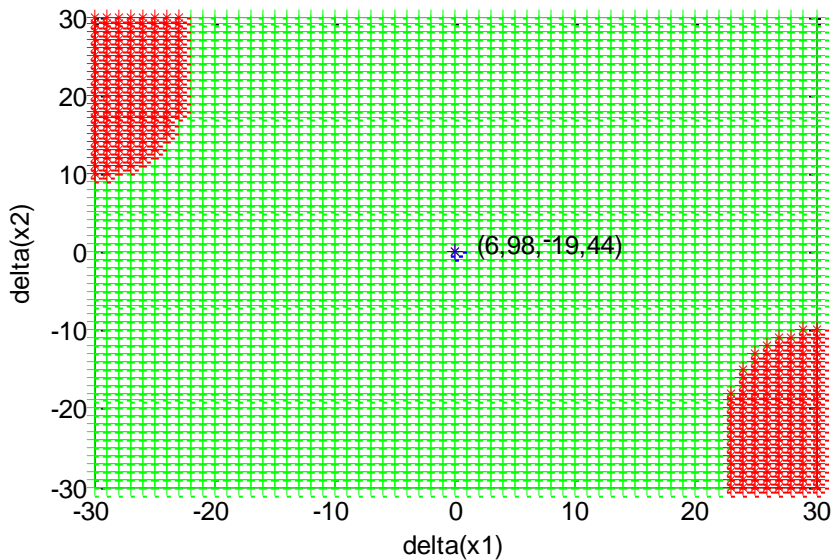


Figura 5.24 – Região de estabilidade em torno do ponto $x_1 = 6,98$ e $x_2 = -19,44$, calculada com a linearização da equação 5.114.

Outra forma de avaliação da extensão da estabilidade para o sistema não linear em cada ponto é a verificação dos pontos de uma determinada trajetória do sistema. Por exemplo, utilizando o mesmo procedimento de cálculo da

fronteira de estabilidade através da equação 5.111 e considerando a trajetória dos estados da condição inicial $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$, verifica-se que a linearização, feita de acordo com a equação 5.114, neste ponto, permite assegurar que todos os outros pontos da trajetória estão dentro de uma região de estabilidade. Na Figura 5.25 o ponto (2,-2,2,-2) corresponde à origem onde foi feita a linearização. São mostrados os gráficos de $\hat{z}^T Q \hat{z}$ e $2\hat{z}^T P g(\hat{z})$ para todos os pontos da trajetória de onde se observa que a relação $\hat{z}^T Q \hat{z} > 2\hat{z}^T P g(\hat{z})$ se verifica para todos os pontos. Neste caso a matriz Q foi escolhida como a matriz Identidade.

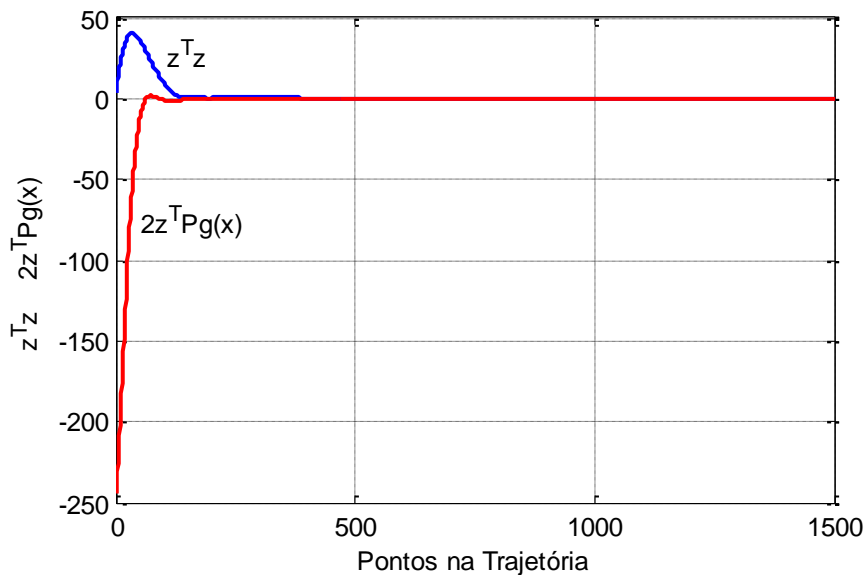


Figura 5.25 – Pontos na trajetória com condição inicial em (2, -2, 2, -2) dentro da região de estabilidade verificada a partir de uma linearização feita em (2, -2, 2, -2) .

O mesmo procedimento é utilizado para uma linearização em torno do ponto (19,06, -167.63, 19,01, -177.64). Na Figura 5.26 este ponto é o décimo primeiro ponto, contados a cada intervalo de amostragem, da trajetória iniciada em (20,-20, 20 -20). A figura mostra os gráficos de $\hat{z}^T Q \hat{z}$ e $2\hat{z}^T P g(\hat{z})$, com Q igual à identidade. O gráfico se inicia em 10 pontos antes do ponto considerado e vai

até 100 pontos depois. Verifica-se que é possível garantir a estabilidade do sistema não linear para a região indicada na figura onde é satisfeita a relação $\hat{z}^T Q \hat{z} > 2\hat{z}^T P g(\hat{z})$.

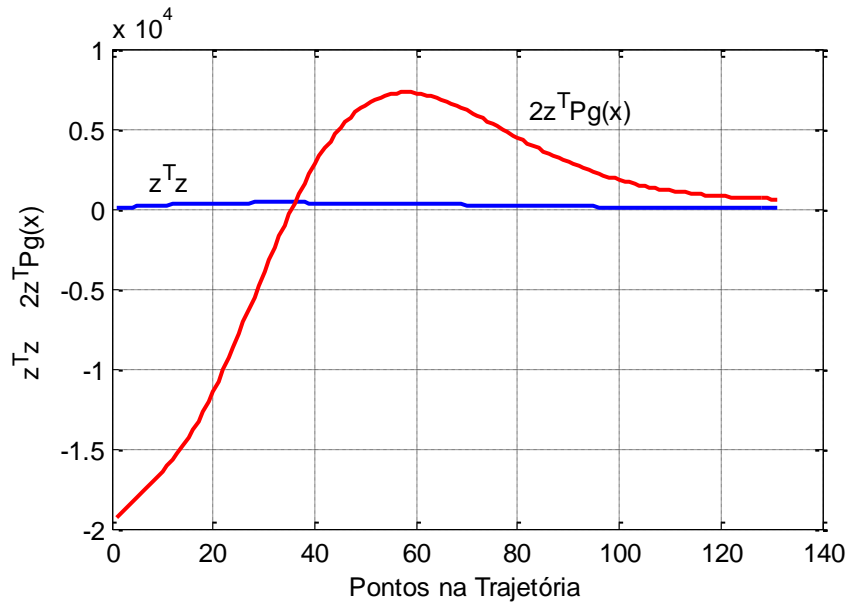


Figura 5.26 – Região de estabilidade em torno do ponto (19,06, -167.63, 19.01, -177.64). O ponto considerado encontra-se na abscissa 11. A origem corresponde ao ponto (20, -20, 20, -20).

Procedendo desta forma para todos os pontos de uma determinada trajetória é possível mostrar que em torno de cada ponto existe uma região de estabilidade assegurada pela utilização de uma linearização em torno deste ponto que é idêntica ao sistema não linear avaliado no mesmo ponto. Juntando-se todas estas regiões verifica-se que o sistema será estável para toda a trajetória. Observa-se que quanto mais distante da origem estiverem os estados, menor será o raio da região de estabilidade tornando necessário calcular as matrizes variantes da parametrização SDC do sistema com uma frequência mais alta.

Ressalta-se que para as duas análises de região de estabilidade realizadas nesta seção, o fato do método utilizado ser baseado na função de Lyapunov indica que nas regiões onde foi possível mostrar que é válida a relação

$\hat{z}^T Q \hat{z} > 2\hat{z}^T P g(\hat{z})$ a estabilidade é assegurada, mas sobre as regiões onde a relação não se mostrou válida nada pode ser afirmado.

6 EXEMPLO DE APLICAÇÃO DA TÉCNICA LQG/LTR/SDRE PARA O CONTROLE DE UM SATÉLITE ARTIFICIAL

Para testar o procedimento, realizou-se a aplicação do mesmo para controle de um sistema não linear que representa as equações dinâmicas de um corpo rígido em movimento rotacional. Esta classe de sistemas tem especial importância no estudo de sistemas de controle para satélites artificiais, uma vez que estas equações descrevem a atitude de um satélite.

As equações dinâmicas utilizadas aqui são uma versão modificada das equações apresentadas em Souza e Gonzáles (2012), excluindo a dinâmica das rodas de reação considerada naquele trabalho. Foi também realizada uma pequena alteração sobre os valores dos momentos de inércia utilizados no sistema original com a finalidade de ilustrar o caso mais geral onde os momentos de inércia em torno de cada eixo são diferentes.

As equações dinâmicas do sistema são dadas por

$$\dot{\omega}_1 = \frac{N_1}{I_1} + \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} \omega_2 \omega_3 \quad (6.1)$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{N_2}{I_2} + \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \omega_3 \omega_1 \quad (6.2)$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{N_3}{I_3} + \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} \omega_1 \omega_2 \quad (6.3)$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\sin \theta_3}{\cos \theta_2} \omega_2 + \frac{\cos \theta_3}{\cos \theta_2} \omega_3 \quad (6.4)$$

$$\dot{\theta}_2 = \cos \theta_3 \omega_2 - \sin \theta_3 \omega_3 \quad (6.5)$$

$$\dot{\theta}_3 = \omega_1 + \frac{\sin \theta_3 \sin \theta_2}{\cos \theta_2} \omega_2 + \frac{\cos \theta_3 \sin \theta_2}{\cos \theta_2} \omega_3 \quad (6.6)$$

Onde, θ_1 , θ_2 e θ_3 são as posições angulares do satélite e ω_1 , ω_2 e ω_3 são suas velocidades angulares.

Os valores dos momentos de inércia são: $I_1 = 1,80 \text{ kg.m}^2$, $I_2 = 1,40 \text{ kg.m}^2$ e $I_3 = 1,20 \text{ kg.m}^2$.

Seguindo os passos para projeto do compensador apresentados na seção 4.1 inicialmente realiza-se as atribuições: $x_1 = \theta_1$, $x_2 = \theta_2$, $x_3 = \theta_3$, $x_4 = \omega_1$, $x_5 = \omega_2$, $x_6 = \omega_3$, $u_1 = N_1$, $u_2 = N_2$ e $u_3 = N_3$.

Assim uma parametrização na forma SDC como descrita na equação 4.1 pode ser

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x)x + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (6.7)$$

com

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sin x_3 / \cos x_2 & \cos x_3 / \cos x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos x_3 & -\sin x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sin x_3 \sin x_2 / \cos x_2 & \cos x_3 \sin x_2 / \cos x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ((I_2 - I_3) / I_1) x_5 \\ 0 & 0 & 0 & ((I_3 - I_1) / I_2) x_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ((I_1 - I_2) / I_3) x_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_3 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

As especificações para o projeto do sistema foram estabelecidas apenas a partir de restrições sobre o tempo de resposta do sistema e o erro em regime estacionário. Foi definido então, como especificação para o projeto, um tempo de resposta de no máximo 2 segundos e erro em regime menor que 0,002, para que o sistema partindo das condições iniciais $\theta_1 = 1 \text{ rd}$, $\theta_2 = -1 \text{ rd}$, $\theta_3 = 0 \text{ rd}$, $\omega_1 = -0,7$, $\omega_2 = -0,5$ e $\omega_3 = 0,6$, seja levado para os estados $\theta_1 = -1,2 \text{ rd}$, $\theta_2 = 0,6 \text{ rd}$, $\theta_3 = 2 \text{ rd}$.

Devido ao número de estados e à natureza das matrizes $A(x)$, B e C , a determinação da estabilizabilidade e detectabilidade é a primeira vista trabalhosa, mas neste caso é possível realizar o procedimento através de algum *software* de manipulação simbólica e verifica o posto das matrizes de controlabilidade e observabilidade. Este procedimento foi utilizado neste trabalho verificando que as duas matrizes apresentam posto completo para qualquer valor dos estados. Adicionalmente foram testados passo a passo, durante a simulação, os postos das duas matrizes, garantindo a detectabilidade e estabilizabilidade da parametrização utilizada. Não foram realizadas análises sobre erros de modelagem porque este exemplo não previa este tipo de análise. A existência e natureza dos zeros de transmissão foram analisadas passo a passo na simulação, verificando a inexistência de zeros no semiplano direito para as simulações realizadas. O projeto foi realizado baseado inicialmente nas equações de estado parametrizada avaliadas em uma condição inicial arbitrária para o sistema e depois testado para outras condições iniciais.

Para obtenção do tempo de resposta especificado, inicialmente baseando-se nas relações entre largura de banda e tempo de resposta de um sistema linear

de segunda ordem, foi definido como alvo uma largura de banda de aproximadamente 1,33 rad/s, porém foi verificado, através de simulações, que para o este sistema, a largura de banda necessária para se conseguir o tempo de resposta especificado deve ser bem maior que esta estimativa assim a largura de banda desejável foi redefinida para aproximadamente 10 rad/s. A malha objetivo foi então ajustada para uma frequência desta ordem. Utilizando $\mu = 10^{-4}$ e $U = BB^T$ foi obtida a malha objetivo com ganhos principais mostrados na Figura 6.1

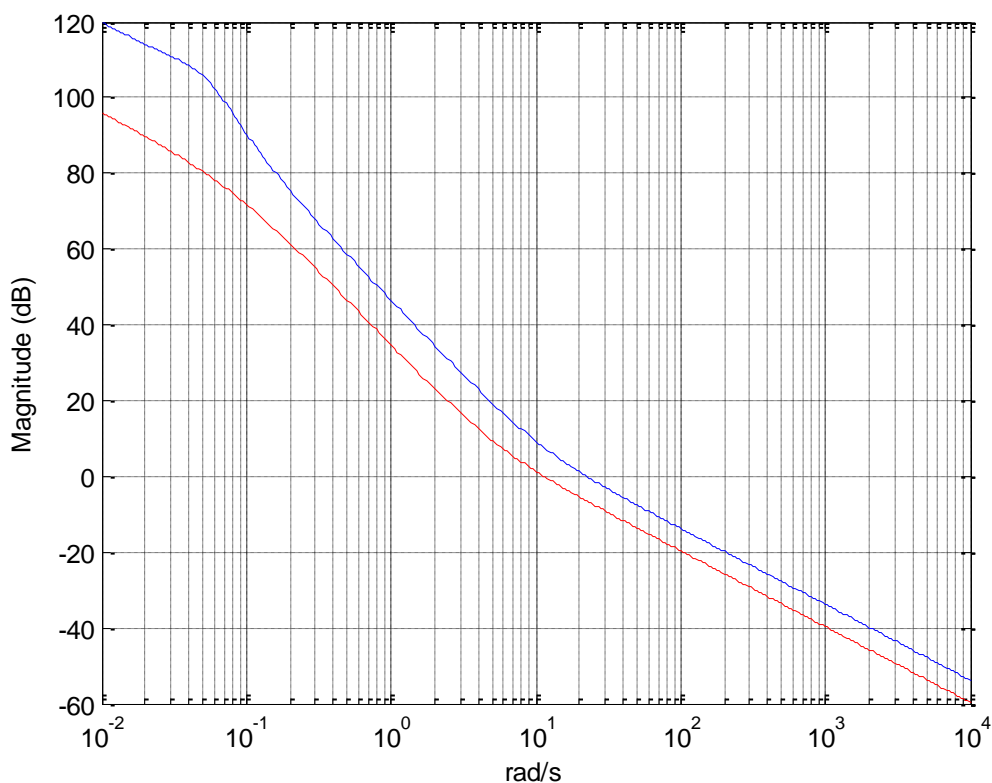


Figura 6.1 - Valores singulares da malha objetivo.

Na Figura 6.2 é mostrada a recuperação da malha objetivo enquanto ρ recebe os valores 1 e 10^{-4} . É possível aproximar ainda mais a malha objetivo com valores menores para ρ , mas observou-se que a situação ilustrada na figura foi suficiente para atender as especificações e por isso adotou-se o valor mínimo de $\rho = 10^{-4}$.

Ressalta-se que os ganhos do controlador e do estimador foram calculados pela solução das equações de Riccati a cada intervalo de amostragem.

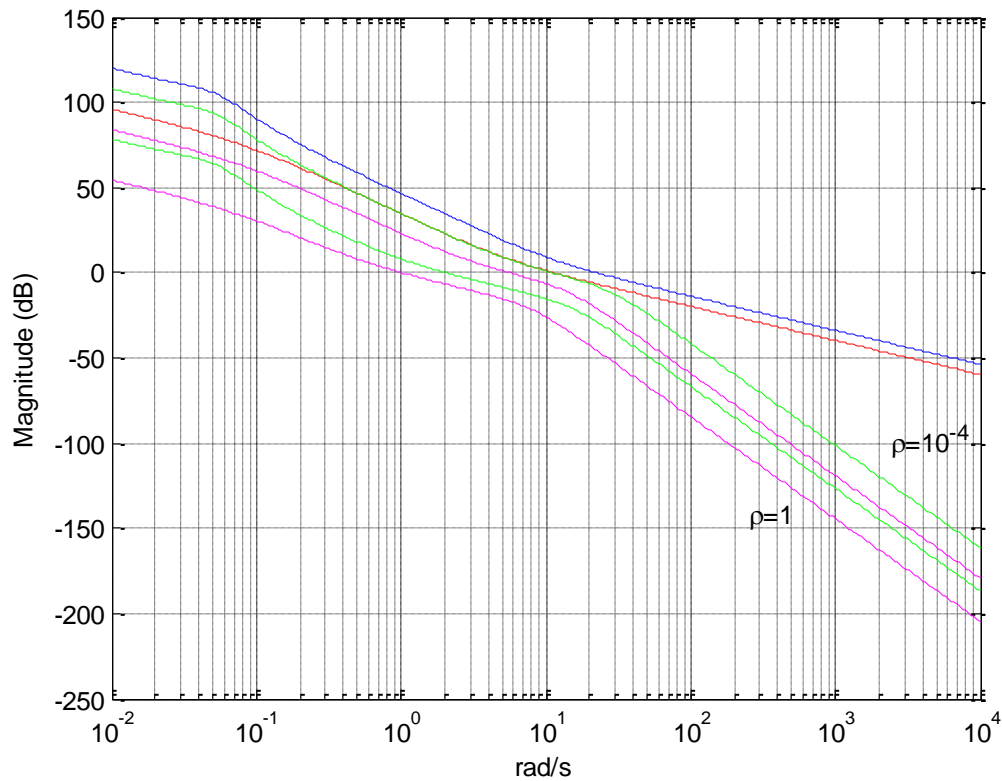


Figura 6.2 – Recuperação das características da malha objetivo.

A Figura 6.3 apresenta os gráficos dos ganhos das funções de transferência de malha fechada para os canais $y_1 - u_1$, $y_2 - u_2$ e $y_3 - u_3$.

Na Figura 6.4 são apresentados superpostos os gráficos da magnitude das funções de transferência de malha fechada para os canais $y_1 - u_1$, $y_2 - u_2$ e $y_3 - u_3$, obtidas para cada intervalo de simulação com a matriz $A(x)$ avaliada no ponto considerado.

Na Figura 6.5 são mostradas as malhas recuperadas para todos os pontos da trajetória.

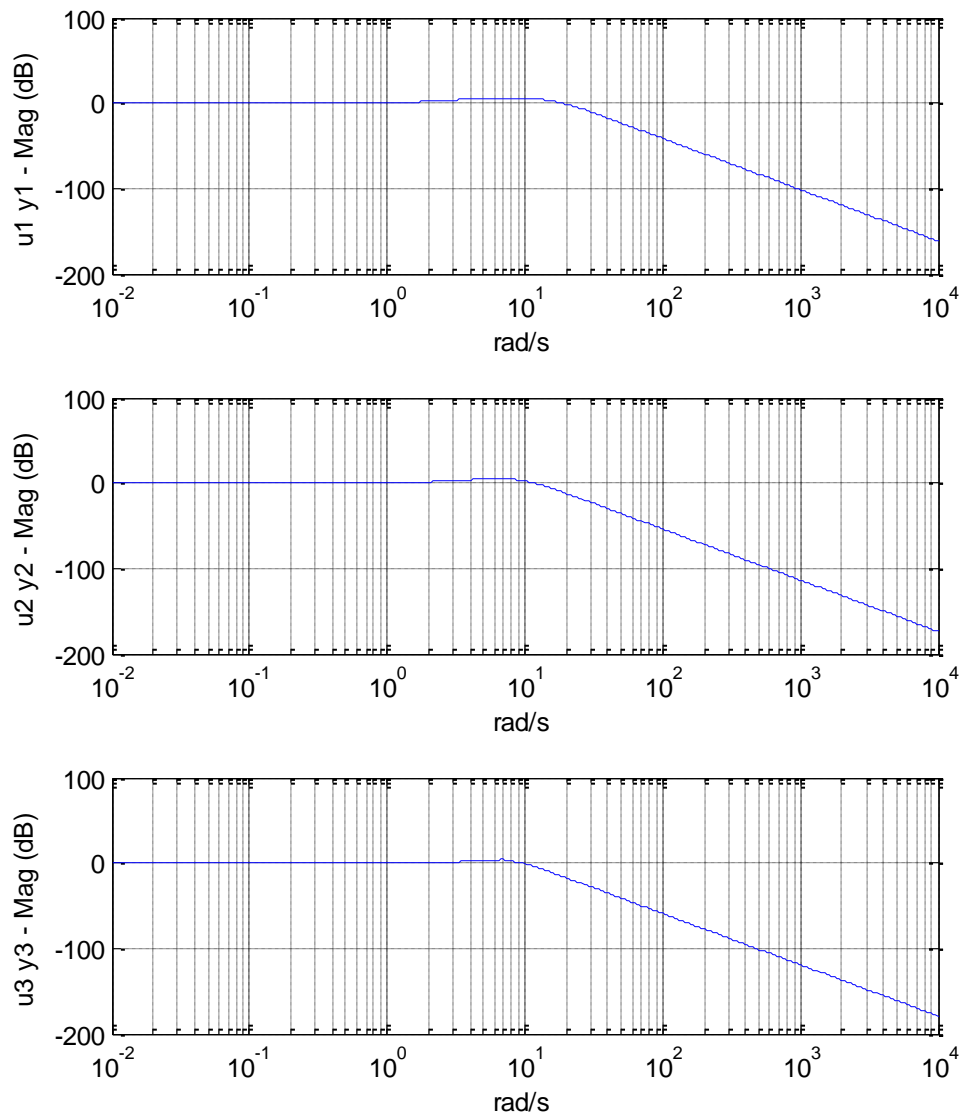


Figura 6.3 – Gráfico da magnitude das funções de transferência de malha fechada para os canais $y_1 - u_1$, $y_2 - u_2$ e $y_3 - u_3$.

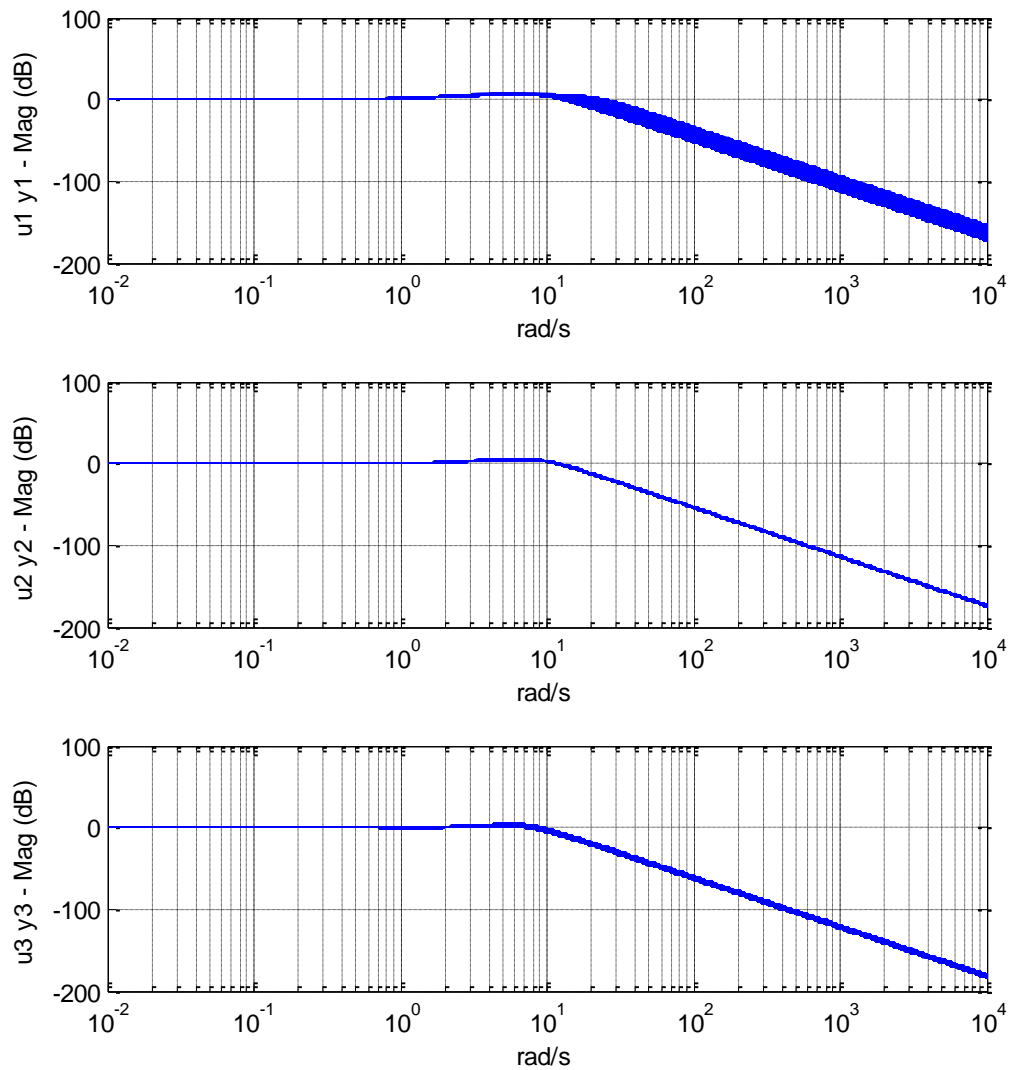


Figura 6.4 – Gráfico da magnitude das funções de transferência de malha fechada para os canais $y_1 - u_1$, $y_2 - u_2$ e $y_3 - u_3$, obtidas para todos os pontos em cada intervalo de simulação com a matriz $A(x)$ avaliada em cada ponto.

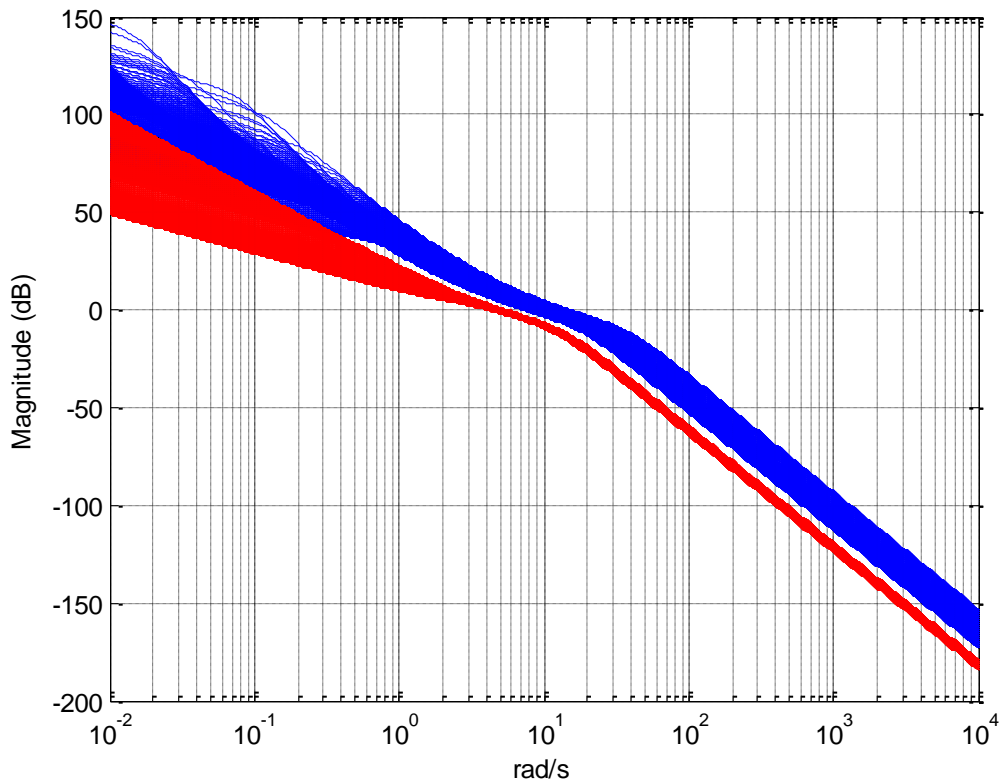


Figura 6.5 – Malha recuperada em cada ponto da trajetória dos estados.

Na Figura 6.6 é mostrada a evolução das posições angulares do satélite partindo das condições iniciais especificadas e na Figura 6.7 são mostradas as velocidades angulares. Verifica-se pelos gráficos que as especificações foram atendidas.

A Figura 6.8 mostra o gráfico dos sinais de controle e na Figura 6.9 são mostrados os erros da saída com relação à referência e a norma do vetor de velocidades angulares.

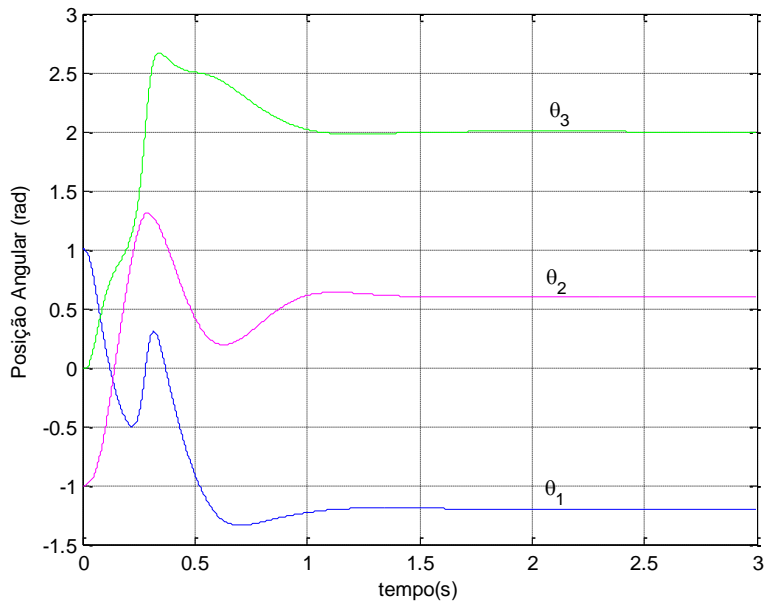


Figura 6.6 - Evolução das posições angulares do satélite partindo das condições iniciais $\theta_1 = 1 \text{ rd}$, $\theta_2 = -1 \text{ rd}$, $\theta_3 = 0 \text{ rd}$, $w_1 = -0,7$, $w_2 = -0,5$, $w_3 = 0,6$ e com referência $\theta_1 = -1.2 \text{ rd}$, $\theta_2 = 0.6 \text{ rd}$, $\theta_3 = 2 \text{ rd}$.

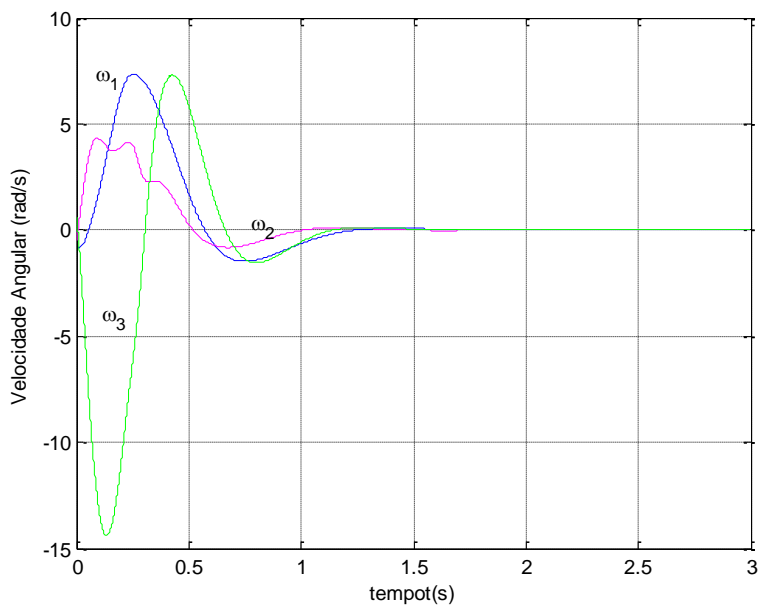


Figura 6.7 - Evolução das velocidades angulares do satélite partindo das condições iniciais $\theta_1 = 1 \text{ rd}$, $\theta_2 = -1 \text{ rd}$, $\theta_3 = 0 \text{ rd}$, $w_1 = -0,7$, $w_2 = -0,5$, $w_3 = 0,6$.

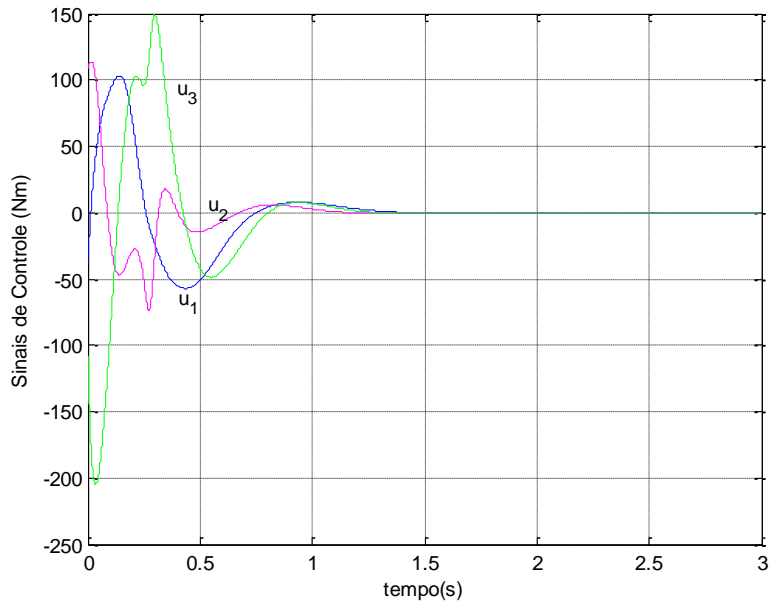


Figura 6.8 - Sinais de controle para condições iniciais $\theta_1 = 1 \text{ rd}$, $\theta_2 = -1 \text{ rd}$, $\theta_3 = 0 \text{ rd}$, $\omega_1 = -0,7$, $\omega_2 = -0,5$ e $\omega_3 = 0,6$ e com referência $\theta_1 = -1,2 \text{ rd}$, $\theta_2 = 0,6 \text{ rd}$, $\theta_3 = 2 \text{ rd}$.

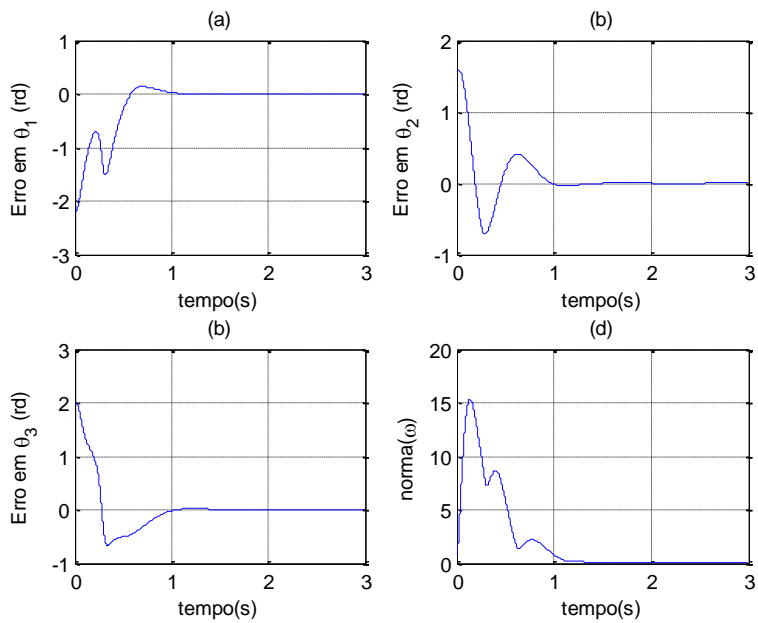


Figura 6.9 – Gráfico dos erros entre as saídas e a referência. (a) Erro em θ_1 ; (b) Erro em θ_2 ; (c) Erro em θ_3 ; (d) Norma do vetor de velocidades angulares.

Com a finalidade de testar o desempenho do compensador para valores dos estados em regiões distantes da utilizada no projeto foi realizada uma simulação para estabilização do sistema partindo das condições iniciais $\theta_1 = 1 \text{ rd}$, $\theta_2 = -2 \text{ rd}$, $\theta_3 = 2 \text{ rd}$, $w_1 = 6,28$, $w_2 = -1$, $w_3 = 1$. Os resultados da simulação são apresentados nas figuras 6.10, 6.11 e 6.12, onde pode ser observado que o compensador apresentou bom desempenho com respeito ao tempo de estabilização e erro em regime estacionário. Ressalta-se que os sinais de controle poderiam ter valores menores se as restrições sobre o tempo de resposta fossem amenizadas ou se os deslocamentos angulares considerados fossem menores, lembrando que o projeto foi realizado dentro da premissa “*cheap control*”. Assim quando houver restrições sobre a energia de controle o projeto deverá ser repensado para este contexto.

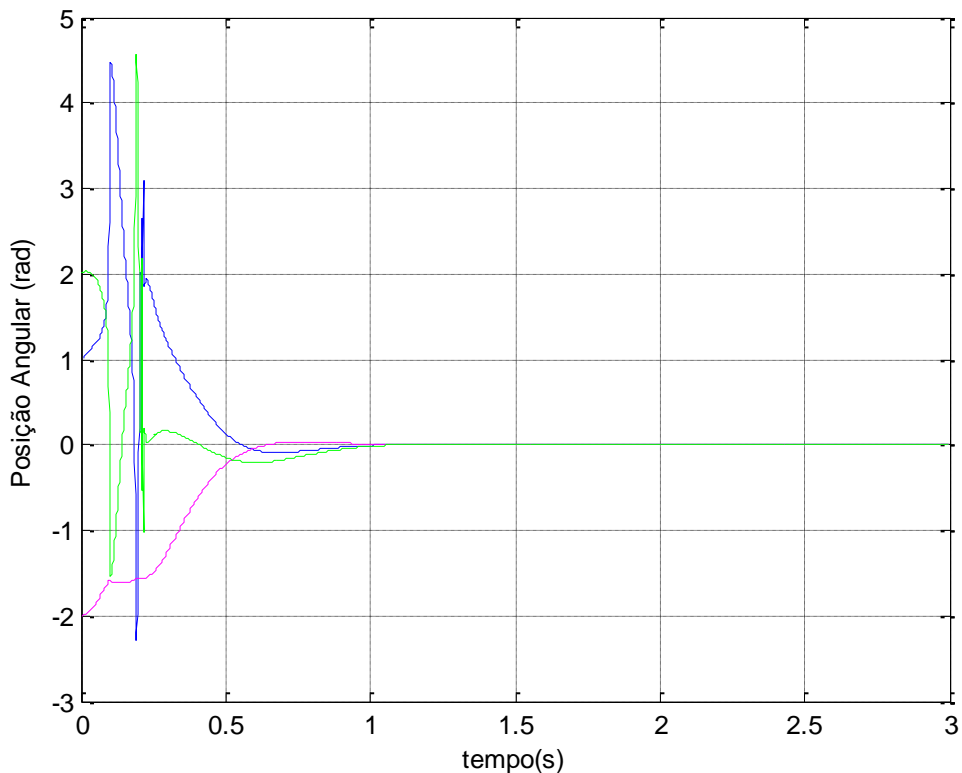


Figura 6.10 – Posições angulares do satélite partindo das condições iniciais $\theta_1 = 1 \text{ rd}$, $\theta_2 = -2 \text{ rd}$, $\theta_3 = 2 \text{ rd}$, $w_1 = 6,28$, $w_2 = -1$, $w_3 = 1$ para um comando de estabilização.

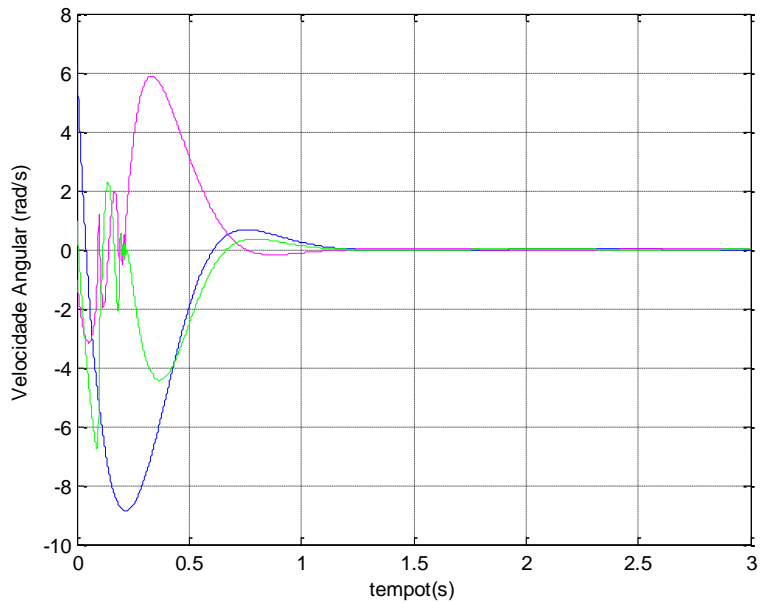


Figura 6.11 – Velocidades angulares do satélite partindo das condições iniciais $\theta_1 = 1 \text{ rd}$, $\theta_2 = -2 \text{ rd}$, $\theta_3 = 2 \text{ rd}$, $w_1 = 6,28$, $w_2 = -1$, $w_3 = 1$ para um comando de estabilização.

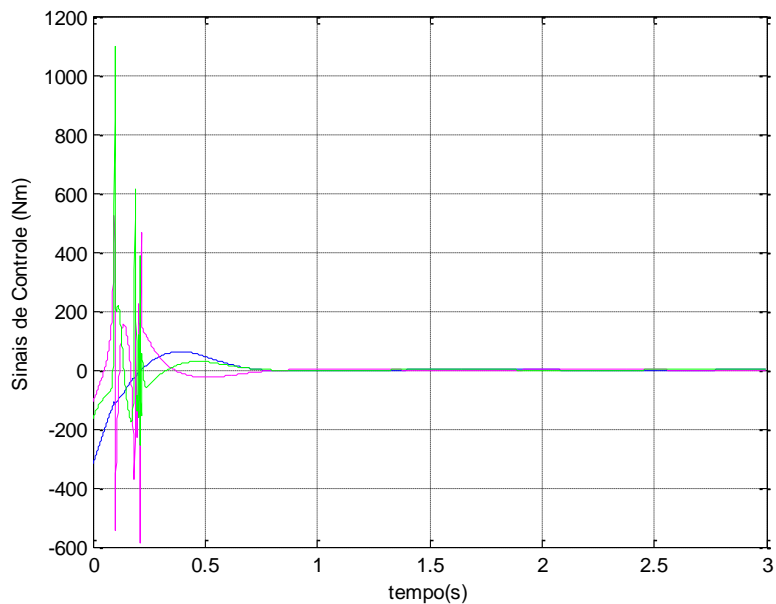


Figura 6.12 – Sinais de controle durante manobra de estabilização para condições iniciais $\theta_1 = 1 \text{ rd}$, $\theta_2 = -2 \text{ rd}$, $\theta_3 = 2 \text{ rd}$, $w_1 = 6,28$, $w_2 = -1$, $w_3 = 1$.

Os exemplos apresentados neste Capítulo, até aqui, consideram a planta com uma dinâmica que representa o movimento de atitude de um veículo espacial, no entanto, o comportamento da atitude de um satélite real, na prática, não apresenta requisitos de resposta no tempo tão rigorosos como aqueles considerados. Assim com o objetivo de verificar o comportamento da técnica proposta diante de uma situação mais próxima do caso real, o compensador proposto foi ajustado para realizar a estabilização e manutenção de apontamento de um satélite artificial modelado como nos exemplos anteriores, mas com restrições de tempo de resposta menos rigorosas. A seguir são apresentados resultados para a estabilização e apontamento de um satélite com dinâmica descrita como nos exemplos anteriores, com condições iniciais $\theta_1 = 0.18 \text{ rd}$, $\theta_2 = -0.11 \text{ rd}$, $\theta_3 = 0.2 \text{ rd}$, $w_1 = 0.04$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = -0.12$ e referência $\theta_1 = 0 \text{ rd}$, $\theta_2 = 0 \text{ rd}$, $\theta_3 = 0 \text{ rd}$, $w_1 = 0$, $w_2 = 0$, $w_3 = 0$. Os parâmetros ρ e μ foram ajustados para $\rho = 10$ e $\mu = 100$. Na Figura 6.13 é apresentado o gráfico dos valores singulares da malha objetivo e sua recuperação e as figuras 6.14, 6.15 e 6.16 mostram, respectivamente, os gráficos das posições angulares, das velocidades angulares e dos sinais de controle para este exemplo.

Os resultados das simulações apresentados neste Capítulo evidenciam a flexibilidade da técnica proposta com respeito ao ajuste dos parâmetros de projeto permitindo a redução da energia de controle para atender, por exemplo, restrições sobre atuadores mesmo quando as manobras necessárias sejam de grande amplitude, observando-se a esperada característica de balanceamento entre o tempo de resposta e a energia de controle.

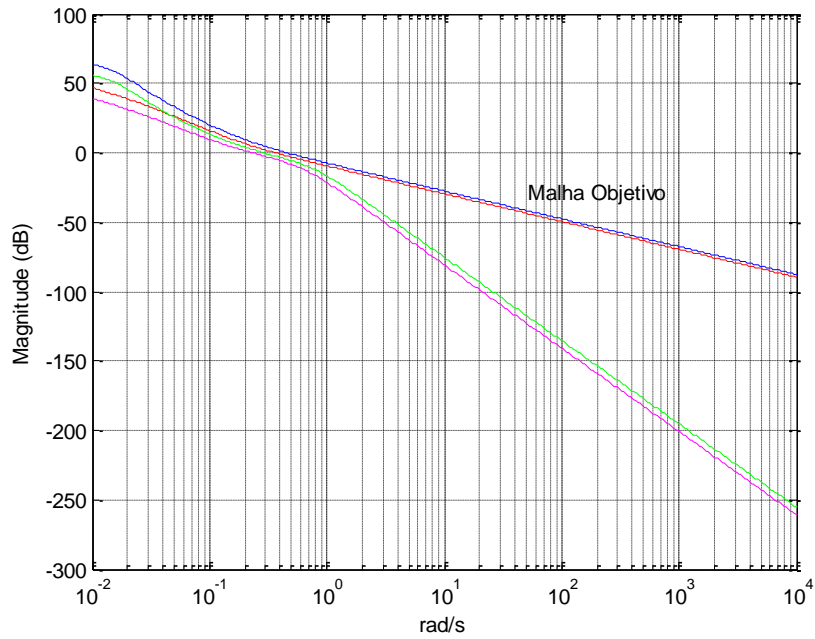


Figura 6.13 – Gráfico dos ganhos principais da Malha Objetivo. e recuperação da mesma pela utilização dos parâmetros $\rho = 10$ e $\mu = 100$.

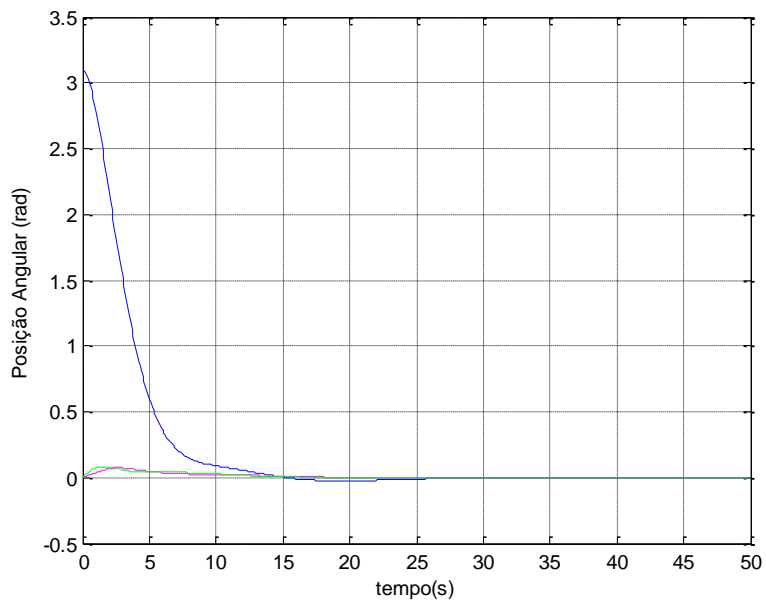


Figura 6.14 – Posições angulares do satélite com condições iniciais $\theta_1 = 0.18 \text{ rd}$, $\theta_2 = -0.11 \text{ rd}$, $\theta_3 = 0.2 \text{ rd}$, $w_1 = 0.04$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = -0.12$ para um comando de estabilização ($\rho = 10$ e $\mu = 100$).

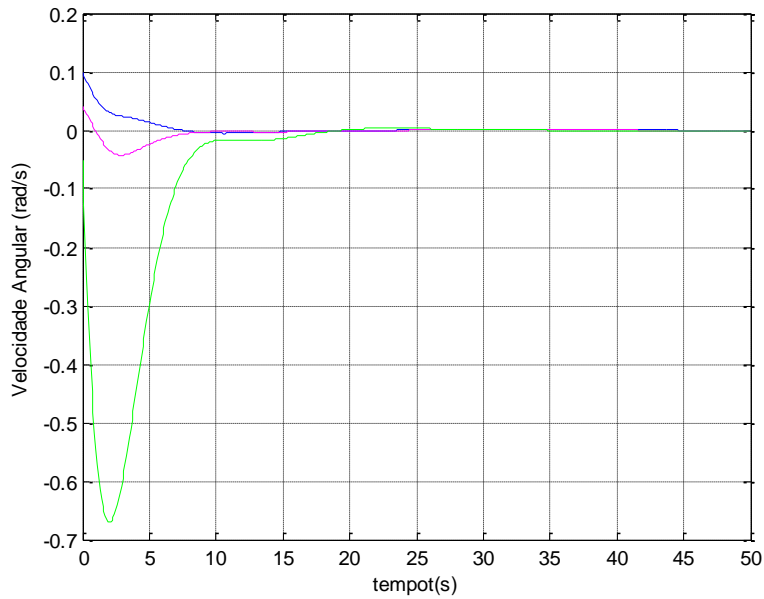


Figura 6.15 – Velocidades angulares do satélite com condições iniciais $\theta_1 = 0.18 \text{ rd}$, $\theta_2 = -0.11 \text{ rd}$, $\theta_3 = 0.2 \text{ rd}$, $w_1 = 0.04$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = -0.12$ para um comando de estabilização ($\rho = 10$ e $\mu = 100$).

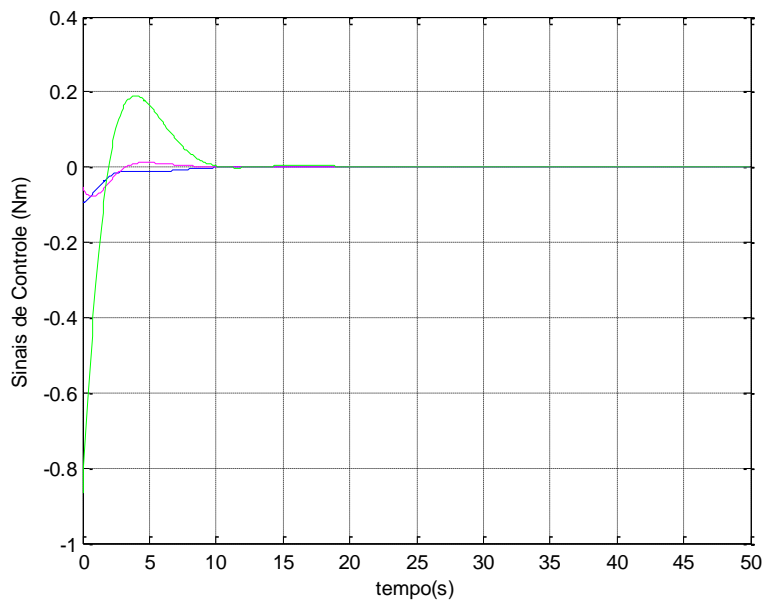


Figura 6.16 – Sinais de controle durante manobra de estabilização para condições iniciais $\theta_1 = 0.18 \text{ rd}$, $\theta_2 = -0.11 \text{ rd}$, $\theta_3 = 0.2 \text{ rd}$, $w_1 = 0.04$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = -0.12$ ($\rho = 10$ e $\mu = 100$).

7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

7.1.1. Conclusões

O controle de sistema multivariáveis não lineares é um tema complexo e de difícil abordagem. Cada uma das técnicas atualmente existentes para o tratamento deste problema possui limitações e apresenta restrições sobre sua aplicação. O presente trabalho propõe a combinação de duas técnicas de controle efetivas e de aplicação sistemática, as metodologias LQG/LTR e SDRE. Não foram encontrados na literatura revisada outros trabalhos com esta proposta. Houve tentativas de extensão da técnica LQG/LTR para sistemas não lineares (GRUNBERG; ATHANS,1987; CHUN; WANG,1988; HAN; KIM, 2003), mas nenhuma chegou a resultados equivalentes ou com a generalidade aqui apresentada.

Neste trabalho foi explorada a solução subótima associada à técnica SDRE na obtenção de um compensador para controle de sistemas não lineares, porém foi apresentada a possibilidade de utilização da equação completa que conduz a solução ótima para o problema. Nos dois casos, calculam-se as soluções para as equações de Riccati e utilizam-se os resultados para a obtenção do controle.

O trabalho apresenta um caráter relativamente geral, pois embora tenham sido feitas restrições sobre a continuidade das funções consideradas, a classe de sistemas tratados inclui uma grande variedade de problemas de interesse prático. Dentro da qual se excluem apenas os casos em que o sistema não é detectável ou estabilizável.

Foi apresentado que a implementação da técnica proposta pode ser realizada utilizando qualquer método para solução das equações de Riccati, por exemplo, soluções exatas, soluções linearizadas, soluções interpoladas obtidas previamente ou soluções em tempo real.

Um importante resultado foi a demonstração da preservação das propriedades e características da metodologia LQG/LTR quando aplicada ao caso não linear pelos sistemas lineares que aproximam o sistema original em cada ponto de uma trajetória seguida pelos estados. Este resultado permite inferir o comportamento do sistema não linear compensado. Também foram apresentadas provas de estabilidade local, que podem ser estendidas para toda a faixa de operação do sistema não linear.

Os estudos e testes realizados mostraram que uma grande flexibilidade de projeto está associada à combinação destas duas técnicas deixando aberta a possibilidade de introdução de novas características ainda não consideradas para aplicação ao controle de sistemas não lineares.

Ainda, de acordo com as simulações e testes executados verificou-se que a associação proposta apresentou resultados satisfatórios para o tratamento de sistemas não lineares. Aliado a este fato, a simplicidade de projeto e implementação indica que a técnica é promissora e permite visualizar novas oportunidades de estudo sobre o tema.

Os resultados aqui obtidos sugerem a extensão o emprego da técnica LQG/LTR do universo dos sistemas lineares, que é bastante restrito, para o universo de sistemas não lineares, o que permite aproximar melhor a solução de controle ao da grande maioria dos casos do mundo real.

7.1.2. Sugestões para Futuros Trabalhos

Entre as várias possibilidades de extensão de pesquisas sobre o assunto foram identificados, no decorrer do desenvolvimento deste trabalho, os seguintes tópicos que podem ser deixados como sugestão para continuação deste trabalho:

A realização de análises sobre a aplicação da técnica em tempo real, pois relativamente poucos trabalhos foram direcionados a este tópico. No entanto, o condicionamento da existência de soluções locais a cada iteração da malha de controle, soluções essas dependentes apenas da existência das respectivas matrizes de Controlabilidade e Observabilidade, abre o horizonte para aplicações em tempo real para algumas classes de sistemas não lineares;

O estudo do impacto das incertezas, modeladas sob várias formas, sobre o desempenho da técnica proposta e para verificação da robustez do sistema de controle;

A exploração da flexibilidade associada à utilização de matrizes de ponderação que também sejam dependentes dos estados, pois embora a introdução desta dependência, no contexto geral do problema não linear, signifique que a função custo não será mais quadrática, na solução subótima resolvida ponto a ponto, o caráter quadrático ainda é válido;

Aplicação de técnicas menos conservadoras para determinação das regiões de estabilidade do sistema e comparação do desempenho do sistema compensado via técnica proposta e outras técnicas de controle para sistemas não lineares;

Quantificação do esforço computacional associado à implementação do algoritmo de controle apresentado neste trabalho e utilização da Teoria das Perturbações no cálculo do sinal de controle para redução do esforço computacional.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABDELRAHMAN, M.; CHANG, I.; PARK, S. Y. Magnetic torque attitude control of a satellite using the state-dependent Riccati equation technique. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 46, n. 5, p. 758-771, 2011.
- AGHILI, F.; NAMVAR, M.; VUKOVICH, G. Satellite simulator with a hydraulic manipulator. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION (ICRA 2006), 2006, Orlando, FL. **Proceedings...** Orlando: IEEE, 2006. p. 3886-3892.
- ATHANS, M. A tutorial on the LQG/LTR method. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1986, Seattle. **Proceedings...** Seattle: IEEE, 1986. p. 1289-1296.
- BEEELER, S. C. **Modeling and control of thin film growth in a chemical vapor deposition reactor**. 2000. 140 p. Dissertation (Doctor of Philosophy)-North Carolina State University, 2000.
- CHOBOTOV, V. A. **Spacecraft attitude dynamics and control**. Malabar Florida: Krieger Publishing Company, 1991.140p.
- BEEELER, S. C. **State-dependent Riccati equation regulation of systems with state and control nonlinearities**. Hampton, Virginia: National Institute of Aerospace, 2004-08. 23p. NASA/CR-2004-213245, NIA Report No.
- BANKS, H. T. An SDRE-based approach for HIV feedback control and control of thin film growth in a CVD reactor*. In: IFAC WORLD CONGRESS, 18., 2011, Milano, Italy. **Proceedings...** Milano: IFAC, 2011. p. 9601-9606.
- BANKS, H. T.; LEWIS, B. M.; TRANZ, H. T. Nonlinear feedback controllers and compensators: a state-dependent Riccati equation approach. **Computational Optimization and Applications**, v. 37, n. 2, p 177-218, 2007.
- BOGDANOV, A.; WAN, E. SDRE control with nonlinear feedforward compensation for a small unmanned helicopter. In: AIAA UNMANNED UNLIMITED SYSTEMS, TECHNOLOGIES, AND OPERATIONS CONFERENCE, 2., 2003, San Diego, USA. **Proceedings...**San Diego: AIAA, 2003.

CHANG, I.; CHUNG, S.J. Exponential stability region estimates for the state-dependent Riccati equation controllers. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 48., 2009 /CHINESE CONTROL CONFERENCE, (CDC/CCC), 28., 2009, Shanghai. **Proceedings...** Shanghai: 2009. IEEE, 2009. p. 1974-1979.

CHEN, G. A **linear quadratic Gaussian with loop transfer recovery proximity operations autopilot for spacecraft**. Thesis (Master of Science in Aeronautics and Astronautics) - Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1987.

ÇİMEN, T. State-dependent Riccati equation (SDRE) control: a survey. In: IFAC WORLD CONGRESS, 17., 2008, COEX, Korea, South. **Proceedings...** COEX, Korea, South: The International Federation of Automatic Control, 2008. p. 6-11.

ÇİMEN, T. Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependent Riccati equation (SDRE) method. **Annual Reviews in Control**, v. 34, n. 1, p. 32-51, 2010.

CLOUTIER, J. R.; D'SOUZA, C. N.; MRACEK, C. P. Nonlinear regulation and nonlinear H-infinity control via the state-dependent Riccati equation technique. I-Theory. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NONLINEAR PROBLEMS IN AVIATION AND AEROSPACE, 1., 1996, Daytona Beach, FL. **Proceedings...** Daytona Beach, 1996. p. 117-130.

CLOUTIER, J. R.; MRACEK C. P.; RIDGELY D. B.; HAMMETT K. D. State-dependent Riccati equation techniques: Theory and applications. In: SDRE WORKSHOP CONDUCTED AT THE AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1998, Philadelphia, Pennsylvania. **Notes...** Philadelphia: IEEE, 1998.

CRUZ, J. J. **Controle robusto multivariável**. São Paulo: Edusp, 1996. v. 1. 168p .

DOYLE, J.; STEIN, G. Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 26, n. 1, p. 4-16, 1981.

DOYLE, J.; STEIN, G. Robustness with observers. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 24, n. 4, p. 607-611, 1979.

FLORA, A. L. **Projeto de um sistema de controle de atitude de um satélite artificial com apêndices flexíveis pelos métodos Lqg/Ltr e H-infinito**. 223p. 1995. Dissertação (Mestrado em Ciência Espacial) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), São José dos Campos.

FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. **Feedback control of dynamic systems**. Reading, MA: Addison-Wesley, 1991.

ERDEM, E. B. **Analysis and real-time implementation of state-dependent Riccati equation controlled systems**. PhD Dissertation University of Illinois at Urbana-Champaign, University of Illinois, 2001.

GANG, X. GUANGZHONG, C. On the LQG/LTR Methodology. **IEEE Transaction and Automatic Control**, v. **AC-32**, n. 2, Feb. 2000.

GRUNBERG, D.B.;ATHANS, M. A methodology for designing robust nonlinear control systems. IFAC WORD CONGRESS ON AUTOMATIC CONTROL, 10., 1987, Munich, West Germany. **Proceedings...** Munich: IFAC, July 1987.

GRUNBERG, D.B. **A methodology for designing robust multivariable nonlinear control systems**. Ph.D. Thesis, M.I.T., Cambridge, MA. U.S.A, 1986.

HAN, S. L.; KIM, J. S. Nonlinear quadratic Gaussian control with loop transfer recovery. **Mechatronics**, v. 13, n. 3, p. 273-293, 2003.

HANGOS, K. M.; BOKOR, J.; SZEDERKÉNYI, G. **Analysis and control of nonlinear process systems**. London: Springer, 2004.

JUNG, J. Hardware-in-the-loop simulations of spacecraft attitude synchronization using the state-dependent Riccati equation technique. **Advances in Space Research**, v. 51, n. 3, 1 Febr 2013, p. 434–449, 2012.

KHALIL, H. K. **Nonlinear systems**. 3. ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 2002.

KULCSAR, B. LQG/LTR controller design for an aircraft model. **Transportation Engineering**, v. 28, n. 1-2, p. 131-142, 2001.

KWAKERNAAK, H. Optimal low-sensitivity linear feedback systems. **Automatica**, v. 5, n. 3, p. 279-285, 1969.

- LAHDHIRI, T.; ALOUANI, A. T. LQG/LTR pitch attitude control of an Earth-orbiting spacecraft. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 32., 1993, San Antonio, TX, USA. **Proceedings...** San Antonio, TX, USA: IEEE, 1993. p. 445-446.
- MARKMAN, J.; KATZ, I. N. An iterative algorithm for solving hamilton jacobi type equations. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 22, n.1, p. 312-329, 2000.
- MARTIN, R. J.; VALAVANI, L.; ATHANS, M. Multivariable control of a submersible using the LQG/LTR design methodology. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1986, Seattle, WA, USA. **Proceedings...** Seattle, WA, USA: IEEE, 1986. p. 1313-1324.
- MASSARI, M.; ZAMARO, M. Application of SDRE technique to orbital and attitude control of spacecraft formation flying. **Acta Astronautica**, v. 94, n. 1, Jan–Feb, p. 409–420 2014.
- MEDAGAM, P. V.; YUCELEN, T.; POURBOGHRAT, F. Adaptive SDRE-based nonlinear sensorless speed control for PMSM drives. In: NORTH AMERICAN POWER SYMPOSIUM (NAPS'07), 39., 2007, Las Cruces, NM. **Proceedings...** Las Cruces, NM: IEEE, 2007. p. 518-522.
- MOOIJ, E.; ELLENBROEK, M. H. M. Multi-functional guidance, navigation, and control simulation environment. In: AIAA GUIDANCE, NAVIGATION, AND CONTROL CONF., 2007, Heaton Head , SC. **Proceedings...** AIAA, 2007. (AIAA-07-6887).
- MORA, E. J.; SERRANO, J. B.; ANKERSEN, F. MIMO Control for 6DoF Relative Motion. In: KALDEICH-SCHUERMANN, B. (ed). **Spacecraft guidance, navigation and control systems**, - Proceedings of the 3rd ESA International Conference held 26-29 November, 1996 at ESTEC, Noordwijk, the Netherlands: European Space Agency, 1997. p. 219. (ESA SP-381).
- MOSCATI, N. R. **Projeto de um sistema de controle de atitude (três eixos) de satélites utilizando a metodologia LQG/LTR**. 1992. 232 p. (INPE-5473-TDI/504). Dissertação (Mestrado em Ciência Espacial) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), São Jose dos Campos, 1992. Disponível em: <<http://urlib.net/6qtX3pFwXQZ3r59YCT/GUeLR>>. Acesso em: 22 jul. 2014.
- NAIK, M. S.; SINGH, S. N. State-dependent Riccati equation-based robust dive plane control of AUV with control constraints. **Ocean Engineering**, v. 34, n. 11, p. 1711-1723, 2007.

PARRISH, D. K.; RIDGELY, D. B. Attitude control of a satellite using the SDRE method. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1997, Albuquerque, NM, USA. **Proceedings...** Albuquerque, NM, USA: IEEE, 1997. p. 942-946. DOI: 10.1109/ACC.1997.609665.

PEARSON, J. D. Approximation Methods in Optimal Control I. Sub-optimal Control†. **International Journal of Electronics**, v. 13, n. 5, p. 453-469, 1962.

SAGAN, C. **Cosmos**. New York: Random House, Inc., 1980. 365p.

SKOGESTAD, S., POSTLETHWAITE, I. Multivariable feedback control - analysis and design. 2. ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2005.

SOUZA, L. C. G. **Dynamics and robust control for uncertain flexible space systems**. Tese (Doutorado em Engenharia Espacial) - University of Cranfield, CITECH. Cranfield - Beds, Inglaterra, 1992.

SOUZA, L. C. G.; GONZÁLES, R. G. Application of the state-dependent riccati equation and kalman filter techniques to the design of a satellite control system. **Shock and Vibration**, v. 19, n. 5, p. 939-946, 2012.

SOUZA, L. G.; GONZÁLES, R. G. Satellite simulator control system design using SDRE method. **Journal of Mechanics Engineering and Automation**, v. 1, n. 1, p. 32-37, 2011.

SOUZA, L. C. G.; ARENA, V. R. Design of satellite attitude control algorithm based on the SDRE method using gas jets and reaction wheels. **Journal of Engineering**, v. 2013, Article ID 318072, 8 pages, 2013.
doi:10.1155/2013/318072

STEIN, G.; ATHANS, M. The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 32, n. 2, p. 105-114, 1987

TADJINE, M.; TAYEBI, A.; RACHID, A. On robust LQG/LTR control design. In: Decision and Control, 35., 1996, Kobe, Japan. **Proceedings...** Kobe, Japan: IEEE, 1996. p. 4772-4773.

TSAI, Huan-Liang et al. Optimal satellite attitude control system design by combination of eigenstructure assignment and LEQG/LTR methods. In: WORLD CONGRESS ON INTELLIGENT CONTROL AND AUTOMATION (WCICA 2004), 5., 2004, Hangzhou, China.. **Proceedings...** IEEE, 2004. p. 407-412.

ZHANG, YI. Optimal control using state dependent Riccati equation (SDRE) for a flexible cable transporter system with arbitrarily varying lengths. In: IEEE CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS (CCA 2005), 2005, Toronto. **Proceedings...** Toronto: IEEE, 2005. p. 1063-1068.

ZHANG, Z.; FREUDENBERG, J. S. Loop transfer recovery for nonminimum phase plants. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 35, n. 5, p. 547-553, 1990.

ANEXO A – DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO $h(x, \hat{x})$

Esta definição foi apresentada em Banks et al (2007).

Dado um sistema não linear que pode ser escrito na forma

$$\dot{x}(t) = A(x)x(t) \quad (\text{A.1})$$

$$y(t) = C(x)x(t)$$

Com $x \in \mathbb{R}^n$ e $C(x)$ uma função matricial contínua.

Então, sendo um sistema da forma

$$\dot{x}_e(t) = A(x_e)x_e(t) + L(x_e)(y - C(x_e)x_e) \quad (\text{A.2})$$

$$L(x_e) = \Gamma(x_e)C^T(x_e)V^{-1}$$

um estimador de estados para A.1 obtido pela solução da equação de Riccati dual que minimiza o funcional

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\hat{x}^T U \hat{x} + \hat{u}^T V \hat{u}) dt \quad (\text{A.3})$$

com a seguinte dinâmica associada

$$\dot{\hat{x}}(t) = A^T(\hat{x})\hat{x} + C^T(\hat{x})\hat{u} \quad (\text{A.4})$$

Então escrevendo os parâmetros sob a forma

$$A(x) = A_0 + \Delta A(x) \quad (\text{A.5})$$

$$C(x) = C_0 + \Delta C(x)$$

$$V(x) = \Gamma_0 + \Delta \Gamma(x)$$

tem-se

$$L(x) = L_0 + \Delta L(x) \quad (\text{A.6})$$

$$L_0 = L_0 C_0^T V^{-1} \quad (\text{A.7})$$

Definindo o erro de estimação como

$$e(t) = x(t) - x_e(t) \quad (\text{A.8})$$

vem

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_e(t) \quad (\text{A.9})$$

Substituindo A.1 e A.1 em A.9 e utilizando as relações A.5 a A.7 obtêm-se

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & (A_0 - L_0 C_0)e + \Delta A(x)x - \Delta A(x_e)x_e \\ & - L(x_e)(\Delta A(x)x - \Delta A(x_e)x_e) - \Delta L(x_e)C_0 e \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Definindo

$$\begin{aligned} g(x, x_e, e) = & \Delta A(x)x - \Delta A(x_e)x_e - L(x_e)(\Delta A(x)x - \Delta A(x_e)x_e) \\ & - \Delta L(x_e)C_0 e \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Vem

$$\dot{e}(t) = (A_0 - L_0 C_0) + g(x) \quad (\text{A.12})$$

Considerando que $A(x)$, $\Delta A(x)$, $C(x)$ e $\Delta C(x)$ são localmente Lipschitz, então definindo

$$\begin{aligned} h(x, x_e) = & \kappa_A \|x\| + \|\Delta A(x_e)\| + \kappa_C \|x\| \|L(x_e)\| + \|\Delta C(x_e)\| \|L(x_e)\| \\ & + \|\Delta L(x_e)\| \|C_0\| \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

É possível mostrar que

$$\|g(x, x_e, e)\| \leq h(x, x_e) \|e\| \quad (\text{A.14})$$

ANEXO B – TEOREMAS

Como a demonstração do Teorema do Valor Médio utiliza o Teorema de Rolle, segue abaixo este último com sua demonstração:

Teorema de Rolle

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) , com $f(a) = f(b) = 0$.

Então existe um número c no intervalo aberto (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração

Se $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$, então $f'(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$ e o número c pode ser qualquer um entre a e b .

Se $f(x) \neq 0$ para algum $x \in (a, b)$, como f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, sabe-se que f tem um valor máximo absoluto em $[a, b]$ e um valor mínimo absoluto em $[a, b]$. Por hipótese $f(a) = f(b) = 0$, assim conclui-se que f terá um valor máximo absoluto positivo em algum c_1 em (a, b) , ou um valor mínimo absoluto negativo em algum c_2 em (a, b) , ou ambos. Deste modo para $c = c_1$ ou $c = c_2$ conforme seja o caso tem-se um extremo absoluto em um ponto interior do intervalo $[a, b]$. Portanto, o extremo absoluto $f(c)$ é também um extremo relativo, e como $f'(c)$ existe por hipótese, resulta que $f'(c) = 0$.

Teorema do Valor Médio (Leithold, 1977)

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) .

Então existe um número c no intervalo aberto (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (\text{B.1})$$

Demonstração

Definindo os pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$, então, uma equação da reta que passa por A e B é

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

ou

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Agora, se $F(x)$ determina a distância vertical entre um ponto $(x, f(x))$ no gráfico da função f e o ponto correspondente na reta secante que passa por A e B , então

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a) \quad (\text{B.2})$$

Esta função $F(x)$ satisfaz as três condições da hipótese do Teorema de Rolle, então, existe um c no intervalo aberto (a, b) tal que $F'(c) = 0$. Mas

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Assim

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Portanto, existe um número c em (a, b) tal que

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ou seja,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o que prova o Teorema.

Teorema 4.15 (Khalil, 2002)

Seja $x=0$ um ponto de equilíbrio para o sistema não linear

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{B.3}$$

onde $f: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é continuamente diferenciável, com $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < r\}$ e a matriz jacobiana $\partial f / \partial x$ é limitada e Lipschitz em D , uniformemente em t .

Seja

$$A(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right|_{x=0} \tag{B.4}$$

Então, a origem é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável para o sistema não linear se ela é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável para o sistema linear

$$\dot{x} = A(t)x \tag{B.5}$$

Prova: Desde que o sistema linear tem um ponto de equilíbrio na origem e $A(t)$ é contínua e limitada, então existe uma matriz positiva definida $P(t)$, limitada, continuamente diferenciável que satisfaz a equação

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + Q(t) \quad (\text{B.6})$$

Onde $Q(t)$ é contínua, positiva definida, e simétrica. Utilizando $V(t, x) = x^T P(t)x$ como uma função de Lyapunov candidata para o sistema não linear. A derivada de $V(t, x)$ ao longo das trajetórias do sistema é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= x^T P(t)f(t, x) + f^T(t, x)P(t)x + x^T \dot{P}(t)x \\ &= x^T [P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + x^T \dot{P}(t)]x + \\ &2x^T P(t)g(t, x) \\ &= -x^T Q(t)x + 2x^T P(t)g(t, x) \\ &\leq -c_3 \|x\|_2^2 + 2c_2 L \|x\|_2^3 \\ &\leq -(c_3 - 2c_2 L \rho) \|x\|_2^2, \quad \|x\|_2 < \rho \end{aligned}$$

Escolhendo $\rho < \min\{r, 2c_2 L\}$ fica garantido que $\dot{V}(t, x)$ seja negativa definida em $\|x\|_2 < \rho$. Assim ficam satisfeitas em $\|x\|_2 < \rho$ todas as condições para que a origem seja exponencialmente estável.

Corolário 4.3 (Khalil, 2002):

Seja $x=0$ um ponto de equilíbrio para o sistema não linear $\dot{x} = f(x)$, onde $f(x)$ é continuamente diferenciável em alguma vizinhança de $x = 0$. Seja $A = [\partial f / \partial x](0)$. Então $x = 0$ é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável para o sistema não linear se e somente se A é Hurwitz.

Teorema 5.1 (Khalil, 2002):

Considere o sistema

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(0) = x_0 \quad (\text{B.7})$$

$$\dot{y} = h(t, x, u) \quad (\text{B.8})$$

onde $x \in \mathcal{R}^n$ e $u \in \mathcal{R}^m$ e $y \in \mathcal{R}^p$, $f: [0, \infty) \times D \times D_u \rightarrow \mathcal{R}^n$ é contínua por partes em t e localmente Lipschitz em (x, u) , $h: [0, \infty) \times D \times D_u \rightarrow \mathcal{R}^p$ é contínua por partes em t e contínua em (x, u) , $D \subset \mathcal{R}^n$ é um domínio que contém $x = 0$, e $D_u \subset \mathcal{R}^m$ é um domínio que contém $u = 0$. Para cada $x_0 \in D$, as equações de estado dadas por B.7 e B.8 definem um operador H que designa para cada sinal de entrada $u(t)$ o correspondente sinal de saída $y(t)$. Suponha que $x = 0$ é um ponto de equilíbrio do sistema não forçado

$$\dot{x} = f(t, x, 0) \quad (\text{B.9})$$

Tomando $r > 0$ e $r_u > 0$ tal que $\{\|x\| \leq r\} \subset D$ e $\{\|u\| \leq r_u\} \subset D_u$ e supondo que

- $x = 0$ é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável de B.9, e existe uma função de Lyapunov $V(t, x)$ que satisfaz

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2 \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, 0) \leq -c_3 \|x\|^2 \quad (\text{B.11})$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\| \quad (\text{B.12})$$

para todo $(t, x) \in [0, \infty) \times D$ e algumas constantes positivas c_1, c_2, c_3 e c_4

- f e h satisfazem as desigualdades

$$\|f(t, x, u) - f(t, x, 0)\| \leq L \|u\| \quad (\text{B.13})$$

$$\|h(t, x, u)\| \leq \eta_1 \|x\| + \eta_2 \|u\| \quad (\text{B.14})$$

para todo $(t, x, u) \in [0, \infty) \times D \times D_u$ e algumas constantes não negativas L , η_1 e η_2 .

Então, para cada x_0 com $\|x_0\| \leq r\sqrt{c_1/c_2}$, o sistema representado em B.7 e B.8 é \mathcal{L}_p estável sinal-pequeno ganho-finito para cada $p \in [1, \infty]$. Em particular para cada $u \in \mathcal{L}_p$ e com $\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|u\| \leq \min\{r_u, c_1 c_3 r / (c_2 c_4 L)\}$, a saída $y(t)$ satisfaz

$$\|y(t)\|_{\mathcal{L}_p} \leq \gamma \|u_\tau\|_{\mathcal{L}_p} + \beta \quad (\text{B.15})$$

Para todo $\tau \in [0, \infty)$, com

$$\gamma = \eta_2 + \frac{\eta_1 c_2 c_4}{c_1 c_3}, \beta = \eta_1 \|x_0\| \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \rho, \text{ onde } \rho = \begin{cases} 1, & \text{if } p = \infty \\ \left(\frac{2c_2}{c_3 p}\right)^{1/p}, & \text{if } p \in [1, \infty) \end{cases}$$

Além disso, se a origem é global exponencialmente estável e todas as suposições são válidas globalmente (com $D = \mathcal{R}^n$ e $D_u = \mathcal{R}^m$), então, para cada $x_0 \in \mathcal{R}^n$, o sistema representado por B.7 e B.8 é \mathcal{L}_p estável ganho-finito para cada $p \in [1, \infty]$.

Demonstração

A derivada de V ao longo das trajetórias de B.7 satisfaz

$$\dot{V}(t, x, u) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, 0) + \frac{\partial V}{\partial x} [f(t, x, u) - f(t, x, 0)] \leq -c_3 \|x\|^2 + c_4 L \|x\| \|u\|$$

Definindo $W(t) = \sqrt{V(t, x(t))}$. Quando $V(t, x(t)) \neq 0$, $\dot{W} = \dot{V}/2\sqrt{V}$. Aplicando B.10 vem

$$\dot{W} = \frac{1}{2} \left(\frac{c_3}{c_2}\right) W + \frac{c_4 L}{2\sqrt{c_1}} \|u(t)\|$$

Quando $V(t, x(t)) = 0$ pode ser verificado que

$$D^+W(t) \leq \frac{c_4L}{2\sqrt{c_1}} \|u(t)\| \quad (\text{B.16})$$

Então

$$D^+W(t) \leq -\frac{1}{2} \left(\frac{c_3}{c_2} \right) W + \frac{c_4L}{2\sqrt{c_1}} \|u(t)\|$$

Para todo valor de $V(t, x(t))$. Pelo Lema da Comparação (Lema 3.4, Khalil, 2002), $W(t)$ satisfaz a desigualdade

$$W(t) \leq e^{-tc_3/2c_2} W(0) + \frac{c_4L}{2\sqrt{c_1}} \int_0^t e^{-(t-\tau)c_3/2c_2} \|u(\tau)\| d\tau$$

Usando B.10, obtém-se

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \|x_0\| e^{-tc_3/2c_2} + \frac{c_4L}{2c_1} \int_0^t e^{-(t-\tau)c_3/2c_2} \|u(\tau)\| d\tau$$

Pode ser verificado que

$$\|x_0\| \leq r \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \text{ e } \sup_{0 \leq \sigma \leq t} \|u(\sigma)\| \leq \frac{c_1 c_3 r}{c_2 c_4 L}$$

Assegura que $\|x(t)\| \leq r$; assim, $x(t)$ permanece dentro do domínio de validade das suposições. Usando B.14, tem-se

$$\|y(t)\| \leq k_1 e^{-at} + k_2 \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \|u(\tau)\| d\tau + k_3 \|u(t)\| \quad (\text{B.17})$$

onde

$$k_1 \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \|x_0\| \eta_1, \quad k_2 = \frac{c_4 L \eta_1}{2c_1}, \quad k_3 = \eta_2, \quad a = \frac{c_3}{2c_2}$$

Definindo

$$y_1(t) = k_1 e^{-at}, \quad y_2(t) = k_2 \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \|u(\tau)\| d\tau \quad \text{e} \quad y_3(t) = k_3 \|u(t)\|$$

Supondo que $u \in \mathcal{L}_{pe}^m$ para algum $p \in [1, \infty]$, verifica-se que

$$\|y_{2\tau}\|_{\mathcal{L}_p} \leq \frac{k_2}{a} \|u_\tau\|_{\mathcal{L}_p} \quad \text{e} \quad \|y_{3\tau}\|_{\mathcal{L}_p} \leq k_3 \|u_\tau\|_{\mathcal{L}_p}$$

Para o termo $y_1(t)$, verifica-se

$$\|y_{1\tau}\|_{\mathcal{L}_p} \leq k_1 \rho, \quad \text{onde} \quad \rho = \begin{cases} 1, & \text{if } p = \infty \\ \left(\frac{1}{ap}\right)^{1/p}, & \text{if } p \in [1, \infty) \end{cases}$$

Assim pela desigualdade do triângulo, B.15 é satisfeita com

$$\gamma = k_3 + \frac{k_2}{a}, \quad \beta = k_1 \rho$$

Quando todas as suposições valem globalmente, não há necessidade de restringir $\|x_0\|$ ou os valores instantâneos de $\|u(t)\|$. Assim B.15 é satisfeita para cada $x_0 \in \mathcal{R}^n$ e $u \in \mathcal{L}_{pe}$.

A existência das relações B.10 e B.12 podem ser mostradas utilizando o Teorema de Lyapunov Reverso (Teorema 4.14 em Khalil, 2002).

Corolário 5.1(Khalil, 2002):

Suponha que, em uma vizinhança de $(x = 0, u = 0)$, a função $f(t, x, u)$ é continuamente diferenciável, as matrizes Jacobianas $[\partial f / \partial x]$ e $[\partial f / \partial u]$ são limitadas, uniformemente em t , e $h(t, x, u)$ satisfaça B.14. Se a origem $x = 0$ é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável do sistema não forçado

representado em B.9, então existe uma constante $r_0 > 0$ tal que para cada x_0 com $\|x_0\| < r_0$, o sistema representado em B.7 e B.8 seja \mathcal{L}_p estável sinal-pequeno ganho-finito para cada $p \in [1, \infty]$. Ademais, se todas as suposições são válidas globalmente e a origem $x = 0$ é um ponto de equilíbrio global exponencialmente estável de B.9, então para cada $x_0 \in \mathcal{R}^n$, o sistema em B.7 e B.8 é \mathcal{L}_p estável com ganho-finito para cada $p \in [1, \infty]$.

ANEXO C – TUTORIAL PARA APLICAÇÃO DA TÉCNICA LQG/LTR VIA SDRE

Este anexo contém o roteiro simplificado para aplicação da técnica LQG/LTR utilizando a metodologia SDRE, incluindo alguns detalhes, que foram omitidos no Capítulo 4 para não comprometer a clareza ou quebrar a sequência do conteúdo do texto.

1. Escolha da Parametrização SDE

Colocar as equações do sistema não linear em uma forma parametrizada com coeficientes dependentes dos estados, que seja estabilizável e detectável.

2. Avaliação dos Erros de Modelagem

Realizar um estudo das incertezas sobre as equações não lineares originais e determinar, a partir deste estudo, uma estimativa de um limite para o erro, modelado na forma multiplicativa (Cruz, 1996), nas equações parametrizadas.

3. Definição do Modelo de Projeto

Realizar os acréscimos, quando necessários, à dinâmica da planta, representada pelas equações parametrizadas.

4. Definição da Malha Objetivo

Estabelecer o desempenho desejado, traduzido na escolha da malha objetivo, baseada nas especificações no domínio do tempo ou no domínio da frequência;

5. Projeto de um Compensador LQG/LTR para o Sistema Linear Obtido da Parametrização SDE Calculada em um Ponto Representativo da Faixa de Operação Prevista para o Sistema

Estabelecer um vetor de estados dentro da faixa de operação do sistema e realizar o projeto do compensador LQG/LTR convencional para o sistema linear obtido pela avaliação das equações dependentes dos estados para este vetor de estados específico.

6. Teste do Projeto Inicial sobre Toda a Faixa de Operação do Sistema

O projeto inicial mencionado no item anterior é testado, utilizando um programa de simulação que realiza, a cada passo de discretização de um período simulado, as seguintes tarefas:

- Integração das equações de estado reais não lineares;
- Cálculo das Equações Dependentes dos Estados;
- Solução das equações de Riccati associadas ao Filtro de Kalman e ao Regulador Linear Quadrático;
- Cálculo dos ganhos do Filtro e do controlador;
- Exame dos zeros de transmissão do sistema representado pelas Equações Dependentes dos Estados;
- Cálculo e plotagem dos ganhos principais da Malha Objetivo;
- Cálculo e plotagem dos ganhos principais de malha da planta em série com o compensador;
- Cálculo e plotagem da resposta temporal do sistema.

7. Ajuste dos Parâmetros de Projeto

Após a simulação é realizada a análise dos dados gerados e se necessário os parâmetros de projeto são ajustados, repetindo-se os passos 5 e 6 até a obtenção do desempenho desejado sobre toda a faixa de operação do sistema.