Análise do Conversor Ćuk

Everson Mattos, Henrique Figueira, Felipe Fernandes
Acadêmicos da disciplina de Conversores Estáticos, PPGEE,Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria–RS, Brasil
everson.mattos@gmail.com,hhfiqueira@gmail.com,fleipetfernandes83@gmail.com

5 de Julho de 2014

Resumo

Este trabalho apresenta uma analise a cerca das etapas de operação do conversor Ćuk. Além disso, se apresenta o calculo dos ganhos estáticos no modo de condução continuo e descontinuo, CCM e DCM respectivamente.

Palavras chave

Conversor Ćuk, CCM e DCM, Ganhos estáticos.

1 Introdução

O conversor Ćuk recebe esse nome em homenagem ao inventor Dr. Slobodan Ćuk. Este conversor não é isolado, possui dois indutores, dois capacitores e é comutado por meio de uma chave. Ele foi desenvolvido tomando como base o conversor Buck-Boost e fornece uma tensão CC invertida na saída [1]. A vantagem é que esse conversor fornece uma tensão de saída regulada com eficiência maior, considerando o uso de componentes idênticos, caso seja usado um duplo buck-boost. Pode-se ainda, usar indutores com estrutura magnética integrada que auxilia na redução do ripple das correntes e das perdas de comutação [2].

2 Restrições, Simplificações e Definições

As análises que se seguem consideram que o conversor não apresenta perdas de potência (rendimento 100%). Os interruptores (transistores e diodos) são ideais, o que significa que, quando em condução, apresentam queda de tensão nula e quando abertos, a corrente por eles é zero. Além disso, a transição de um estado a outro é instantânea, também considera-se que o ripple de saída é muito pequeno podendo ser desconsiderado. Considera-se, ainda, que para o circuito em estudo que os interruptores comutam a uma dada frequência (cujo período será designado por T_s), com um tempo de condução do transistor igual a t_{on}. A relação

$$D = \frac{t_{on}}{T_s}$$

e chamada de largura de pulso, ciclo de trabalho, razão cíclica (duty-cycle).

A obtenção das características estáticas (relação entre a tensão de saída e a tensão de entrada, por exemplo) é feita a partir da imposição de condições de regime permanente. De modo geral considera-se que não há fluxo residual no indutor ao término de um período e/ou não há variação de cargar no capacitor, ou seja, em cada período de comutação, a tensão média em um indutor é nula, ou ainda de que a corrente média em um capacitor é nula.

Este trabalho estudará o conversor Ćuk. Será equacionado as malhas e os nós do conversor, apresentando as etapas de operação e o ganho estático de tensão. Posteriormente, será apresentado graficamente 4 ábacos que auxiliam o projetista a definir a razão cíclica de operação do conversor de acordo com a aplicação desejada.

3 Modos de Operação

De modo geral a análise em regime permanente dos conversores CC-CC estão centradas na premissa que os componentes são não dissipativos, ou seja, a potência média no indutor

$$p_L(t) = v_L(t)i_L(t) \;\; \langle p_L(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T p_L(\tau)d\tau = 0$$

onde T é um período, assim escrito de outra forma tem-se:

$$\langle p_L(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T v_L(\tau)i_L\tau d\tau = 0$$

substituindo $v_L(t)$ fica:

$$\langle p_L(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{Ldi(\tau)}{d\tau}i_L(\tau)d\tau = 0$$

fazendo as simplificações fica:

$$\langle p_L(t)\rangle = \frac{L}{T}\int_0^T i_L(\tau)di(\tau) = 0$$

assim resulta em:

$$\langle p_L(t)\rangle = \frac{L}{T}(i_L^2(T) - i_L^2(0)) = 0$$

essa restrição é que a potência média no indutor durante um período é igual a zero. Há uma segunda restrição adotada para o indutor que é não possuir fluxo residual isso pode ser visto com:

$$v_L(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt}$$

Assim considera-se que a tensão média no indutor seja nula:

$$\langle v_L(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T v_L(\tau)d\tau = 0$$

escrito de outra forma

$$\langle v_L(t)\rangle = \frac{L}{T}(i_L(T) - i_L(0)) = 0$$

Os modos de operação, funcionamento, do conversor Ćuk, seguem o mesmo raciocínio dos demais conversores, ou seja, possui basicamente três modos de operação um CCM, modo de condução contínua, DCM, modo de condução descontínua, e a fronteira entre os dois modos.

3.1 Modo CCM

Neste modo temos:

4 Análise Teórica do Conversor Ćuk

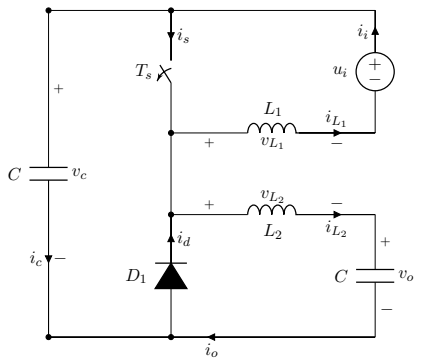

Figura 1: Circuito conversor Ćuk

4.1 Análise de Malhas

$$v_i - v_{L_1} - v_s = 0$$

$$v_{L_1} = v_1 - v_s \tag{1a}$$

$$v_o + v_D + v_{L_2} = 0$$

$$v_{L_2} = -v_o - v_D \tag{1b}$$

A equação da malha da chave fica:

$$-v_c + v_s + v_{L_2} + v_o = 0$$

$$v_{L_2} = v_c - v_o - v_s \tag{1c}$$

A equação da malha do diodo é dada por:

$$-v_c + v_i + v_{L_1} - v_D = 0$$

$$v_{L_1} = v_i - v_c - v_D = 0 \tag{1d}$$

A equação da malha externa é:

$$-v_c + v_i + v_{L_1} + v_{L_2} - v_o = 0$$

$$v_{L_1} - v_{L_2} = v_i - v_o - v_c = 0 \tag{1e}$$

A equação de equilíbrio estático fica:

$$-v_c + v_i + v_{L_1} + v_{L_2} - v_o = 0$$

$$v_{L_1} = v_{L_2} = 0$$

$$v_c = v_i - v_o \tag{1f}$$

As equações dos nós são:

$$i_s + i_D = i_{L_1} + i_{L_2} \tag{1g}$$

$$i_s + i_c = i_i = i_{L_1} \tag{1h}$$

$$i_D - i_c = i_o = i_{L_2} \tag{1i}$$

5 Análise Temporal

Um resumo da análise de nós e malhas e dos intervalos intervalos é mostrado na tablela 5

Tabela 1: Intervalos de funcionamento

Etapa	Evento	intervalo	Malhas	Nós
1	Magnetização	$0 < t < DT_s$	$v_s = 0\ v_D = v_c$	$i_s = 0\ i_D > 0$
2	Desmagnetizaçõa	$DT_s < t < \Delta_1 T_s$	$v_s = v_c\ v_D = 0$	$i_s > 0\ i_D = 0$
3	Corrente Costante	$\Delta_1 T_s < t < T_s$	$v_s = 0\ v_D = v_c$	$i_s > 0\ i_D = 0$

Etapa 1

A equação da malha de entrada fica:

$$v_{L_1} = v_i$$

da malha de saída é:

$$v_{L_2} = -v_o - v_c = v_i$$

e da malha externa:

$$v_{L_1} - v_{L_2} = v_i + v_o - v_c$$

e

$$v_{L_1} - vL_2 = 0$$

As equações dos nós nessa etapa ficam:

$$i_s = i_{L_1} + i_{L_2}$$

e

$$i_s = i_{L_1} - i_c$$

também

$$i_{L_2} = -i_c$$

Etapa 2

A equação da malha de entrada fica:

$$v_{L_1} = v_i$$

da malha de saída é:

$$v_{L_2} = -v_o$$

e da malha externa:

$$v_{L_1} - v_{L_2} = 0$$

As equações dos nós nessa etapa ficam:

$$i_D = i_{L_1} + i_{L_2}$$

e

$$i_{L_1} = i_c$$

também

$$i_D = i_{L_2} + i_c$$

Etapa 3

A equação da malha de entrada fica:

$$v_{L_1} = 0$$

da malha de saída é:

$$v_{L_2} = 0$$

e da malha externa:

$$v_{L_1} + v_{L_2} = 0$$

As equações dos nós nessa etapa ficam:

$$i_{L_1} + i_{L_2} = 0$$

e

$$i_{L_1} = i_c$$

também

$$i_{L_2} = -i_c$$

6 Circuitos Equivalentes

Da primeira etapa (Etapa 1) resulta que:

$$v_{L_1} = v_{L_2} = v_i$$

e

$$i_s = i_{L_1} + i_{L_2}$$

isso equivale ao circuito da figura 6

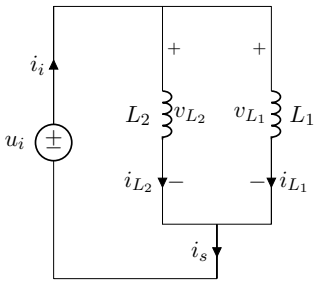

Figura 2: Circuito Equivalente da Etapa 1

Para a Etapa 2, as equações resultam em:

$$v_{L_1} = v_{L_2} = -v_o$$

e

$$i_D = i_{L_1} + i_{L_2}$$

isso equivale ao circuito da figura 6

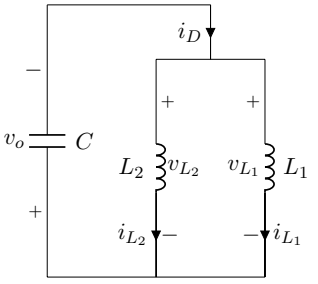

Figura 3: Circuito equivalente para Etapa 2

Para a Etapa 3, as equações resultam em:

$$v_{L_1} = v_{L_2} = 0$$

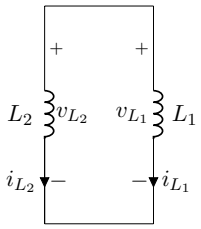

Figura 4: Circuito equivalente para Etapa 3

e

$$i_{L_1} + i_{L_2} = 0$$

isso equivale ao circuito da figura 6

$$i_D - i_c = i_o = i_{L_2} \tag{4}$$

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \tag{5}$$

7 Relação Entre as Correntes

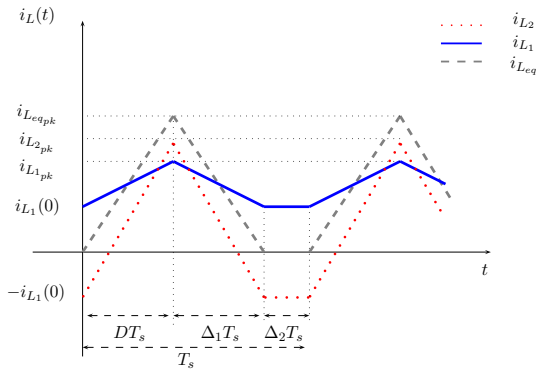

Figura 5: Formas de Onda do Conversor Ćuk

Pela Figura 5, nota-se que

$$L_{eq} < L_2 < L_1$$

então

$$i_{L_{eq}} > i_{L_2} > i_{L_1}$$

a energia equivalente é dada por:

$$E_{eq} = \frac{1}{2} L_{eq} i_{Leq}^2$$

e

$$E_{eq} = E_{L_1} + E_{L_2}$$

e

$$E_{eq} = \frac{1}{2} L_1 i_{L_1}^2 + \frac{1}{2} L_2 i_{L_2}^2$$

assim, considerando-se que

$$\int_0^{T_s} v_{Leq}(t) dt = 0$$

então,

$$\int_0^{T_s} (v_{L_1} - v_{L_2}) dt = 0$$

para o CCM temos:

$$\int_0^{T_s} (v_{L_1} - v_{L_2}) dt + \int_{DT_s}^{T_s} (v_{L_1} - v_{L_2}) dt = 0$$

assim

$$\int_0^{T_s} (v_{L_1} - v_{L_2}) dt + \int_{DT_s}^{T_s} (v_{L_1} - v_{L_2}) dt = 0$$

assim,

$$2 v_i D T_s + 2(-v_o)(T_s - D T_s) = 0$$

logo

$$2 v_i D = 2 V_o (1 - D)$$

então fica:

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{D}{(1 - D)} \tag{6}$$

encontra-se o ganho de corrente, considerando $P_i = P_o$:

$$\frac{i_o}{i_i} = \frac{1}{\frac{D}{(1-D)}} \tag{7}$$

8 Para o DCM temos

$$\int_0^{DT_s} (v_{L_1} + v_{L_2}) dt + \int_{DT_s}^{(D+\Delta_1)T_s} (v_{L_1} + v_{L_2}) dt + \int_{(D+\Delta_1)T_s}^{T_s} (v_{L_1} + v_{L_2}) dt = 0$$

resolvendo as integrais fica:

$$(v_i + v_i)(DT_s) + ((-v_o) + (-v_o)[(D+\Delta_1)T_s - DT_s] + 0 = 0$$

simplificando:

$$2 v_i D T_s + 2(-v_o)((D + \Delta_1)T_s - D T_s) = 0$$

logo:

$$2 v_i D - 2 v_o \Delta_1 = 0$$

o que resulta em:

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{D}{\Delta_1} \tag{8}$$

Faz-se necessário encontrar Δ_1, já que é uma variável intermediária e não pertence efetivamente ao circuito. Pode-se encontrá-lo calculando-se a área do triângulo da figura 5

$$\langle i_{L_{eq}} \rangle = \frac{1}{T_s} \frac{(D + \Delta_1) T_s i_{pk}}{2} \tag{9a}$$

$$i_{pk} = \frac{v_o \Delta_1 T_s}{L_{eq}} \tag{9b}$$

Substituindo 9b em 9a fica:

$$\langle i_{L_{eq}} \rangle = \frac{1}{2} \frac{(D + \Delta_1) T_s v_o \Delta_1 T_s}{L_{eq}} \tag{9c}$$

Ou escrito de outra forma:

$$2L_{eq}\langle i_{L_{eq}}\rangle = (D+\Delta_1)\Delta_1 V_o T_s \tag{9d}$$

Lembrando que

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{D}{\Delta_1} \tag{9e}$$

isolando v_o tem-se:

$$v_o = \frac{Dv_i}{\Delta_1} \tag{9f}$$

Substituindo a equação 9f em 9d fica:

$$2L_{eq}\langle i_{L_{eq}}\rangle = (D+\Delta_1)\Delta_1 \frac{Dv_i}{\Delta_1} T_s \tag{9g}$$

simplificando e isolando Δ_1 tem-se:

$$\Delta_1 = \frac{2L_{eq}\langle i_{L_{eq}}\rangle}{DV_i T_s} - D \tag{9h}$$

da equação 9h, substituindo na equação 8, encontra-se o ganho de tensão:

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{D}{\frac{2L_{eq}\langle i_{L_{eq}}\rangle}{DV_i T_s} - D} \tag{10}$$

encontra-se o ganho de corrente, considerando $P_i = P_o$:

$$\frac{i_o}{i_i} = \frac{1}{\frac{D}{D - \frac{2L_{eq}\langle i_{L_{eq}}\rangle}{DV_i T_s}}} \tag{11}$$

9 Fronteira entre CCM e DCM

Quando a soma da corrente nos indutores é nula, pode-se calcular a fronteira entre CCM e DCM. São então, definidas quatro fronteiras relacionando v_{in} e v_o com I_{in} e I_o. A equação 12 apresenta a fronteira com a tensão de entrada v_{in} como constante pela corrente de entrada. Usando a equação do ganho estático de tensão calcula-se a fronteira para a tensão de saída v_o como constante, equação 13.

$$\langle i_{L_1}\rangle = \frac{v_{in}T_s}{2L_{eq}} D^2 \tag{12}$$

$$\langle i_{L_2}\rangle = \frac{v_o T_s}{2L_{eq}} D(1-D) \tag{13}$$

A equação 14 apresenta a fronteira com a tensão de entrada v_{in} como constante pela corrente de saída.

$$\langle i_{o_{L_1}}\rangle = \frac{v_{in}T_s}{2L_{eq}} D(1-D) \tag{14}$$

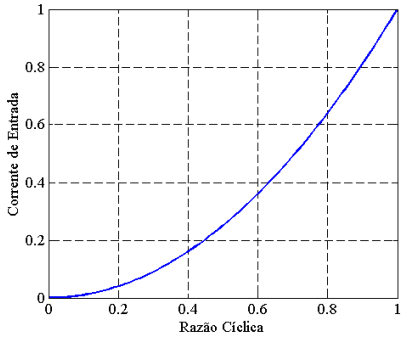

Figura 6: fronteira para $i_o(t)$ com $v_in(t) = V_{in}$

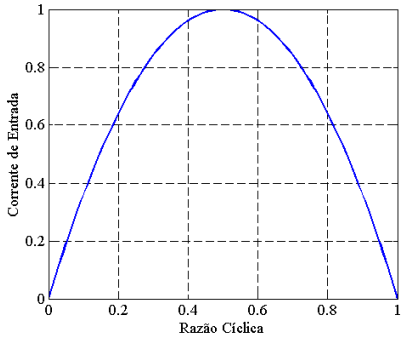

Figura 7: fronteira para $i_o(t)$ com $v_o(t) = V_o$

Usando a equação do ganho estático de tensão calcula-se a fronteira para a tensão de saída v_o como constante, equação 15.

$$\langle i_{o_{L_2}}\rangle = \frac{v_o T_s}{2L_{eq}}(1-D)^2 \tag{15}$$

As respectivamente as fronteiras calculadas nas equações 16, 17, 17 e 18 e suas figuras estão abaixo. A equação 16 apresenta a relação razão cíclica do conversor Ćuk pela corrente de saída (tensão de entrada constante), a figura 9 representa graficamente essa relação.

$$D = \sqrt{\frac{1}{4}\frac{v_o}{v_{in}}\frac{\langle i_o\rangle}{max\{i_{o_{L1}}\}}} \tag{16}$$

A equação 17 apresenta a relação razão cíclica do conversor Ćuk pela corrente de saída (considerando a tensão de entrada constante), a figura 9 representa graficamente essa relação.

$$D = \frac{v_o}{v_{in}}\sqrt{\frac{\langle i_o\rangle}{max\{i_{o_{L2}}\}}} \tag{17}$$

A equação 18 apresenta a relação razão cíclica do conversor Ćuk pela corrente de saída (considerando a tensão de entrada como constante), a figura 9 representa graficamente essa relação.

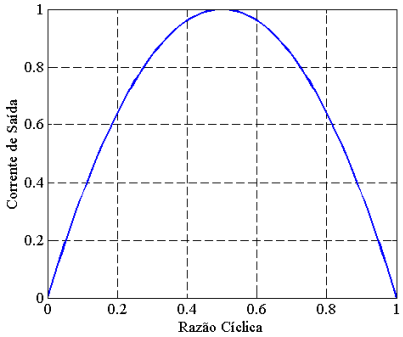

Figura 8: fronteira para $i_{in}(t)$ com $v_{in}(t) = V_{in}$

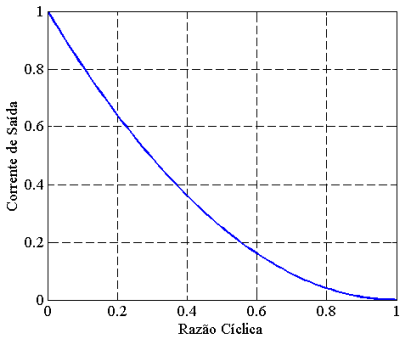

Figura 9: fronteira para $i_{in}(t)$ com $v_o(t) = V_o$

$$D = \sqrt{\frac{\langle i_{in} \rangle}{max\{i_{in_{L1}}\}}} \tag{18}$$

A equação 19 apresenta a relação razão cíclica do conversor Ćuk pela corrente de saída (considerando a tensão de entrada como constante), a figura 9 representa graficamente essa relação.

$$D = \sqrt{\frac{1}{4}\frac{v_o}{v_{in}}\frac{\langle i_o \rangle}{max\{i_{o_{L1}}\}}} \tag{19}$$

10 Conclusão

O conversor Ćuk permite obter na saída uma tensão maior, igual ou menor que a tensão de entrada com a polaridade invertida em relação a entrada. O uso de Ćuk bidirecional isolado permite obter tensão de saída com a mesma polaridade que a tensão de entrada, bastando para isso que o acoplamento magnético esteja colocado corretamente.

Referências

[1] R. Erickson and D. Maksimovic, *Fundamentals of Power Electronics*. Power electronics, Springer, 2001.

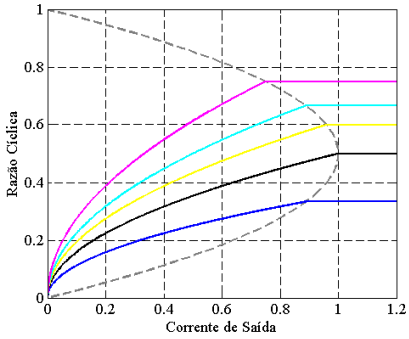

Figura 10: $i_o(t)$ com $v_in(t) = V_{in}$

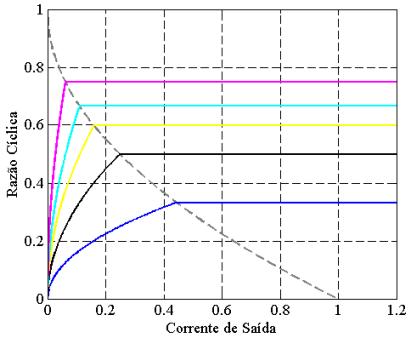

Figura 11: $i_o(t)$ com $v_o(t) = V_o$

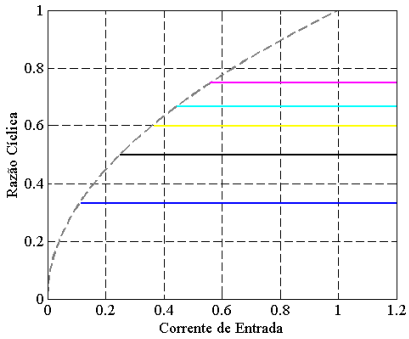

Figura 12: $i_{in}(t)$ com $v_{in}(t) = V_{in}$

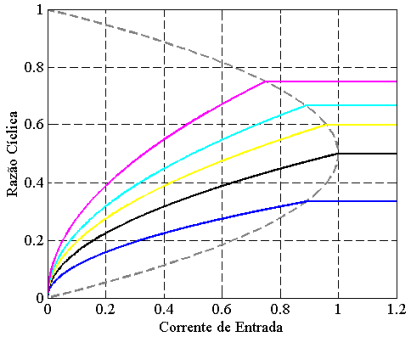

Figura 13: $i_{in}(t)$ com $v_o(t) = V_o$

[2] D. Arrabaça and S. Gimenez, *Conversores de Energia Elétrica CC-CC Para Aplicações em Eletrônica de Potência*. Erica, 2013.