

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uso de transformada *wavelet* discreta e gráfico de recorrência para caracterização do sistema de Rössler

Barbara Maximino da Fonseca Reis¹

Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada, INPE, São José dos Campos, SP

Margarete Oliveira Domingues²

Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada, INPE, São José dos Campos, SP

Elbert E. N. Macau³

Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada, INPE, São José dos Campos, SP

Resumo. Um sistema dinâmico possui invariantes que são obtidos por meio do gráfico de recorrência e da análise de quantificação de recorrência. Porém, tais técnicas demandam um alto tempo computacional para a realização de seus cálculos. Para amenizar esse problema, propõem-se uma abordagem que utiliza a transformada *wavelet* discreta para reduzir o tempo computacional ao obter séries temporais suavizadas, com menor quantidade de pontos, que preservam a dinâmica do sistema. Nesse trabalho, a abordagem é aplicada na análise das séries temporais do sistema de Rössler.

Palavras-chave. Sistema Dinâmico, Gráfico de Recorrência, Análise de Quantificação de Recorrência, Transformada *Wavelet* Discreta, Sistema de Rössler.

1 Introdução

Para compreender o mundo físico, são necessárias observações, medidas, análises e previsões dos padrões expressos na natureza. Porém, grande parte desses padrões possuem dinâmicas complexas, não-lineares e não-estacionárias que dificultam a sua compreensão efetiva. Para tentar compreendê-los, utilizam-se métodos como cálculo de dimensão fractal, expoente de Lyapunov, entropia [3]. Esses métodos possuem desvantagens como a necessidade de séries temporais longas, alterações dos resultados devido a presença de ruído e dificuldade para analisar sistemas não-estacionários [5]. O *Gráfico de Recorrência* (*Recurrence Plot* - RP) [3] surge como uma alternativa para o estudo de sistemas complexos. Esse gráfico é uma matriz binária simétrica que indica a proximidade de dois estados diferentes no espaço de fase a partir de uma certa definição de proximidade. Dessa forma, o gráfico de recorrência permite visualizar as estruturas relacionadas ao sistema dinâmico que gerou a série temporal além de estimar os invariantes presentes naquele sistema. Para

¹barbara.reis@inpe.br

²margarete.domingues@inpe.br

³elbert.macau@inpe.br

extrair as informações presentes no gráfico de recorrência, utiliza-se a *Análise de Quantificação de Recorrência* (*Recurrence Quantification Analysis* - RQA). Essa análise gera medidas estatísticas baseadas na ocorrência de pontos e de linhas, diagonais e verticais, do gráfico de recorrência.

Contudo, para séries temporais longas, o cálculo do gráfico de recorrência e de seus respectivos quantificadores demandam um alto custo computacional. Para tentar amenizar essa desvantagem, buscam-se métodos que diminuam a quantidade de pontos e preservem os invariantes do sistema. Yan *et al.* [9] propõem utilizar a transformada *wavelet packet* para obter detalhes de diferentes escalas, enquanto Costa [1] propõem a suavização do gráfico de recorrência.

Baseando-se na ideia de suavização do sinal, esse trabalho visa apresentar a potencialidade da *Transformada Wavelet Discreta* (*Discrete Wavelet Transform* - DWT) [2] como técnica a ser utilizada para reduzir o tempo computacional do cálculo do gráfico de recorrência e de seus quantificadores ao gerar séries suavizadas, com menor quantidade de pontos e equivalente precisão.

2 Fundamentos teóricos

A abordagem proposta nesse trabalho utiliza as técnicas transformada *wavelet* discreta, gráfico de recorrência e análise de quantificação de recorrência.

2.1 Transformada *wavelet* discreta

A transformada *wavelet* discreta é uma transformação integral e linear que utiliza como base uma função *wavelet* analisadora escolhida com certas características de localização, normalização e admissibilidade [2]. Essa transformada permite analisar sinais em multiescalas. Dessa forma, a transformada *wavelet* discreta pode ser usada para obter uma versão suavizada do sinal, com menor quantidade de pontos, que preserve a dinâmica que ele representa em diferentes níveis de resolução. A Figura 1 mostra um exemplo da aplicação da DWT.

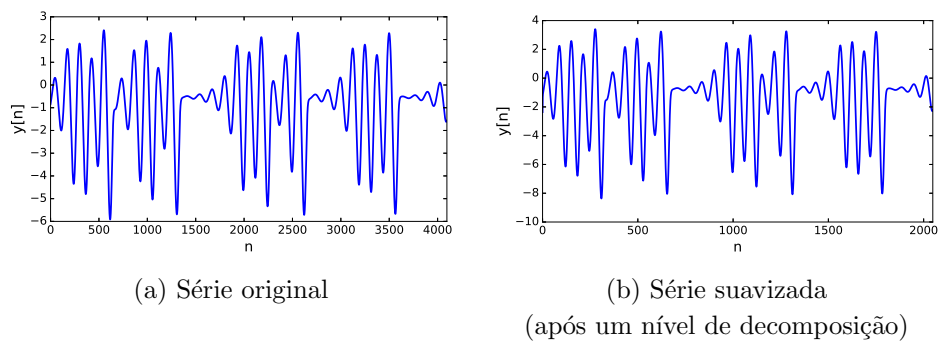


Figura 1: Exemplo da aplicação da transformada *wavelet* discreta. Nesse exemplo, usou-se a *wavelet* ortogonal de Daubechies com ordem 4 de aproximação local com um nível de decomposição.

2.2 Gráfico de recorrência e análise de quantificação de recorrência

O termo recorrência está associado ao *Teorema de Recorrência de Poincaré* [6], o qual garante que, depois de um certo tempo e diante de condições bem gerais, as trajetórias de um sistema, com exceção de algumas muito particulares, em seu espaço de fase retorna tão próximo quanto se queira a um mesmo estado anterior infinitas vezes. Baseando-se nesse teorema, Eckmann, Kamphorst e Ruelle [3] criaram o gráfico de recorrência para visualizar a dinâmica de sistemas recorrentes. Matematicamente, esse gráfico é obtido por:

$$RP_{i,j}^{m,\rho} = \theta(\rho - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|); \quad \vec{x}_i, \vec{x}_j \in \mathbb{R}^m; \quad i, j = 1, \dots, N; \quad (1)$$

em que N é o número de pontos de $\vec{x}$, m é a dimensão de imersão, ρ é o raio de vizinhança no ponto $\vec{x}_i$, $\|\cdot\|$ é a norma de vizinhança e $\theta(\cdot)$ é a função de Heaviside. Se $RP_{i,j}^{m,\rho} = 1$, o estado é dito recorrente e um ponto preto é marcado no gráfico de recorrência. Se $RP_{i,j}^{m,\rho} = 0$, o estado é dito não recorrente e um ponto branco é marcado no gráfico. A Figura 2 mostra os gráficos de recorrência das séries temporais apresentadas na Figura 1.

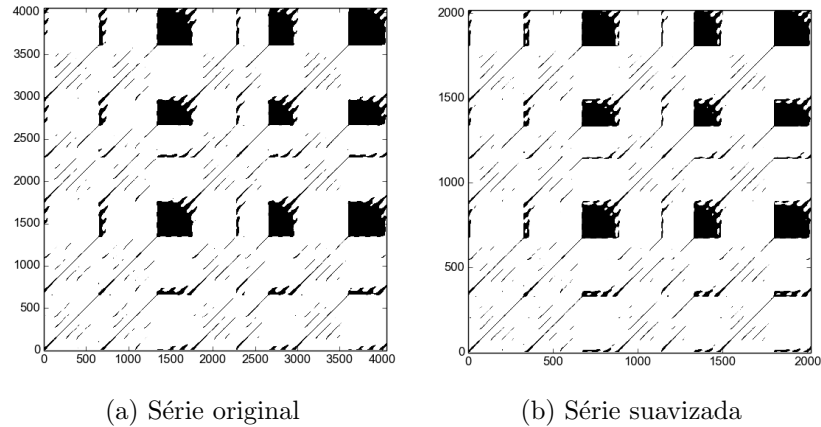


Figura 2: Gráficos de recorrência das séries temporais da Figura 1. Nessa representação, pontos pretos e brancos representam estados recorrentes e não recorrentes, respectivamente.

Para auxiliar a interpretação do gráfico de recorrência, Webber e Zbilut [8] criaram a análise de quantificação de recorrência. Essa análise extrai estatísticas (Tabela 1), baseadas na ocorrência de pontos e de linhas do gráfico de recorrência, que são capazes de quantificar a dinâmica do sistema.

3 Metodologia proposta

Utiliza-se a transformada *wavelet* discreta para reduzir o tempo computacional do cálculo do gráfico de recorrência e de seus quantificadores. Para isso, são necessárias as quatro etapas apresentadas na Figura 3.

A etapa inicial utiliza a transformada *wavelet* discreta para gerar séries suavizadas que preservam a dinâmica do sistema e reduzem a quantidade de pontos das séries temporais.

Tabela 1: Estatísticas da análise de quantificação de recorrência.

Medida	Sigla	Descrição
Taxa de recorrência	RR	Densidade dos pontos recorrentes no gráfico de recorrência.
Determinismo	DET	Razão entre o número de pontos recorrentes que formam estruturas diagonais e todos os pontos recorrentes.
Comprimento máximo das linhas diagonais	$L_{\max}$	Tempo máximo em que dois segmentos de uma trajetória ficam próximos um do outro.
Comprimento médio das linhas diagonais	L	Tempo médio em que dois segmentos de uma trajetória ficam próximos um do outro.
Entropia	ENTR	Usa a distribuição de frequência dos comprimentos das linhas diagonais para indicar a complexidade da estrutura do sistema.
Laminaridade	LAM	Razão entre o número de pontos recorrentes que formam estruturas verticais e todos os pontos recorrentes.
Comprimento médio das linhas verticais	TT	Tempo médio em que dois segmentos de uma trajetória permanecem no mesmo estado.

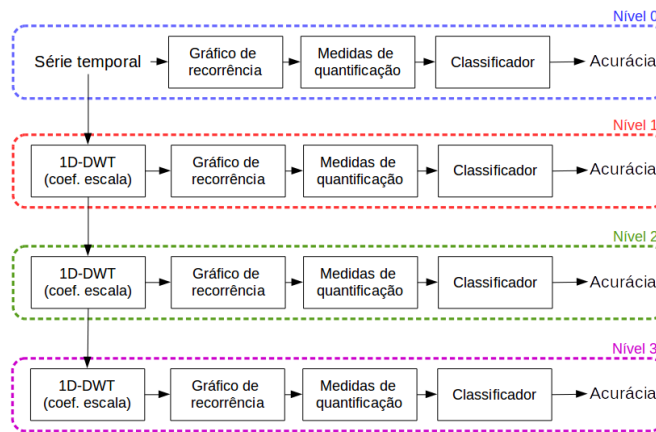


Figura 3: Fluxo da metodologia proposta.

Nessa etapa, usa-se a DWT para obter três níveis de decomposição e, assim, dividir o conjunto de dados em quatro grupos:

- Nível 0: séries temporais originais de tamanho N .
- Nível 1: coeficientes escala do primeiro nível de decomposição de tamanho $N/2$.
- Nível 2: coeficientes escala do segundo nível de decomposição de tamanho $N/4$.
- Nível 3: coeficientes escala do terceiro nível de decomposição de tamanho $N/8$.

A segunda e a terceira etapa compreendem a análise dos dados usando o gráfico de recorrência e a análise de quantificação de recorrência. Assim, para cada nível de decomposição, obtém-se os gráficos de recorrência e extraem-se as sete medidas de quantificação descritas na Tabela 1.

A última etapa utiliza técnicas de aprendizado de máquina para identificar o quanto cada nível de decomposição é eficiente na caracterização da dinâmica presente no conjunto

de dados. Para isso, treina-se os classificadores com as medidas extraídas na etapa anterior e avalia-se quantos registros são classificados corretamente. Assim, a eficiência de cada nível é representado pelo valor da acurácia obtida pelo classificador. Nesse trabalho, adota-se o uso da árvore de decisão J48, disponível no *software* WEKA [4].

4 Resultados e discussões

O sistema de Rössler [7] é um modelo não-linear, tridimensional definido por:

$$\dot{x} = -y - z \quad ; \quad \dot{y} = x + ay \quad ; \quad \dot{z} = b + z(x - c) \quad (2)$$

nos quais x , y e z são as variáveis dinâmicas que definem o espaço de fase e a , b e c são os parâmetros responsáveis por regular a dinâmica do sistema. Dependendo dos valores dos parâmetros de controle, o sistema alterna entre soluções periódicas e caóticas (Figura 4). Em relação a dinâmica caótica, quando é possível definir no espaço de fases um ponto de referência ao redor do qual as trajetórias rotacionam, tem-se um regime de “fase coerente” (Figura 4b). Por outro lado, quando não for possível a definição desse ponto de referência, tem-se um regime de “fase não coerente” e a presença um atrator chamado de funil (Figura 4c).

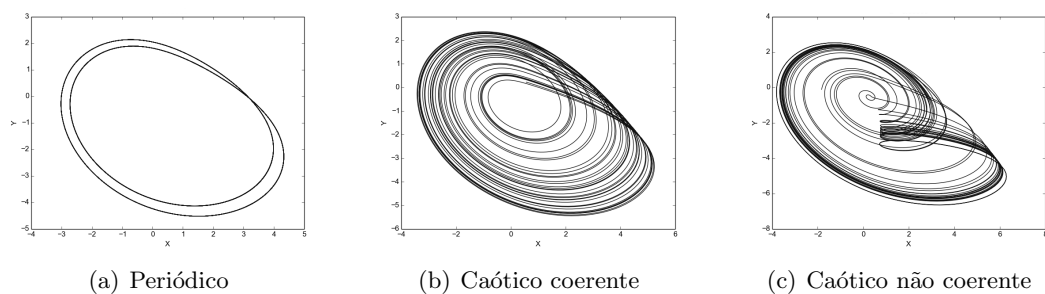


Figura 4: Diferentes comportamentos presentes no sistema de Rössler.

Para visualizar os diversos comportamentos existentes no sistema de Rössler, gerou-se um conjunto de trajetórias com a seguinte configuração: $b = 2$, $c = 4$ e $0,3 \leq a \leq 0,5$ (com $\Delta a = 0,00005$). No total, obteve-se 4001 trajetórias utilizando o método Runge-Kutta de quarta ordem com passo de integração $h = 0,05$ e condição inicial $(x_0; y_0; z_0) = (1; 2; 3)$. Nesse trabalho, analisou-se apenas o componente $y(t)$ com 4096 pontos.

Ao gerar o conjunto de dados, aplicou-se a transformada *wavelet* discreta, usando a *wavelet* ortogonal de Daubechies com ordem 4 de aproximação local em três níveis de decomposição, para obter as séries suavizadas e, assim, formar quatro grupos de estudo. Para cada grupo, obteve-se o gráfico de recorrência e seus respectivos quantificadores usando a configuração da Tabela 2, no qual m é a dimensão de imersão, τ é o atraso, ρ é o raio de vizinhança e l é o tamanho mínimo da linha diagonal. A Tabela 2 também apresenta o tempo para calcular a DWT e realizar o RQA.

Para testar a metodologia foram realizados dois tipos de experimento. O *Experimento 1* teve por objetivo localizar as regiões caótica e não caótica do sistema de Rössler (respeti-

Tabela 2: Parâmetros do RP/RQA e tempo de cálculo de decomposição de cada nível de decomposição do sistema de Rössler.

Nível de decomposição	Configuração RP e RQA				Tempo de cálculo [s]		
	m	τ	ρ	l	DWT	RQA	Total
0	3	20	1	512	-	2103	2103
1	3	14	$\sqrt{2}$	256	23	475	498
2	3	7	2	128	35	126	161
3	3	3	$2\sqrt{2}$	64	41	36	77

Obs.: Tempo referente ao processamento em CPU Intel Core i7-4790 @ 3.60GHz e 8Gb de RAM.

vamente, as regiões azul e vermelha da Figura 5a). Nesse caso, a rotulação de cada registro foi baseada no valor do expoente de Lyapunov das séries do nível 0 de decomposição. No *Experimento 2*, o objetivo era distinguir as regiões não caótica, caótica fase coerente e caótica fase não coerente (respectivamente, as cores azul, rosa e vermelha da Figura 5b). Ao final dessa etapa, cada experimento possui quatro conjuntos de quantificadores, no qual cada registro contém as sete medidas de quantificação e uma classe.

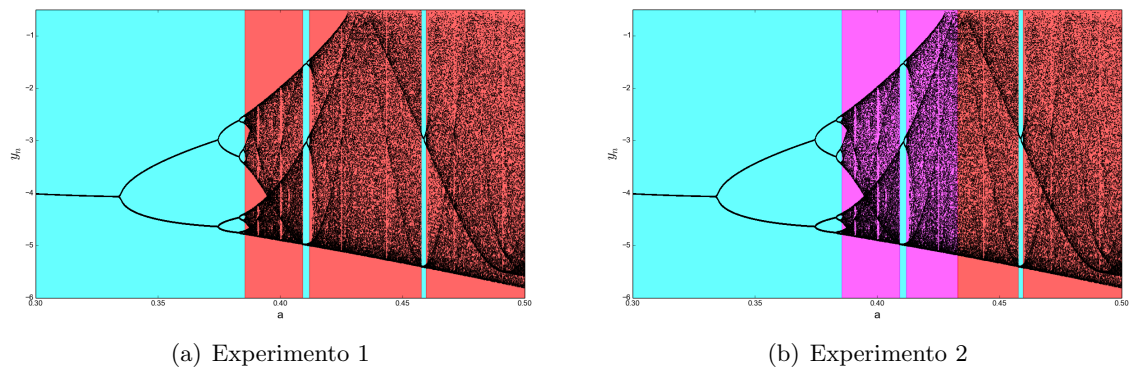


Figura 5: Localização das regiões caótica e não caótica do sistema de Rössler.

Em cada experimento, para cada nível de decomposição, apresentou-se o conjunto dos quantificadores à árvore de decisão J48. Como pode ser observado na Tabela 3, o uso da DWT possibilitou a obtenção de acurácias superiores a 90% nos dois experimentos.

5 Conclusões

Para o sistema de Rössler, a metodologia proposta foi capaz de obter séries compactas que preservaram a dinâmica do sistema, reduziram o tempo computacional do cálculo do RP e RQA e possibilitaram a distinção dos diferentes tipos de comportamento presentes no conjunto de dados.

Tabela 3: Acurácias obtidas em cada experimento quando todos os sete quantificadores são usados como padrões de entrada para a árvore de decisão J48.

Nível de decomposição	Acurácia	
	Experimento 1	Experimento 2
0	0,94	0,88
1	0,96	0,90
2	0,97	0,90
3	0,96	0,90

Agradecimentos

Agradecimentos à CAPES, à FAPESP (proj. 2015/50122 – 0, 2015/25624 – 2) e ao CNPq (proj. 306038/2015 – 3) pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] D. G. B. Costa, Uso de gráfico de recorrência e redes complexas para caracterização de sistemas complexos de baixa dimensão, Dissertação de Mestrado, INPE, 2014.
- [2] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1992. ISBN: 0-89871-274-2.
- [3] J. Eckmann, S. Kamphorst, and D. Ruelle, Recurrence plots of dynamical systems, *Europhysics Letters*, 4:973-977, 1987.
- [4] M. Hall, E. Frank, G. Holmes, B. Pfahringer, P. Reutemann, and I. H. Witten, The weka data mining software: An update. *SIGKDD Explorations*, 11:10-18, 2009.
- [5] N. Marwan, M. C. Romano, M. Thiel, and J. Kurths, Recurrence plots for the analysis of complex systems, *Physics Reports*, 438:237-329, 2007. DOI:10.1016/j.physrep.2006.11.001
- [6] H. Poincaré, Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta mathematica*, 13:1-270, 1890.
- [7] O. E. Rössler, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, 57:397-398, 1976. DOI:10.1016/0375-9601(76)90101-8.
- [8] C. L. Webber Jr, and J. P. Zbilut, Dynamical assessment of physiological systems and states using recurrence plot strategies, *Journal of Applied Physiology*, 76:965-973, 1994.
- [9] J. Yan, C. Zhou, C. Xia, Y. Wang, F. Li, R. Guo, and H. Yan, Recurrence quantification analysis base on wavelet packets for wrist pulse, *2010 3rd International Conference on Biomedical Engineering and Informatics*, 3:1011-1015, 2010. DOI:10.1109/BMEI.2010.5639732.