



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/11.27.11.54-TDI

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UM MODELO
MAGNETO-HIDRODINÂMICO MULTIDIMENSIONAL
NO CONTEXTO DA MULTIRRESOLUÇÃO
ADAPTATIVA POR MÉDIAS CELULARES**

Anna Karina Fontes Gomes

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada, orientada pelos Drs. Margarete Oliveira Domingues, e Odin Mendes Junior, aprovada em 14 de dezembro de 2017.

URL do documento original:

<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3Q4MNNL>

INPE
São José dos Campos
2017

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GBDIR)

Serviço de Informação e Documentação (SESID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

E-mail: pubtc@inpe.br

**COMISSÃO DO CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO
DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (DE/DIR-544):****Presidente:**

Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação (CPG)

Membros:

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (COCST)

Dr. André de Castro Milone - Coordenação-Geral de Ciências Espaciais e Atmosféricas (CGCEA)

Dra. Carina de Barros Melo - Coordenação de Laboratórios Associados (COCTE)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia e Tecnologia Espacial (CGETE)

Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação-Geral de Observação da Terra (CGOBT)

Dr. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CGCPT)

Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Duca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Marcelo de Castro Pazos - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SESID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/11.27.11.54-TDI

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UM MODELO
MAGNETO-HIDRODINÂMICO MULTIDIMENSIONAL
NO CONTEXTO DA MULTIRRESOLUÇÃO
ADAPTATIVA POR MÉDIAS CELULARES**

Anna Karina Fontes Gomes

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada, orientada pelos Drs. Margarete Oliveira Domingues, e Odin Mendes Junior, aprovada em 14 de dezembro de 2017.

URL do documento original:

<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3Q4MNNL>

INPE
São José dos Campos
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Gomes, Anna Karina Fontes.

G585s Simulação numérica de um modelo magneto-hidrodinâmico multidimensional no contexto da multirresolução adaptativa por médias celulares / Anna Karina Fontes Gomes. – São José dos Campos : INPE, 2017.

xxiv + 171 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/11.27.11.54-TDI)

Tese (Doutorado em Computação Aplicada) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2017.

Orientadores : Drs. Margarete Oliveira Domingues, e Odin Mendes Junior.

1. Simulação numérica. 2. Magneto-hidrodinâmica.
3. Multirresolução adaptativa. 4. Volumes finitos. I.Título.

CDU 519.876.5:550.08.013



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

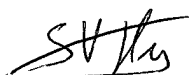
This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aluno (a): **Anna Karina Fontes Gomes**

Título: "SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UM MODELO MAGNETO-HIDRODINÂMICO MULTIDIMENSIONAL NO CONTEXTO DA MULTIRRESOLUÇÃO ADAPTATIVA POR MÉDIAS CELULARES"

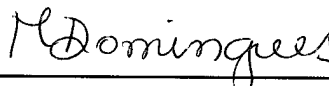
Aprovado (a) pela Banca Examinadora em cumprimento ao requisito exigido para obtenção do Título de **Doutor(a)** em **Computação Aplicada**

Dr. Stephan Stephany



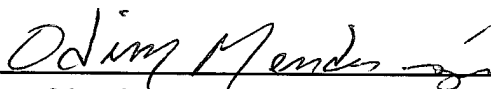
Presidente / INPE / SJC Campos - SP

Dra. Margarete Oliveira Domingues



Orientador(a) / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Odim Mendes Junior



Orientador(a) / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Fernando Manuel Ramos



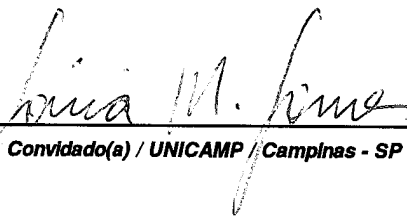
Membro da Banca / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Joaquim José Barroso de Castro



Convidado(a) / ITA / SJC Campos - SP

Dra. Sonia Maria Gomes



Convidado(a) / UNICAMP / Campinas - SP

Este trabalho foi aprovado por:

() maioria simples

(x) unanimidade

São José dos Campos, 14 de dezembro de 2017

*“I tore myself away from the safe comfort of certainties through my
love for truth - and truth rewarded me.”*

SIMONE DE BEAUVOIR

*À memória do meu pai **Julio** e dos meus avós **Cícera** e **Alano**, à minha mãe **Márcia** e aos meus bons amigos.*

AGRADECIMENTOS

Aos Professores. Dra. Margarete Oliveira Domingues e Dr. Odim Mendes, meu muito obrigado pela orientação, amizade e paciência ao longo destes anos.

Aos Professores Dr. Stephan Stephany, Elbert Macau e Joaquim Barroso, pelas sugestões enriquecedoras na proposta de tese.

Aos Professores Dra. Sônia Gomes e Dr. Fernando Ramos, pela participação e sugestões na defesa da tese.

Aos Professores Dra. Maria Roberto, Dr. Delano Gobbi e Dr. Cayo Francisco, pela disponibilidade como suplente da banca da tese.

Aos Drs. Renato Dallaqua e Delano Gobbi pela contribuição dada a minha formação em física de plasma e métodos matemáticos em geofísica espacial.

Ao Dr. Olivier Roussel e Dr. Bastien Di Pierro e FLASH center pela disponibilização dos seus códigos.

Aos Professores Dr. Kai Schneider e Dr. Hervé Guillard e ao CNPq pelo apoio financeiro na participação do evento *Centre d'Été Mathématique de Recherche Avancée en Calcul Scientifique* (CEMRACS) 2014, da Sociedade de Matemática Aplicada e Industrial da França (SMAI), no Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM) em Luminy, Marselha, França.

Ao Dr. Paulo Jauer, pelas discussões elucidativas e ajudas ao longo deste processo.

Ao engenheiro Varlei Menconi, pelo auxílio técnico e boa vontade sempre que foi preciso.

À secretária Jéssica Cristina, por toda a sua boa vontade, carinho e paciência.

Aos meus pais Julio Gomes e Márcia Fontes, por todo amor e apoio que me deram ao longo da minha vida.

Aos Professores e amigos Dr. Augusto C. Barbosa, Dra. Cláudia Concordido e Dr. Carlos Frederico Vasconcelos, por sempre acreditarem em mim ao longo desses anos, pelo incentivo e amizade.

Aos grandes amigos Luiz Gustavo Diniz, José Paulo Marchezi, Müller Lopes e Ro-

drigo Takeshi, por fazerem parte dos melhores momentos desta jornada.

Ao companheiro Renan Cunha, por ter me apoiado todo o tempo e me incentivado a seguir em frente.

Ao INPE pela infraestrutura que possibilitou o desenvolvimento deste trabalho.

Ao CNPq (bolsa de doutorado processo 141741/2013–9 e projeto 306038/2015–3) e FAPESP (2015-25624-2), FINEP 01.12.0527.00 pelo apoio financeiro a essa pesquisa.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

A teoria magneto-hidrodinâmica (MHD) é uma ferramenta útil no estudo do comportamento macroscópico de fluidos magnetizados. Com isso, é possível explorar a modelagem de plasma, que constitui uma importante área de investigação em Ciências Espaciais. O modelo MHD pode ser obtido a partir das equações da eletrodinâmica juntamente com as equações de fluido, e descreve o comportamento de fluidos eletricamente condutores sob a influência de campos magnéticos. O desafio desse tipo de simulação está na obtenção eficiente de resultados coerentes no contexto físico e numérico, visto que se trata de um problema não-linear que obedece restrições físicas. Devido à ocorrência de choques e descontinuidades na solução do modelo MHD, utiliza-se uma discretização pelo método dos volumes finitos, conservando as quantidades do modelo. Uma das equações MHD está associada é entendida como uma restrição associada à divergência do campo magnético, a qual deve ser nula. De forma geral, os fenômenos espaciais exibem estruturas locais dentro dos seus domínios de influência, demandando uma representação de alta resolução para a sua simulação numérica, que relaciona-se a um alto custo computacional, em muitos casos proibitiva na visão computacional atual. Para mitigar esse custo e dar maior eficiência à solução físico-matemática, introduz-se uma análise multirresolução adaptativa. Este tratamento numérico-computacional se fundamenta na ideia que um dado pode ser representado em vários níveis de refinamento, de acordo com seu comportamento local. O objetivo deste trabalho é desenvolver a metodologia para os modelos MHD ideal e resistivo multidimensional no contexto do algoritmo de multirresolução adaptativa por médias celulares e, com a combinação dessas ferramentas, possibilitar futuramente a simulação numérica de problemas relacionados ao plasma espacial de forma eficiente, obtendo ganhos computacionais significantes e garantindo a qualidade da solução numérica obtida. A multirresolução possui formulação teórica com sólida base matemática, apoiada em análise funcional e harmônica, aumentando a confiabilidade do método e a qualidade da adaptabilidade aos problemas de interesse. Neste trabalho, são apresentados os resultados obtidos com a simulação de diversos casos de estudo, com o objetivo de verificar o algoritmo de multirresolução adaptativa no contexto da simulação do modelo MHD multidimensional para vários problemas físicos. A multirresolução adaptativa é eficiente para acelerar o tempo de simulação e reduzir significativamente o número de células necessárias para a simulação, conservando as propriedades físicas do sistema.

Palavras-chave: Simulação numérica. Magneto-hidrodinâmica. Multirresolução adaptativa. Volumes finitos.

NUMERICAL SIMULATION OF A MULTIDIMENSIONAL MAGNETOHYDRODYNAMIC MODEL IN THE CONTEXT OF CELL-AVERAGE ADAPTIVE MULTIREOLUTION

ABSTRACT

The magnetohydrodynamic (MHD) theory is an useful tool to study the macroscopic behavior of magnetized fluid. It allows us to explore the plasma modeling, which constitutes an important field of investigation in Space Sciences. The MHD model can be obtained from the electrodynamics equations along to the fluid equations, and describes the behavior of the electrically conducting fluids under the influence of magnetic fields. The challenge of the MHD simulation lies on the efficient achievement of coherent results in the physical and numerical context, since it is a nonlinear problem that obey physical constraints. Due to the occurrence of shocks and discontinuities in the MHD model solution, we use the finite volume method for the discretizations, conserving the quantities of the model. One of the MHD equations can be understood as a magnetic field constraint, which guarantees the divergence of magnetic field is physically null. More generally, the spacial phenomena exhibit local structures inside their own influence domain, which demand an adaptive multiscale representation to the numerical simulation, that is related to the possibility of a high computational cost. In the context of mitigating this cost and increase the efficiency of the physical-mathematical solution, we introduce the adaptive multiresolution analysis. This numerical computational treatment is based on the idea that a data can be represented in several levels of refinement, according to its local behavior. The goal of this work is to develop a methodology to the ideal and resistive multidimensional MHD models in the context of the cell-average adaptive multiresolution algorithm and, by combining these tools, hereafter enable the numerical simulation of problems related to space plasma in a efficient way, obtaining significant computational gains and ensuring the quality of the numerical solution. The multiresolution mathematical formulation is solid, supported by functional and harmonic analysis, increasing the confiability of the method and the quality of adaptability to the problems of interest. In this work, we present the results obtained with different cases of study in order to verify the adaptive multiresolution algorithm in the context of multidimensional MHD simulation for several physical problems. We show that the adaptive multiresolution can speed up the CPU time and reduce significantly the number of cells needed for the simulation, conserving the physical properties of the system.

Keywords: Numerical Simulation. Magnetohydrodynamics. Adaptive Multiresolution Analysis. Finite Volume Method.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Elemento de fluido e elemento de superfície.	10
2.2 Fluxo magnético passando através de uma superfície limitada.	17
3.1 Uma célula e sua respectiva média celular.	24
3.2 Fluxos entre duas células adjacentes em uma direção.	25
3.3 Projeção entre níveis.	29
3.4 Predição de médias celulares entre dois níveis.	30
3.5 Visualização de uma malha bidimensional e tridimensional.	31
3.6 Correspondência local entre malhas em níveis de refinamento adjacentes.	32
3.7 Correspondência local entre médias celulares.	34
3.8 Variação dos valores de ϵ por nível.	36
3.9 Solução do modelo MHD ideal e sua malha adaptativa.	37
3.10 Fluxo entre células em níveis adjacentes.	38
4.1 Leque de Riemann para o fluxo HLLD.	51
4.2 Malhas 2D obtidas com diferentes abordagens.	57
5.1 Fluxograma ilustrativo do algoritmo do código CARMEN–MHD.	60
6.1 Variáveis ρ , u_x e u_y para o problema O-T 2D ideal uniforme.	74
6.2 Variáveis p , B_x e B_y para o problema O-T 2D ideal uniforme.	75
6.3 Cortes na solução numérica para comparação de códigos.	76
6.4 Cortes na solução numérica para o código FLASH.	76
6.5 Cortes na solução numérica para o código CARMEN–MHD.	77
6.6 Curvas dos erros para o problema O-T 2D ideal uniforme.	78
6.7 Valores globais da densidade total de energia ao longo do tempo.	80
6.8 Solução para o problema O-T 2D ideal adaptativo.	81
6.9 Cortes nas variáveis ρ , u_x , e u_y para o problema O-T 2D ideal.	82
6.10 Cortes nas variáveis p , B_x , e B_y para o problema O-T 2D ideal.	83
6.11 Malhas adaptativas para o problema O-T 2D ideal.	84
6.12 Gráfico tempo de CPU \times erros.	85
6.13 Gráfico porcentagem de células \times erros.	85
6.14 Gráficos $\epsilon \times$ erros.	86
6.15 Gráficos ϵ_{div}	86
6.16 Valores globais de \mathcal{E} ao longo do tempo, com $L = 7$	89
6.17 Valores globais de \mathcal{E} ao longo do tempo, com $L = 8$	89
6.18 Variáveis ρ , u_x e u_y para o problema O-T 3D ideal adaptativo.	90

6.19	Variáveis p , B_x e B_y para o problema O-T 3D ideal adaptativo.	91
6.20	Malhas adaptativas para o problema O-T 3D ideal.	92
6.21	Solução do problema O-T 3D ideal adaptativo.	93
6.22	Malhas adaptativas para o problema O-T 3D ideal.	94
6.23	Variáveis ρ , u_x e u_y para o problema K-H ideal adaptativo.	98
6.24	Variáveis p , B_x e B_y para o problema K-H ideal adaptativo.	99
6.25	Cortes nas soluções do problema K-H ideal.	100
6.26	Gráfico ϵ por porcentagem de células.	101
6.27	Cortes nas soluções para o problema K-H resistivo.	104
6.28	Variáveis ρ , u_x e u_y para o problema K-H resistivo adaptativo.	105
6.29	Variáveis p , B_x e B_y para o problema K-H resistivo adaptativo.	106
6.30	Malhas adaptativas para o problema K-H ideal.	107
6.31	Malhas adaptativas para o problema K-H resistivo.	107
6.32	Densidade obtida com diferentes valores de resistividade.	108
6.33	Condição inicial para o problema N-M 2D ideal.	110
6.34	Malhas adaptativas para o problema N-M 2D ideal.	112
6.35	Variáveis ρ , u_x e u_y para o problema N-M 2D ideal adaptativo.	113
6.36	Variáveis p , B_x e B_y para o problema N-M 2D ideal adaptativo.	114
6.37	Cortes nas soluções para o problema N-M 2D ideal.	115
6.38	Malhas para o problema N-M 3D ideal.	118
6.39	Variáveis ρ , u_x e u_y para o problema N-M 3D ideal.	119
6.40	Variáveis p , B_x e B_y para o problema N-M 3D ideal.	120
6.41	Malhas para o problema N-M 3D ideal.	121
6.42	Solução MHD do problema N-M 3D ideal adaptativa.	122
6.43	Variáveis ρ , u_x e u_y para o problema N-M 3D resistivo.	125
6.44	Variáveis p , B_x e B_y para o problema N-M 3D resistivo.	126
6.45	Solução MHD para o problema N-M 3D resistivo.	127
6.46	Ilustração do processo de reconexão magnética em duas dimensões.	129
6.47	Solução MHD para o problema R-M.	132
6.48	Cortes na solução para o problema R-M.	133
6.49	Variável pressão para o problema R-M.	134
6.50	Variável \mathcal{E} e malha adaptativa para o problema R-M.	135
B.1	Gráficos comparativos entre as simulações serial e paralela.	158

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
6.1	Condição inicial do problema de Orszag-Tang. 70
6.2	Valores máximos e mínimos das variáveis para o problema O-T 2D ideal. 73
6.3	Tabela de erros: problema O-T 2D ideal uniforme. 77
6.4	Tabela de erros: problema O-T 2D ideal adaptativo. 84
6.5	Condição inicial do problema de Orszag-Tang. 86
6.6	Tabela de erros: problema O-T 3D ideal uniforme e adaptativo. 92
6.7	Condição inicial para o problema da instabilidade de Kelvin-Helmholtz. . 95
6.8	Erros para o problema K-H ideal. 101
6.9	Erros para o problema K-H resistivo. 108
6.10	Condição inicial da onda de choque. 109
6.11	Erros para o problema N-M 2D ideal. 116
6.12	Erros para o problema da nuvem magnética ideal 3D. 121
6.13	Erros para o problema da nuvem magnética ideal 3D. 124

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

1D	– Uma Dimensão
2D	– Duas Dimensões
3D	– Três Dimensões
CARMEN–MHD	– Código MHD com algoritmo de multirresolução adaptativa
FLASH	– Código MHD da Universidade de Chicago
CFL	– Courant-Friedrich-Lewy
VF	– Volumes Finitos, do inglês <i>finite volumes</i>
GLM	– Multiplicador de Lagrange generalizado
HLLD	– Harten-Lax-Van Leer-Descontinuidades
MHD	– Magnetohidrodinâmico
MHD-FV	– Código que calcula solução do modelo GLM-MHD em volumes finitos
MR	– Multirresolução
MUSCL	– Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws
O-T	– vórtex de Orszag-Tang
K-H	– instabilidade de Kelvin-Helmholtz
N-M	– nuvem magnética
R-M	– reconexão magnética

LISTA DE SÍMBOLOS

t	– tempo físico
\mathbf{U}	– vetor das variáveis do modelo
\mathbf{U}_0	– condição inicial do vetor das variáveis
$\bar{\mathbf{U}}$	– média celular de vetor de variáveis
$\mathbf{F}(\mathbf{U})$	– vetor fluxo do modelo
$\mathbf{F}_x(\mathbf{U})$	– componente x do fluxo do modelo
$\mathbf{F}_y(\mathbf{U})$	– componente y do fluxo do modelo
$\mathbf{F}_z(\mathbf{U})$	– componente z do fluxo do modelo
\mathcal{F}	– fluxo numérico na direção x
\mathcal{G}	– fluxo numérico na direção y
\mathcal{H}	– fluxo numérico na direção z
$\mathbf{S}(\mathbf{U})$	– vetor de termos fonte do modelo
ρ	– densidade do fluido
p	– pressão do fluido
p_T	– pressão total
\mathcal{E}	– densidade total de energia
ψ	– função potencial
u_x	– componente x da velocidade
u_y	– componente y da velocidade
u_z	– componente z da velocidade
B_x	– componente x do campo magnético
B_y	– componente y do campo magnético
B_z	– componente z do campo magnético
\mathbf{u}	– vetor velocidade
\mathbf{B}	– vetor campo magnético
$\nabla \cdot$	– operador de divergência
$\nabla \times$	– operador de rotacional
\mathbf{I}	– matriz identidade
\mathbf{J}	– vetor densidade corrente
c_h	– coeficiente da correção hiperbólica
c_p	– coeficiente da correção parabólica
V	– volume
∂V	– fronteira do volume
$C_{i,j,k}$	– célula da malha
∂C	– fronteira da célula
Q_i^n	– média celular da i -ésima célula da malha
Δt	– passo de tempo
Δx	– passo na direção x
Δy	– passo na direção y
ν	– número de Courant

γ	–	constante adiabática
λ_i	–	autovalores do modelo MHD
c_f	–	velocidade magneto-acústica rápida
c_a	–	velocidade de Alfvén
c_s	–	velocidade magneto-acústica lenta
\mathbf{d}^ℓ	–	coeficientes wavelet
L	–	nível máximo de refinamento
ℓ	–	nível de refinamento arbitrário
ϵ	–	parâmetro de truncamento fixo
ϵ_0	–	parâmetro de truncamento por nível
\mathcal{I}	–	interpolação polinomial
\mathcal{T}_ϵ	–	operador de truncamento da malha adaptativa
\mathbf{M}	–	transformada multirresolução
\mathcal{L}^1	–	erro médio na norma \mathcal{L}^1
\mathcal{L}^2	–	erro médio na norma \mathcal{L}^2
\mathcal{L}^∞	–	erro máximo na norma \mathcal{L}^∞
φ^{div}	–	erro associado à divergência de \mathbf{B}
\mathcal{E}_{MR}	–	valores globais de \mathcal{E} adaptativo
\mathcal{E}_{VF}	–	valores globais de \mathcal{E} uniforme

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
2 TEORIA MAGNETO-HIDRODINÂMICA	7
2.1 Equações MHD	8
2.1.1 Equação da continuidade	9
2.1.2 Equação do momento	11
2.1.3 Equação da indução magnética	12
2.1.4 Equação da pressão	12
2.2 Equações MHD quase conservativas	14
2.2.1 Conservação de momento	15
2.2.2 Conservação de energia	16
2.2.3 Fluxo magnético	16
2.3 MHD ideal conservativo	18
3 ABORDAGEM NUMÉRICA	21
3.1 Método de volumes finitos	22
3.2 Análise multirresolução	27
3.2.1 Representação unidimensional	28
3.2.2 Representação celular em multirresolução	30
3.2.3 Multirresolução adaptativa	35
3.3 Evolução temporal	37
4 MODELAGEM MHD	41
4.1 Modelo GLM-MHD	41
4.1.1 Autovalores do sistema GLM-MHD	44
4.2 Reconstrução MUSCL	47
4.3 Fluxo numérico HLLD	49
4.4 Cálculo do passo de tempo	54
4.5 Normalização do operador de truncamento	54
5 ASPECTOS COMPUTACIONAIS	59
5.1 Código CARMEN-MHD	59
5.2 Solução de referência	61

5.3	Erros e visualizações	61
5.3.1	Erro associado à $\nabla \cdot \mathbf{B}$	62
5.3.2	Tipos de erros	62
5.3.3	Tipos de aquivo	63
5.3.4	Visualização	65
6	RESULTADOS	69
6.1	Vórtex de Orszag-Tang	70
6.1.1	Caso bidimensional	70
6.1.2	Caso tridimensional	84
6.2	Instabilidade de Kelvin-Helmholtz	94
6.3	Nuvem magnética	109
6.3.1	Caso bidimensional	110
6.3.2	Caso tridimensional	116
6.4	Reconexão magnética	128
7	CONCLUSÕES	137
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	141
	APÊNDICE A - IDENTIDADES VETORIAIS	153
	APÊNDICE B - OPENMP APLICADO AO CÓDIGO MHD-FV	155
	APÊNDICE C - IMPLEMENTAÇÃO RESISTIVA	159
C.1	Passo 1: Cálculo da densidade de corrente \mathbf{J}	160
C.2	Passo 2: Resistividade Ôhmica	161
C.3	Passo 3: Fluxos de energia	163
C.4	Passo 4: Atualização dos fluxos	164
	APÊNDICE D - TERMOS DE DIFUSÃO ARTIFICIAL	167
	APÊNDICE E - OUTROS CÓDIGOS MHD	169
E.1	FLASH	169
E.2	Athena	170
E.3	PLUTO	170
E.4	OTTO MHD-2D	170
E.5	BATS-R-US	171

1 INTRODUÇÃO

A modelagem numérica de fenômenos espaciais é uma área muito importante no contexto acadêmico e tecnológico. Possibilita o melhor entendimento de fenômenos físicos importantes, a partir do estudo do comportamento de soluções numéricas de modelos compostos por equações diferenciais parciais. No contexto de plasma espacial, existem diversos modelos existentes que o descrevem de acordo com a física do problema, sua escala espacial etc. Todos os modelos aplicados aos plasmas têm suas bases nas teorias de mecânica, eletrodinâmica e cinética clássicas, embora essa seja uma afirmação didática simplificadora da riqueza de situações que possam existir. Assim, a escolha de um modelo adequado depende da investigação científica ou tecnológica que se pretende considerar.

Quando tem-se interesse em fenômenos em escala macroscópica, a teoria magneto-hidrodinâmica (MHD) constitui uma importante ferramenta, na qual o plasma é descrito como um fluido eletricamente condutor na presença de campos magnéticos (CHEN, 1974). O modelo MHD é útil para estudar o comportamento de fenômenos relacionados ao plasma espacial, encontrado na coroa solar, vento solar e magnetosfera de planetas, de forma a facilitar o entendimento de fenômenos físicos de interesse. Simulações numéricas são utilizadas para interpretar, analisar e, em alguns casos, prever fenômenos observacionais. Neste contexto, apresenta-se um código MHD que reúne metodologias conservativas a fim de possibilitar a simulação MHD.

A teoria MHD se tornou mais conhecida no final da década de 30 do século passado e o interesse nessa área foi culminado na década de 40, pela descoberta das ondas de Alfvén, um fenômeno intrínseco à magneto-hidrodinâmica (ALFVÉN, 1942). Entre os anos 70 e 80, foram publicados os primeiros trabalhos sobre simulações numéricas em duas e três dimensões no contexto de plasma espacial (LEBOEUF et al., 1978; BRECHT et al., 1982; OGINO et al., 1986). A partir disso, diversos códigos MHD são utilizados para estudar processos importantes no meio interplanetário e na magnetosfera terrestre, contribuindo para o maior entendimento do ambiente geoespacial e o progresso da área de simulação MHD multidimensional (STONE, 1999; FRYXELL et al., 2000; MIGNONE et al., 2007; STONE et al., 2008; SKÁLA et al., 2015).

O modelo MHD é caracterizado por equações diferenciais parciais evolutivas, apresentando descontinuidades na solução, as quais devem ser resolvidas de forma adequada. Neste contexto, destacam-se os esquemas numéricos do tipo Godunov, conhecidos na área de hidrodinâmica pela sua robustez, capacidade de aumentar a ordem do método e eficiência para resolver choques e descontinuidades. A exten-

são desse tipo de esquema para as equações MHD é realizada no final dos anos 80 (BRIO; WU, 1988; ZACHARY et al., 1994; DAI; WOODWARD, 1995), introduzindo uma metodologia que possibilita a obtenção de uma representação adequada das descontinuidades presentes na solução, evitando oscilações numéricas e mantendo a precisão em regiões em que a solução apresenta comportamento suave. Desde então, metodologias desse tipo são bastante utilizadas na literatura de simulação MHD (HARTEN et al., 1983; RYU et al., 1998; POWELL et al., 1999; DEDNER et al., 2002; WESENBERG, 2003; LI, 2005; MIYOSHI; KUSANO, 2005; TOUMA; ARMINJON, 2006; XU et al., 2016; MAYIGUÉ; GROLL, 2017), permitindo a captura de diversos tipos de comportamentos que ocorrem na solução do modelo.

Para garantir a ausência de monopolos magnéticos na solução do modelo MHD, são desenvolvidos esquemas numéricos que obedecem a restrição física de divergência nula do campo magnético (BRECHT et al., 1981; EVANS; HAWLEY, 1988; DAI; WOODWARD, 1998; RYU et al., 1998; BALSARA; SPICER, 1999). Atualmente, existem diversas metodologias nesse contexto (ZACHARY et al., 1994; TÓTH, 2000; BALSARA; KIM, 2004; MIYOSHI; KUSANO, 2011). Em particular, são desenvolvidos esquemas numéricos conhecidos como *divergence cleaning*, que não anulam efetivamente a divergência do campo magnético, no entanto, evitam que os erros associados a ela não afetem a integridade da solução numérica e não acrescentam um custo computacional significativo ao código (MUNZ et al., 2000; POWELL, 1997; DEDNER et al., 2002; MIGNONE; TZEFERACOS, 2010).

Com a demanda de uma maior resolução espacial no domínio computacional dos fenômenos estudados, a fim de obter uma melhor representação das estruturas presentes na solução do modelo MHD, introduzem-se metodologias adaptativas, nas quais a malha computacional se adapta às estruturas presentes na solução, viabilizando simulações numéricas que seriam dispendiosas sem esse cuidado. Uma abordagem bastante conhecida e difundida é o Refinamento de Malha Adaptativo, do inglês *Adaptive Mesh Refinement* (BERGER; OLIGER, 1984; BERGER; COLELLA, 1989), que possibilita a resolução numérica de uma região localizada em uma simulação de larga escala, além de acelerar a simulação e obter alta resolução global. Existem diversas implementações desse algoritmo e bibliotecas prontas para utilização em códigos MHD (MACNEICE et al., 2000; COLELLA et al., 2000; HOLST et al., 2011; BRYAN et al., 2014; ZHANG et al., 2016).

Uma abordagem recente, dentro do contexto adaptativo, é a análise de multirresolução por médias celulares, introduzida por Ami Harten (HARTEN, 1993; HARTEN,

1994; HARTEN, 1995; HARTEN, 1996). A multirresolução (MR) é baseada na teoria de wavelets, fundamentada em análise funcional e harmônica, e utiliza coeficientes wavelet para avaliar a regularidade local da solução numérica e, assim, adaptar a malha ao problema. Posteriormente, diversos trabalhos relevantes são desenvolvidos, dando continuidade à metodologia proposta por Harten (COHEN et al., 2003; KAIBARA; GOMES, 2001; MÜLLER, 2003; ROUSSEL et al., 2003a). Em particular, com a abordagem para médias celulares, são construídas técnicas para aplicação da MR a leis de conservação hiperbólicas em uma dimensão (HARTEN, 1995). Posteriormente, as extensões para leis de conservação em duas e três dimensões são desenvolvidas (BIHARI; HARTEN, 1997; ROUSSEL, 2003). Uma visão geral da abordagem MR e comparações entre os métodos adaptativos apresentados são discutidas em (COHEN, 2003; DOMINGUES et al., 2011; DEITERDING et al., 2009; DEITERDING et al., 2016).

O objetivo deste trabalho é possibilitar a simulação numérica dos modelos MHD ideal e resistivo em duas e três dimensões no contexto de médias celulares, utilizando uma abordagem de multirresolução adaptativa para a representação de estruturas localizadas presentes na solução do modelo de forma eficiente.

Unificando as equações do modelo MHD, esquemas numéricos de segunda ordem, restrições físicas e a multirresolução adaptativa, desenvolve-se o código CARMEN–MHD, possibilitando a obtenção de soluções numéricas do modelo em malha uniforme ou adaptativa. Essa implementação é baseada no código CARMEN, desenvolvido por Olivier Roussel (ROUSSEL et al., 2003b) para a simulação hidrodinâmica com o algoritmo MR adaptativa. O código CARMEN–MHD utiliza o mesmo algoritmo adaptativo, ajustado às variáveis do modelo MHD.

Contribuições

Neste trabalho, metodologias numéricas necessárias para a simulação numérica dos modelos MHD ideal e resistivo são implementadas e combinadas com o algoritmo de multirresolução adaptativa, viabilizando o estudo dos fenômenos de plasma. Essa abordagem é pioneira no contexto de simulação MHD multidimensional, e se mostra eficiente na obtenção de soluções numéricas bem representadas.

A estabilidade e robustez do código CARMEN–MHD é demonstrada com a simulação de diferentes problemas, que testam variados comportamentos físicos que podem ocorrer na solução do modelo. A verificação das implementações e dos resultados é realizada a partir de comparações com um código já verificado e conhecido na área

de simulação MHD.

A combinação das metodologias numéricas juntamente com a verificação dos resultados obtidos têm como produto o código CARMEN–MHD. Esse código é otimizado e verificado nos contextos físico e numérico, constituindo uma ferramenta com usabilidade considerável, relevante para validações MHD e comparações de adaptatividade. Além disso, o código, sua documentação e scripts relacionados são disponibilizados online para permitir reprodutibilidade dos resultados obtidos e outras implementações.

Este trabalho está organizado como descrito a seguir:

- No Capítulo 2 são apresentadas as equações dos modelos MHD ideal e resistivo, assim como suas hipóteses e deduções a partir das equações de fluido e da eletrodinâmica, em suas formas primitiva e conservativa.
- O método de volumes finitos e a análise de multirresolução em três dimensões são introduzidos e discutidos no Capítulo 3. Essas metodologias compõem a base teórica, sendo essenciais para a formulação numérica utilizada neste trabalho, garantindo a conservação das variáveis e a eficiência da abordagem adaptativa.
- No Capítulo 4, as metodologias numéricas adicionais são apresentadas e discutidas. Durante o desenvolvimento deste trabalho, essas metodologias se mostraram necessárias para garantir a integridade física da solução numérica, a precisão do esquema numérico e a captura das estruturas na solução. Além disso, compõem um conjunto de ferramentas essenciais para aumentar a eficácia do código e a qualidade da solução numérica.
- Os aspectos computacionais, como os detalhes acerca do código CARMEN–MHD, visualizações, erros e tipos de arquivo, são introduzidos no Capítulo 5, os quais são importantes para entender a evolução e implementação do código CARMEN–MHD. Neste capítulo, são apresentados todos os esforços e desafios acerca de seu desenvolvimento, assim como os esclarecimentos acerca das métricas utilizadas nos resultados.
- Os resultados para a verificação do código CARMEN–MHD são apresentados no Capítulo 6, para os problemas do vórtex de Orszag-Tang, instabilidade de Kelvin-Helmholtz, nuvem magnética e reconexão magnética. Essa

variedade de casos de estudo é escolhida com o objetivo de avaliar a performance do código CARMEN–MHD para diversos tipos de comportamentos que ocorrem na simulação numérica, a fim de garantir a coerência e convergência dos resultados obtidos, assim como a sua qualidade, certificando a robustez e eficiência do código desenvolvido.

- As conclusões e trabalhos futuros são discutidas no Capítulo 7, reiterando as contribuições deste trabalho e importância dentro do contexto de simulação MHD.

2 TEORIA MAGNETO-HIDRODINÂMICA

Neste capítulo é apresentada a descrição magneto-hidrodinâmica (MHD), considerando o plasma como um único fluido, ou seja, negligenciando a identidade individual de cada partícula (íons e elétrons), considerando apenas um elemento de fluido ou um grupo de partículas. A teoria de fluidos é utilizada na física do plasma quando o comportamento de fenômenos de larga escala são considerados (BITTENCOURT, 2004). A teoria MHD descreve a dinâmica de um fluido eletricamente condutor sob a influência de um campo magnético (CHEN, 1974). Para que seja possível a modelagem do plasma como um fluido, devem ser feitas algumas considerações (SPRUIT, 2013). Em Ledvina et al. 2008, são apresentadas sete hipóteses implícitas acerca da validade do modelo MHD. A seguir, apresenta-se uma reunião desses critérios:

Quase neutralidade: A densidade de partículas carregadas negativamente n_e é aproximadamente igual à densidade de partículas carregadas positivamente n_i . A neutralidade elétrica é satisfeita na maioria dos meios astrofísicos.

Massa do elétron negligenciada: A partir da relação $\frac{m_e}{m_i} \ll 1$, em que m_e, m_i denotam as massas do elétron e do íon respectivamente, atribui-se $m_e = 0$. Juntamente com a hipótese da quase neutralidade, a densidade de massa do plasma é definida por $\rho = n_i m_i$, caracterizando uma alta densidade de íons e, assim, um plasma de baixa frequência.

Aproximação de fluido: As quantidades termodinâmicas locais podem ser definidas no plasma. As variações nessas quantidades são muito lentas se comparadas com a escala de tempo de processos microscópicos no plasma. Assume-se que uma quantidade suficientemente grande de partículas está presente no fluido e, com isso, as propriedades locais do fluido podem ser definidas.

Pressão isotrópica: A relação $\nabla \cdot (p \mathbf{I}) = \nabla p$ é válida para a pressão total p , em que \mathbf{I} é o tensor identidade de ordem dois. Essa hipótese é válida para plasmas colisionais, com frequente interação entre partículas.

Lei de Ohm generalizada: Os termos associados ao efeito Hall ($\nabla \times \mathbf{J} \times \mathbf{B}$), que permite o movimento separado de íons e elétrons, e à inércia dos elétrons ($\nabla \times m_e \partial \mathbf{J} / \partial t$) são negligenciados, garantindo a validade do modelo apenas para fenômenos de baixa frequência e escalas macroscópicas. A lei de Ohm descreve uma relação local e instantânea entre o campo magnético e a densidade de corrente no plasma.

As equações que descrevem o comportamento macroscópico do plasma podem ser obtidas a partir das Equações de Maxwell juntamente com as equações da teoria hidrodinâmica (GOEDBLOED; POEDTS, 2004). Neste trabalho, descreve-se a aborda-

gem MHD a partir das equações de fluido e Maxwell, primeiramente a formulação não-conservativa, com a dedução das equações MHD, e posteriormente o modelo conservativo.

2.1 Equações MHD

O modelo MHD é composto pelas equações da continuidade, momento, campo magnético e pressão. No total são obtidas oito equações para oito variáveis ($\rho, p, u_x, u_y, u_z, B_x, B_y, B_z$) e, com isso, o sistema MHD é dito completo. A formulação não-conservativa do modelo MHD resistivo é dada pelas equações

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p \mathbf{u}) + (\gamma - 1)p \nabla \cdot \mathbf{u} = \eta(\gamma - 1)|\nabla \times \mathbf{B}|^2, \quad (2.1b)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p - (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \rho \mathbf{g}, \quad (2.1c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = -\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}), \quad (2.1d)$$

em que o campo magnético $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ é a variável eletromagnética, e as variáveis de fluido são a densidade de massa ρ , a pressão total p , a velocidade $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e \mathbf{g} a aceleração da gravidade. A resistividade é denotada por $\eta = \eta(x, y, z)$ e a constante adiabática por γ . O termo da força da gravidade $\rho \mathbf{g}$ pode ser desconsiderado, exceto em certos problemas astrofísicos, geofísicos e de astronomia. O termo resistivo no lado direito da equação da pressão é, normalmente, negligenciado por não assumir valores significantes (CALLEN, 2003). No entanto, ele é mantido para a reprodução da física do modelo e consistência das equações.

Para obter as equações do modelo MHD não relativístico, ou seja, em que a velocidade do fluido é muito menor que a velocidade da luz, utilizam-se as seguintes leis que regem a eletrodinâmica clássica

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \text{Lei de Gauss - Magnetismo} \quad (2.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{Lei de Faraday} \quad (2.2b)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad \text{Lei de Ampère} \quad (2.2c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{Lei de Gauss} \quad (2.2d)$$

em que \mathbf{J} é a densidade de corrente, \mathbf{E} o campo elétrico, e μ_0 a permeabilidade magnética no vácuo e ε_0 a permissividade no vácuo. Essas equações descrevem o

comportamento dos campos elétrico e magnético, como se propagam, interagem e são influenciados. Também são necessárias a segunda lei de Newton, a lei de Ohm e a equação de estado, dadas por

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbb{F}, \quad 2^a \text{ Lei de Newton} \quad (2.3a)$$

$$(2.3b)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}, \quad \text{Lei de Ohm} \quad (2.3c)$$

$$(2.3d)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\ln \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = \eta \frac{\gamma - 1}{p} |\mathbf{J}|^2, \quad \text{Eq. de Estado} \quad (2.3e)$$

$$(2.3f)$$

em que \mathbb{F} é uma força vetorial e a derivada total (ou derivada Lagrangiana)

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla, \quad (2.4)$$

a qual mede a mudança total na quantidade associada a um elemento de fluido que se move no espaço, consistindo em uma derivada temporal local (ou Euleriana) $\frac{\partial}{\partial t}$ e um termo de advecção/convecção que descreve a variação na direção \mathbf{u} (LAMB, 1924). Nas próximas seções são deduzidas as equações MHD baseadas na teoria de fluidos e nas leis de Maxwell (SCHNACK, 2009).

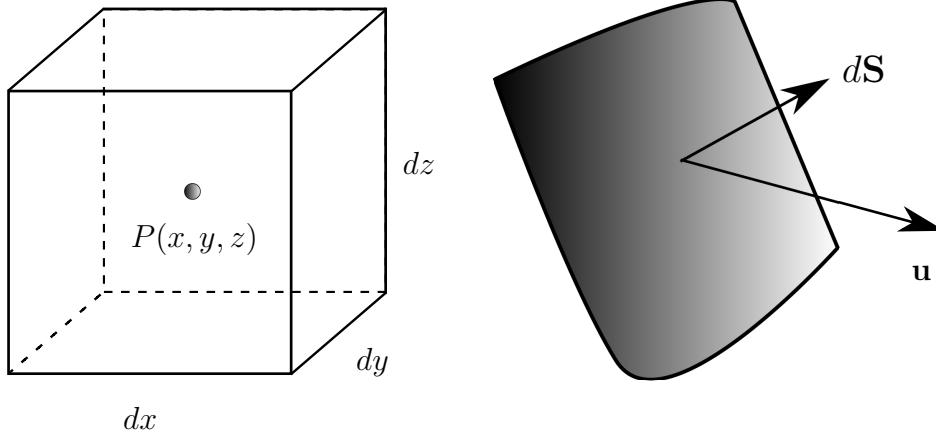
2.1.1 Equação da continuidade

Seja um elemento de fluido dV com densidade de massa $\rho = \rho(x, y, z, t)$ centrada no ponto P , representando a densidade de massa média sobre dV , como ilustrado na Figura 2.1. A massa total de dV , em um tempo t arbitrário, é dada por

$$M = \int \rho dV = \int \rho dx dy dz. \quad (2.5)$$

Assumindo que dentro do elemento de fluido não há estruturas, como fontes e sorvedouros, então a taxa de variação $\frac{dM}{dt}$ descreve a taxa na qual a massa entra ou sai de um elemento de superfície dS pertencente à fronteira de dV , ou seja, como essa quantidade varia no tempo. Quando dS coincide com a face de dV , o vetor normal \mathbf{n} a essa superfície aponta para fora do elemento de volume.

Figura 2.1 - Elemento de fluido com dimensão $dV = dx dy dz$ e densidade de massa $\rho(x, y, z)$ centrada no ponto P (esquerda). Elemento de superfície se movendo a uma velocidade \mathbf{u} e o vetor normal à superfície $d\mathbf{S}$.



Fonte: Produção do autor baseada em Schnack (2009).

O fluxo de massa que flui através de dS é $\rho \mathbf{u}$, em que \mathbf{u} é a velocidade do fluido. Sendo assim, considerando $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$, a taxa total de fluxo de massa saindo de dV é dada pela soma da massa por unidade de tempo saindo em cada face de dV , isto é,

$$\oint_S \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.6)$$

em que a integral é sobre a superfície de dV . Com isso, a seguinte igualdade é válida

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.7)$$

em que o sinal negativo no termo do lado direito deve-se ao fluxo que sai do volume. A Equação 2.7 caracteriza uma lei de conservação, a qual garante que *a taxa de variação de uma quantidade contida em um domínio V é igual ao fluxo dessa quantidade através da fronteira desse domínio* (LAX, 1973). Pelo teorema da divergência de Gauss, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV. \quad (2.8)$$

Considerando ρ e $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ funções contínuas em t e rearranjando os termos da equação acima, tem-se

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0. \quad (2.9)$$

Para que a Equação 2.9 seja válida, é preciso que o integrando seja nulo, isto é,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.10)$$

expressando a conservação de massa. A Equação 2.10 é conhecida como equação da continuidade e pode ser reescrita em termos da derivada Lagrangiana, ou seja, considerando a existência das derivadas de ρ e \mathbf{u} em relação a x , y e z , e a identidade vetorial dada pela Equação A.1, tem-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0. \quad (2.11)$$

Os dois primeiros termos do lado esquerdo da equação acima podem ser reescritos como uma derivada Lagrangiana, isto é,

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (2.12)$$

em que $-\rho \nabla \cdot \mathbf{u}$ mede a mudança em ρ que ocorre devido à compressão ($\nabla \cdot \mathbf{u} < 0$) ou dilatação ($\nabla \cdot \mathbf{u} > 0$) de um elemento de fluido. Em um fluido incompressível ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), a variação da densidade de massa é equivalente à advecção dessa quantidade, pois $\frac{d\rho}{dt} = 0$.

2.1.2 Equação do momento

Considera-se a segunda lei de Newton para um elemento de fluido, como apresentado na Equação 2.3a por $\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbb{F}$, em que \mathbb{F} é uma força vetorial por unidade de volume que age neste elemento. Neste trabalho, no contexto da magneto-hidrodinâmica, define-se \mathbb{F} como uma composição de forças: força gradiente de pressão, proveniente da ação coletiva do movimento de partículas; força eletromagnética de Lorentz; e a força gravitacional. Dessa forma, reescreve-se a lei de Newton como

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g}. \quad (2.13)$$

O gradiente de pressão no lado direito da Equação 2.13 tem sinal negativo, pois ocorre no sentido oposto ao fluido. Substituindo \mathbf{J} dado pela lei de Ampère na Equação 2.2c e considerando $\mathbf{B} = \mathbf{B} \sqrt{\mu_0}$, obtém-se

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g}, \quad (2.14)$$

a qual é chamada de equação do momento de um fluido eletromagnético.

2.1.3 Equação da indução magnética

A relação existente entre o campo magnético \mathbf{B} e o campo elétrico \mathbf{E} é dada pela lei de Faraday, que descreve a evolução temporal de \mathbf{B} em termos do rotacional de \mathbf{E} , isto é,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}. \quad (2.15)$$

Um fluido eletricamente condutor permite que a corrente possa fluir dentro do seu domínio. Então, é possível relacionar a densidade de corrente a um campo elétrico \mathbf{E}' em termos da resistividade elétrica do fluido η , ou seja,

$$\eta \mathbf{J} = \mathbf{E}', \quad (2.16)$$

conhecida como lei de Ohm. O campo elétrico \mathbf{E}' é obtido ao levar em consideração o fluido se movendo com a velocidade de fluxo de massa do plasma, dado pela equação $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$, resultando em

$$\eta \mathbf{J} = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad (2.17)$$

que caracteriza a lei de Ohm resistiva, apresentada anteriormente na Equação 2.3c. Substituindo a Equação 2.17 na Equação 2.15, obtém-se

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times (\eta \mathbf{J} - \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (2.18)$$

resultando em

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = -\nabla \times (\eta \mathbf{J}), \quad (2.19)$$

devido à linearidade do operador diferencial $\nabla \times$. Substituindo \mathbf{J} na Equação 2.19 e considerando $\mathbf{B} = \mathbf{B} \sqrt{\mu_0}$, tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = -\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}), \quad (2.20)$$

a qual é conhecida como equação da indução magnética.

2.1.4 Equação da pressão

A equação de estado expressa uma evolução caracterizada pela constante adiabática γ , relacionando a densidade de massa e a pressão com a densidade de corrente e a

resistividade, resultando em

$$\frac{d}{dt} \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = \eta \frac{(\gamma - 1)}{p} |\mathbf{J}|^2. \quad (2.21)$$

Essa equação é quase isotrópica, devido à contribuição do termo resistivo no lado direito da equação (CALLEN, 2003). A partir dela é possível obter a equação que descreve a variação da pressão em termos das variáveis p , \mathbf{u} , \mathbf{B} e, dessa forma, fechar o sistema de equações, que contará com o número de equações igual ao número de incógnitas.

Operando os termos da Equação 2.21, tem-se

$$\frac{d}{dt} \ln(p) - \frac{d}{dt} \ln(\rho^\gamma) = \eta \frac{(\gamma - 1)}{p} |\mathbf{J}|^2. \quad (2.22)$$

Calculando as derivadas do lado esquerdo da equação acima e multiplicando toda a equação por ρ , obtém-se

$$\frac{dp}{dt} - \frac{\gamma p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \eta(\gamma - 1) |\mathbf{J}|^2. \quad (2.23)$$

Substituindo a Equação 2.12 na Equação 2.23, tem-se

$$\frac{dp}{dt} - \frac{p\gamma}{\rho} (-\rho \nabla \cdot \mathbf{u}) = \eta(\gamma - 1) |\mathbf{J}|^2. \quad (2.24)$$

Desenvolvendo os termos da derivada $\frac{dp}{dt}$ e considerando $\gamma p = (\gamma - 1)p + p$, obtém-se

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p + (\gamma - 1)p \nabla \cdot \mathbf{u} + p \nabla \cdot \mathbf{u} = \eta(\gamma - 1) |\mathbf{J}|^2. \quad (2.25)$$

Reorganizando os termos da equação acima utilizando a Identidade A.1, conclui-se

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p\mathbf{u}) + (\gamma - 1)p \nabla \cdot \mathbf{u} = \eta(\gamma - 1) |\mathbf{J}|^2. \quad (2.26)$$

Substituindo a lei de Ampère na Equação 2.26 e considerando $\mathbf{B} = \mathbf{B} \sqrt{\mu_0}$, obtém-se a equação da pressão do fluido

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p\mathbf{u}) + (\gamma - 1)p \nabla \cdot \mathbf{u} = \eta(\gamma - 1) |\nabla \times \mathbf{B}|^2, \quad (2.27)$$

completando o sistema de equações da magneto-hidrodinâmica em sua forma primitiva.

2.2 Equações MHD quase conservativas

Neste trabalho, tem-se interesse na forma quase conservativa do modelo MHD. Diferente da forma primitiva, apresentada na Seção 2.1, a formulação quase conservativa do modelo MHD expressa princípios físicos de conservação local e global de massa, momento, energia e, em alguns casos, fluxo magnético, pois as equações são reescritas como leis de conservação. O modelo MHD resistivo na sua forma quase conservativa é dado por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.28a)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \left(p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2} \right) \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \right] = 0, \quad (2.28b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(\mathcal{E} + p) \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{2} \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \right) \right] = \nabla \cdot [\mathbf{B} \times \eta (\nabla \times \mathbf{B})], \quad (2.28c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}) = -\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}). \quad (2.28d)$$

Nesse contexto, analisa-se cada equação individualmente de forma a reescrevê-las como leis de conservação, isto é, para um vetor de quantidades \mathbf{U} e um tensor fluxo $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}, \quad (2.29)$$

uma lei de conservação vetorial. Em alguns casos, como no modelo MHD resistivo, há termos fontes de calor e difusão adicionados na equação, constituindo uma forma ainda mais geral na qual nem sempre há conservação, ou existe uma condição de quase conservação. Define-se, então, uma equação de conservação na forma diferencial, levando em consideração os termos fonte, por

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (2.30)$$

com $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = (\mathbf{F}_x(\mathbf{U}), \mathbf{F}_y(\mathbf{U}), \mathbf{F}_z(\mathbf{U}))^T$, em que $\mathbf{F}_x(\mathbf{U}), \mathbf{F}_y(\mathbf{U}), \mathbf{F}_z(\mathbf{U})$ são os vetores fluxo nas direções x, y, z , respectivamente. De acordo com o Sistema 2.28 MHD resistivo, \mathbf{U} e $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ são definidos definidos por

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \mathcal{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \left(p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2} \right) \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \\ \left(\mathcal{E} + p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2} \right) \mathbf{u} - \mathbf{B}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \\ \mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

e o vetor fonte é dado por $\mathbf{S}(\mathbf{U}) = (0, \mathbf{0}, \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \eta \nabla \times \mathbf{B}), -\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}))^T$. O tensor \mathbf{I} denota a matriz identidade 3×3 .

As Equações 2.28a e 2.28b expressam a conservação de massa e momento, respectivamente. Já as Equações 2.28c e 2.28d, referentes à densidade de energia e ao campo magnético expressam uma relação de quase conservação, devido aos termos que dependem da resistividade $\eta \neq 0$. Nas próximas seções, essas equações são deduzidas.

2.2.1 Conservação de momento

Para obter a lei de conservação associada ao momento, considera-se a força gravitacional nula na Equação 2.14. Essa consideração é feita, pois os problemas de interesse deste trabalho não necessitam da adição desta força ao sistema. Com isso, a equação do momento é reescrita como

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}. \quad (2.32)$$

O termo do gradiente de pressão ∇p por ser reescrito com o operador de divergência, e a matriz identidade \mathbf{I} , ou seja, $\nabla \cdot (p\mathbf{I})$, pois $\nabla \equiv \nabla \cdot \mathbf{I}$. Utilizando as identidades vetoriais dadas pelas Equações A.2 e A.3, obtém-se

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla \cdot (p\mathbf{I}) + \nabla \cdot \left(\mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{|\mathbf{B}|^2}{2} \mathbf{I} \right). \quad (2.33)$$

Agrupando os termos da equação, tem-se

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} - \mathbf{u} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} = -\nabla \cdot \left[\left(p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2} \right) \mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{B} \right]. \quad (2.34)$$

Substituindo a Equação 2.28a na equação acima e utilizando a identidade vetorial definida na Equação A.1, obtém-se

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla \cdot \left[\left(p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2} \right) \mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{B} \right], \quad (2.35)$$

e, com isso, conclui-se que

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho\mathbf{u}\mathbf{u} + \left(p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2} \right) \mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{B} \right] = 0, \quad (2.36)$$

a qual descreve a equação de conservação do momento.

2.2.2 Conservação de energia

Nesta seção, deseja-se obter a equação de conservação de energia, dada em termos da variável \mathcal{E} , definida pela lei constitutiva

$$\mathcal{E} = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2}. \quad (2.37)$$

A equação evolutiva da densidade de energia é obtida a partir das equações do momento, pressão e campo magnético, após algumas alterações. Fazendo o produto interno de \mathbf{u} pela Equação 2.32 e rearranjando seus termos, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \right) + \mathbf{u} \cdot \nabla p - \mathbf{u} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (2.38)$$

Substituindo $p = (\gamma - 1)\rho e$ nos dois primeiros termos da Equação 2.27, em que e a energia interna, e dividindo seus termos por $(\gamma - 1)$, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u}) + p \nabla \cdot \mathbf{u} = \eta |\mathbf{J}|^2. \quad (2.39)$$

Fazendo o produto escalar de \mathbf{B} com a Equação 2.20 e utilizando as identidades vetoriais definidas pelas Equações A.4, A.5 e A.6, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2 \right) + \nabla \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} \mathbf{B}) + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \eta \mathbf{J}) - \eta |\mathbf{J}|^2. \quad (2.40)$$

Somando as Equações 2.38, 2.39 e 2.40, eliminando os termos similares e substituindo $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$, obtém-se a lei de conservação que descreve a evolução da densidade de energia dada por

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(\mathcal{E} + p) \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{2} \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \right) \right] = \nabla \cdot [\mathbf{B} \times \eta (\nabla \times \mathbf{B})]. \quad (2.41)$$

O termo resistivo no lado direito da equação acima pode influenciar na conservação da energia. No entanto, esse termo é suficientemente pequeno, de forma que, em muitos casos, pode ser negligenciado.

2.2.3 Fluxo magnético

Devido ao termo que inclui a resistividade na lei de Ohm, não há conservação integral para a equação da indução magnética. No entanto, é possível reescrevê-la como uma equação de conservação. Utilizando a identidade vetorial dada pela Equação A.7, a

Equação 2.20 pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u}) = -\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}). \quad (2.42)$$

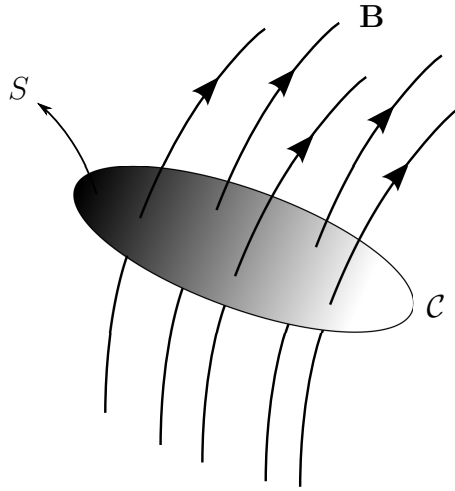
A não-conservação associada a essa equação pode acarretar em mudanças no fluxo magnético, que pode ser entendido como a quantidade de linhas de campo através de uma determinada superfície.

Considerando uma curva fechada \mathcal{C} dentro de um fluido, tal que todo ponto pertencente a ela se move com velocidade local do fluido, tem-se a superfície S limitada por \mathcal{C} , como ilustrado na Figura 2.2. O fluxo magnético Φ que flui através dessa superfície é dado por

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.43)$$

com dS um elemento infinitesimal da superfície S e $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$, ou seja, a integral da componente normal do campo magnético que passa por S .

Figura 2.2 - Fluxo magnético passando através da superfície S , limitada pela curva \mathcal{C} .



Fonte: Produção do autor baseada em Parks (1991).

A variação do fluxo magnético Φ , à medida que a curva se move com o fluido, no contexto Lagrangiano, é definida por

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.44)$$

em que $d\ell$ é um elemento infinitesimal pertencente à curva \mathcal{C} . No caso resistivo, em que a lei de Ohm é dada por

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J},$$

a Equação 2.44 é reescrita como

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \oint_{\mathcal{C}} (\eta \mathbf{J}) \cdot d\ell. \quad (2.45)$$

A integral definida na Equação 2.45 é não-nula, implicando que o fluido pode se mover separadamente relativo ao campo magnético. Com isso, as linhas de campo magnético podem deslizar através do fluido e, até mesmo, sofrer alterações em sua topologia. Isso ocorre devido à resistividade, que adiciona comportamento difusivo ao campo magnético, permitindo que ocorram processos de natureza dissipativa.

2.3 MHD ideal conservativo

Quando há ausência de resistividade, o modelo resultante é chamado MHD ideal. Esse modelo descreve a dinâmica de um fluido perfeitamente condutor, o qual é idealizado, porém não existe na natureza. No entanto, quando o interesse se volta para plasmas altamente magnetizados, o modelo ideal permite uma aproximação adequada, visto que, em muitos casos, esse tipo de plasma é um excelente condutor de eletricidade. Neste caso, os termos resistivos nas equações da densidade total de energia e fluxo magnético são negligenciados. Sendo assim, o modelo MHD ideal, em sua forma conservativa, é dado por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.46a)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \left(p + \frac{1}{2} B^2 \right) \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \right] = \mathbf{0}, \quad (2.46b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(\mathcal{E} + p + \frac{B^2}{2} \right) \mathbf{u} - \mathbf{B} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \right] = 0, \quad (2.46c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (2.46d)$$

com $B = |\mathbf{B}|$. No caso ideal, a lei de Ohm definida anteriormente por $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}$, é reescrita como $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0$. Assim, voltando ao conceito discutido de variação de fluxo magnético, pode-se estender o resultado para o caso ideal. A partir da Equação 2.44, tem-se

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (2.47)$$

ou seja, o fluxo magnético através de qualquer curva fechada C é constante. Nesse caso, existe a conservação de fluxo magnético e, assim, o fluido não pode se mover através do campo magnético. Esse resultado é conhecido como *condição do fluxo congelado* (do inglês *frozen flux condition*), em que as linhas de campo mantêm a mesma topologia, de forma a conservar a integridade dos elementos de fluido. A abordagem apresentada é baseada em (FITZPATRICK, 2014)

3 ABORDAGEM NUMÉRICA

Ao contrário dos estudos observacionais, o qual tem limitações de espaço e tempo, as técnicas numéricas podem ser utilizadas para simular eventos em regiões desde escalas macroscópicas até microscópicas, durante um determinado intervalo de tempo. Mesmo em situações nas quais é possível realizar experimentos, simulações computacionais podem ser uma alternativa mais eficiente, menos custosa e, também, complementar para o entendimento de um certo fenômeno (TÓTH; ROE, 2002). Além disso, podem tratar diversos fenômenos ao mesmo tempo – mesmo processos não lineares.

Considerando os modelos MHD apresentados no Capítulo 2, a escolha de uma formulação numérica é necessária de forma possibilitar a sua simulação. Várias metodologias são utilizadas no contexto MHD como, por exemplo, método das diferenças finitas (DAI; WOODWARD, 1998; JIANG; WU, 1999b; MIGNONE et al., 2010), volumes finitos (STONE; GARDINER, 2009; LEE, 2013) e elementos finitos (SALAH et al., 2001; SOVINEC et al., 2004; BASTING; KUZMIN, 2017). Cada método tem suas vantagens e desvantagens, e sua adequação depende do modelo utilizado, tipo de problema, geometria da malha computacional, entre outros. Neste trabalho, utiliza-se o método de volumes finitos, o qual é baseado na forma integral de leis de conservação, garantindo que as quantidades em questão sejam conservadas em âmbito local e global, e será discutido com mais detalhes em breve (LEVEQUE, 2002).

É comum que a solução numérica de um modelo contenha estruturas localizadas, necessitando de um maior refinamento de malha computacional. Por outro lado, também existem regiões nas quais a mesma solução apresenta comportamento constante ou suave, não sendo necessário um maior refinamento. Nesse contexto, o conceito da análise multirresolução adaptativa (HARTEN, 1993; HARTEN, 1994; HARTEN, 1995; HARTEN, 1996) é introduzido, e sua revisão é apresentada em (COHEN, 2003; DOMINGUES et al., 2011) e referência lá citadas. Nessa metodologia a solução é decomposta em diferentes níveis de resolução, possibilitando que a malha computacional seja adaptada ao problema que se deseja modelar. Assim, a redução do custo computacional da simulação se torna viável, graças ao algoritmo que faz com que a malha seja refinada apenas onde há estruturas localizadas, evitando o uso desnecessário de memória. A acurácia da solução pode ser mantida e, assim, a solução é bem representada e coerente com a física do problema.

Neste capítulo é apresentada a metodologia numérica utilizada neste trabalho, introduzindo a discretização pelo método dos volumes finitos e sua motivação no contexto

da abordagem adaptativa da análise multirresolução.

3.1 Método de volumes finitos

O método de Volumes Finitos (VF) é baseado na forma integral de leis de conservação. O domínio do problema é particionado em pequenos volumes ou células, os quais podem fazer parte de uma malha cartesiana, triangular ou qualquer outra geometria desejada. Neste trabalho, a abordagem é feita para uma malha cartesiana regular, em duas e três dimensões. Devido à sua formulação integral, o método é adequado onde há descontinuidades, e a conservação das quantidades e fluxos é mantida (LEVEQUE, 2002). Nesta seção, apresenta-se a formulação tridimensional do método.

Basicamente, uma lei de conservação define que *a taxa de variação da quantidade total de uma grandeza contida em um volume fixo é igual ao fluxo dessa grandeza através da fronteira do volume* (LAX, 1973). Matematicamente, essa definição indica que para uma grandeza ζ em um volume V tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \zeta \, dV = - \int_{\partial V} f(\zeta) \cdot \mathbf{n} \, dV, \quad (3.1)$$

em que $f(\zeta)$ é o fluxo, \mathbf{n} é o vetor normal ao volume exterior à fronteira do domínio de ∂V .

Como uma lei de conservação é uma relação entre integrais, então ela pode ser satisfeita por funções que não são contínuas ou diferenciáveis. Assumindo que as funções são suficientemente suaves, a derivada temporal pode ser colocada dentro da integral do lado esquerdo da Equação 3.1, e aplicando o Teorema da Divergência de Gauss ao lado direito da equação, obtém-se

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \zeta \, dV = - \int_V \nabla \cdot f(\zeta) \, dV, \quad (3.2)$$

que pode ser reescrita como

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \zeta + \nabla \cdot f(\zeta) \right] dV = 0, \quad (3.3)$$

resultando na equação

$$\frac{\partial}{\partial t} \zeta + \nabla \cdot f(\zeta) = 0. \quad (3.4)$$

Assim a Equação 3.4 representa a forma diferencial de uma lei de conservação. Também existem casos em que há termos fontes adicionados na equação como, por exemplo, termos de calor ou difusão, obtendo uma forma ainda mais geral chamada equação de conservação.

Uma equação de conservação na forma diferencial, juntamente com condições iniciais apropriadas e termos fonte, torna-se um problema de valor inicial, definido por

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (3.5a)$$

$$\mathbf{U}(t = 0, \mathbf{x}) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (3.5b)$$

em que $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{U}(x, y, z, t)$ é o vetor de variáveis do modelo, $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = (\mathbf{F}_x(\mathbf{U}), \mathbf{F}_y(\mathbf{U}), \mathbf{F}_z(\mathbf{U}))^T$ o tensor fluxo e $\mathbf{S}(\mathbf{U})$ o vetor termo fonte. A condição inicial é dada por $\mathbf{U}_0(x, y, z)$ e Ω o domínio de \mathbf{U} . O sistema acima torna-se completo com condições de contorno adequadas.

O domínio Ω é particionado em células de grade

$$C_{i,j,k} \equiv [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}] \times [z_{k-1/2}, z_{k+1/2}],$$

com $i, j, k \in \{0, \dots, N-1\}$, em que N é o número máximo de células, o ponto (x_i, y_j, z_k) é o centro da célula $C_{i,j,k}$. No centro de cada célula é alocada uma média celular, a qual, para um vetor de quantidades \mathbf{U} é dada por

$$\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k} = \frac{1}{|C_{i,j,k}|} \int_{C_{i,j,k}} \mathbf{U}(x, y, z, t) dV, \quad (3.6)$$

em que $dV = dx dy dz$ e $|C_{i,j,k}| = \Delta x \Delta y \Delta z$ é o volume da célula, com $\Delta x = x_{i+1/2,j,k} - x_{i-1/2,j,k}$, $\Delta y = y_{i,j+1/2,k} - y_{i,j-1/2,k}$ e $\Delta z = z_{i,j,k+1/2} - z_{i,j,k-1/2}$, como ilustrado na Figura 3.1. Integrando a Equação 3.5a, tem-se

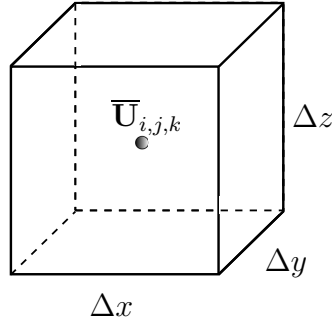
$$\int_{C_{i,j,k}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dV + \int_{C_{i,j,k}} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) dV = \int_{C_{i,j,k}} \mathbf{S}(\mathbf{U}) dV. \quad (3.7)$$

Multiplicando toda a Equação 3.7 pelo valor $\frac{1}{|C_{i,j,k}|}$, obtém-se

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}}{\partial t} = -\frac{1}{|C_{i,j,k}|} \int_{C_{i,j,k}} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) dV + \bar{\mathbf{S}}_{i,j,k}(\mathbf{U}). \quad (3.8)$$

Aplicando o Teorema da Divergência no primeiro termo do lado direito da Equação

Figura 3.1 - Célula $C_{i,j,k}$ e sua respectiva média celular $\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}$.



Fonte: Produção do autor.

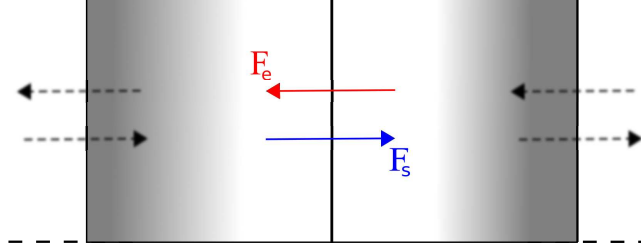
ção 3.8, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{U}}_{i,j,k} = -\frac{1}{|C_{i,j,k}|} \int_{\partial C_{i,j,k}} \mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}_{i,j,k} dV + \bar{\mathbf{S}}_{i,j,k}(\mathbf{U}), \quad (3.9)$$

em que $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{i,j,k}$ é o vetor normal à interface da célula $C_{i,j,k}$ em que se está calculando o fluxo, e $\partial C_{i,j,k}$ é a interface da célula.

Os termos acompanhados do operador diferencial divergência tornam-se fluxos através das fronteiras e, assim, precisam ser calculados na interface entre as células. Nesse contexto, o método VF é estritamente conservativo, pois, o fluxo que sai de um determinado volume deve ser igual ao fluxo que entra nele, como ilustrado na Figura 3.2. Assim, a física do problema pode ser reproduzida de tal forma que os princípios conservativos dos modelos e as características dos termos sejam mantidas.

Figura 3.2 - Fluxos entre duas células adjacentes em uma direção. O fluxos F_e e F_s são os que entram e sai da célula, respectivamente. No método de volumes finitos existe a conservação $F_e = F_s$.



Fonte: Produção do autor.

Para calcular o fluxo na interface das células, a Equação 3.9 deve ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}}{\partial t} &= -\frac{1}{|C_{i,j,k}|} \int_{z-1/2}^{z+1/2} \int_{y-1/2}^{y+1/2} [\mathbf{F}_x(\mathbf{U}_{i+1/2,j,k}) - \mathbf{F}_x(\mathbf{U}_{i-1/2,j,k})] dy dz \\
 &\quad -\frac{1}{|C_{i,j,k}|} \int_{z-1/2}^{z+1/2} \int_{x-1/2}^{x+1/2} [\mathbf{F}_y(\mathbf{U}_{i,j+1/2,k}) - \mathbf{F}_y(\mathbf{U}_{i,j-1/2,k})] dx dz \\
 &\quad -\frac{1}{|C_{i,j,k}|} \int_{y-1/2}^{y+1/2} \int_{x-1/2}^{x+1/2} [\mathbf{F}_z(\mathbf{U}_{i,j,k+1/2}) - \mathbf{F}_z(\mathbf{U}_{i,j,k-1/2})] dx dy \\
 &\quad + \bar{\mathbf{S}}_{i,j,k}(\mathbf{U}). \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

Definindo os termos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{i\pm 1/2,j,k} &= \frac{1}{\Delta y \Delta z} \int_{z-1/2}^{z+1/2} \int_{y-1/2}^{y+1/2} \mathbf{F}_x(\mathbf{U}_{i\pm 1/2,j,k}) dy dz, \\
 \mathcal{G}_{i,j\pm 1/2,k} &= \frac{1}{\Delta x \Delta z} \int_{z-1/2}^{z+1/2} \int_{x-1/2}^{x+1/2} \mathbf{F}_y(\mathbf{U}_{i,j\pm 1/2,k}) dx dz, \\
 \mathcal{H}_{i,j,k\pm 1/2} &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{y-1/2}^{y+1/2} \int_{x-1/2}^{x+1/2} \mathbf{F}_z(\mathbf{U}_{i,j,k\pm 1/2}) dx dy,
 \end{aligned}$$

pode-se reescrever a Equação 3.10 de forma mais simplificada

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}}{\partial t} = & -\frac{1}{\Delta x} \left(\mathcal{F}_{i+1/2,j,k} - \mathcal{F}_{i-1/2,j,k} \right) \\
& -\frac{1}{\Delta y} \left(\mathcal{G}_{i,j+1/2,k} - \mathcal{G}_{i,j-1/2,k} \right) \\
& -\frac{1}{\Delta z} \left(\mathcal{H}_{i,j,k+1/2} - \mathcal{H}_{i,j,k-1/2} \right) \\
& + \mathbf{S}_{i,j,k}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Como não há conhecimento dos valores da solução na interface das células, as funções \mathcal{F} , \mathcal{G} e \mathcal{H} são obtidas a partir de aproximações das componentes do tensor fluxo \mathbf{F} entre as células adjacentes, utilizando esquemas numéricos chamados *fluxos numéricos*. Exemplos de fluxos numéricos para MHD são o Harten-Lax-van Leer, HLL (HARTEN et al., 1983), Harten-Lax-van Leer-Discontinuidades, HLLD (MIYOSHI; KUSANO, 2005) e Harten-Lax-van Leer-Einfeldt-Modificado, HLLEM (WESENBERG, 2003). A idéia desses tipos de fluxo é utilizar médias em células adjacentes para estimar o valor do fluxo entre elas, ou seja, o fluxo que passa pela interface. Neste trabalho, utiliza-se a abordagem HLLD, na qual o fluxo é calculado individualmente em cada direção, e foi desenvolvido para resolver descontinuidades isoladas na solução no modelo MHD. Esse esquema é discutido em detalhes no Capítulo 4.

As proporções $\frac{\Delta t}{\Delta x}$, $\frac{\Delta t}{\Delta y}$, e $\frac{\Delta t}{\Delta z}$ estão associadas à estabilidade do esquema numérico, em particular, com a condição Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) (COURANT et al., 1967), em que Δt é o passo de tempo. Essa condição é necessária e deve ser satisfeita por todo método dos volumes finitos, caso seja esperada a estabilidade e a convergência da solução de uma equação diferencial em que sua malha é refinada. Ao ser satisfeita, ela condiciona que um método deve ser utilizado no sentido de que há chances da informação ser propagada com as velocidades físicas corretas, como determinadas pelos autovalores do sistema.

Matematicamente, a condição CFL para o caso tridimensional pode ser expressa pela desigualdade

$$\nu \leq C, \tag{3.12}$$

em que ν é chamado *número de Courant* e C é uma constante adimensional que depende da equação que será resolvida. Em um sistema hiperbólico, existe, geralmente, um conjunto de m ondas dadas pelos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, $m \in \mathbb{N}$.

Nesse caso, o número de Courant é definido como

$$\nu = \frac{\Delta t}{\min\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}} \max_p |\lambda_p|, \quad (3.13)$$

em que $p \in \{1, \dots, m\}$. É importante ressaltar que a condição CFL é necessária, porém não suficiente para garantir a estabilidade de um método. Existem esquemas numéricos que obedecem a essa condição e, ainda assim, são instáveis. Para mais detalhes sobre o método dos volumes finitos, sua estabilidade e convergência, consultar (LEVEQUE, 2002; EYMARD et al., 2000).

A derivada temporal no lado esquerdo da Equação 3.11 necessita de um esquema numérico para a evolução temporal da solução $\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}$. Neste trabalho utiliza-se um esquema Runge-Kutta explícito de 2ª ordem de aproximação, implicando em uma solução mais acurada e menos difusiva. Chamando o lado direito da Equação 3.11 de $\bar{\mathcal{L}}_{i,j,k}(t)$, a quantidade no tempo $t = t^{n+1} = (n+1)\Delta t$, $n \in \mathbb{N}$, é obtida em dois passos. No primeiro calcula-se o valor da quantidade em um tempo intermediário $t = t^*$ e, no segundo passo, calcula-se a quantidade evoluída por completo, ou seja,

$$\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^* = \bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^n + \Delta t \bar{\mathcal{L}}_{i,j,k}^n \quad (3.14)$$

$$\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^n + \bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^* + \Delta t \bar{\mathcal{L}}_{i,j,k}^* \right), \quad (3.15)$$

em que $\bar{\mathcal{L}}_{i,j,k}^n = \bar{\mathcal{L}}_{i,j,k}(t^n)$ é o valor dos fluxos, juntamente com os termos fonte, no tempo $t = t^n$.

Até o momento foi apresentada a discretização do modelo segundo o método dos volumes finitos. A próxima seção apresenta a idéia da multirresolução, sua representação e a abordagem adaptativa.

3.2 Análise multirresolução

A análise MR é inicialmente introduzida no contexto da representação de um dado em diferentes níveis de resolução (MALLAT, 1989). Na representação MR, ℓ está associado aos níveis de refinamento, em que uma certa informação é organizada. Por outro lado, i, j, k estão associados à posição da informação na malha. De uma forma geral, para um certo nível ℓ , com $0 \leq \ell \leq L$, em que L é o nível mais refinado, o dado discreto $\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^\ell$ pode ser entendido como uma amostra de um dado contínuo $\mathbf{U}(x, y, z, t)$ em um nível ℓ à medida que a posição i, j, k varia. Uma revisão desse tema encontra-se em (DOMINGUES et al., 2011).

3.2.1 Representação unidimensional

Para um melhor entendimento da teoria de MR por médias celulares, introduzem-se os conceitos para uma abordagem unidimensional segundo Harten (HARTEN, 1993; HARTEN, 1994; HARTEN, 1995; HARTEN, 1996). Depois, a idéia é estendida para três dimensões, de interesse deste trabalho, conforme o trabalho de Roussel (2003a), e outras abordagens complementares usando também passo de tempo local foram apresentadas em (DOMINGUES et al., 2008; DOMINGUES et al., 2009; LOPES et al., 2017). Essa abordagem introduzida por Harten tem uma sólida base matemática, baseada nos conceitos de análise harmônica e funcional.

Dado o certo nível ℓ , com $0 \leq \ell \leq L$, o dado discreto $\bar{\mathbf{U}}^\ell = \{\bar{\mathbf{U}}_i^\ell\}_{i=1}^{N^\ell}$ é o conjunto das médias celulares da solução \mathbf{U} em um nível ℓ , ou seja,

$$\bar{\mathbf{U}}_i^\ell = \frac{1}{h_\ell} \int_{x_{i-1}^\ell}^{x_i^\ell} \mathbf{U}(x) dx, \quad (3.16)$$

com $h_\ell = 1/N^\ell$ o tamanho da célula e $N^\ell = 2^\ell$ o número de células desse nível, com $i \in \{1, \dots, 2^\ell\}$. Considera-se o conjunto de malhas diádicas aninhadas em um nível ℓ , denotado como G^ℓ e definidos por

$$G^\ell = \{x_i^\ell\}_{i=0}^{N^\ell}, \quad x_i^\ell = i h_\ell, \quad (3.17)$$

ou seja, o número de células em cada malha é uma potência de dois e, além disso, existe a relação $G^\ell \subset G^{\ell+1}$. A malha G^ℓ pode ser obtida ao remover as células com índices ímpares da malha em um nível acima $G^{\ell+1}$, isto é,

$$G^{\ell+1} \setminus G^\ell = \{x_{2i-1}^{\ell+1}\}, \quad (3.18)$$

implicando que $G^{\ell+1} \cap G^\ell = G^\ell$, resultando na relação

$$x_i^\ell = x_{2i}^{\ell+1}. \quad (3.19)$$

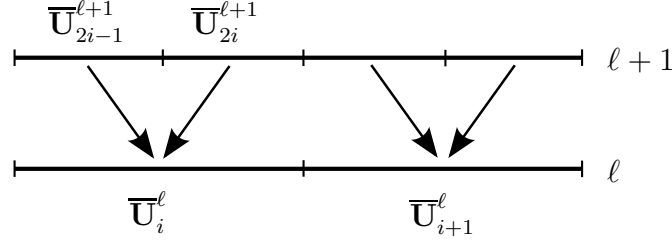
A partir da Equação 3.19, juntamente com a definição de $\bar{\mathbf{U}}_i^\ell$, tem-se a seguinte relação

$$\bar{\mathbf{U}}_i^\ell = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{U}}_{2i-1}^{\ell+1} + \bar{\mathbf{U}}_{2i}^{\ell+1}), \quad (3.20)$$

a qual indica que médias celulares em um nível ℓ podem ser obtidas a partir do conhecimento das médias celulares em um nível acima $\ell+1$. Esse processo é chamado

projeção, como ilustrado na Figura 3.3.

Figura 3.3 - Projeção do nível $\ell + 1$ para ℓ .



Fonte: Produção do autor baseada em Roussel et al. (2003a).

Para aproximar os valores em um nível $\ell + 1$ a partir das médias celulares em ℓ , efetua-se o processo chamado de predição, como na Figura 3.4. Utiliza-se uma interpolação polinomial de forma a estimar os valores $\bar{\mathbf{U}}_{2i-1}^{\ell+1}$ e $\bar{\mathbf{U}}_{2i}^{\ell+1}$. Os valores aproximados $\hat{\mathbf{U}}_{2i-1}^{\ell+1}$ e $\hat{\mathbf{U}}_{2i}^{\ell+1}$, dados por

$$\hat{\mathbf{U}}_{2i-1}^{\ell+1} = \mathcal{I}(\bar{\mathbf{U}}^{\ell}, \ell + 1, 2i - 1) = \bar{\mathbf{U}}_i^{\ell} - \sum_{m=1}^s -\frac{1}{8}(\bar{\mathbf{U}}_{i+m}^{\ell} - \bar{\mathbf{U}}_{i-m}^{\ell}) \quad (3.21)$$

$$\hat{\mathbf{U}}_{2i}^{\ell+1} = \mathcal{I}(\bar{\mathbf{U}}^{\ell}, \ell + 1, 2i) = \bar{\mathbf{U}}_i^{\ell} + \sum_{m=1}^s -\frac{1}{8}(\bar{\mathbf{U}}_{i+m}^{\ell} - \bar{\mathbf{U}}_{i-m}^{\ell}), \quad (3.22)$$

para a ordem cúbica do método de MR, associada a uma interpolação polinomial de grau 2. O erro de aproximação, também chamado de detalhe, é obtido ao se calcular a diferença entre os valores exatos e aproximados, denotado por d_i^{ℓ} e definidos como

$$d_i^{\ell} = \bar{\mathbf{U}}_{2i-1}^{\ell+1} - \hat{\mathbf{U}}_{2i-1}^{\ell+1} = \bar{\mathbf{U}}_{2i-1}^{\ell+1} - \mathcal{I}(\bar{\mathbf{U}}^{\ell}, \ell + 1, 2i - 1), \quad (3.23)$$

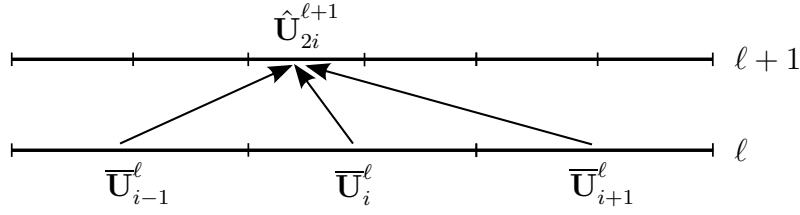
ou seja, obtém-se a relação

$$\bar{\mathbf{U}}_{2i-1}^{\ell+1} = \mathcal{I}(\bar{\mathbf{U}}^{\ell}, \ell + 1, 2i - 1) + d_i^{\ell}. \quad (3.24)$$

A partir da Equação 3.24, observa-se que o conhecimento dos valores $(d^{\ell}, \bar{\mathbf{U}}^{\ell})$ é equivalente ao conhecimento de $\bar{\mathbf{U}}^{\ell+1}$, isto é,

$$\bar{\mathbf{U}}^{\ell+1} \longleftrightarrow (d^{\ell}, \bar{\mathbf{U}}^{\ell}), \quad (3.25)$$

Figura 3.4 - Predição de uma célula no nível $\ell + 1$ a partir dos valores no nível ℓ .



Fonte: Produção do autor baseada em Roussel et al. (2003a).

no sentido em que há uma transformação um-a-um entre esses dois conjuntos. Esse conceito pode ser estendido para os outros níveis de resolução, em particular o nível mais refinado L , como apresentado a seguir

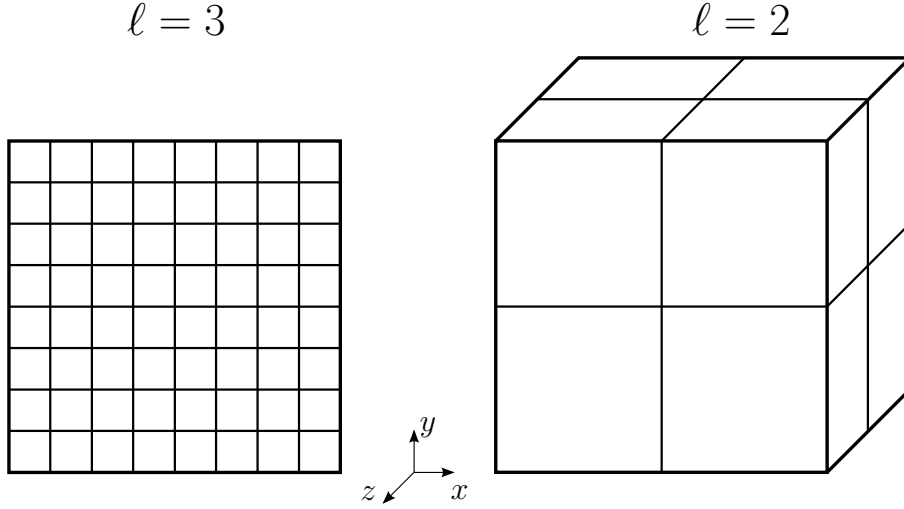
$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{U}}^L &\longleftrightarrow (d^{L-1}, \bar{\mathbf{U}}^{L-1}), \\
 \bar{\mathbf{U}}^L &\longleftrightarrow (d^{L-1}, d^{L-2}, \bar{\mathbf{U}}^{L-2}), \\
 \bar{\mathbf{U}}^L &\longleftrightarrow \quad \quad \quad \vdots \\
 \bar{\mathbf{U}}^L &\longleftrightarrow (d^{L-1}, d^{L-2}, \dots, d^0, \bar{\mathbf{U}}^0).
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

A Relação 3.26 é chamada representação multirresolução de um determinado dado. Com ela é possível obter um dado em qualquer nível ℓ a partir da informação no nível menos refinado (ou mais grosseiro) juntamente com os detalhes dos outros níveis $\{\mathbf{d}^{\ell-1}, \mathbf{d}^{\ell-2}, \dots, \mathbf{d}^0\}$. Esse processo de decomposição do dado em vários níveis de resolução é chamado transformada de multirresolução. A seguir, essa abordagem é apresentada para as outras dimensões espaciais.

3.2.2 Representação celular em multirresolução

Seja $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, y, z, t)$ uma função absolutamente integrável em Ω , ou seja, a integral do módulo de \mathbf{U} em Ω existe. Considera-se uma hierarquia de malhas diádicas uniformes. O centro de cada célula $C_{i,j,k}^\ell$ é localizado pelos índices $i, j, k \in \{0, \dots, 2^\ell - 1\}$ e seu tamanho é definido por $|C_{i,j,k}^\ell| = h2^{-D\ell}$, em que D é a dimensão do problema e $h = \Delta x \Delta y$ ou $h = \Delta x \Delta y \Delta z$ para duas e três dimensões respectivamente. Dessa forma, o número total de células em cada nível é $2^{D\ell}$ células. Na Figura 3.5 são ilustradas as malhas em duas e três dimensões para $\ell = 3$ e $\ell = 2$, respectivamente.

Figura 3.5 - Visualização de uma malha bidimensional no nível $\ell = 3$ e uma malha tridimensional no nível $\ell = 2$, ambas com 2^6 células.



Fonte: Produção do autor.

A partir do conceito de malhas aninhadas (ou encaixadas), em que uma malha menos refinada está contida em uma malha em um nível acima, assim como apresentado no caso unidimensional, torna-se possível navegar entre essas malhas para obter valores desejados. Para tal, é necessário definir dois operadores: projeção e predição. O operador de projeção é exato e único, denotado por $\mathcal{P}_{\ell+1}^{\ell}$, e consiste em obter valores em um nível ℓ a partir de valores em um nível $\ell + 1$ mais refinado. Esse cálculo é realizado a partir da média ponderada dos valores em $\ell + 1$, isto é, para três dimensões tem-se

$$\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^{\ell} = \left(\mathcal{P}_{\ell+1}^{\ell} \bar{\mathbf{U}}^{\ell+1} \right)_{i,j,k} = \frac{1}{8} \sum_{m=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \bar{\mathbf{U}}_{2i+m,2j+p,2k+q}^{\ell+1}, \quad (3.27)$$

com $m, p, q \in \{0, 1\}$. Para duas dimensões, o operador é definido de forma análoga, ou seja,

$$\bar{\mathbf{U}}_{i,j}^{\ell} = \left(\mathcal{P}_{\ell+1}^{\ell} \bar{\mathbf{U}}^{\ell+1} \right)_{i,j} = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^1 \sum_{p=0}^1 \bar{\mathbf{U}}_{2i+m,2j+p}^{\ell+1}. \quad (3.28)$$

Sendo assim, cada média celular no nível ℓ é obtida a partir de oito ou quatro valores, para três e duas dimensões respectivamente.

Por outro lado, o processo que consiste em obter as médias celulares no nível $\ell + 1$ a partir das médias celulares no nível menos refinado ℓ , é performado pelo operador de predição (ou refinamento), denotado por $\mathcal{P}_\ell^{\ell+1}$. Esse operador consiste na aproximação de médias celulares e, com isso, não é exato e pode ser definido de diferentes formas. Neste trabalho, opta-se pela abordagem proposta por Harten (HARTEN et al., 1997; HARTEN, 1995; HARTEN, 1994; HARTEN, 1993), que utiliza uma interpolação linear. Essa abordagem foi estendida para duas (BIHARI; HARTEN, 1997) e três dimensões em (ROUSSEL, 2003; ROUSSEL et al., 2003a). O conjunto de médias celulares aproximadas é denotado por $\hat{\mathbf{U}}$. Sendo assim, em três dimensões a aproximação é dada por

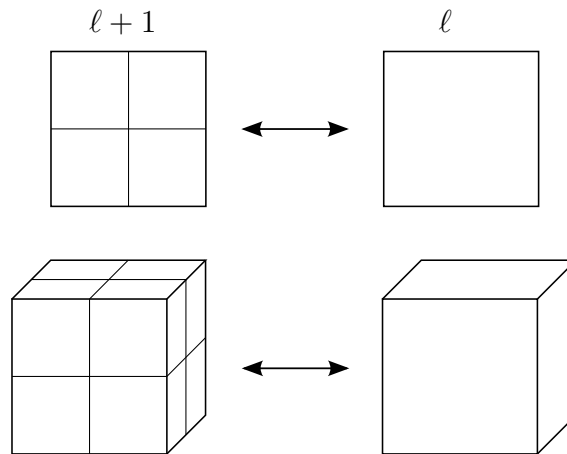
$$\hat{\mathbf{U}}_{2i+m,2j+p,2k+q}^{\ell+1} = \left(\mathcal{P}_\ell^{\ell+1} \bar{\mathbf{U}}^\ell \right)_{2i+m,2j+p,2k+q} = \mathcal{I}(\bar{\mathbf{U}}^\ell, \ell+1, 2i+m, 2j+p, 2k+q), \quad (3.29)$$

em que \mathcal{I} é um operador de interpolação. Para duas dimensões, tem-se

$$\hat{\mathbf{U}}_{2i+m,2j+p}^{\ell+1} = \left(\mathcal{P}_\ell^{\ell+1} \bar{\mathbf{U}}^\ell \right)_{2i+m,2j+p} = \mathcal{I}(\bar{\mathbf{U}}^\ell, \ell+1, 2i+m, 2j+p). \quad (3.30)$$

O operador de refinamento aproxima oito médias celulares em cada célula em três dimensões, e quatro em duas dimensões. Além disso, possui a propriedade de localização, necessitando apenas de valores em sua vizinhança para performar a aproximação. A Figura 3.6 ilustra a correspondência local entre as malhas de níveis adjacentes.

Figura 3.6 - Correspondência local entre malhas em níveis de refinamento adjacentes.



Fonte: Produção do autor.

Para cada aproximação existe um erro associado, calculado pela diferença entre a média celular $\bar{\mathbf{U}}^{\ell+1}$ no nível $\ell + 1$ e a sua aproximação $\hat{\mathbf{U}}^{\ell+1}$, ou seja,

$$\mathbf{d}^\ell = \bar{\mathbf{U}}^{\ell+1} - \hat{\mathbf{U}}^{\ell+1} \quad \rightarrow \quad \bar{\mathbf{U}}^{\ell+1} = \mathcal{I}(\bar{\mathbf{U}}^\ell) + \mathbf{d}^\ell, \quad (3.31)$$

em que $\mathbf{d}^\ell = \mathbf{d}_{i,j,k}^\ell$ é o erro, também chamado de detalhe ou coeficiente wavelet. A partir desses coeficientes, pode-se obter informações sobre a regularidade local de um determinado dado. O número de coeficientes wavelet para cada aproximação varia de acordo com a dimensão do problema. São necessários três coeficientes wavelet em duas dimensões e sete em três dimensões, para se ter uma correspondência um-a-um $\bar{\mathbf{U}}^{\ell+1} \longleftrightarrow \{\bar{\mathbf{U}}^\ell, \mathbf{d}^\ell\}$. No geral, o número de coeficientes é dado pela fórmula $2^D - 1$, em que D é a dimensão do problema. Os coeficientes wavelet juntamente com a média celular $\bar{\mathbf{U}}_{i,j}^\ell$, possibilitam a obtenção das médias celulares em $\ell + 1$ sempre que for necessário, resultando na relação

$$\bar{\mathbf{U}}_{2i+m,2j+p,2k+q}^{\ell+1} \longleftrightarrow \{\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^\ell, \mathbf{d}_1^\ell, \mathbf{d}_2^\ell, \dots, \mathbf{d}_7^\ell\}, \quad (3.32)$$

em que $m, p, q \in \{0, 1\}$ variam a fim de obter todas as células no nível $\ell+1$ localmente em três dimensões. A relação acima é obtida para o caso bidimensional de forma análoga. Em particular, em duas dimensões a relação entre as células e os coeficientes wavelet é dada por

$$\bar{\mathbf{U}}_{2i+m,2j+p}^{\ell+1} \longleftrightarrow \{\bar{\mathbf{U}}_{i,j}^\ell, \mathbf{d}_1^\ell, \mathbf{d}_2^\ell, \mathbf{d}_3^\ell\}. \quad (3.33)$$

A relação acima é ilustrada na Figura 3.7, mostrando que o conhecimento dos coeficientes escala e wavelet é equivalente ao conhecimento dos valores das médias celulares em $\ell + 1$. Definindo o conjunto de todos os detalhes obtidos em uma aproximação local no nível ℓ por

$$\mathbf{D}^\ell = \{\mathbf{d}_m^\ell, 0 \leq m \leq 2^{\ell D} - 1\}, \quad (3.34)$$

esse conceito pode ser generalizado para toda a malha, obtendo uma correspondência um-a-um entre $\bar{\mathbf{U}}^{\ell+1}$ e o conjunto $\{\mathbf{D}^\ell, \mathbf{U}^\ell\}$. Então, a representação multirresolução é dada por

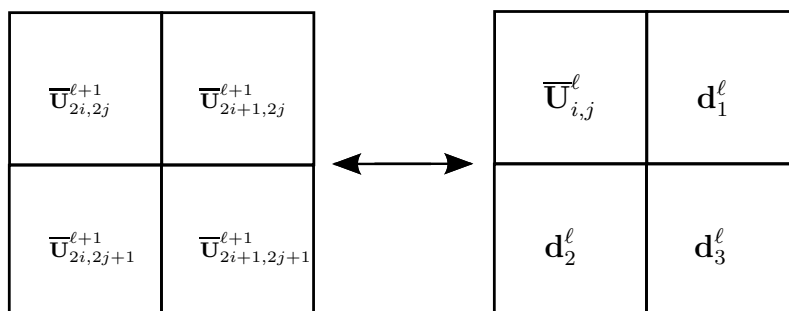
$$\bar{\mathbf{U}}^L \longleftrightarrow \{\mathbf{D}^{L-1}, \mathbf{D}^{L-2}, \dots, \mathbf{D}^0, \mathbf{U}^0\}, \quad (3.35)$$

que caracteriza o processo do operador de transformada multirresolução \mathbf{M} dado por

$$\bar{\mathbf{U}}_{MR} = \mathbf{M} \bar{\mathbf{U}}^L, \quad \bar{\mathbf{U}}^L = \mathbf{M}^{-1} \bar{\mathbf{U}}_{MR}. \quad (3.36)$$

em que $\bar{\mathbf{U}}_{MR} = (\mathbf{D}^{L-1}, \mathbf{D}^{L-2}, \dots, \mathbf{D}^0, \mathbf{U}^0)$. A transformada multirresolução satisfaz três propriedades: localização, cancelamento de polinômios e estabilidade (DOMIN-

Figura 3.7 - Correspondência local entre as médias celulares em $\ell + 1$ e os coeficientes wavelets obtidos com o operador de refinamento em duas dimensões.



Fonte: Produção do autor.

GUES et al., 2011). A estabilidade garante que pequenas perturbações introduzidas nos dados transformados em qualquer escala não são amplificadas descontroladamente em aplicações iterativas da transformada multi-nível.

Conclui-se que o conhecimento de todas as médias celulares no nível em que a malha é a mais grosseira junto com os detalhes de todos os níveis mais refinados é equivalente ao conhecimento das médias celulares em um nível mais refinado.

Os coeficientes wavelet armazenam os erros de interpolação obtidos no processo realizado pelo operador de predição. Quando a solução apresenta valores suaves ou constantes dentro de um certo intervalo, a aproximação obtida é mais eficaz, gerando erros menores. Por outro lado, se solução apresenta descontinuidades ou variações locais, existe uma maior dificuldade de aproximação, resultando em erros com valores maiores. Com isso, pode-se concluir que os coeficientes wavelet são menores em regiões suaves e maiores em regiões com estruturas localizadas, ou seja, essa informação está relacionada com a regularidade local da solução.

Assim, dado um determinado parâmetro de referência, os coeficientes wavelet podem ser caracterizados em significantes ou não-significantes. Os valores não-significantes podem ser negligenciados, já que caracterizam regiões locais com comportamento suave. No entanto, quando são significantes, precisam ser mantidos, pois indicam regiões com menos regulares. Dessa forma, dentro do contexto da representação multirresolução, são interessantes apenas os valores significantes do coeficiente wavelet, os quais são necessários para representar as estruturas da solução em níveis mais refinados.

Nesse contexto, introduz-se a abordagem de multirresolução adaptativa, a qual se utiliza dos valores significantes dos coeficientes wavelet para adaptar localmente a malha de acordo com o comportamento local da solução, ou seja, a malha é mais refinada onde há estruturas na solução e menos refinada em regiões suaves (HARTEN, 1993; HARTEN, 1994; HARTEN, 1995; HARTEN, 1996). Uma revisão sobre o tema encontra-se em (COHEN, 2003; DOMINGUES et al., 2011)

3.2.3 Multirresolução adaptativa

Para determinar as regiões que necessitam de um refinamento maior ou menor de malha, utiliza-se o operador de truncamento $\mathcal{T}_{\epsilon^\ell}$ nos coeficientes wavelet obtidos no processo de refinamento da malha. Para cada aproximação, aplica-se nos $2^D - 1$ coeficientes o operador $\mathcal{T}_{\epsilon^\ell}$ definido por

$$\mathcal{T}_{\epsilon^\ell} = \begin{cases} 0, & \text{se } |\mathbf{d}_m^\ell| \leq \epsilon^\ell, \\ \mathbf{d}_m^\ell, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.37)$$

em que ϵ^ℓ é o parâmetro de truncamento e $m \in \{0, \dots, 2^D - 1\}$. O operador de truncamento consiste em remover as células em um determinado nível em que o detalhe é menor que ϵ^ℓ , substituindo os valores desses detalhes por zero. Dessa forma, com a redução do número de células necessárias para a simulação, o custo computacional pode ser reduzido, obtendo uma compressão de dados, isto é, uma redução de memória de armazenamento. No contexto wavelet, esse procedimento é aplicado com o objetivo de tornar menos refinadas as células necessárias para uma representação local acurada da solução no tempo t^{n+1} .

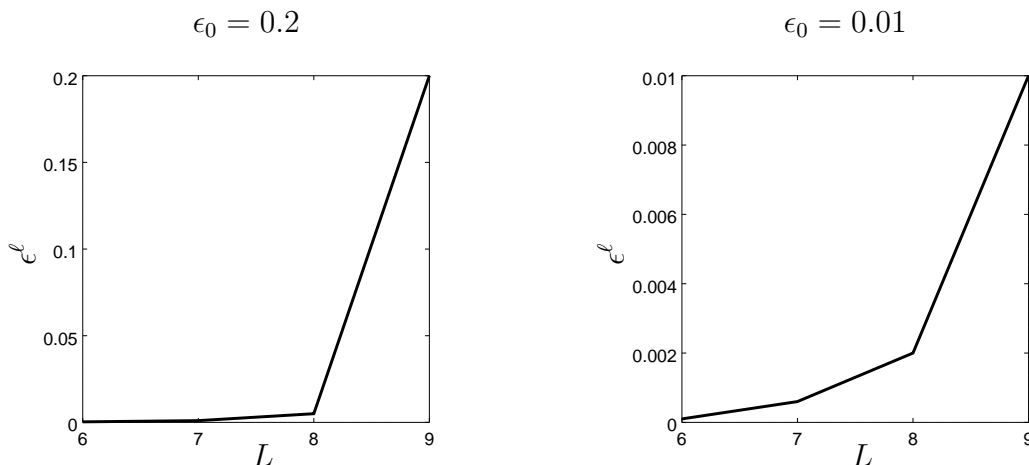
Nas regiões onde a solução possui comportamento suave, esses coeficientes são de pequena magnitude ($|\mathbf{d}^\ell| \leq \epsilon^\ell$), possibilitando o uso de malhas menos refinadas. Por outro lado, nas regiões onde há estruturas localizadas, os coeficientes são significantes ($|\mathbf{d}^\ell| > \epsilon^\ell$) e, então, malhas mais refinadas devem ser utilizadas (HARTEN, 1993; HARTEN, 1994).

O parâmetro de truncamento ϵ^ℓ pode ser fixo ou variável em relação ao nível ℓ . No primeiro caso, define-se o valor $\epsilon = \epsilon^\ell$ que permanece inalterado durante toda a simulação. Já no caso variável, define-se o parâmetro de truncamento inicial ϵ^0 , o qual é modificado de acordo com o nível de refinamento local da região desejada, dado pela equação

$$\epsilon^\ell = \frac{\epsilon^0}{|\Omega|} 2^{D(\ell-L+1)}, \quad 0 \leq \ell \leq L-1, \quad (3.38)$$

em que $|\Omega|$ é o volume global da região computacional. A Equação 3.38 é conhecida como estratégia de Harten para a escolha do valor $\epsilon^\ell = \epsilon(\epsilon^0, \ell)$, na qual utiliza-se um valor menor nas regiões com um refinamento mais grosseiro e, de forma análoga, um valor maior em regiões com um maior refinamento local. Na Figura 3.8, são apresentados gráficos para ilustrar como que ocorre a variação do truncamento por nível. No lado esquerdo, considera-se o valor inicial $\epsilon^0 = 0.2$ para um problema de Orszag-Tang bidimensional e nível máximo $L = 9$. Pode-se observar que variando apenas um nível de refinamento, o valor ϵ^ℓ diminui duas ordens de grandeza, apresentando, em níveis menores, valores suficientemente baixos. Para os valores de ϵ^ℓ apresentados, a malha adaptativa tem mais de 80% das células. Já para o gráfico à direita, o qual apresenta os valores de ϵ^ℓ para o problema da nuvem magnética bidimensional, com valor inicial $\epsilon^0 = 0.01$, pode-se observar que há o decaimento de uma ordem de grandeza entre os valores de truncamento. Com isso, para essa abordagem, a malha adaptativa demanda 40% das células da malha. Então, em um contexto inicial, pode-se notar que a escolha da abordagem de truncamento deve estar alinhada com o tipo de problema de interesse a ser simulado, de forma a obter uma malha adaptativa adequada para cada caso.

Figura 3.8 - Mudança nos valores de ϵ por nível, considerando o nível máximo $L = 9$ e o valor inicial ϵ_0 para domínios computacionais diferentes.

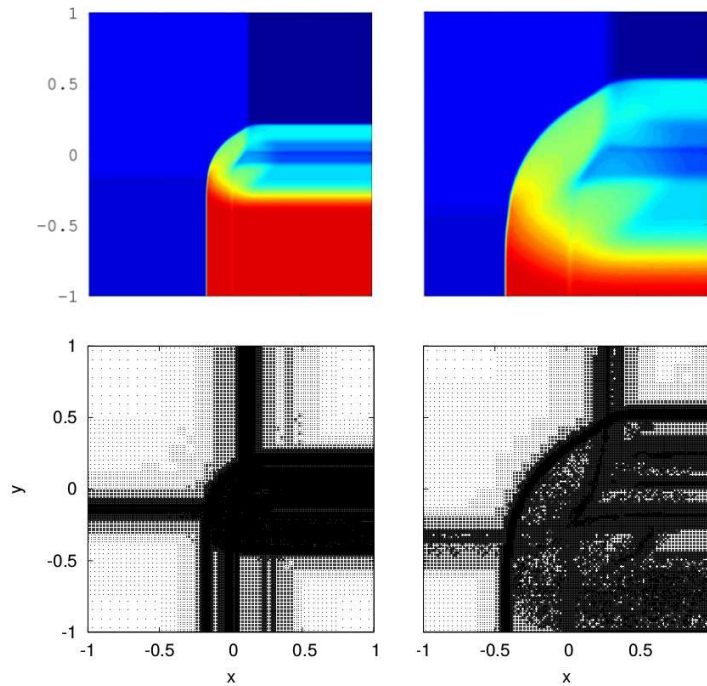


Fonte: Produção do autor.

Para ilustrar a abordagem multirresolução no contexto de uma simulação numérica,

apresenta-se na Figura 3.9 a variável densidade obtida em $t = 0.1$ para um problema de Riemann 2D, simulada com o modelo MHD ideal, e sua malha adaptada ao final da evolução temporal. Nessa imagem pode-se observar que o maior refinamento está localizado na parte do domínio na qual a solução apresenta mais estruturas, e o refinamento é grosseiro nas partes mais suaves da solução.

Figura 3.9 - Solução de um problema de Riemann 2D para o modelo MHD Ideal em $t = 0.1$ e $t = 0.25$, variável densidade, (esquerda) e sua malha adaptativa ao utilizar o método MR adaptativo (direita).



Fonte: Produção do autor.

3.3 Evolução temporal

As estruturas localizadas do dado podem ser alteradas ao longo do tempo em uma simulação numérica. Com isso, a malha adaptativa necessária em um tempo t_n pode não ser suficiente no tempo subsequente t^{n+1} . Então, deve-se adaptar a malha em cada passo de tempo da simulação, de forma a acompanhar a regularidade local do dado. Definindo os operadores $\mathbb{E} : \overline{\mathbf{U}}^n \rightarrow \overline{\mathbf{U}}^{n+1}$ de evolu-

ção temporal, $\mathbf{M} : \bar{\mathbf{U}}^L \rightarrow \{\mathbf{d}^{L-1}, \dots, \mathbf{d}^\ell, \bar{\mathbf{U}}^\ell\}$ a transformada multirresolução e $\mathbf{M}^{-1} : \{\mathbf{d}^{L-1}, \dots, \mathbf{d}^\ell, \bar{\mathbf{U}}^\ell\} \rightarrow \bar{\mathbf{U}}^L$ a transformada multirresolução inversa, pode-se descrever o processo de multirresolução adaptativa como

$$\bar{\mathbf{U}}_{MR}^n = \mathbf{M}(\bar{\mathbf{U}}^n) \quad (3.39)$$

$$\bar{\mathbf{U}}_{MR}^{n*} = \mathcal{T}(\bar{\mathbf{U}}_{MR}^n), \quad (3.40)$$

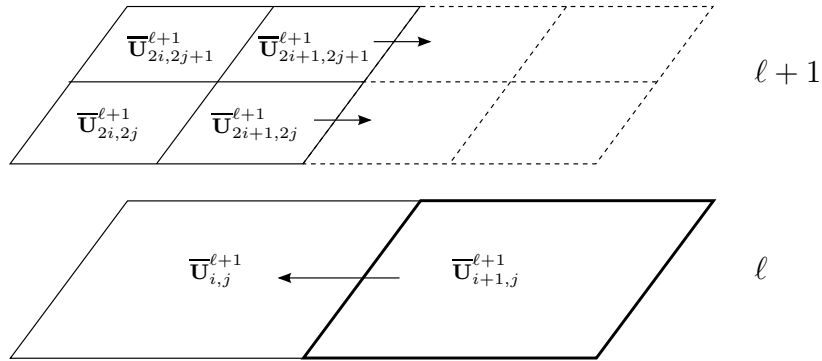
$$\bar{\mathbf{U}}_{MR}^{n+1} = \mathbb{E}(\bar{\mathbf{U}}_{MR}^{n*}), \quad (3.41)$$

$$\bar{\mathbf{U}}^{n+1} = \mathbf{M}^{-1}(\bar{\mathbf{U}}_{MR}^{n+1}) \quad (3.42)$$

indicando que, após a obtenção da representação multirresolução da solução $\bar{\mathbf{U}}^n$, aplica-se o operador de truncamento e obtém-se as médias celulares no passo intermediário n^* , composto pelas células fazem parte da representação multirresolução multirresolução na solução no tempo t^n . Depois dessa etapa, os valores das médias celulares são evoluídos para o tempo t^{n+1} . A partir daí, aplica-se a transformada multirresolução inversa para obter novamente a solução no tempo t^{n+1} (ROUSSEL et al., 2003a).

A evolução temporal da solução depende do cálculo dos fluxos na interface das células. Além disso, os fluxos devem manter sua propriedade de conservação. Para garantir a conservação do fluxo através das células, visto que esse pode ser calculado entre dois níveis adjacentes, deve-se estimar o fluxo saindo das células apenas no nível $\ell + 1$. Dessa forma, o fluxo entrando na célula de posição i, j no nível ℓ é obtido pela soma dos fluxos calculados em $\ell + 1$. Esse processo é ilustrado na Figura 3.10, para duas dimensões. Mais detalhes sobre a simulação numérica, jun-

Figura 3.10 - Fluxo entre células em níveis adjacentes.



Fonte: Produção do autor baseada em Roussel (2003).

tamente com a metodologia MR adaptativa, aplicada ao contexto da modelagem MHD são apresentados no próximo capítulo.

4 MODELAGEM MHD

Nos capítulos anteriores, a formulação teórica MHD, o método de volumes finitos e a abordagem MR adaptativa são apresentadas para situar o contexto da simulação numérica MHD adaptativa. Neste trabalho, essas metodologias são acopladas entre si, com o objetivo de possibilitar a simulação MHD com a adaptatividade da multirresolução por médias celulares. Ao longo deste processo, encontram-se desafios computacionais, como por exemplo, instabilidades numéricas, estruturas mal representadas e problemas com adaptatividade. Com isso, torna-se necessária a adição de outros métodos e a adaptação dos já existentes.

Neste capítulo, apresentam-se as metodologias acopladas ao código CARMEN-MHD, bem como as modificações principais realizadas, a fim de possibilitar a obtenção de resultados fisicamente coerentes e simulações numericamente eficientes.

4.1 Modelo GLM-MHD

No Capítulo 2, apresenta-se a lei de Gauss para o magnetismo, dada pela equação $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Essa equação é entendida como uma restrição física associada ao campo magnético, que é sempre satisfeita em um meio contínuo. No entanto, na abordagem numérica proposta neste trabalho, essa restrição pode ser violada, levando a alterações na física do problema de interesse (BRACKBILL; BARNES, 1980). Com isso, introduz-se uma correção de divergência do campo magnético chamada parabólica-hiperbólica (ou mista), a qual não anula o valor de $\nabla \cdot \mathbf{B}$, mas controla os erros numéricos associados, evitando comportamentos não-físicos na solução numérica MHD (DEDNER et al., 2002).

Nesta abordagem, proposta em Munz et al (2000), a restrição de divergência é obtida a partir de um operador diferencial \mathcal{D} , o qual é adicionado ao sistema, juntamente com uma variável escalar ψ . Com isso, apresenta-se o modelo conhecido por MHD ideal com Multiplicadores de Lagrange Generalizados (GLM-MHD), consistindo nas equações MHD ideal com as equações da restrição e do campo magnético, adicionadas dos termos $\nabla\psi$ e $\mathcal{D}(\psi)$, ou seja

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u}) + \nabla\psi = \mathbf{0} \quad (4.1a)$$

$$\mathcal{D}(\psi) + \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.1b)$$

Para a correção parabólica-hiperbólica, define-se o operador \mathcal{D} como

$$\mathcal{D}(\psi) = \frac{1}{c_h^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{c_p^2} \psi, \quad (4.2)$$

em que c_p e c_h são parâmetros associados às correções parabólica e hiperbólica, respectivamente. Incorporando $\mathcal{D}(\psi)$ à Equação 4.1b, tem-se

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi. \quad (4.3)$$

Quando adicionada ao sistema, a correção parabólica promove dissipação dos erros locais de divergência; na hiperbólica esses erros são propagados para a fronteira do domínio com velocidade $c_h > 0$. Consequentemente, a correção parabólica-hiperbólica adiciona tanto dissipação quanto propagação dos erros de divergência (DEDNER et al., 2002).

Para a evolução temporal da Equação 4.3, considera-se o termo $\nabla \cdot \mathbf{B}$ como sendo nulo, obtendo-se a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi. \quad (4.4)$$

resultando em uma equação diferencial separável. Integrando a equação no intervalo $[t^n, t^{n+1}]$, tem-se

$$\psi^{n+1} = \psi^n \exp\left(-\frac{c_h^2}{c_p^2} \Delta t\right), \quad (4.5)$$

em que $\psi^n = \psi(t = t^n)$ e $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. Considerando o valor $\alpha_p = \Delta h \frac{c_h}{c_p}$, com $\alpha_p \in [0, 1]$ e $\Delta h = \min\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}$, sendo $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ os passos espaciais em cada direção, reescreve-se a Equação 4.5 como

$$\psi^{n+1} = \psi^n \exp\left(-\alpha_p \frac{c_h}{\Delta h / \Delta t}\right). \quad (4.6)$$

O parâmetro α_p foi introduzido por Mignone e Tzeferacos (2010). Segundo os autores, o parâmetro utilizado inicialmente na correção, dado pela razão $\frac{c_p^2}{c_h}$, não é adimensional, tornando sua definição incompleta. Essa razão tem a dimensão de comprimento, então definindo α_p como o produto de Δh por essa razão, garante-se a adimensionalidade.

Esse tipo de correção utiliza métodos explícitos no tempo, assim como o utilizado neste trabalho e, dessa forma, essa metodologia é melhor adequada nesse contexto

ao comparada com outros métodos (TÓTH, 2000; MIYOSHI; KUSANO, 2011). Além disso, o operador da correção mista para $\nabla \cdot \mathbf{B}$ é de fácil implementação em um código já existente e possui baixo custo computacional.

A correção GLM é inicialmente proposta para um modelo MHD ideal apresentado no Sistema 2.46d. Para o modelo resistivo, considera-se uma extensão dessa abordagem, obtida ao adicionar os termos fonte de dissipação Ôhmica e e calor, respectivamente nas equações do campo magnético e densidade de energia, ou seja

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (4.7a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(\mathcal{E} + p + \frac{B^2}{2} \right) \mathbf{u} - \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \right] = \nabla \cdot [\mathbf{B} \times \eta (\nabla \times \mathbf{B})], \quad (4.7b)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \left(p + \frac{1}{2} B^2 \right) \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \right] = 0, \quad (4.7c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}) + \nabla \psi = -\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}), \quad (4.7d)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi. \quad (4.7e)$$

O modelo acima é chamado de modelo GLM–MHD resistivo, e descreve o comportamento de um fluido condutor sob a influência de um campo magnético de forma a controlar os erros associados à divergência de \mathbf{B} , juntamente com efeitos de resistividade.

Para escrever o modelo GLM–MHD em sua forma matricial, dada pela equação $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U})$, define-se o vetor de variáveis \mathbf{U} e o tensor fluxo $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ como

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \mathcal{E} \\ \rho \mathbf{u} \\ \mathbf{B} \\ \psi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \left(\mathcal{E} + p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2} \right) \mathbf{u} - \mathbf{B} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \left(p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2} \right) \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \\ \mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u} + \psi \mathbf{I} \\ c_h^2 \mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

O vetor fonte $\mathbf{S}(\mathbf{U})$ é dado por $\mathbf{S}(\mathbf{U}) = (0, \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \eta \nabla \times \mathbf{B}), \mathbf{0}, -\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}), -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi)^T$.

Para que a correção mista seja calculada, deve-se atualizar o cálculo do fluxo numérico e evoluir a função escalar ψ no tempo. Considerando o fluxo individualmente em cada direção, a equação do campo magnético juntamente com a correção GLM,

tem-se que

$$\mathcal{F}_{B_x} = \mathcal{F}_{B_x} + \psi_m, \quad \mathcal{F}_\psi = c_h^2 B_{x,m}, \quad (4.9)$$

$$\mathcal{G}_{B_y} = \mathcal{G}_{B_y} + \psi_m, \quad \mathcal{G}_\psi = c_h^2 B_{y,m}, \quad (4.10)$$

$$\mathcal{H}_{B_z} = \mathcal{H}_{B_z} + \psi_m, \quad \mathcal{H}_\psi = c_h^2 B_{z,m}, \quad (4.11)$$

em que \mathcal{F} , \mathcal{G} e \mathcal{H} são os fluxos numéricos nas direções x , y e z , respectivamente. Os valores $B_{d,m}$, com $d \in \{x, y, z\}$, e ψ_m são dados por

$$B_{d,m} = B_{d,L} + \frac{1}{2}(B_{d,R} - B_{d,L}) - \frac{1}{2c_h}(\psi_R - \psi_L), \quad (4.12)$$

$$\psi_m = \psi_L + \frac{1}{2}(\psi_R - \psi_L) - \frac{c_h}{2}(B_{d,R} - B_{d,L}), \quad (4.13)$$

com L e R denotando esquerda e direita, respectivamente, dentro do contexto de células adjacentes em uma determinada direção do fluxo. As quantidades B_m e ψ_m representam os valores de B_d e ψ na interface da célula.

Para estimar o valor do fluxo na interface das células, utilizam-se os fluxos numéricos. Neste trabalho, emprega-se uma abordagem baseada nos autovalores do sistema MHD. Na próxima seção, o cálculo desses valores é efetuado para a matriz do modelo GLM–MHD.

4.1.1 Autovalores do sistema GLM–MHD

Os autovalores do modelo MHD estão associados às ondas MHD, que estão relacionadas à propagação de informações no meio. As ondas MHD são produzidas a partir do movimento do plasma através do campo magnético. Essas ondas são consequências do campo eletromagnético gerado pela interação de um fluido condutor com o campo magnético do meio. Para obter os autovalores, utiliza-se o modelo GLM–MHD dado pelo Sistema 4.7, em sua forma ideal conservativa na direção x , como apresentado em (DEDNER et al., 2002). A abordagem para as outras direções é análoga, e sua generalização é feita ao final do problema de autovalor apresentado.

As equações na direção x são dadas por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) = 0, \quad (4.14a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u_x^2 + p + \frac{1}{2} (B_y^2 + B_z^2 - B_x^2) \right] = 0, \quad (4.14b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x u_y - B_x B_y) = 0, \quad (4.14c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_z) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x u_z - B_x B_z) = 0, \quad (4.14d)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (4.14e)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (B_y u_x - B_x u_y) = 0, \quad (4.14f)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (B_z u_x - B_x u_z) = 0. \quad (4.14g)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[u_x \left(\mathcal{E} + p + \frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2 \right) - B_x (u_x B_x + u_y B_y + u_z B_z) \right] = 0, \quad (4.14h)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c_h^2 \frac{\partial B_x}{\partial x} = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi \quad (4.14i)$$

As nove equações do Sistema 4.14 podem ser reescritas como um sistema quase linear, como definido a seguir.

Definição 1. Um sistema de equações diferenciais parciais homogêneas de primeira ordem para uma função vetorial $\mathbf{f}(x, y, z)$, com dimensão n , é dita quase-linear se pode ser escrita como

$$\mathbf{A}_x(\mathbf{f}) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \mathbf{A}_y(\mathbf{f}) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} + \mathbf{A}_z(\mathbf{f}) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} = 0, \quad (4.15)$$

em que $\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y, \mathbf{A}_z$ são matrizes quadradas de ordem n .

Definindo $\mathbf{W} = (\rho, u_x, u_y, u_z, B_x, B_y, B_z, p, \psi)$ como o vetor das variáveis primitivas e utilizando Sistema 4.14 a Definição 1, pode-se reescrever o modelo MHD ideal em sua forma quase linear

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{W} + \mathbf{A}(\mathbf{W}) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{W} = 0, \quad (4.16)$$

em que \mathbf{A} é uma matriz 9×9 dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u_x & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_x & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & \frac{B_y}{\rho} & \frac{B_z}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & u_x & 0 & -\frac{B_y}{\rho} & \frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_x & -\frac{B_z}{\rho} & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & -u_y & u_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & -u_z & 0 & u_x & 0 & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & (\gamma - 1)\mathbf{u} \cdot \mathbf{B} & 0 & 0 & u_x & (1 - \gamma)B_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_h^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Para obter os autovalores da matriz \mathbf{A} é necessário resolver o problema de autovalores dado por $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$, em que \mathbf{I} é uma matriz identidade e $\lambda \in \mathbb{R}$. As equações referentes à componente B_x e à equação da correção de divergência estão desacoplada do sistema. Então, removendo as linhas e colunas de números cinco e nove, referentes a essas equações, obtém-se um novo sistema quase linear para as variáveis $\mathbf{W}' = (\rho, u_x, u_y, u_z, B_y, B_z, p)$ dado por

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{W}' + \mathbf{A}'(\mathbf{W}') \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{W}' = 0, \quad (4.18)$$

em que a matriz \mathbf{A}' , com dimensão 7×7 , dada por

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} u_x & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_x & 0 & 0 & \frac{B_y}{\rho} & \frac{B_z}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u_x & 0 & \frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_x & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & u_x & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & 0 & u_x & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & 0 & 0 & u_x \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

A matriz \mathbf{A}' possui sete autovalores reais

$$\lambda_{2,8} = u_x \pm c_f, \quad \lambda_{3,7} = u_x \pm c_A, \quad \lambda_{4,6} = u_x \pm c_s, \quad \lambda_5 = u_x, \quad (4.20)$$

em que $c_A = \sqrt{B_0^2/\mu_0\rho_0}$ é a chamada velocidade de Alfvén (ALFVÉN, 1942), c_f e c_s são as ondas magneto-acústicas rápida e lenta, respectivamente, definidas por

$$c_f = \left\{ \frac{1}{2} \left[a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4c_A^2 a^2} \right] \right\}^{1/2}, \quad (4.21a)$$

$$c_s = \left\{ \frac{1}{2} \left[a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4c_A^2 a^2} \right] \right\}^{1/2}, \quad (4.21b)$$

com $a = \sqrt{\gamma p/\rho}$ a velocidade do som e $b^2 = |\mathbf{B}|^2/\rho$. Os autovalores $\lambda_{2,8}$ estão associados à propagação da onda magneto-acústica rápida, $\lambda_{3,7}$ à propagação da onda de Alfvén, e $\lambda_{4,6}$ à propagação da onda magneto-acústica lenta. As ondas de Alfvén foram descobertas em 1942 (ALFVÉN, 1942) e têm grande importância na dinâmica dos plasmas. Elas carregam energia e momento ao longo das linhas de campo de forma efetiva (OTTO, 2006). A onda rápida é a onda com maior velocidade de propagação de informação no plasma MHD.

As Equações 4.14e e 4.14i, referentes a B_x e ψ , são desacopladas do sistema, sendo possível obter um novo sistema quasi-linear para $\hat{\mathbf{W}} = (B_x, \psi)$ dado por

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{W}}}{\partial t} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_h^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial \hat{\mathbf{W}}}{\partial t} = 0, \quad (4.22)$$

desconsiderando o termo fonte $-c_h^2/c_p^2\psi$. Assim, calculando os autovalores do Sistema 4.22, obtém-se as ondas de divergência $\lambda_{1,9} = \pm c_h$, completando os nove autovalores reais do sistema GLM-MHD ideal quase linear. Essas ondas propagam as mudanças em B_x e ψ (DEDNER et al., 2002). Para valores suficientemente grandes de c_h , os nove autovalores são distintos, caracterizando uma hiperbolicidade do sistema.

No contexto numérico, os autovalores do sistema MHD são importantes para estimar e avaliar o fluxo na interface entre as células da malha computacional, além de possibilitar o cálculo do passo temporal utilizado para evoluir a solução no tempo.

4.2 Reconstrução MUSCL

Nesta seção, apresenta-se a metodologia MUSCL (Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws) utilizada para reconstruir o valor das médias celulares da malha a fim de aumentar a ordem do método numérico utilizado, evitando comportamentos oscilatórios não-físicos. Aplica-se essa reconstrução nas variáveis conservativas do modelo, em um momento anterior ao cálculo do fluxo numérico, a fim de obter uma melhor captura e representação das estruturas na solução do modelo.

A idéia do método é obter reconstruções lineares $\mathbf{U}_i(x)$ a partir dos valores constantes das médias celulares $\{\bar{\mathbf{U}}_i^n\}$, substituindo-os por funções lineares por partes denotadas por $\mathbf{U}_i(x)$. Esse tipo de metodologia foi introduzida por Van Leer (1979), com o objetivo de obter uma maior ordem de aproximação em esquemas conservativos, mesmo em casos onde há choques e descontinuidades. Com isso, a reconstrução local linear por partes de $\bar{\mathbf{U}}_i^n$ é definida como

$$\mathbf{U}_i(x) = \bar{\mathbf{U}}_i^n + \frac{(x - x_i)}{\Delta x} \Delta_i, \quad x \in [0, \Delta x], \quad (4.23)$$

em que $\Delta_i/\Delta x$ é a inclinação de $\mathbf{U}_i(x)$ escolhida de forma adequada na célula C_i , e $\Delta_i = \{\Delta_i^L, \Delta_i^R\}$. Os valores nas fronteiras da célula C_i , obtidos a partir da Equação 4.23, ocorrem quando $x = 0$ e $x = \Delta x$, isto é

$$\mathbf{U}_i^L = \bar{\mathbf{U}}_i^n - \frac{1}{2} \Delta_i^L, \quad \mathbf{U}_i^R = \bar{\mathbf{U}}_i^n + \frac{1}{2} \Delta_i^R, \quad (4.24)$$

com \mathbf{U}_i^L e \mathbf{U}_i^R denotando os valores das fronteiras à esquerda e à direita de C_i , respectivamente. Essa metodologia é conhecida como *método de extrapolação de variáveis*. Os valores nas fronteiras são utilizados no cálculo dos fluxos numéricos na interface. A inclinação δ_i é definida por

$$\Delta_i^{R,L} = \xi(r) \Delta_{i\pm 1/2}, \quad (4.25)$$

em que $\xi(r)$ é a função limitadora da inclinação, $r = \Delta_{i+1/2}/\Delta_{i-1/2}$, com $\Delta_{i-1/2} = \bar{\mathbf{U}}_i^n - \bar{\mathbf{U}}_{i-1}^n$ e $\Delta_{i+1/2} = \bar{\mathbf{U}}_{i+1}^n - \bar{\mathbf{U}}_i^n$. A função $\xi(r)$ pode ser definida de formas diferentes, devido aos diversos esquemas já existentes. Neste trabalho, são implementados os limitadores *Monotonized Central*, *Minmod*, *SuperBee*, *Van Albada* e *Van Leer* (TORO, 1999), definidos por

Monotonized Central (MC)

(LEER, 1977)

$$\xi(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } r \leq 0 \\ 2r, & \text{se } 0 < r \leq 1 \\ 0.5(1+r), & \text{se } 1 < r < 2 \\ 2, & \text{se } r \geq 2 \end{cases} . \quad (4.26)$$

Minmod

(ROE, 1986)

$$\xi(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } r \leq 0 \\ r, & \text{se } 0 < r \leq 1 \\ 1, & \text{se } r \geq 1 \end{cases} . \quad (4.27)$$

SuperBee

(ROE, 1986)

$$\xi(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } r \leq 0 \\ 2r, & \text{se } 0 < r \leq 1/2 \\ 1, & \text{se } 1/2 < r \leq 1 \\ r, & \text{se } 1 < r < 2 \\ 2, & \text{se } r \geq 2 \end{cases} . \quad (4.28)$$

Van Albada

(ALBADA et al., 1997)

$$\xi(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } r \leq 0 \\ \frac{r^2 + r}{1 + r^2}, & \text{se } r > 0 \end{cases} . \quad (4.29)$$

Van Leer

(LEER, 1974)

$$\xi(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } r \leq 0 \\ \frac{2r}{1 + r}, & \text{se } r > 0 \end{cases} . \quad (4.30)$$

Essas funções garantem a segunda ordem do esquema numérico. Esse tipo de esquema é do tipo *total variation diminishing* (TVD), no qual a variação numérica da solução não cresce no tempo, eliminam e/ou controlam oscilações que podem ocorrer próximas a fortes discontinuidades na solução. Os valores definidos são projetados de forma a garantir a estabilidade do esquema numérico.

4.3 Fluxo numérico HLLD

O fluxo numérico Harten-Lax-van Leer-Discontinuities (HLLD) para MHD foi inicialmente desenvolvido por Miyoshi and Kusano (MIYOSHI; KUSANO, 2005) e pode ser

considerado uma extensão do fluxo numérico Harten-Lax-van Leer (HLL) apresentado em (HARTEN et al., 1983). Seu cálculo é feito individualmente em cada direção x, y, z . Nesta seção, apresenta-se a abordagem na direção x , que pode ser estendida para as outras direções de forma análoga, assim como descrito em (GOMES, 2012; GOMES et al., 2015). Os valores das variáveis conservativas utilizados no cálculo do fluxo são obtidos após a reconstrução das variáveis apresentada na seção anterior.

Esse esquema numérico é baseado em quatro estados intermediários \mathbf{Q}_L^* , \mathbf{Q}_L^{**} , \mathbf{Q}_R^{**} e \mathbf{Q}_R^* , divididos por cinco ondas S_L , S_L^* , S_M , S_R^* e S_R , como ilustrado na Figura 4.1. Essas ondas são associadas às ondas MHD apresentadas na seção anterior. Em particular, o fluxo HLLD foi desenvolvido com o objetivo de resolver de forma eficiente descontinuidades isoladas na solução do modelo MHD, preservando a positividade, sendo mais robusto e eficiente ao comparado com fluxos linearizados.

Para o modelo GLM–MHD ideal, os estados \mathbf{Q}^* e \mathbf{Q}^{**} são definidos com os vetores das variáveis intermediárias, isto é,

$$\mathbf{Q}_\alpha^* = (\rho_\alpha^*, E_\alpha^*, \rho_\alpha^* \mathbf{u}_\alpha^*, \mathbf{B}_\alpha^*, \psi_\alpha^*) \quad \mathbf{Q}_\alpha^{**} = (\rho_\alpha^{**}, E_\alpha^{**}, \rho_\alpha^{**} \mathbf{u}_\alpha^{**}, \mathbf{B}_\alpha^{**}, \psi_\alpha^{**}), \quad (4.31)$$

em que α denota os estados à esquerda (L) e à direita (R), $\mathbf{u}^* = (u_x^*, u_y^*, u_z^*)$, $\mathbf{u}^{**} = (u_x^{**}, u_y^{**}, u_z^{**})$, $\mathbf{B}^* = (B_x^*, B_y^*, B_z^*)$ e $\mathbf{B}^{**} = (B_x^{**}, B_y^{**}, B_z^{**})$. O fluxo numérico de ψ é calculado diretamente, considerando a relação $\psi^* = \psi^{**} = \psi$.

A função que calcula o fluxo numérico HLLD é dada por

$$\mathbf{F}_{HLLD} = \begin{cases} \mathbf{F}_L, & \text{if } S_L > 0, \\ \mathbf{F}_L^*, & \text{if } S_L \leq 0 \leq S_L^*, \\ \mathbf{F}_L^{**}, & \text{if } S_L^* \leq 0 \leq S_M, \\ \mathbf{F}_R^{**}, & \text{if } S_M \leq 0 \leq S_R^*, \\ \mathbf{F}_R^*, & \text{if } S_R^* \leq 0 \leq S_R, \\ \mathbf{F}_R, & \text{if } S_R < 0. \end{cases} \quad (4.32)$$

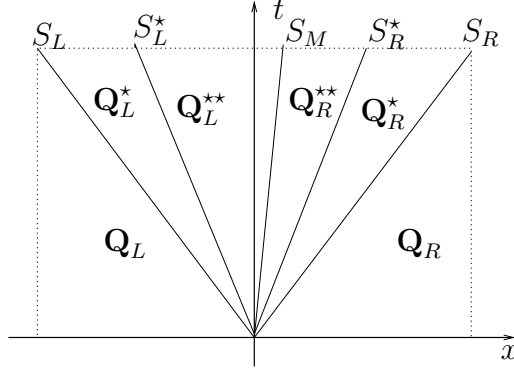
Os vetores fluxo $\mathbf{F}_L = \mathbf{F}(\mathbf{U}_L)$, $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)$ são exatamente os obtidos no centro das células, enquanto \mathbf{F}_L^* , \mathbf{F}_R^* são aproximados nos estados intermediários \mathbf{Q}_L^* , \mathbf{Q}_R^* , e \mathbf{F}_L^{**} , \mathbf{F}_R^{**} são aproximados nos estados intermediários \mathbf{Q}_L^{**} , \mathbf{Q}_R^{**} .

Pelo processo apresentado a seguir, apresentam-se as variáveis dos estados \mathbf{Q}_α^* e \mathbf{Q}_α^{**} ,

permitindo o cálculo do fluxo HLLD nos estados intermediários

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_\alpha^* &= \mathbf{F}_\alpha + S_\alpha (\mathbf{Q}_\alpha^* - \mathbf{Q}_\alpha), \\ \mathbf{F}_\alpha^{**} &= \mathbf{F}_\alpha + S_\alpha^* \mathbf{Q}_\alpha^{**} - (S_\alpha^* - S_\alpha) \mathbf{Q}_\alpha^* - S_\alpha \mathbf{Q}_\alpha.\end{aligned}\quad (4.33)$$

Figura 4.1 - Estrutura com os quatro estados intermediários e as cinco ondas utilizadas para o cálculo do fluxo numérico HLLD.



Fonte: Produção do autor baseada em Miyoshi e Kusano (2005).

Reitera-se que a descrição do fluxo HLLD apresentada a seguir é pertinente à direção x , considerando $B_x^* = B_x^{**} = B_x$, sem perda de generalidade. Em duas e três dimensões, expressões similares são obtidas na direção y e z , ao considerar $B_y^* = B_y^{**} = B_y$ e $B_z^* = B_z^{**} = B_z$ respectivamente.

Primeiramente, definem-se as velocidades de propagação S_α , calculadas como proposto em Miyoshi e Kusano (MIYOSHI; KUSANO, 2005).

$$S_L = \min(u_L, u_R) - \max(c_{f_L}, c_{f_R}), \quad S_R = \max(u_L, u_R) + \max(c_{f_L}, c_{f_R}), \quad (4.34)$$

em que u_α são as velocidades do fluido, e c_{f_α} as velocidades magneto-acústicas rápidas (POWELL, 1997). O cálculo de S_α não é único, podendo assumir outros valores (DAVIS, 1988; EINFELDT et al., 1991). A escolha de S_M é feita de forma a estimar a velocidade média normal, e é dada por

$$S_M = \frac{(S_R - u_{x_R})\rho_R u_{x_R} - (S_L - u_{x_L})\rho_L u_{x_L} - p_{T_R} + p_{T_L}}{(S_R - u_{x_R})\rho_R - (S_L - u_{x_L})\rho_L}, \quad (4.35)$$

em que p_T é a pressão total dada por $p_T = p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2}$. A velocidade do fluido é assumida como sendo constante em todos os estados intermediários, ou seja,

$$u_{x_L}^* = u_{x_L}^{**} = u_{x_R}^{**} = u_{x_R}^* = S_M. \quad (4.36)$$

A pressão total também é mantida constante nos estados intermediários,

$$p_{T_L}^* = p_{T_L}^{**} = p_{T_R}^{**} = p_{T_R}^* = p_T^*. \quad (4.37)$$

Sob essas condições, descontinuidades tangenciais e rotacionais podem ser formadas nesses estados. A partir da escolha de S_M , a pressão total p_T^* é definida por

$$p_T^* = \frac{(S_R - u_{x_R})\rho_R p_{T_L} - (S_L - u_{x_L})\rho_L p_{T_R}}{(S_R - u_{x_R})\rho_R - (S_L - u_{x_L})\rho_L} + \frac{\rho_L \rho_R (S_R - u_{x_R})(S_L - u_{x_L})(u_{x_R} - u_{x_L})}{(S_R - u_{x_R})\rho_R - (S_L - u_{x_L})\rho_L}. \quad (4.38)$$

A partir dos valores S_α e das variáveis contidas em \mathbf{U}_α , é possível obter os valores das quantidades dos estados $\mathbf{Q}_\alpha^* = (\rho_\alpha^*, p_\alpha^*, u_{x_\alpha}^*, u_{y_\alpha}^*, u_{z_\alpha}^*, B_{x_\alpha}^*, B_{y_\alpha}^*, B_{z_\alpha}^*)$, dadas por

$$\rho_\alpha^* = \rho_\alpha \frac{S_\alpha - u_{x_\alpha}}{S_\alpha - S_M}, \quad (4.39a)$$

$$u_{y_\alpha}^* = u_{y_\alpha} - B_x B_{y_\alpha} \frac{S_M - u_{x_\alpha}}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_{x_\alpha})(S_\alpha - S_M) - B_x^2}, \quad (4.39b)$$

$$u_{z_\alpha}^* = u_{z_\alpha} - B_x B_{z_\alpha} \frac{S_M - u_{x_\alpha}}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_{x_\alpha})(S_\alpha - S_M) - B_x^2}, \quad (4.39c)$$

$$B_{y_\alpha}^* = B_{y_\alpha} \frac{\rho_\alpha (S_\alpha - u_{x_\alpha})^2 - B_x^2}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_{x_\alpha})(S_\alpha - S_M) - B_x^2}, \quad (4.39d)$$

$$B_{z_\alpha}^* = B_{z_\alpha} \frac{\rho_\alpha (S_\alpha - u_{x_\alpha})^2 - B_x^2}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_{x_\alpha})(S_\alpha - S_M) - B_x^2}. \quad (4.39e)$$

Conseqüentemente, pode-se calcular a densidade total de energia \mathcal{E}_α^*

$$\mathcal{E}_\alpha^* = \frac{(S_\alpha - u_{x_\alpha})\mathcal{E}_\alpha - p_{T_\alpha} u_{x_\alpha} + p_T^* S_M + B_x (\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^*)}{S_\alpha - S_M}. \quad (4.40)$$

Ao longo dos cálculos numéricos, podem ocorrer indeterminações do tipo 0/0 quando $S_M = u_{x_\alpha}$, $S_\alpha = u_{x_\alpha} \pm c_{f_\alpha}$, $B_{y_\alpha} = B_{z_\alpha} = 0$ e $B_x^2 \geq \gamma p_\alpha$. Nesses casos, deve-se realizar as seguintes substituições: $u_{y_\alpha}^* = u_{y_\alpha}$, $u_{z_\alpha}^* = u_{z_\alpha}$, e $B_{y_\alpha}^* = B_{z_\alpha}^* = 0$. As velocidades de propagação nos estados intermediários são associadas à onda de Alfvén e dadas por

$$S_L^* = S_M - \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_L^*}}, \quad S_R^* = S_M + \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_R^*}}. \quad (4.41)$$

Os valores de S_α^* limitam os estados intermediários \mathbf{Q}_α^{**} e, juntamente com os valores obtidos para \mathbf{Q}_α^* , pode-se obter as quantidades associadas a eles, isto é,

$$\mathbf{Q}_\alpha^{**} = (\rho_\alpha^{**}, p_\alpha^{**}, u_{x_\alpha}^{**}, u_{y_\alpha}^{**}, u_{z_\alpha}^{**}, B_{x_\alpha}^{**}, B_{y_\alpha}^{**}, B_{z_\alpha}^{**}). \quad (4.42)$$

Devido à relação descrita pela Equação 4.36, acerca da constância dos valores de u_x ao longo dos estados intermediários, ao iniciar com a condição de salto da equação da continuidade sobre um valor arbitrário S , com $S_L < S < S_M$ ou $S_M < S < S_R$, tem-se

$$\rho_\alpha^{**} = \rho_\alpha^*. \quad (4.43)$$

Considerando as condições de salto para as componentes tangenciais da velocidade e campo magnético sobre S_M , e assumindo $B_x \neq 0$, pode-se obter as seguintes relações

$$u_{y_L}^{**} = u_{y_R}^{**} \equiv u_y^{**}, \quad u_{z_L}^{**} = u_{z_R}^{**} \equiv u_z^{**}, \quad (4.44a)$$

$$B_{y_L}^{**} = B_{y_R}^{**} \equiv B_y^{**}, \quad B_{z_L}^{**} = B_{z_R}^{**} \equiv B_z^{**}. \quad (4.44b)$$

Substituindo as Equações 4.41, 4.43 e 4.44 na forma de leis de conservações sobre os estados intermediários, obtém-se as variáveis

$$u_y^{**} = \frac{u_{y_L}^* + \sqrt{\rho_R^*} u_{y_R}^* + (B_{y_R}^* - B_{y_L}^*) \text{sign}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (4.45a)$$

$$u_z^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} u_{z_L}^* + \sqrt{\rho_R^*} u_{z_R}^* + (B_{z_R}^* - B_{z_L}^*) \text{sign}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (4.45b)$$

$$B_y^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} B_{y_R}^* + \sqrt{\rho_R^*} B_{y_L}^* + \sqrt{\rho_L^* \rho_R^*} (u_{y_R}^* - u_{y_L}^*) \text{sign}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (4.45c)$$

$$B_z^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} B_{z_R}^* + \sqrt{\rho_R^*} B_{z_L}^* + \sqrt{\rho_L^* \rho_R^*} (u_{z_R}^* - u_{z_L}^*) \text{sign}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (4.45d)$$

em que $\text{sign}(B_x)$ é igual 1 for $B_x > 0$, e -1 para $B_x < 0$. Consequentemente, a equação da densidade de energia em \mathbf{Q}^{**} é dada por

$$\mathcal{E}_\alpha^{**} = \mathcal{E}_\alpha^* \mp \sqrt{\rho_\alpha^*} (\mathbf{u}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^* - \mathbf{u}_\alpha^{**} \cdot \mathbf{B}_\alpha^{**}) \text{sign}(B_x). \quad (4.46)$$

O mesmo procedimento deve ser feito na direção y e z para os problemas em mais de uma dimensão. O fluxo HLLD é calculado separadamente em cada direção e os valores obtidos são utilizados na evolução temporal, apresentada a seguir.

4.4 Cálculo do passo de tempo

Para possibilitar a evolução temporal das equações MHD, utiliza-se um esquema numérico Runge-Kutta compacto de ordem 2, como apresentado na Seção 3.1. Para tal, necessitam-se das variáveis do modelo, dos fluxos numéricos e termos fonte. Além disso, necessita-se do conhecimento do passo de tempo Δt a cada iteração. O cálculo de Δt deve ser feito de forma que o seu valor seja adequado à física do problema, possibilitando a evolução numérica da solução no tempo.

Como existe a possibilidade de simular o modelo MHD ideal ou resistivo, o cálculo de Δt é adaptado a cada situação, como proposto em Skala et al (SKÁLA et al., 2015). Considerando os autovalores calculados na Seção 4.1.1, tem-se o passo de tempo para o caso ideal, isto é,

$$\Delta t_{id} = \nu \frac{\min\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}}{\max\{|u_x| \pm c_f, |u_y| \pm c_f, |u_z| \pm c_f\}}, \quad (4.47)$$

em que ν é o número de Courant. Assim, o passo de tempo depende da condição CFL imposta ao problema, juntamente com o passo espacial mínimo e o máximo dos autovalores associados à onda magneto-acústica rápida c_f . No caso resistivo, esse cálculo é adaptado, levando em consideração a resistividade e o quadrado do passo espacial, devido aos termos fonte com derivadas de segunda ordem. Com isso, tem-se

$$\Delta t_{res} = \nu \min \left(\Delta t_{id}, \frac{\min\{\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2\}}{4.0\eta_0} \right), \quad (4.48)$$

em que η_0 é o valor máximo da resistividade em cada iteração da simulação numérica. Para as simulações em que η é constante, então $\eta \equiv \eta_0$. O cálculo dos passos de tempo é feito até que se alcance o tempo final desejado, que é obtido pela soma de todos os passos de tempo calculados ao longo da simulação.

4.5 Normalização do operador de truncamento

No Capítulo 3, é apresentada a abordagem multirresolução adaptativa, juntamente com o operador de truncamento $\mathcal{T}_{\epsilon^\ell}$, o qual é utilizado para avaliar em quais regiões a malha precisa de mais ou menos refinamento. Esse procedimento é feito a partir dos valores dos coeficientes wavelet \mathbf{d}^ℓ , que medem a regularidade local da solução numérica do sistema. Em particular, para o modelo MHD, que possui oito variáveis, cada detalhe \mathbf{d}^ℓ pode ser entendido como um vetor que engloba os detalhes de todas as variáveis conservativas, ou seja, $\mathbf{d}^\ell = (\mathbf{d}_\rho^\ell, \mathbf{d}_{\rho\mathbf{u}}^\ell, \mathbf{d}_\mathcal{E}^\ell, \mathbf{d}_\mathbf{B}^\ell)$. Cada um desses coeficientes associados às variáveis do modelo são calculados a partir do

erro de aproximação, juntamente com o valor máximo de cada variável na malha. Inicialmente, efetuava-se esse cálculo por

$$\mathbf{d}_{\varpi}^{\ell} = \frac{\mathbf{d}_{\varpi}^{\ell}}{\max(\varpi)}, \quad (4.49)$$

em que ϖ está associado individualmente a qualquer variável do modelo, ou seja, $\varpi \in \{\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, \mathcal{E}, B_x, B_y, B_z\}$. Essa abordagem tem interesse no comportamento individual de cada variável, sem levar em consideração a natureza vetorial de $\rho \mathbf{u}$ e \mathbf{B} . Após diversos testes, observou-se que essa forma de calcular os coeficientes contribuía para a obtenção de uma malha adaptativa com células localizadas em regiões desnecessárias. Com isso, demanda-se uma abordagem diferenciada no cálculo desses coeficientes em relação às variáveis vetoriais $\rho \mathbf{u}$ e \mathbf{B} . Em duas dimensões, apresentam-se os detalhes das variáveis conservativas dados por

$$\mathbf{d}_{\rho}^{\ell} = \frac{\mathbf{d}_{\rho}^{\ell}}{\max(\rho)}, \quad (4.50)$$

$$\mathbf{d}_{\rho \mathbf{u}}^{\ell} = \frac{\sqrt{(\mathbf{d}_{\rho u_x}^{\ell})^2 + (\mathbf{d}_{\rho u_y}^{\ell})^2}}{\max(\rho u_x, \rho u_y)}, \quad (4.51)$$

$$\mathbf{d}_{\rho u_z}^{\ell} = \frac{\mathbf{d}_{\rho u_z}^{\ell}}{\max(\rho u_z)}, \quad (4.52)$$

$$\mathbf{d}_{\mathcal{E}}^{\ell} = \frac{\mathbf{d}_{\mathcal{E}}^{\ell}}{\max(\mathcal{E})}, \quad (4.53)$$

$$\mathbf{d}_{\mathbf{B}}^{\ell} = \frac{\sqrt{(\mathbf{d}_{B_x}^{\ell})^2 + (\mathbf{d}_{B_y}^{\ell})^2}}{\max(B_x, B_y)}, \quad (4.54)$$

$$\mathbf{d}_{B_z}^{\ell} = \frac{\mathbf{d}_{B_z}^{\ell}}{\max(B_z)}, \quad (4.55)$$

$$(4.56)$$

e para três dimensões tem-se

$$\mathbf{d}_{\rho}^{\ell} = \frac{\mathbf{d}_{\rho}^{\ell}}{\max(\rho)}, \quad (4.57)$$

$$\mathbf{d}_{\rho \mathbf{u}}^{\ell} = \frac{\sqrt{(\mathbf{d}_{\rho u_x}^{\ell})^2 + (\mathbf{d}_{\rho u_y}^{\ell})^2 + (\mathbf{d}_{\rho u_z}^{\ell})^2}}{\max(\rho u_x, \rho u_y, \rho u_z)}, \quad (4.58)$$

$$\mathbf{d}_{\mathcal{E}}^{\ell} = \frac{\mathbf{d}_{\mathcal{E}}^{\ell}}{\max(\mathcal{E})}, \quad (4.59)$$

$$\mathbf{d}_{\mathbf{B}}^{\ell} = \frac{\sqrt{(\mathbf{d}_{B_x}^{\ell})^2 + (\mathbf{d}_{B_y}^{\ell})^2 + (\mathbf{d}_{B_z}^{\ell})^2}}{\max(B_x, B_y, B_z)}. \quad (4.60)$$

É importante notar que, para as quantidades vetoriais $\rho\mathbf{u}$ e \mathbf{B} , os coeficientes são calculados em termos das suas componentes. No caso bidimensional, em que os vetores têm apenas duas componentes, o coeficiente da terceira componente de cada uma das variáveis é calculado de forma independente. Além disso, a divisão efetuada em todos os coeficiente com o máximo do valor das variáveis tem como objetivo a normalização desses valores antes da aplicação do operador de truncamento.

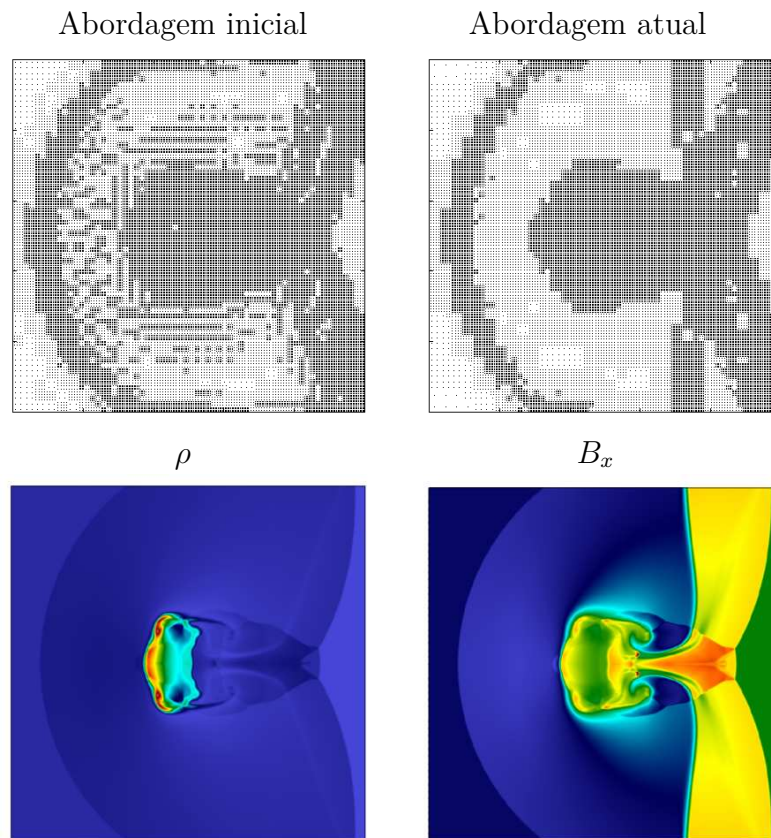
Com essa normalização proposta, houve uma melhora na adaptabilidade da malha computacional ao problema. Na Figura 4.2, apresentam-se as malhas obtidas para o mesmo problema da nuvem magnética. Neste caso, a malha da esquerda foi obtida em uma simulação com a abordagem inicial do cálculo dos coeficientes wavelet, levando em consideração cada variável individualmente. À direita, a malha é obtida com a abordagem que considera a natureza vetorial dos detalhes referentes a $\rho\mathbf{u}$ e \mathbf{B} . Abaixo das malhas, apresentam-se as variáveis ρ e B_z para este problema. Pode-se observar que a malha com a nova abordagem é mais coerente no sentido de localização das estruturas pertinentes ao problema, não contendo células desnecessárias, como a malha que utiliza a abordagem inicial dos coeficientes.

Para que seja aplicado o operador $\mathcal{T}_{\epsilon^\ell}$, comparando os coeficientes wavelet com o parâmetro de truncamento ϵ^ℓ , utiliza-se o valor máximo entre os coeficientes de todas as variáveis. Assim, definindo $\max|\mathbf{d}^\ell| = \max\{|\mathbf{d}_\rho^\ell|, |\mathbf{d}_{\rho\mathbf{u}}^\ell|, |\mathbf{d}_E^\ell|, |\mathbf{d}_B^\ell|\}$, o operador de truncamento dado pela Equação 3.37 é reescrito para o caso MHD como

$$\mathcal{T}_{\epsilon^\ell} = \begin{cases} 0, & \text{se } \max|\mathbf{d}^\ell| \leq \epsilon^\ell, \\ \mathbf{d}^\ell, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.61)$$

Dessa forma, a malha adaptativa obtida pode ser entendida como uma união das malhas de todas as variáveis, visto que os coeficientes de todas as variáveis são utilizados para decidir em quais regiões locais o maior refinamento é necessário para representar a solução. No Capítulo 6, os resultados obtidos neste trabalho são apresentados, e as malhas obtidas para os diferentes casos são discutidas e avaliadas, a fim de verificar a metodologia adaptativa de multirresolução no contexto do modelo MHD.

Figura 4.2 - Malhas obtidas em simulações MHD ideal em duas dimensões para o problema da nuvem magnética. À esquerda, apresenta-se a malha obtida com a abordagem do cálculo dos detalhes variável-a-variável. À direita, a malha obtida com a abordagem em que considera-se as variáveis vetoriais no cálculo dos detalhes. Abaixo, as variáveis ρ e B_z para ilustrar a estrutura da solução.



Fonte: Produção do Autor

5 ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo são apresentados detalhes acerca dos aspectos computacionais relativos a este trabalho. A cronologia do desenvolvimento do código CARMEN–MHD e seu algoritmo, informações sobre a solução de referência, visualizações e métricas utilizadas na comparação de dados. Esses aspectos são importantes para se entender os esforços necessários para obter a versão atual do código CARMEN–MHD.

5.1 Código CARMEN–MHD

O código CARMEN (versão 1.541) foi desenvolvido por Olivier Roussel (ROUSSEL et al., 2003b; ROUSSEL et al., 2003a) na linguagem C^{++} , usando o método de volumes finitos para performar a simulação numérica de equações diferenciais parciais evolutivas utilizando uma abordagem adaptativa de multirresolução por médias celulares. A versão inicial permitia a simulação de seis sistemas de equações, incluindo as equações de Navier-Stokes.

A implementação das equações MHD ideal em duas dimensões, juntamente com os fluxos numéricos HLL e HLLD e as correções de divergência do campo magnético, foi desenvolvida posteriormente, como trabalho de mestrado da autora (GOMES, 2012; DOMINGUES et al., 2013). Após essa modificação, o código CARMEN passou por diversos ajustes, incluindo a correção do cálculo dos autovalores do sistema, implementação da reconstrução das variáveis conservativas e melhorias na aplicação das condições de contorno (GOMES et al., 2015). O modelo ideal em três dimensões e o modelo resistivo em duas e três dimensões foram adicionados ao código (GOMES et al., 2017a), trazendo avanços na simulação MHD adaptativa. A implementação MHD não-adaptativa foi realizada em duas e três dimensões, necessitando de uma reformulação na estrutura de dados para tornar coerente as comparações de tempo de CPU com a simulação adaptativa. Além disso, houve a implementação dos termos de difusão artificial, ajuste do passo de tempo e a correção de erro na implementação original tridimensional. Para a otimização do código no contexto MHD, foi realizada a remoção dos arquivos não relacionados à implementação MHD e adição de saídas no formato *VTK*¹. Com isso, o código CARMEN utilizado neste trabalho passou a se chamar CARMEN–MHD.

Na Figura 5.1 é apresentado o fluxograma do algoritmo do código CARMEN–MHD adaptativo, o qual é dividido em cinco etapas: inicialização, evolução temporal, reconstrução malha, saídas e finalização. Na inicialização, os arquivos de condição ini-

¹<https://www.vtk.org/>

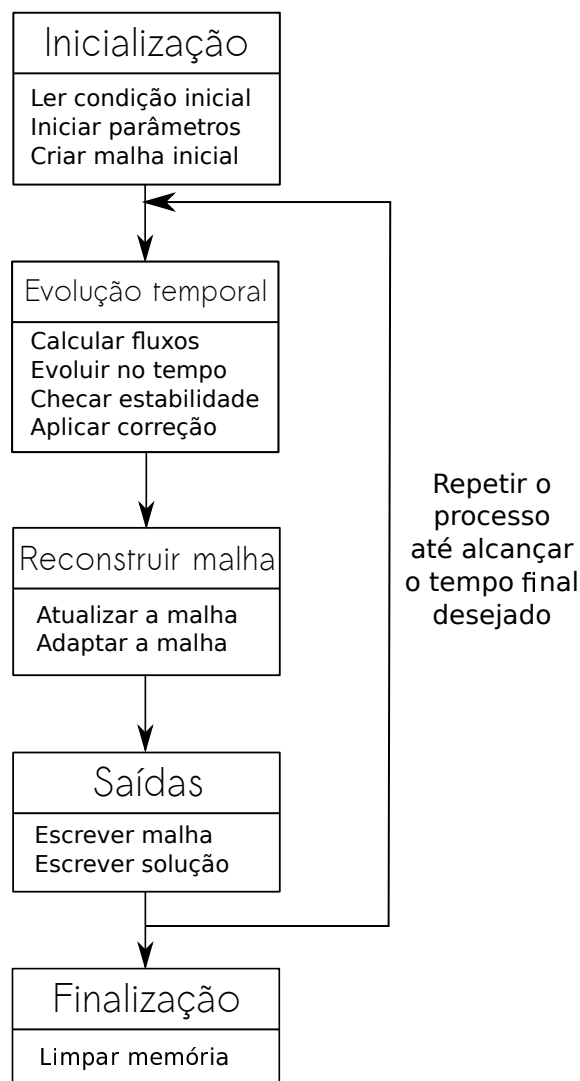


Figura 5.1 - Fluxograma ilustrativo do algoritmo do código CARMEN-MHD.

Fonte: Produção do autor.

cial `carmen.ini` e parâmetros de simulação `carmen.par` são lidos, possibilitando a criação de malha adaptativa inicial para a simulação, a estabilidade da solução numérica é checada e a correção de divergência do campo magnético é aplicada. Para reconstruir a malha, a malha é atualizada com os novos valores obtidos, e adaptada novamente à solução. A solução evoluída no tempo e sua malha adaptativa são escritas em um arquivo de saída. Caso o tempo final desejado seja alcançado, a simulação é finalizada, limpando a memória. Caso contrário, os passos são repetidos a partir da evolução temporal, até que o tempo final seja atingido.

Para a criação da malha adaptativa, utiliza-se a estrutura chamada *graded-tree* (COHEN, 2003), a qual impõe que duas células adjacentes da malha devem estar no mesmo nível de refinamento ou com a diferença de apenas um nível entre elas. Esse tipo de estrutura deve ser garantida durante o processo de refinamento da malha, para que as células necessárias no cálculo do operador de predição estejam sempre disponíveis para tal. Como a malha é modificada ao longo do tempo, é necessário seu ajuste a cada iteração para manter a estrutura *graded-tree*. Mais detalhes em (ROUSSEL, 2003).

O compilador utilizado com o código CARMEN–MHD é o g^{++} versão 4.8.4, no sistema operacional *Ubuntu 14.04*. O servidor utilizado para as simulações possui processador *Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2640 v2 2.00GHz*, com memória RAM de 128GB.

5.2 Solução de referência

Para comparar os resultados do código CARMEN–MHD é necessário definir uma solução de referência. Neste contexto, utiliza-se o código FLASH, apresentado no Apêndice E, que é verificado e bastante utilizado. A física modelada no código é testada e coerente, constituindo uma ferramenta interessante e adequada para a comparação e verificação de resultados. Com isso, todas as condições iniciais dos problemas estudados são implementadas e rodadas no código FLASH, permitindo a obtenção das soluções de referência e a comparação dos resultados. Mais detalhes sobre o código FLASH são encontrados no Apêndice E.

Similaridades entre os códigos

Existem algumas similaridades entre os códigos CARMEN e FLASH, que são importantes e devem ser destacadas: o fluxo numérico HLLD, a reconstrução de variáveis dada pelo esquema *Monotonized Central*, e a segunda ordem de acurácia do método numérico utilizado. É interessante destacar que, mesmo utilizando esquemas numéricos de ordem similar, eles não são iguais. Isso implica que os resultados obtidos devem obedecer as características intrínsecas de cada problema apresentado, no entanto, não existe a possibilidade de resultados idênticos. A ordem do método está associada a acurácia da solução.

5.3 Erros e visualizações

Nesta seção são apresentados os tipos de erros calculados nos resultados, os tipos de arquivos obtidos nas simulações dos códigos CARMEN–MHD e FLASH, e detalhes

acerca da visualização dos resultados.

5.3.1 Erro associado à $\nabla \cdot \mathbf{B}$

Para calcular o erro associado à divergência do campo magnético, considera-se apenas os valores de $\nabla \cdot \mathbf{B}$ obtidos com o código CARMEN–MHD. Neste caso, considera-se o máximo do erro médio absoluto da divergência, que é caracterizado como uma constante adimensional, definido por

$$\varepsilon_{div} = \max \left(dV \frac{|\nabla \cdot \mathbf{B}|}{|\mathbf{B}|} \right), \quad (5.1)$$

em que dV é o volume da célula. Esse cálculo mede a magnitude parcial máxima dos erros de divergência do campo magnético (HOPKINS, 2016). No geral, ε_{div} deve ser menor que um. Esses valores costumam variar de acordo com a escolha da correção de divergência.

5.3.2 Tipos de erros

Os erros obtidos neste trabalho estão associados às normas \mathcal{L}^1 , \mathcal{L}^2 e \mathcal{L}^∞ (LEVEQUE, 2002). São considerados os erros médios, levando em conta o tamanho da malha em questão. No geral, erros desse tipo são calculados em relação a uma solução exata. Como não há solução exata para os problemas de interesse deste trabalho, o cálculo do erro é feito com respeito à solução de referência. Considerando a solução de referência como \mathbf{U} e a solução obtida com o código CARMEN–MHD denotada por $\overline{\mathbf{U}}$, são definidas as equações para o cálculo dos erros.

Erro \mathcal{L}^1

O erro na norma \mathcal{L}^1 é calculado a partir da soma dos valores absolutos da diferença entre duas matrizes. Em duas dimensões, tem-se

$$\mathcal{L}^1 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\mathbf{U}_{i,j} - \overline{\mathbf{U}}_{i,j}|. \quad (5.2)$$

Em três dimensões, o erro \mathcal{L}^1 é calculado como

$$\mathcal{L}^1 = \frac{1}{N^3} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N |\mathbf{U}_{i,j,k} - \overline{\mathbf{U}}_{i,j,k}|. \quad (5.3)$$

Erro \mathcal{L}^2

Esse erro é obtido a partir da soma das diferenças elevadas ao quadrado. Em duas dimensões, tem-se

$$\mathcal{L}^2 = \left(\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\mathbf{U}_{i,j} - \bar{\mathbf{U}}_{i,j}|^2 \right)^{1/2}. \quad (5.4)$$

Em três dimensões, o erro \mathcal{L}^2 é calculado como

$$\mathcal{L}^2 = \left(\frac{1}{N^3} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N |\mathbf{U}_{i,j,k} - \bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}|^2 \right)^{1/2}. \quad (5.5)$$

Erro \mathcal{L}^∞

Esse erro representa o valor máximo da diferença entre as soluções. Em duas dimensões, tem-se

$$\mathcal{L}^\infty = \max_{1 \leq i \leq N} \left[\max_{1 \leq j \leq N} (\mathbf{U}_{i,j} - \bar{\mathbf{U}}_{i,j}) \right]. \quad (5.6)$$

Em três dimensões, o erro \mathcal{L}^∞ é calculado como

$$\mathcal{L}^\infty = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \max_{1 \leq j \leq N} \left[\max_{1 \leq k \leq N} (\mathbf{U}_{i,j,k} - \bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}) \right] \right\}. \quad (5.7)$$

Esses valores mostram o quanto a solução obtida se aproxima da solução de referência, a fim de avaliar quantitativamente essa proximidade. Esses valores são obtidos para todas as variáveis não-nulas do modelo, sendo uma ferramenta de comparação dos resultados obtidos.

5.3.3 Tipos de arquivo

Inicialmente, o código CARMEN possuía apenas arquivos de saída do tipo `.dat`. Para o código CARMEN-MHD adicionam-se saídas do tipo `.vtk`, caracterizando arquivos do tipo *Visualization Tool Kit*, que é um sistema de software de código livre utilizado para gráficos tridimensionais de computador, processamento de imagens e visualização. Os arquivos VTK suportam diversos tipos de dados (escalares, vetores, tensores) e diversas geometrias para a sua visualização. Com essa nova implementação, há uma melhora na qualidade da visualização dos resultados, principalmente nos casos tridimensionais. Nesta seção, apresenta-se um exemplo de arquivo VTK e as estruturas importantes na sua construção são comentadas. No Texto 5.1, apresenta-se o cabeçalho de um arquivo VTK. Nesta ordem, tem-se a versão do arquivo VTK utilizada, a legenda do arquivo e o tipo de arquivo (pode-se definir ASCII ou biná-

Listing 5.1 - Cabeçalho de um arquivo de saída VTK do código CARMEN-MHD.

```
# vtk DataFile Version 2.8
Solucão MHD
ASCII
DATASET STRUCTURED_GRID
DIMENSIONS 32 32 1
POINTS 1024 FLOAT
-0.500000 -2.000000 0.000000
-0.500000 -1.870968 0.000000
-0.500000 -1.741935 0.000000
-0.500000 -1.612903 0.000000
```

Listing 5.2 - Exemplo de variável escalar em arquivo de saída VTK do código CARMEN-MHD.

```
POINT_DATA 1024
SCALARS Density float
LOOKUP_TABLE default
9.9450254334794552e-01
9.7530095599058841e-01
9.6680119959813804e-01
9.7967490164696236e-01
```

rio). O comando `DATASET` determina o tipo de malha do dado, neste caso, uma malha estruturada. As dimensões da malha computacional são definidas para as direções x , y e z , e o número total de células é descrito e definido como precisão `float`. A partir daí, os pontos da malha são especificados em três colunas. A varredura dos pontos no código CARMEN-MHD é feita na sequência x, y, z . Já no código FLASH, a sequência é dada por z, y, x . Esse tipo de informação é importante ao se comparar os valores obtidos ponto-a-ponto. Após definir o cabeçalho e os valores que compõem a malha, deve-se escrever o valor das variáveis associados aos pontos da malha. No Texto 5.2, apresenta-se um exemplo de definição da variável escalar ρ . Primeiro define-se o parâmetro `POINT_DATA`, que é o número de valores de ρ na malha, depois o tipo de variável `SCALARS` juntamente com o seu nome e a sua precisão. Para definir variáveis vetoriais, o processo é similar. Define-se o tipo de variável `VECTORS` juntamente com o seu nome e sua precisão. Depois é necessário escrever os valores de cada componente do vetor, neste caso, em três colunas que representam as variáveis u_x , u_y e u_z , como apresentado no Texto 5.3. As implementações das saídas VTK

Listing 5.3 - Exemplo de variável vetorial em arquivo de saída VTK do código CARMEN–MHD.

```
VECTORS Velocity float
-5.4059620190e-26  -2.0054987160e-02  3.2091973305e-02
-8.9226512290e-03  4.6321073384e-03  1.5523072546e-28
```

estão incluídas no arquivo `Node.cpp` para o caso adaptativo e `FineMesh.cpp` para o caso uniforme. Esses arquivos podem ser utilizados em alguns softwares, como o VisIt e o Paraview.

5.3.4 Visualização

A visualização dos resultados obtidos com os códigos CARMEN–MHD e FLASH são visualizados utilizando o programa *VisIt*². O software *VisIt* é código aberto e interativo, utilizado para visualização, animação e como ferramenta de análise (CHILD et al., 2012). Possui uma variedade de formas para a visualização e operadores matemáticos, sendo possível obter valores a partir dos dados utilizados. O VisIt possui suporte para diferentes tipos de arquivo, em particular, arquivos do tipo VTK e HDF5 (FLASH).

Nesta seção, apresenta-se um código desenvolvido em python para obter uma figura a partir de um arquivo de dados. É possível utilizar a interface gráfica do programa para fazer as visualizações. Porém quando há a necessidade de criar diversas figuras a partir de um dado, a utilização de um código que automatize o processo é interessante. O comando necessário para rodar o código em python utilizando o VisIt também é apresentado para ambos os tipos de dados apresentados.

O Código 5.4 é utilizado para gerar uma figura a partir do dado `Average.vtk`, obtido com o código CARMEN–MHD. Primeiramente, escolhe-se a base de dados (ou arquivo de dados) e a variável que se deseja visualizar. O software VisIt permite diversas configurações para os arquivos de saída. Neste exemplo, estão definidos os parâmetros para as anotações na figura, paleta de cores e configurações do arquivo de saída, como formato e nome do arquivo. Para visualizar os resultados do código FLASH, deve-se alterar o nome do arquivo de acordo com a saída do problema de interesse.

Para rodar o código em python nomeado `arquivo.py` utilizando o software VisIt,

²<https://wci.llnl.gov/simulation/computer-codes/visit/>

Listing 5.4 - Exemplo de script de visualização no VisIt.

```
# Abrir base da dados
OpenDatabase("localhost:Average.vtk", 0)
AddPlot("Pseudocolor", "Density", 1, 1)

# Visualizar dados
DrawPlots()
AnnotationAtts = AnnotationAttributes()
AnnotationAtts.userInfoFlag = 0
AnnotationAtts.databaseInfoFlag = 0
SetAnnotationAttributes(AnnotationAtts)

# Definir atributos de visualizacao
PseudocolorAtts = PseudocolorAttributes()
PseudocolorAtts.colorTableName = "hot_desaturated"
SetPlotOptions(PseudocolorAtts)

# Configuracao de figura
SaveWindowAtts = SaveWindowAttributes()
SaveWindowAtts.fileName = "KH_2D_rho_L7_eps01"
SaveWindowAtts.format = SaveWindowAtts.PNG
SaveWindowAtts.compression = SaveWindowAtts.PackBits
SetSaveWindowAttributes(SaveWindowAtts)
SaveWindow()
```

utiliza-se o seguinte comando

```
visit -nowin -cli -s arquivo.py
```

A opção `-nowin` é utilizada para que não seja aberta a janela da interface gráfica, garantindo a automatização do processo. Para a visualização dos arquivos HDF5 obtidos com o código FLASH, deve-se adicionar uma nova opção no comando anterior

```
visit -assume_format FLASH -nowin -cli -s arquivo.py
```

Os arquivos de saída do código FLASH não possuem a terminação `.hdf5`, então o VisIt não consegue reconhecer o formato, sendo necessário indicar na compilação.

Quando há interesse na comparação qualitativa da topologia da solução numérica, deve-se alinhar os valores máximo e mínimo da escala de cor para as visualizações CARMEN-MHD e FLASH. Para tal, os valores máximos e mínimos das variáveis

do modelo são obtidos para ambas as simulação, comparados entre si e, para cada variável, são definidos os maiores e menores valores entre os dois códigos. Esse procedimento é feito para todas as comparações desse tipo.

No próximo capítulo são apresentados os resultados obtidos com o código CARMEN–MHD e as verificações necessárias para cada caso. Todas as métricas, visualizações e referências são obtidas como apresentadas anteriormente.

6 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos com as simulações do modelo MHD ideal e resistivo, em duas e três dimensões, utilizando a abordagem de multirresolução adaptativa por médias celulares.

Para a verificação da implementação do modelo MHD são apresentadas as simulações de quatro problemas importantes: o vórtex de Orszag-Tang, a instabilidade de Kelvin-Helmholtz, nuvem magnética, e reconexão magnética. A escolha desses casos é feita devido à variedade de situações que podem ser avaliadas, como descrito a seguir para cada caso.

Vórtex de Orszag-Tang (O-T)

- Avaliação a correção de divergência do campo magnético
- Ocorrência de choques magneto-hidrodinâmicos

Instabilidade de Kelvin-Helmholtz (K-H)

- Ocorrência de estruturas localizadas
- Detecção e representação dos vórtices

Nuvem magnética (N-M)

- Ocorrência de fortes descontinuidades
- Avaliação da estabilidade do esquema numérico

Reconexão magnética (R-M)

- Alteração na topologia das linhas de campo magnético
- Liberação de energia magnética

Os resultados obtidos com o código CARMEN-MHD são comparados com os resultados de referência rodados com o código FLASH, como discutido no Capítulo 5. Também são apresentadas discussões acerca dos problemas simulados e da metodologia adaptativa.

6.1 Vórtex de Orszag-Tang

Em duas dimensões, o caso teste atualmente conhecido como vórtex Orszag-Tang é inicialmente proposto em (ORSZAG; TANG, 1979). Este teste de verificação é bem comum na área de simulação MHD (SKÁLA et al., 2015; LEE, 2013; MIYOSHI; KUSANO, 2005; LONDRILLO; ZANNA, 2000; JIANG; WU, 1999a; RYU et al., 1998; ZACHARY et al., 1994), pois possibilita testar a robustez do código utilizado, além de ser bastante sensível à divergência numérica do campo magnético. Esse teste lida com a formação de choques magneto-hidrodinâmicos e a interação complexa entre ondas de choque, devido à sua ocorrência durante a simulação. A sua formulação tridimensional é proposta em Hezel et al 2011, na qual uma perturbação é adicionada na direção z do domínio computacional. Em alguns casos, o problema de O-T pode não ser atrativo para simulações adaptativas, visto que possui estruturas em todo o domínio computacional, isto é, não há localização de estruturas. No entanto, devido à sua complexidade física, além dos atributos de verificações numéricas descritas acima, é muito utilizado para a verificação do código CARMEN-MHD. O estudo é feito inicialmente para uma malha uniforme, a fim de avaliar a implementação e a reprodução das estruturas do vórtex.

6.1.1 Caso bidimensional

A condição inicial em duas dimensões é dada pela Tabela 6.1. O problema é simulado para o nível máximo de refinamento $L = 9$ (512×512) e o seu domínio computacional é dado por $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Como parâmetros de simulação, tem-se o tempo final de simulação $t = \pi$, o número de Courant $\nu = 0.3$ e o parâmetro da correção de divergência nula $\alpha_p = 0.4$. A constante adiabática é dada por $\gamma = 5/3$ e a condição de contorno é periódica.

Tabela 6.1 - Condição inicial do problema de Orszag-Tang.

ρ	p	u_x	u_y	u_z	B_x	B_y	B_z
γ^2	γ	$-\sin y$	$\sin x$	0.0	$-\sin y$	$\sin 2x$	0.0

A topologia do problema é composta por diversas estruturas em todo o domínio, caracterizando descontinuidades na solução. Problemas com estruturas não-localizadas podem não ser interessantes do ponto de vista adaptativo e, por isso, a simulação

em malha uniforme é apresentada e discutida primeiramente, com o objetivo de avaliar a qualidade da solução ao compará-la com a referência. Posteriormente são apresentados os resultados adaptativos para o mesmo problema.

Malha uniforme

A visualização das soluções numéricas obtidas com os códigos CARMEN–MHD e FLASH em malha uniforme é exibida nas Figuras 6.1 e 6.2, com os limites inferiores e superiores de cada variável fixados igualmente para as duas simulações, como exibido na Tabela 6.2. A topologia das duas soluções é similar, sendo difícil encontrar diferenças evidentes entre si. As variáveis u_z e B_z não são apresentadas, pois assumem valor nulo ao final da simulação. As estruturas que compõem a solução são bem representadas em ambos os casos. A periodicidade intrínseca do problema é mantida, e não há oscilações numéricas na solução, preservando a física do problema.

Para avaliar a convergência local da solução, é apresentado o corte na variável pressão na posição $y = 0.64\pi$. Tal corte é comumente utilizado na literatura (MIYOSHI; KUSANO, 2005; LONDRILLO; ZANNA, 2000; JIANG; WU, 1999a; RYU et al., 1998). A partir do software *g3data*¹, extrai-se os valores apresentados em Londrillo e Del Zanna 2000, obtidos com um esquema LF–CENO de terceira ordem e *staggered mesh*, e Miyoshi e Kusano 2005, obtidos com o esquema HLLD e correção GLM–MHD, para fins comparativos. Esses valores são apresentados, juntamente com a solução obtida ao rodar o código FLASH para uma malha uniforme de 200×200 células, na Figura 6.3. Observa-se que o cortes para todos os casos são similares, sugerindo que o resultado do código FLASH converge de forma adequada para o resultado dos artigos citados. Na Figura 6.4 são exibidas as soluções rodadas com o código FLASH para os níveis $L = 7$, $L = 8$ e $L = 9$, e na Figura 6.5 tem-se as soluções obtidas com o código CARMEN–MHD para os mesmos níveis, mostrando que a topologia da solução é mantida para todos os níveis de refinamento das malhas. Isso mostra que todas as simulações apresentadas são coerentes com os resultados obtidos em outras literaturas.

Para uma análise quantitativa dessas similaridades entre o resultado obtido com o código CARMEN–MHD e a referência, na Tabela 6.3 os erros \mathcal{L}^1 , \mathcal{L}^2 e \mathcal{L}^∞ são apresentados. O erro \mathcal{L}^1 no geral se mantém na ordem de 10^{-3} , sendo maior nas variáveis pressão e densidade, o que também acontece para os dois outros tipos de erro. As diferenças máximas entre as soluções numéricas fica em torno da ordem

¹<http://www.frantz.fi/software/g3data.php>

10^{-1} . As estruturas presentes nessas variáveis apresentam topologias similares. Na Figura 6.6, são exibidas as curvas associadas aos erros \mathcal{L}^1 e \mathcal{L}^2 para a variável ρ , à medida que os níveis de refinamento são variados. Pode-se observar que os valores tendem a diminuir ao mesmo tempo que nível de refinamento aumenta. Isso também ocorre para as outras variáveis. Esse tipo de comportamento é esperado em soluções numéricas, visto que o maior número de células implica em um espaçamento menor entre as células, resultando em uma representação mais precisa do problema.

A densidade de energia \mathcal{E} é fisicamente conservada. Na simulação com o código CARMEN–MHD, a integral dessa quantidade apresenta valores constantes ao longo do tempo físico. A avaliação dessa quantidade global é importante, pois a densidade total de energia é obtida a partir de todas as variáveis MHD, isto é, ρ , p , \mathbf{u} e \mathbf{B} , caracterizando uma medida que depende do comportamento do fluido como um todo, além de avaliar a implementação do modelo ideal conservativo.

O erro associado à divergência de \mathbf{B} é denotado por ε_{div} e definido no Capítulo 5. Nesta simulação, esse valor se mantém na ordem de 10^{-2} , satisfazendo a condição proposta $\varepsilon_{div} < 1$. Os valores mais significativos de $\nabla \cdot \mathbf{B}$ ocorrem próximos às maiores discontinuidades presentes na solução. A correção parabólica-hiperbólica controla os erros de divergência, evitando a ocorrência de estruturas não-físicas provenientes da evolução desses erros.

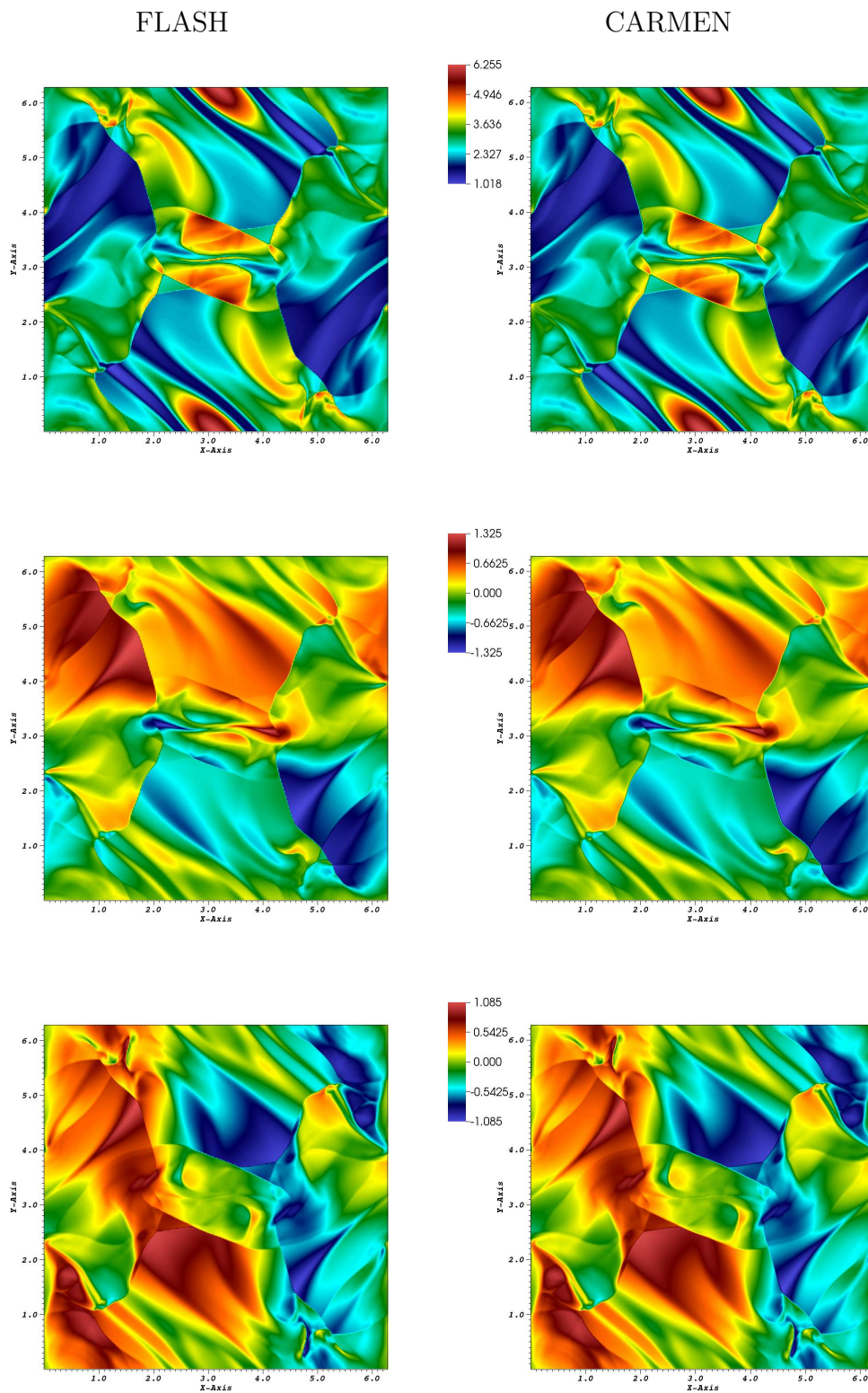
Conclusões parciais

As soluções numéricas obtidas com o código CARMEN–MHD utilizando malhas uniformes possuem as mesmas topologias físicas apresentadas em outros trabalhos da literatura, e também pelos resultados de referência obtidos pelo código FLASH. De acordo com os erros \mathcal{L}^1 , \mathcal{L}^2 e \mathcal{L}^∞ , os resultados obtidos com ambos os códigos são próximos. A conservação da densidade total de energia é mantida, descrevendo de forma adequada a física do problema numericamente. Os erros associados à divergência do campo magnético são controlados, não influenciando os resultados físicos.

Tabela 6.2 - Valores máximos e mínimos das variáveis do modelo MHD ideal utilizados nas visualizações dos resultados dos códigos FLASH e CARMEN-MHD, para uma malha 512×512 e tempo final $t = \pi$.

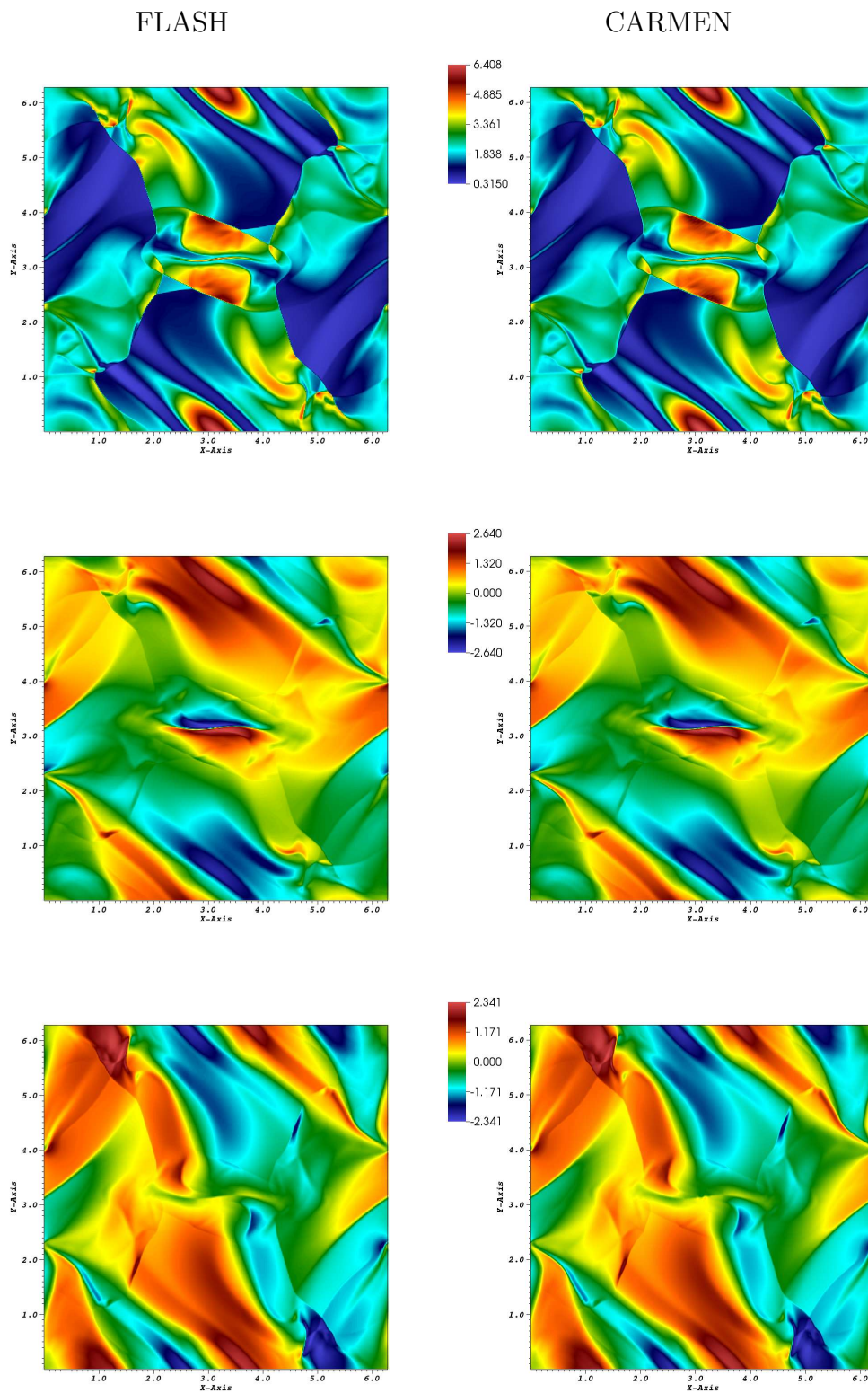
	ρ	p	u_x	u_y	B_x	B_y
Máximo	6.255	6.408	1.325	1.085	2.640	2.341
Mínimo	1.018	0.315	-1.325	-1.085	-2.640	-2.341

Figura 6.1 - Variáveis ρ , u_x e u_y (de cima para baixo) obtidas no tempo $t = \pi$ e 512^2 células, com o modelo MHD ideal para o vórtex de Orszag-Tang com os códigos CARMEN-MHD e FLASH em malhas uniformes.



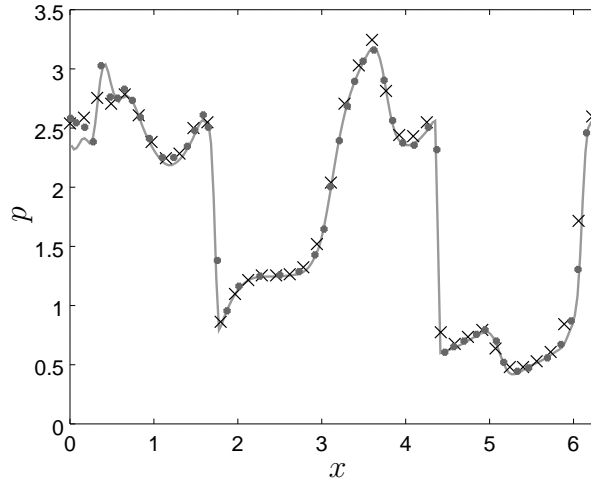
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.2 - Variáveis p , B_x e B_y (de cima para baixo) obtidas no tempo $t = \pi$ e 512^2 células, com o modelo MHD ideal para o vórtex de Orszag-Tang com os códigos CARMEN-MHD e FLASH em malhas uniformes.



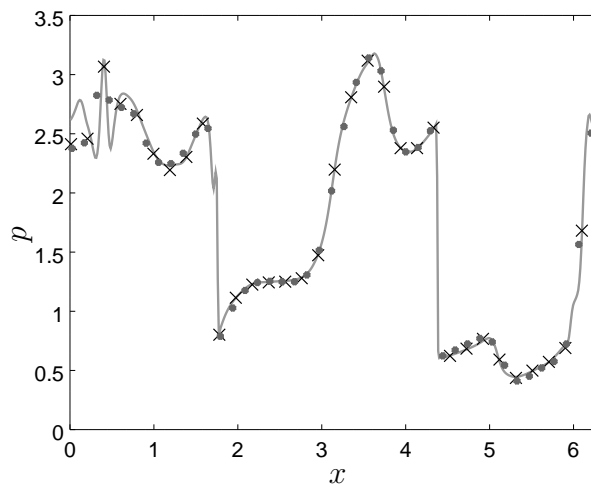
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.3 - Cortes na solução numérica em malha uniforme: comparação da solução obtida com o código FLASH (linha), Londrillo e Del Zanna 2000 (cruz) e Miyoshi e Kusano 2005 (ponto).



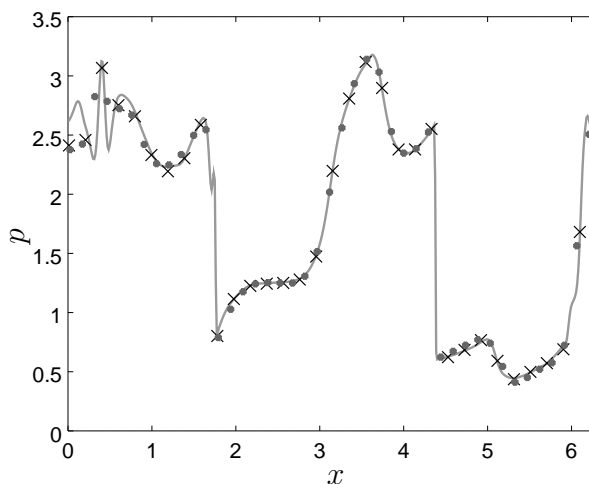
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.4 - Cortes na solução numérica: soluções numéricas obtidas com o código FLASH para os níveis $L = 7$ (ponto), $L = 8$ (cruz) e $L = 9$ (linha).



Fonte: Produção do autor.

Figura 6.5 - Cortes na solução numérica: soluções numéricas obtidas com o código CARMEN-MHD para os níveis $L = 7$ (ponto), $L = 8$ (cruz) e $L = 9$ (linha).

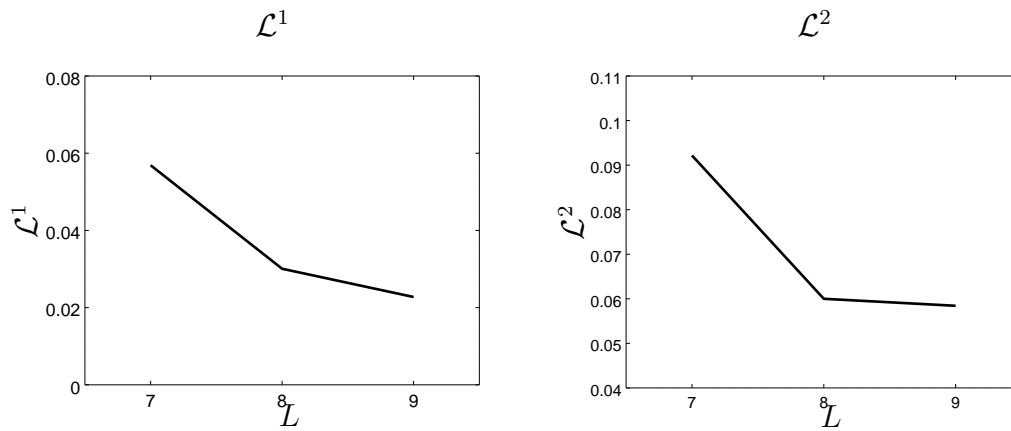


Fonte: Produção do autor.

Tabela 6.3 - Erros obtidos com as simulações do problema do vórtex de Orszag-Tang com VF comparados com a solução de referência obtida com o código FLASH, no nível $L = 9$ em duas dimensões.

Código	Variáveis	Erros		
		$\mathcal{L}^1(\times 10^{-2})$	$\mathcal{L}^2(\times 10^{-2})$	$\mathcal{L}^\infty(\times 10^{-1})$
CARMEN-MHD Malha uniforme	ρ	2.275	5.843	20.45
	p	2.256	7.052	30.86
	u_x	0.681	2.144	8.377
	u_y	0.628	1.653	5.245
	B_x	0.857	2.042	4.495
	B_y	0.825	2.054	4.995

Figura 6.6 - Curvas dos erros \mathcal{L}^1 e \mathcal{L}^2 na variável densidade obtidas a partir dos níveis $L = 7, 8$ e 9 .



Fonte: Produção do autor.

Malha adaptativa

No contexto adaptativo, são realizadas simulações com os parâmetros de truncamento fixos $\epsilon = 0.01$, $\epsilon = 0.03$ e por nível $\epsilon_0 = 0.02$, no nível máximo de refinamento $L = 9$, e com os demais parâmetros como apresentados no caso uniforme. Na Figura 6.8, são exibidas as visualizações das variáveis do modelo MHD ideal obtidas com $\epsilon = 0.03$. As estruturas obtidas com a metodologia adaptativa se assemelham das obtidas com os resultados dos códigos CARMEN–MHD e FLASH em malhas uniformes. A simetria da solução é mantida, com todas as estruturas bem representadas, e os valores máximos e mínimos utilizados nas visualizações estão de acordo com a Tabela 6.2.

Os cortes nas soluções obtidos em $x = \pi$ e $y = \pi$ com $\epsilon = 0.01$, $\epsilon = 0.03$ e $\epsilon_0 = 0.02$, juntamente com a solução de referência, são expostos nas Figuras 6.9 e 6.10. Observa-se que a solução adaptativa coincide com a referência na maioria dos pontos amostrados, sendo coerente com o comportamento esperado do problema.

Para avaliar a aproximação entre as soluções numéricas com $\epsilon = 0.03$, os erros obtidos constam na Tabela 6.4. O erro \mathcal{L}^1 se mantém na ordem de 10^{-2} , indicando uma proximidade adequada entre os valores obtidos. Comparando os casos VF e adaptativo, os erros associados às simulações são ligeiramente menores na malha uniforme, como esperado, com o maior número de células na malha.

O valor de ϵ escolhido como ótimo para a simulação adaptativa do problema do vórtex de Orszag-Tang é $\epsilon = 0.03$, pois a economia em células e tempo de CPU é significativa, além de manter o erro na mesma ordem do caso $\epsilon = 0.01$, como apresentado na Figura 6.14 para a variável densidade. Para $\epsilon = 0.03$, necessita-se de apenas 26% das células na simulação, gerando uma economia de 77% de tempo de CPU. A porcentagem de células utilizadas para $\epsilon = 0.01$ e $\epsilon_0 = 0.2$ foram, respectivamente, 45% e 85%, resultando em uma diminuição do tempo de CPU em 56% e 11%. Nas Figuras 6.12 e 6.13, pode-se observar que à medida que a porcentagem de células aumenta, assim como o tempo de CPU associado, os erros \mathcal{L}^1 e \mathcal{L}^2 tendem a diminuir. No entanto, para os casos apresentados, é possível manter a mesma ordem dos erros.

Para avaliar a conservação da densidade de energia \mathcal{E} , são apresentados na Figura 6.7 os valores obtidos com $\log_{10}(\mathcal{E}_{MR}/\mathcal{E}_{FV})$, em que \mathcal{E}_{MR} e \mathcal{E}_{FV} são os valores da integral de \mathcal{E} ao longo do tempo obtidos para as malhas adaptativa e uniforme, respectivamente. Com essa medida, é possível avaliar a conservação da energia obtida para os diversos valores de ϵ , além de medir o quanto esses valores se aproximam do caso uniforme. Os valores de $\log_{10}(\mathcal{E}_{MR}/\mathcal{E}_{FV})$ são obtidos para $\epsilon_0 = 0.2$ (círculo), $\epsilon = 0.01$ (cruz) e $\epsilon = 0.03$ (pontilhado), juntamente com o caso uniforme (linha). Para todos os casos apresentados, há conservação da densidade de energia ao longo do tempo. Para os valores obtidos com $\epsilon_0 = 0.2$, o qual demanda aproximadamente 85% das células para a simulação, os valores se aproximam mais do caso uniforme, comparados com $\epsilon = 0.01$ e $\epsilon = 0.03$. Pode-se observar que à medida que se diminui o número de células necessárias, não há perda de conservação de \mathcal{E} , mantendo a física do problema.

As malhas adaptativas para $\epsilon = 0.01$ e $\epsilon = 0.03$ são apresentadas na Figura 6.11. Em todos os casos, a maior quantidade de células está localizada nas estruturas que apresentam as maiores discontinuidades, como pode ser constatado na visualização do problema, fazendo com que as estruturas sejam bem representadas mesmo com uma diminuição considerável no número de células. É possível obter soluções bem representadas em ambos os casos, mesmo com a diferença visível em relação ao número de células necessárias.

Na Figura 6.15, apresentam-se os valores de ε_{div} para diferentes valores de ϵ . Pode-se observar que, em todos os casos, ε_{div} é da ordem de 10^{-2} e, conseqüentemente, satisfaz a restrição $\varepsilon_{div} < 1$. Os erros obtidos para $\nabla \cdot \mathbf{B}$ não são propagados de forma a comprometer a solução, evitando comportamentos não-físicos no problema.

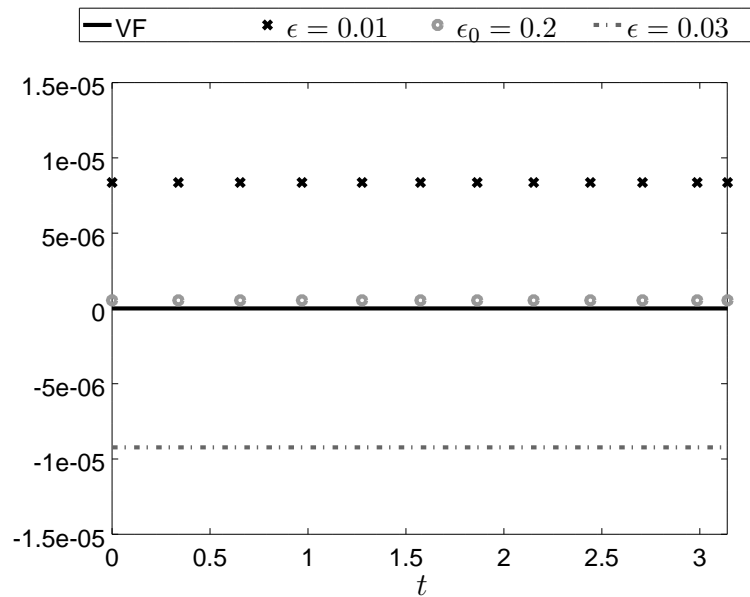
Conclusões parciais

As soluções obtidas com as simulações utilizando MR adaptativa convergiram para o resultado esperado, apresentando erros próximos da abordagem uniforme, mesmo com uma redução de mais de 70% na quantidade de células necessárias para a simulação ao longo do tempo. As malhas adaptativas mostraram-se eficientes na captura das estruturas na solução, evitando o refinamento desnecessário.

Problemas não-físicos foram evitados com a metodologia utilizada e não houve perda de conservação da densidade de energia. A correção de divergência manteve os erros associados controlados, evitando uma possível propagação dos mesmos.

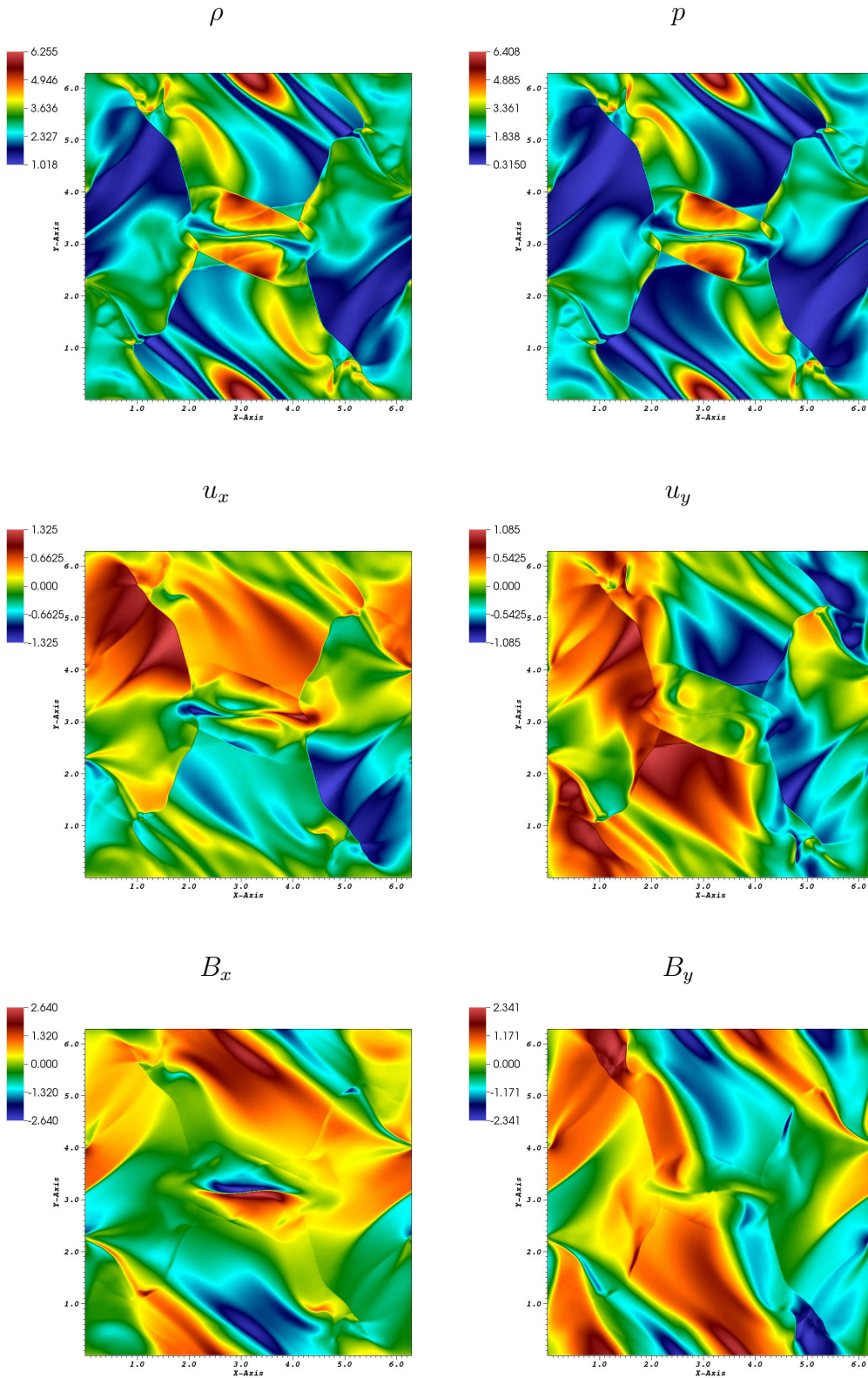
Sendo assim, a abordagem adaptativa é uma alternativa eficiente no contexto da simulação numérica do problema do vórtex de Orszag-Tang bidimensional, possibilitando a obtenção de uma solução numérica coerente dentro do que se espera desse tipo de problema, com uma economia de células e tempo de CPU considerável, sugerindo que, mesmo para problemas com estruturas em todo o domínio, é possível obter uma representação MR adequada.

Figura 6.7 - Valores globais de $\log_{10}(\mathcal{E}_{MR}/\mathcal{E}_{FV})$ ao longo do tempo t , obtidos para as malhas uniforme (preto) e adaptativas com $\epsilon_0 = 0.2$ (círculo), $\epsilon = 0.01$ (cruz) e $\epsilon = 0.03$ (pontilhado).



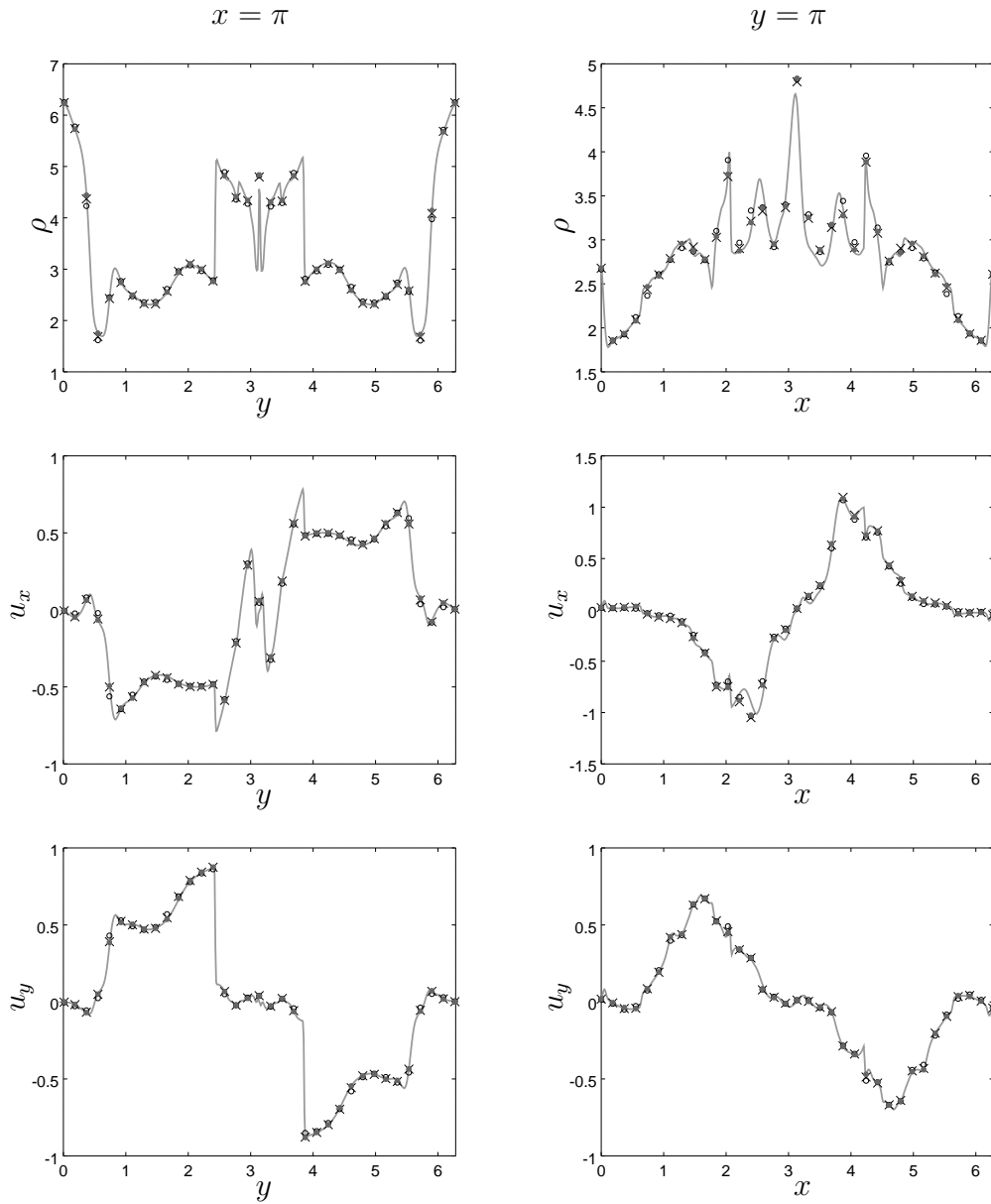
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.8 - Variáveis ρ , p , u_x , u_y , B_x e B_y obtidas no tempo $t = \pi$ e nível $L = 9$ com o modelo MHD ideal para o vórtex de Orszag-Tang com o código CARMEN-MHD MR e $\epsilon = 0.03$.



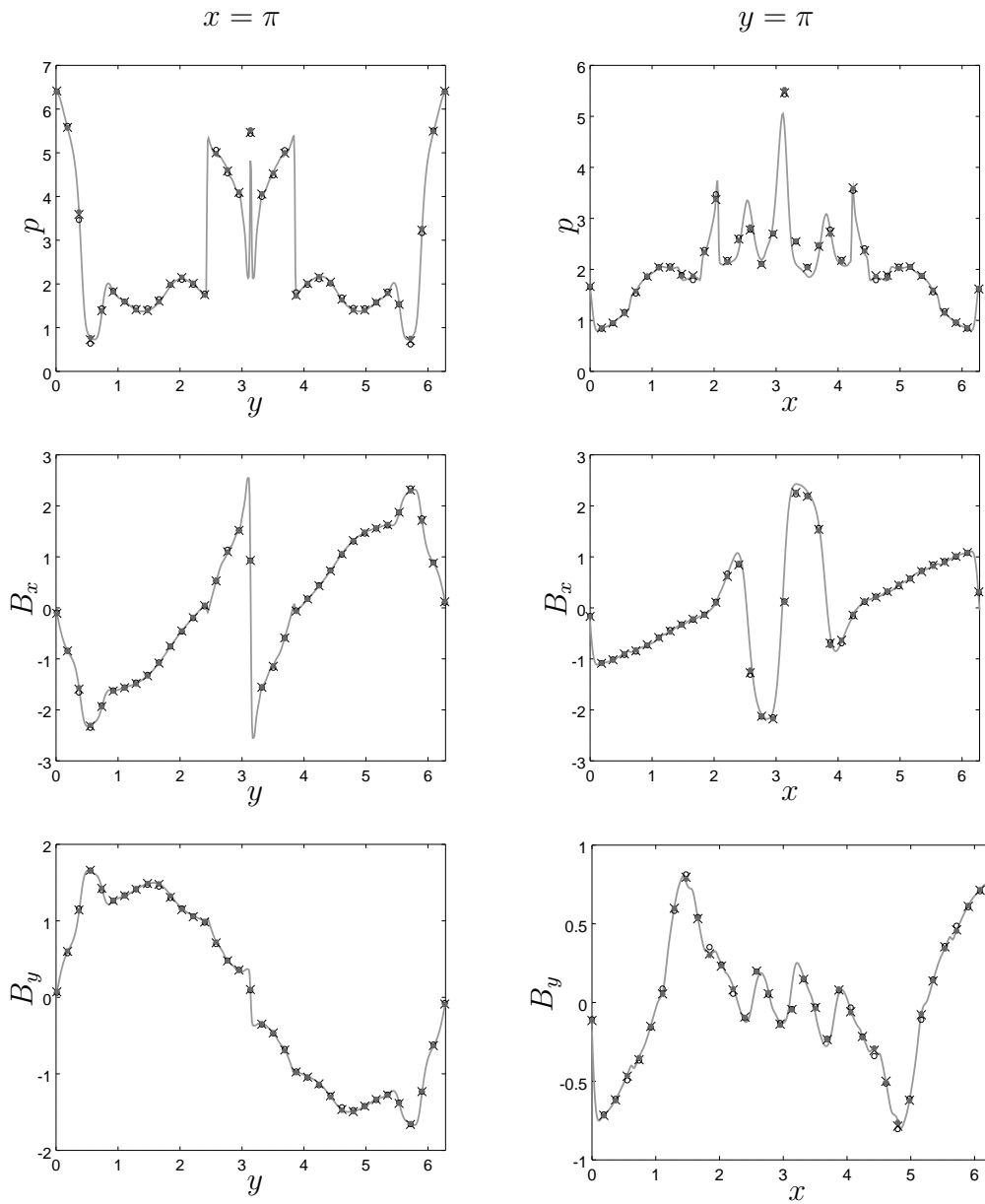
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.9 - Cortes nas variáveis ρ , u_x , e u_y (de cima para baixo) obtidos em $t = \pi$ e $L = 9$, com as soluções de referência (linha) e adaptativa com o código CARMEN-MHD para $\epsilon = 0.01$ (cruz), $\epsilon = 0.03$ (círculo), $\epsilon^0 = 0.2$ (ponto), em $x = \pi$ e $y = \pi$



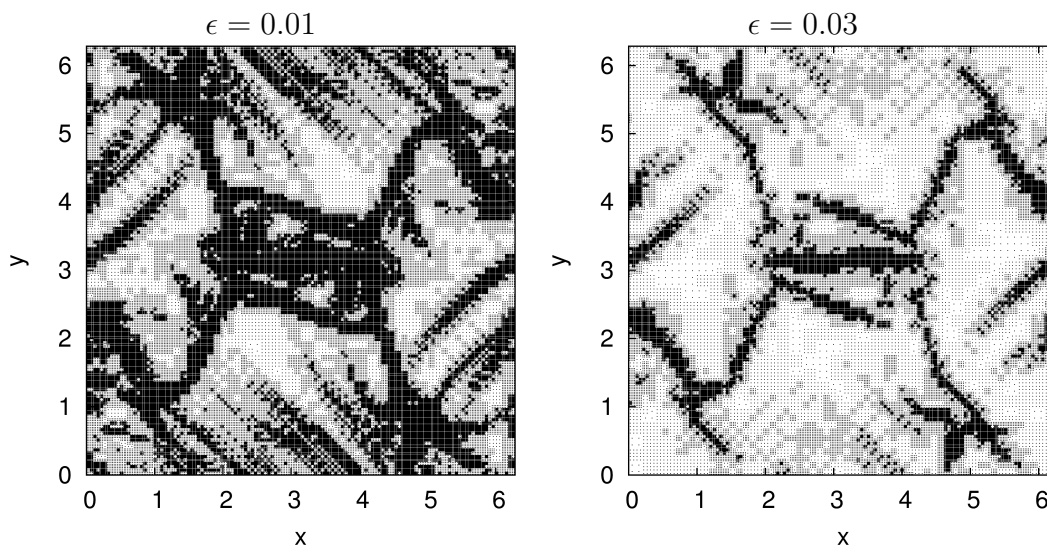
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.10 - Cortes nas variáveis p , B_x , e B_y (cima para baixo) obtidos em $t = \pi$ e $L = 9$, com as soluções de referência (linha) e adaptativa com o código CARMEN-MHD para $\epsilon = 0.01$ (cruz), $\epsilon = 0.03$ (círculo), $\epsilon^0 = 0.2$ (ponto), em $x = \pi$ e $y = \pi$.



Fonte: Produção do autor.

Figura 6.11 - Malhas adaptativas para o problema do vórtex de Orszag-Tang em $t = \pi$ e nível máximo $L = 9$, para $\epsilon = 0.01$ e $\epsilon = 0.03$.



Fonte: Produção do autor.

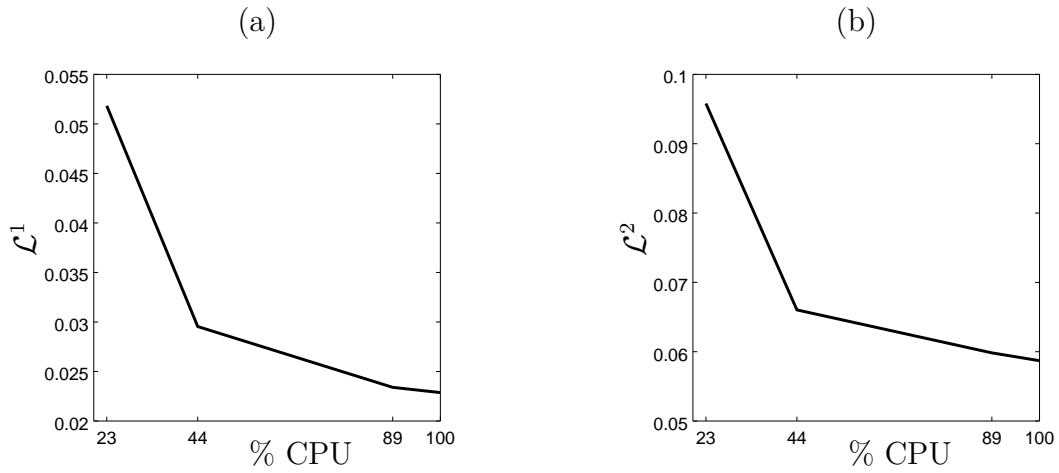
Tabela 6.4 - Erros obtidos com as simulações do problema do vórtex de Orszag-Tang com MR ($\epsilon = 0.03$) comparados com a solução de referência do código FLASH, em duas dimensões.

CARMEN	Variáveis	Erros		
		$\mathcal{L}^1(\times 10^{-2})$	$\mathcal{L}^2(\times 10^{-2})$	$\mathcal{L}^\infty(\times 10^{-1})$
MHD				
	ρ	5.183	9.580	23.20
	p	5.337	11.79	34.94
MR	u_x	1.837	3.511	9.480
	u_y	1.954	3.582	8.923
	B_x	2.482	4.326	6.077
	B_y	2.435	4.684	14.06

6.1.2 Caso tridimensional

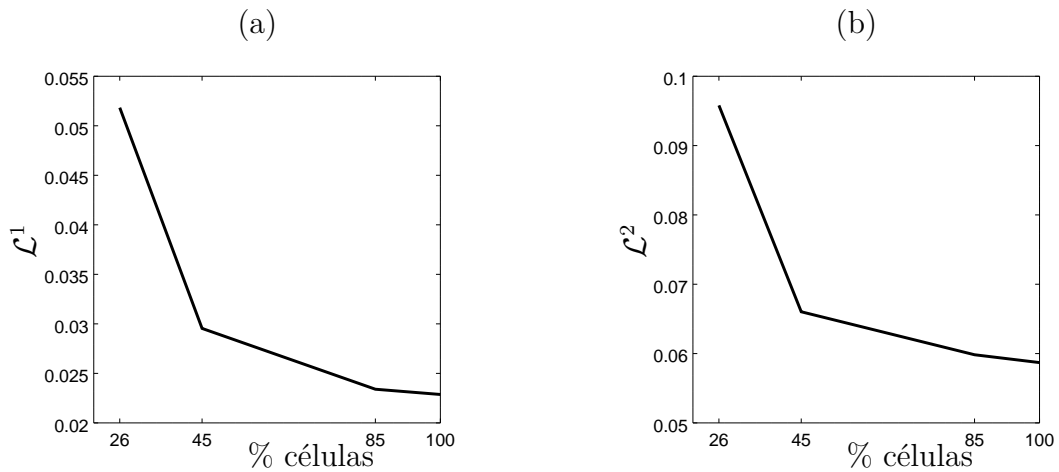
O problema do vórtex de Orszag-Tang apresentado é estendido para o caso tridimensional adicionando uma perturbação na componente z do campo inicial de velocidade (HELZEL et al., 2011). Adicionam-se as perturbações δ nas componentes da velocidade, juntamente com componente espacial z (que é numa no caso bidi-

Figura 6.12 - Gráficos (a) porcentagem de tempo de CPU $\times \mathcal{L}^1$ e (b) porcentagem de tempo de CPU $\times \mathcal{L}^2$, para a variável densidade e $L = 9$.



Fonte: Produção do autor.

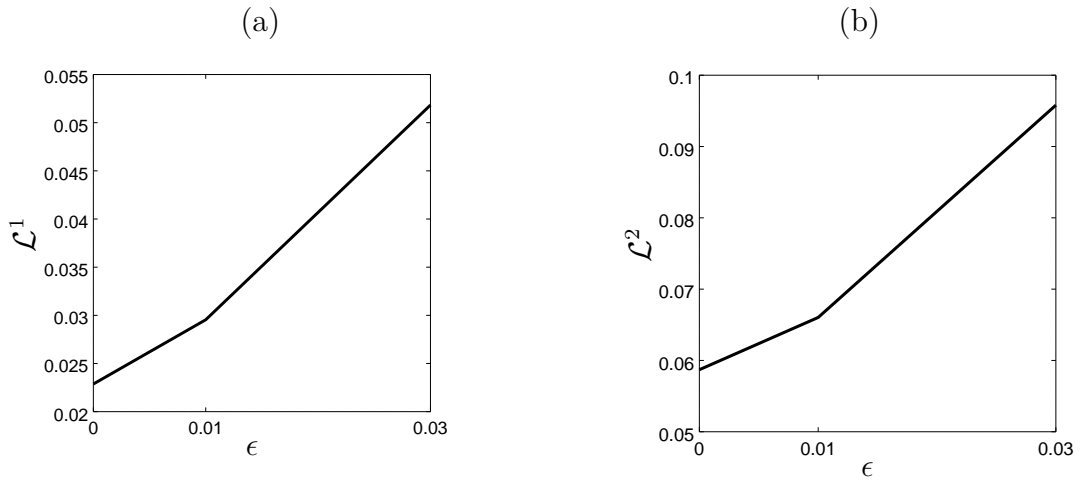
Figura 6.13 - Gráficos (a) porcentagem de células $\times \mathcal{L}^1$ e (b) porcentagem de células $\times \mathcal{L}^2$, para a variável densidade e $L = 9$.



Fonte: Produção do autor.

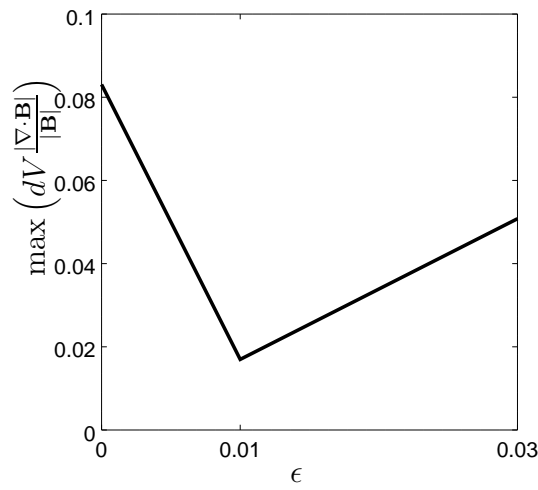
mensional). O domínio computacional é $[0, 2\pi]^3$. O valor de γ é $5/3$ e a condição de contorno é periódica. A condição inicial utilizada é dada por

Figura 6.14 - Gráficos (a) $\epsilon \times \mathcal{L}^1$ e (b) $\epsilon \times \mathcal{L}^2$, para a variável densidade, $\epsilon = 0.01$, $\epsilon = 0.03$ e o caso uniforme, em $t = \pi$ e $L = 9$



Fonte: Produção do autor.

Figura 6.15 - Gráfico $\epsilon \times \varepsilon_{div}$, para $\epsilon = 0.01$, $\epsilon = 0.03$ e o caso uniforme, em $t = \pi$ e $L = 9$.



Fonte: Produção do autor.

Tabela 6.5 - Condição inicial do problema de Orszag-Tang.

ρ	p	u_x	u_y	u_z	B_x	B_y	B_z
γ^2	γ	$-(1 + \delta \sin z) \sin y$	$(1 + \delta \sin z) \sin x$	$\delta \sin z$	$-\sin y$	$\sin 2x$	0.0

simulada no nível mais refinado $L = 7$. Como parâmetros de simulação, tem-se o tempo final de simulação $t = \pi$, o número de Courant $\nu = 0.3$ e $\delta = 0.2$. O parâmetro de truncamento é dado por $\epsilon = 0.03$.

A visualização das variáveis obtidas nas simulações é apresentada nas Figuras 6.18 e 6.19, para os códigos CARMEN–MHD e FLASH. Assim como no caso bidimensional, a topologia da solução se assemelha à obtida pela referência. O vórtex localizado na face superior do domínio encontra-se bem representado e com suas estruturas acentuadas. Em algumas regiões, as descontinuidades alcançam diferenças maiores, necessitando de um maior refinamento local.

A simulação com o parâmetro $\epsilon = 0.03$ escolhido demandou 74% do total de células de uma simulação não adaptativa, e a economia de tempo de CPU é de aproximadamente 20%. Valores maiores, como $\epsilon = 0.05$, são testados com o intuito de reduzir a quantidade de células. No entanto, valores maiores de 0.03 se mostraram insuficientes para representar as estruturas presentes na solução desse problema, não atingindo o tempo final de simulação.

Na Tabela 6.6, são exibidos os erros \mathcal{L}^1 , \mathcal{L}^2 e \mathcal{L}^∞ para as soluções adaptativa e uniforme, comparadas à solução de referência do código FLASH na malha uniforme. Os erros VF e MR são bem próximos, diferindo por valores da ordem de 10^{-4} a 10^{-6} . Esse comportamento é esperado, visto que 74% das células é um valor considerável, se aproximando do caso uniforme.

Conclui-se, que, mesmo se aproximando da solução de referência, de forma adequada, a solução adaptativa para o problema do vórtex de Orszag-Tang no nível $L = 7$ não possui uma malha computacional vantajosa. Espera-se ter uma malha adaptativa com poucas células de forma a ter-se um método eficiente na obtenção da solução numérica, com ganhos significantes no contexto em termos do tempo de CPU. As malhas da simulação nos planos xy , yz e zx são expostas na Figura 6.20, nas quais apenas algumas poucas regiões possuem um refinamento com menos células.

Na Figura 6.21 são apresentadas as variáveis ρ , p , u_x , u_z , B_x , B_y para o nível $L = 8$, em $t = \pi$ e $\epsilon = 0.01$. A estrutura da solução do problema é similar à apresentada para o nível $L = 7$. Nesse caso, também houve uma redução da porcentagem de células utilizadas na simulação, devido ao aumento do nível máximo da malha e, conseqüentemente, o tamanho dela. Para este caso, 62% das células foram utilizadas ao longo do tempo, o que resultou em uma redução de 32% no tempo de CPU. As malhas para o nível $L = 8$ são exibidas na Figura 6.22, para os planos xy , yz e zx .

Nas Figuras 6.16 e 6.17, os valores associados à integral de \mathcal{E} são apresentados para os níveis $L = 7$ e $L = 8$, obtidos com as malhas uniforme e adaptativa para $\epsilon = 0.03$ e $\epsilon = 0.01$, respectivamente. Assim como no caso bidimensional, os casos uniforme e adaptativos mantêm a conservação da quantidade ao longo do tempo, verificando a física do problema.

O erro associado à divergência do campo magnético, denotado por ε_{div} , assume valor da ordem de 10^{-3} para os casos uniforme e adaptativo com $\epsilon = 0.03$, sendo coerente com o valor esperado. No geral, observa-se que as características físicas da solução são mantidas.

Conclusões parciais

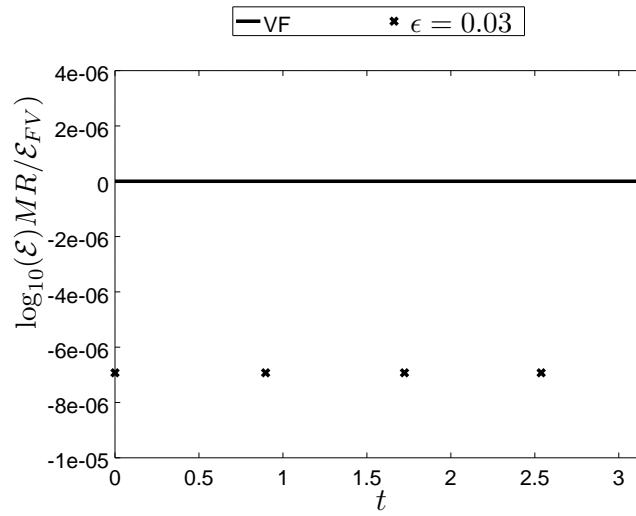
São apresentadas as simulações tridimensionais do problema de Orszag-Tang ideal. As soluções MR e FV obtidas com o código CARMEN-MHD se aproximam da solução de referência obtida com o código FLASH, verificando a implementação tridimensional do modelo MHD ideal. Além disso, todas as simulações alcançaram o tempo final desejado sem instabilidades numéricas.

Observa-se que a obtenção de uma malha adaptativa que melhor localize as estruturas da solução é dificultada, pois as descontinuidades não estão mais localizadas, principalmente devido às perturbações introduzidas na direção z .

A divergência de \mathbf{B} é controlada com a correção utilizada. A integral de \mathcal{E} se mantém conservada para todos os casos, havendo pequenas variações na abordagem adaptativa.

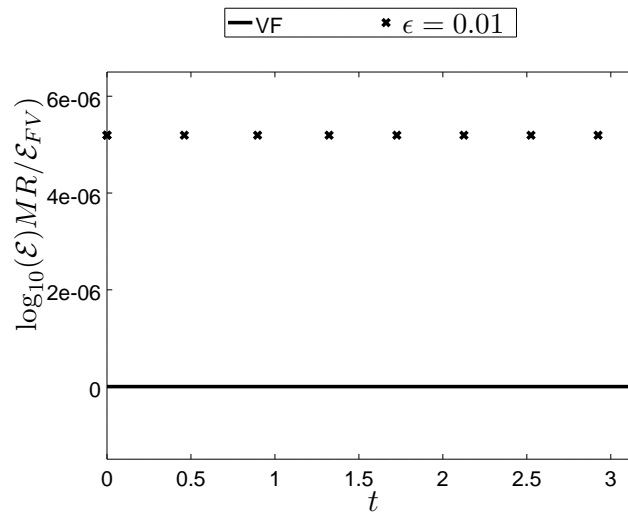
Analisando os casos MR apresentados para $L = 7$ e $L = 8$, pode-se concluir que, com o aumento no nível de refinamento, há uma redução das porcentagens associadas aos tempos de CPU e número de células.

Figura 6.16 - Valores globais de \mathcal{E} ao longo do tempo t , obtidos para malhas uniforme (linha) e adaptativa (cruz) com $\epsilon = 0.03$, para $L = 7$.



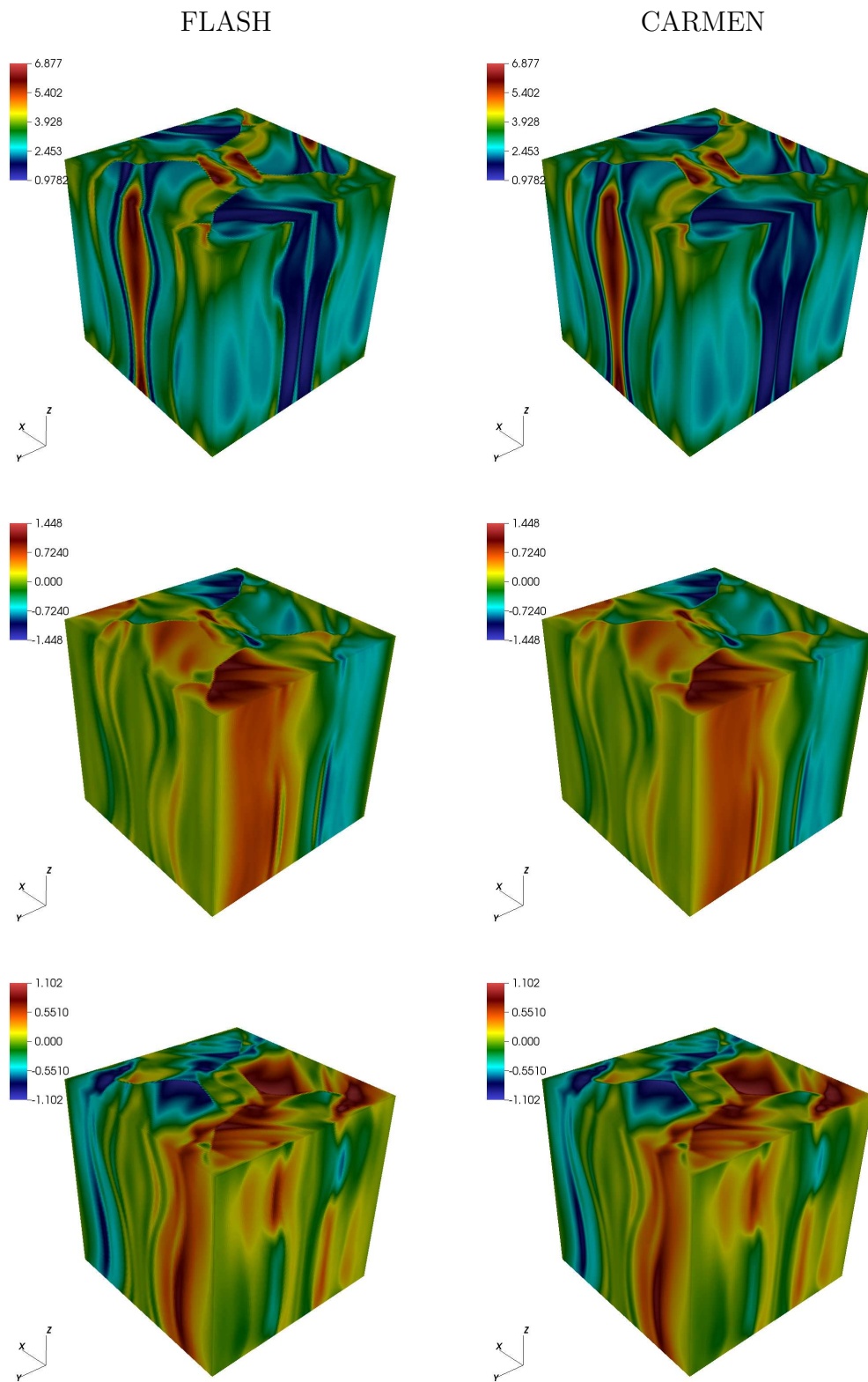
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.17 - Valores globais de \mathcal{E} ao longo do tempo t , obtidos para malhas uniforme (linha) e adaptativa (cruz) com $\epsilon = 0.01$, com $L = 8$.



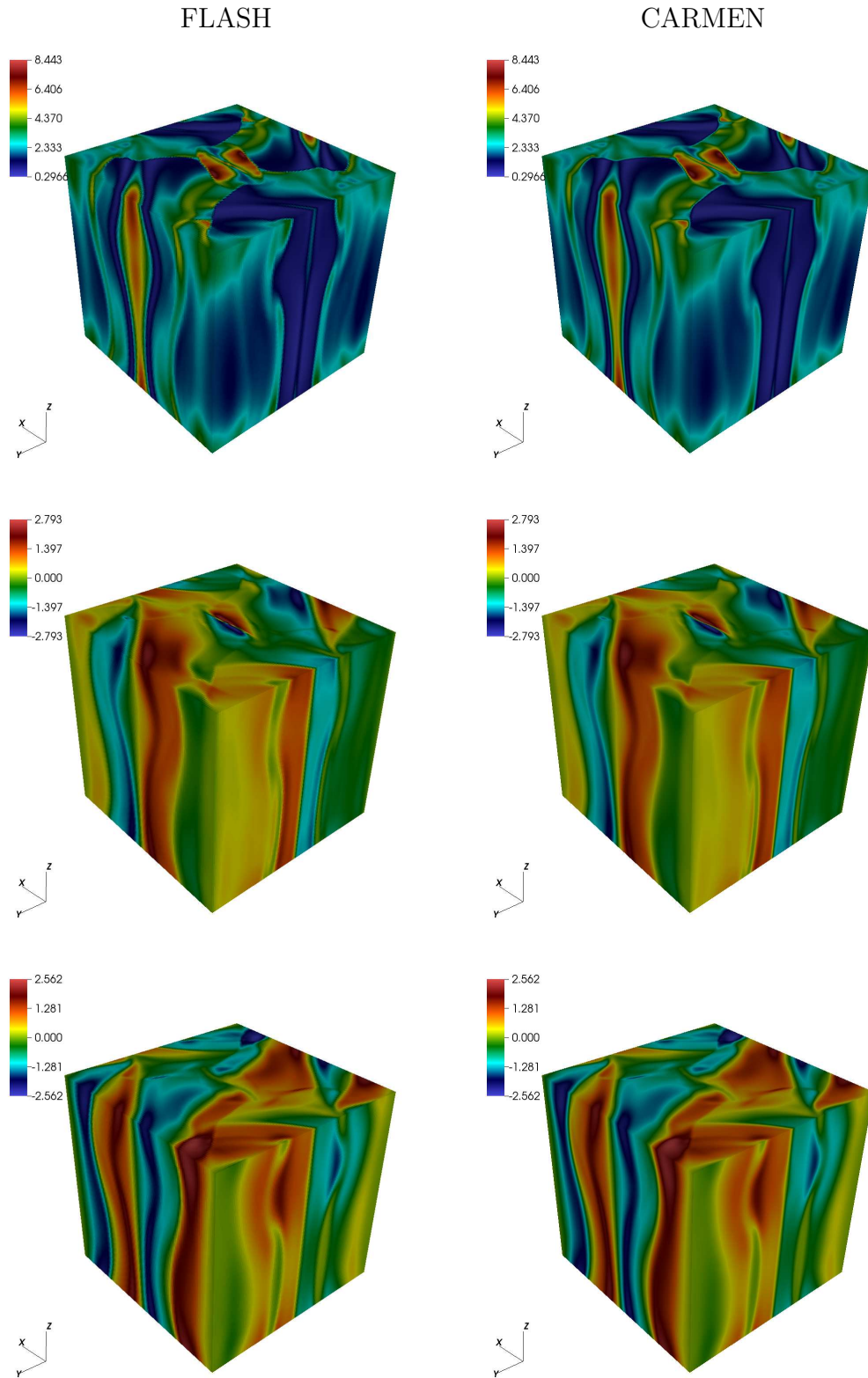
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.18 - Variáveis ρ , u_x e u_y (de cima para baixo) obtidas no tempo $t = \pi$ e nível $L = 7$ com o modelo MHD ideal para o vórtex de Orszag-Tang com os códigos CARMEN-MHD MR com $\epsilon = 0.03$ e FLASH.



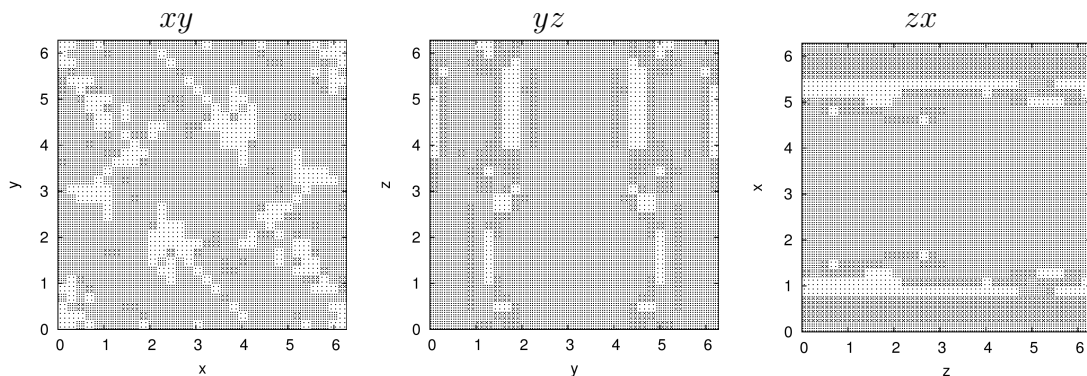
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.19 - Variáveis p , B_x e B_y (de cima para baixo) obtidas no tempo $t = \pi$ e nível $L = 7$ com o modelo MHD ideal para o vórtex de Orszag-Tang com os códigos CARMEN-MHD MR com $\epsilon = 0.03$ e FLASH.



Fonte: Produção do autor.

Figura 6.20 - Malhas no plano xy , yz e zx para o problema do vórtex de Orszag-Tang em três dimensões, com $L = 7$, $\epsilon = 0.03$ e $t = \pi$, obtidas com o modelo MHD ideal.

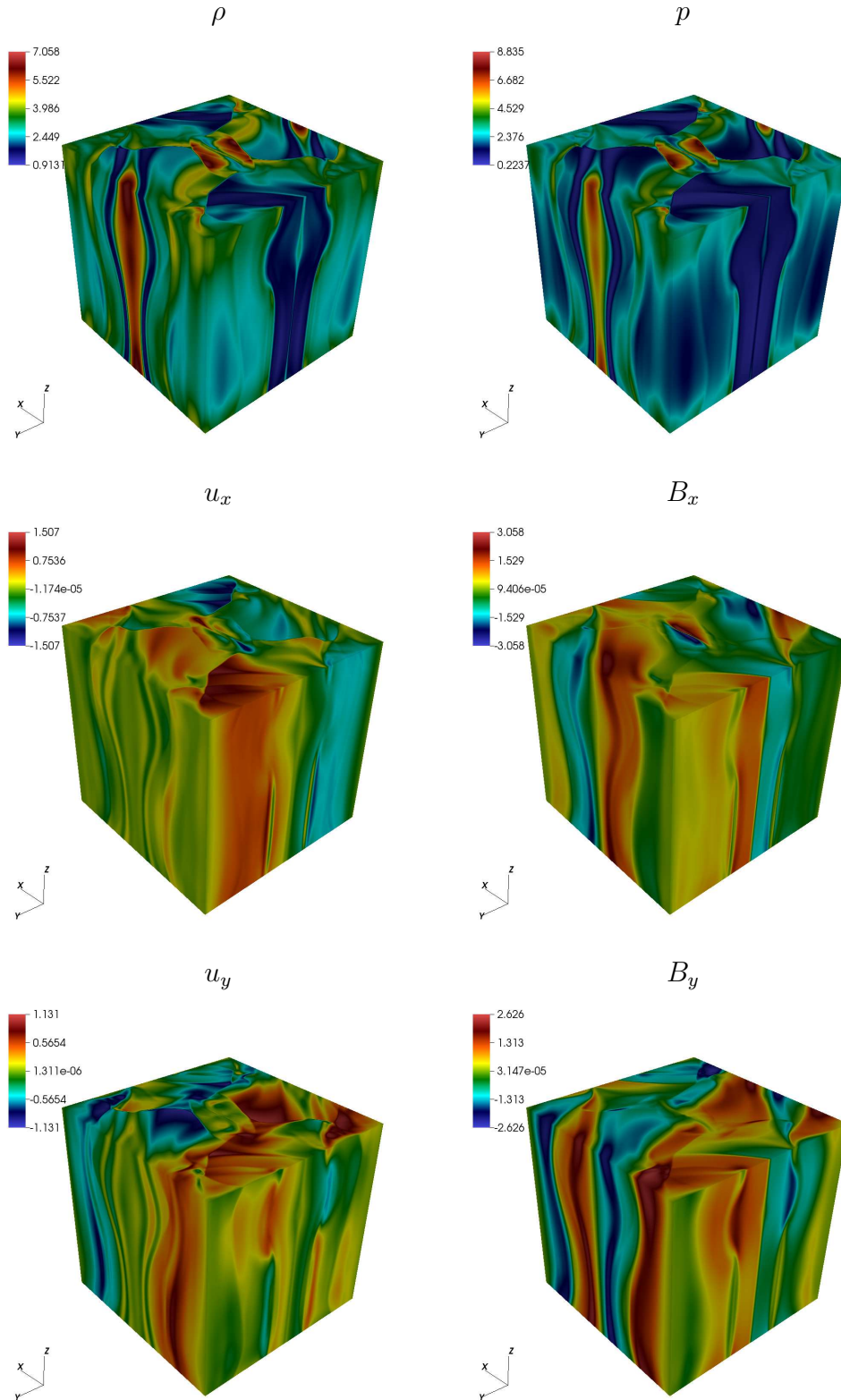


Fonte: Produção do autor.

Tabela 6.6 - Erros obtidos com as simulações do problema do vórtex de Orszag-Tang com MR ($\epsilon = 0.03$) e VF comparados com a solução de referência, em três dimensões.

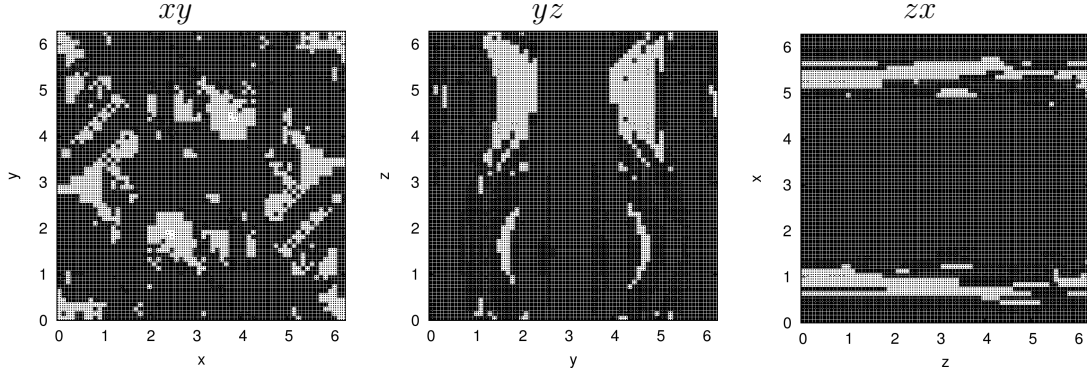
Código	Variáveis	Erros			
		$\mathcal{L}^1(\times 10^{-4})$	$\mathcal{L}^2(\times 10^{-3})$	$\mathcal{L}^\infty(\times 10^{-1})$	
CARMEN-MHD	ρ	3.758	6.703	6.499	
	p	3.636	6.284	8.486	
	Malha uniforme	u_x	1.025	1.941	3.451
		u_y	0.951	1.583	2.023
		u_z	0.433	0.686	1.080
		B_x	1.479	2.591	3.713
		B_y	1.302	2.195	2.038
		B_z	0.543	0.981	1.839
MR	ρ	4.488	7.674	8.194	
	p	4.345	7.856	13.97	
	u_x	1.288	2.333	4.903	
	u_y	1.269	2.014	2.775	
	u_z	0.562	0.898	1.914	
	B_x	1.795	2.976	3.667	
	B_y	1.653	2.675	2.669	
	B_z	0.727	1.308	3.396	

Figura 6.21 - Variáveis ρ , p , u_x , u_y , B_x e B_y obtidas no tempo $t = \pi$ e nível $L = 8$ com o modelo MHD ideal para o problema do vórtex de Orszag-Tang com o código CARMEN-MHD. Para a simulação com a multirresolução adaptativa, a solução é obtida com $\epsilon = 0.01$.



Fonte: Produção do autor.

Figura 6.22 - Malhas no plano xy , yz e zx para o problema do vórtice de Orszag-Tang em três dimensões, com $L = 8$, $\epsilon = 0.03$ e $t = \pi$, obtidas com o modelo MHD ideal.



Fonte: Produção do autor.

6.2 Instabilidade de Kelvin-Helmholtz

A instabilidade de Kelvin-Helmholtz em fluidos é desencadeada na camada de cisalhamento entre dois fluidos com velocidades diferentes. A evolução não-linear dessa instabilidade pode resultar em vórtices característicos, como apresentado em Frank et al (1996). A física desse tipo de problema pode ser útil em vários contextos, visto que sua ocorrência é observada em diversos fenômenos na natureza e no espaço, nas nuvens, magnetosfera e atmosferas de planetas. Ver, por exemplo, a revisão apresentada em (EVANGELISTA et al., 2016). Nas simulações desta tese, considera-se a condição inicial para esse problema é dada na Tabela 6.7, em que

$$\begin{aligned} u_x^0 &= 5(\tanh(20(y + 0.5)) - (\tanh(20(y - 0.5)) + 1)), \\ u_y^0 &= 0.25 \sin(2\pi x)(\exp[-100(y + 0.5)^2] - \exp[-100(y - 0.5)^2]), \end{aligned}$$

são as componentes x e y da velocidade, respectivamente. O domínio computacional é dado por $\Omega = [0, 1] \times [-1, 1]$ e o nível máximo de refinamento da malha é $L = 9$. Também são definidos como parâmetros de simulação o número de Courant $\nu = 0.4$, a constante adiabática $\gamma = 1.4$, e o tempo final $t = 0.5$. Para a correção de divergência adota-se o valor $\alpha_p = 0.4$. A condição de contorno é periódica em todas as fronteiras.

Tabela 6.7 - Condição inicial para o problema da instabilidade de Kelvin-Helmholtz.

ρ	p	u_x	u_y	u_z	B_x	B_y	B_z
1.0	50.0	u_x^0	u_y^0	0.0	1.0	0.0	0.0

MHD ideal

A visualização da solução é apresentada nas Figuras 6.23 e 6.24, para as simulações com os códigos CARMEN–MHD e FLASH, exceto para as variáveis u_z e B_z que assumem valor nulo ao longo da simulação. As variáveis são limitadas para os mesmos valores máximo e mínimo e, com isso, pode-se observar que as simulações apresentam comportamento similar. Qualitativamente, a solução obtida com o código CARMEN se aproxima do seu referencial, obtida com o código FLASH.

O parâmetro de truncamento utilizado na simulação adaptativa é dado por $\epsilon_0 = 0.1$. Com essa escolha, a porcentagem de células necessárias ao longo do tempo para obter a solução é de 32%, acarretando em um ganho de aproximadamente 68% de tempo de CPU.

Na Figura 6.25, apresentam-se os cortes na solução nas posições $x = 0.5$ e $y = 0.5$. Nesse caso, observa-se o comportamento local da solução do problema, comparando a solução de referência com a solução adaptativa para os parâmetros de truncamento por nível $\epsilon_0 = 0.01$, $\epsilon_0 = 0.1$ e fixo $\epsilon = 0.05$. Observa-se que, para $\epsilon_0 = 0.01$ e $\epsilon_0 = 0.1$, a solução adaptativa converge para a referência, apresentando comportamento similar ao desejado. Para $\epsilon = 0.05$, principalmente nas variáveis u_y em $x = 0.5$ e B_x em $y = 0.5$, a solução se aproxima da referência de forma mais suavizada, sendo ineficiente na representação de estruturas locais presentes nesse tipo de problema.

Esses comportamentos despertam uma discussão acerca da escolha do parâmetro de truncamento ótimo para cada tipo de simulação. Para $\epsilon = 0.05$, a porcentagem necessária de células para obtenção da solução é de 12%, que é equivalente a uma redução de 87% no tempo de CPU, comparado com a simulação com uma malha completa. No entanto, a solução obtida não representa suficientemente bem as estruturas do problema. Já nos casos de truncamento por nível $\epsilon_0 = 0.01$ e $\epsilon_0 = 0.1$, essas estruturas são respeitadas, necessitando de 56% e 32% das células, respectivamente. Na Figura 6.26, é exibida a variação na porcentagem de células necessárias para a simulação à medida que o valor do parâmetro de truncamento é alterado.

Pode-se notar que, para o truncamento fixo, a diminuição no número de células é mais significativa do que o caso por nível, mesmo para valores mais elevados, como $\epsilon_0 = 0.1$. Isso mostra que a quantidade de células utilizadas na simulação, sem a avaliação de outros aspectos da solução, não é um fator determinante para a escolha de ϵ . Na Figura 6.30, são apresentadas as malhas adaptativas para os tempos inicial e final da simulação e observa-se que as células estão mais localizadas nos vórtices da solução.

A Tabela 6.8 mostra os erros associados à aproximação da solução, quando comparada com a referência obtida com o código FLASH. No geral, o erro \mathcal{L}^1 assume valores da ordem de 10^{-2} e 10^{-3} , exceto para a variável pressão. Isso ocorre, pois a pressão é obtida a partir dos valores das variáveis ρ , \mathbf{u} e \mathbf{B} , acumulando os erros provenientes dessas variáveis. O erro obtido com a simulação VF do código CARMEN-MHD é ligeiramente menor do que o erro obtido com a multirresolução adaptativa. Pode-se concluir que, para $\epsilon_0 = 0.1$, apenas 32% das células são necessárias para a obtenção da solução com a acurácia igual ou similar ao caso não adaptativo.

A densidade global de energia se mantém constante para os casos testados, garantindo a conservação dessa quantidade ao longo do tempo e validando a física do problema proposto.

Os valores dos erros ε_{div} para todos os parâmetros de truncamento utilizados e para o caso uniforme são da ordem de 10^{-4} , satisfazendo a restrição $\varepsilon_{div} < 1$. A correção de divergência mantém a topologia física do problema, sem a ocorrência de oscilações.

Conclusões parciais

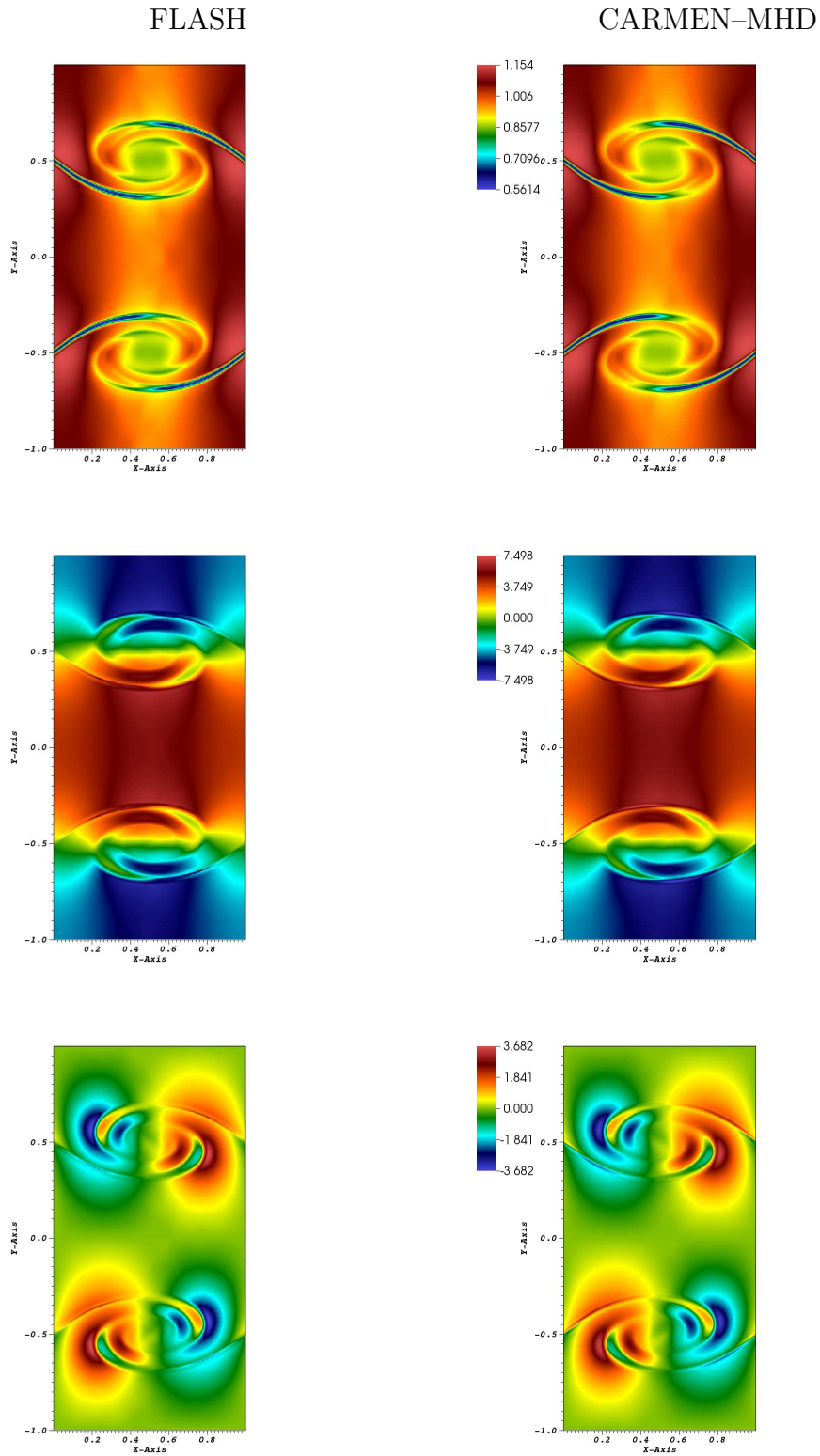
Para o problema da instabilidade de Kelvin-Helmholtz, a abordagem de multirresolução adaptativa mostra-se eficiente na representação das estruturas da solução, além de reduzir consideravelmente o tempo de CPU da simulação numérica. O vórtices presentes na solução são detectados e bem representados com as abordagens utilizadas, com estruturas acentuadas e precisas.

O decaimento do número de células necessárias para a simulação ocorre de forma diferente para os parâmetros de truncamento por nível e fixo. Observa-se que, para o truncamento fixo, há ganhos mais significativos na porcentagem de células, mesmo comparados com valores maiores de ϵ_0 . Isso sugere que deve ser feita uma escolha do parâmetro de forma adequada, lembrando que um número de células muito baixo pode não ser o necessário para a obtenção de uma solução coerente com a física do

problema.

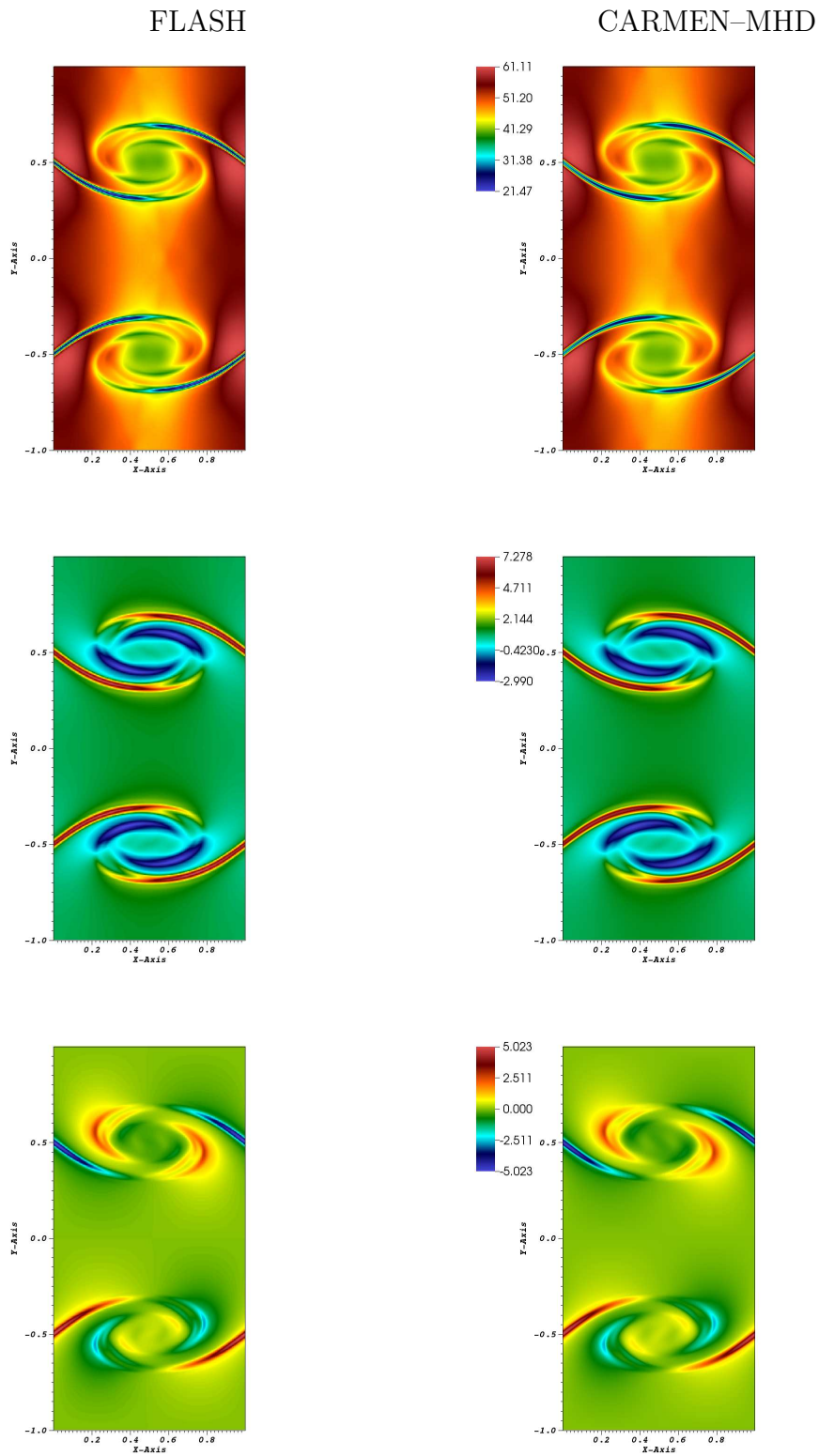
Há uma relação entre o número de células na simulação e os erros obtidos, de forma a permitir a escolha de um parâmetro de truncamento ótimo para essa simulação. Com a escolha de um valor adequado, a abordagem MR pode ser otimizada e os ganhos computacionais são significantes.

Figura 6.23 - Variáveis ρ , u_x e u_y (de cima para baixo) obtidas no tempo $t = 0.5$ e nível $L = 9$ para o problema K-H ideal com os códigos CARMEN-MHD MR com $\epsilon_0 = 0.1$ e FLASH.



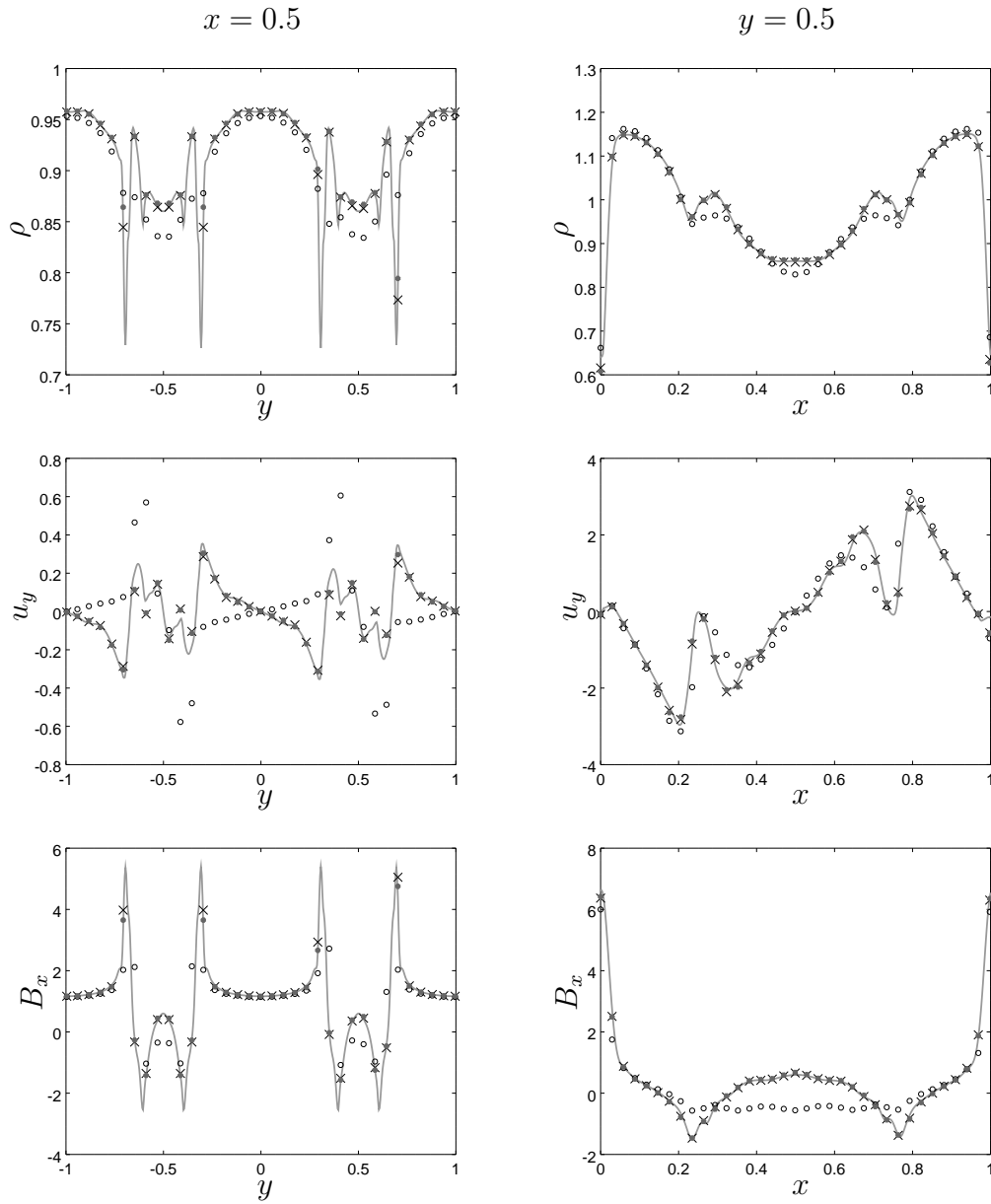
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.24 - Variáveis p , B_x e B_y (de cima para baixo) obtidas no tempo $t = 0.5$ e nível $L = 9$ para o problema K-H ideal com os códigos CARMEN-MHD MR com $\epsilon_0 = 0.1$ e FLASH.



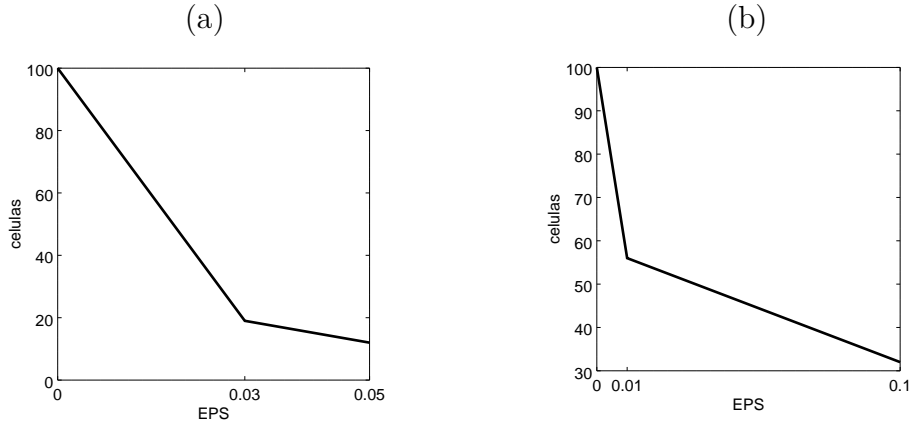
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.25 - Cortes nas variáveis ρ , u_y , and B_x (de cima para baixo) obtidas com o modelo MHD ideal para o problema da instabilidade de Kelvin-Helmholtz, em $t = 0.5$ e $L = 9$, com a solução de referência (linha) e a solução do código CARMEN-MHD para $\epsilon^0 = 0.01$ (ponto), $\epsilon = 0.05$ (círculo), $\epsilon^0 = 0.1$ (cruz), em $x = 0.5$ e $y = 0.5$.



Fonte: Produção do autor.

Figura 6.26 - Gráfico (a) de parâmetro de truncamento fixo por porcentagem de células e (a) de parâmetro de truncamento por nível por porcentagem de células, para $L = 9$.



Fonte: Produção do autor.

Tabela 6.8 - Erros para o problema da instabilidade de Kelvin-Helmholtz obtidos com a simulação MHD ideal, com MR ($\epsilon^0 = 0.1$) e VF no código CARMEN-MHD, comparados com os resultados de referência.

Código	Variáveis	Erros			
		$\mathcal{L}^1(\times 10^{-2})$	$\mathcal{L}^2(\times 10^{-1})$	$\mathcal{L}^\infty(\times 10^{-1})$	
CARMEN-MHD	ρ	0.29	0.07	0.89	
	p	18.3	5.39	67.87	
	VF	u_x	6.57	2.21	22.86
		u_y	3.34	0.83	8.38
		B_x	4.04	1.07	10.69
		B_y	1.65	0.39	3.22
		MR	ρ	0.30	0.072
p	18.4		4.66	60.11	
u_x	6.72		2.12	21.98	
u_y	3.82		0.94	8.43	
B_x	4.08		0.93	8.63	
B_y	1.91		0.41	3.37	

MHD resistivo

Nesta seção, os resultados obtidos ao adicionar a resistividade η ao sistema MHD são discutidos. A simulação adaptativa discutida é obtida com o nível máximo de refinamento $L = 9$, parâmetro de truncamento $\epsilon_0 = 0.1$, tempo final $t = 0.5$, número de Courant $\nu = 0.4$, e $\alpha_p = 0.4$. O valor da resistividade é dado por $\eta = 0.02$, como proposto e discutido em (EVANGELISTA et al., 2016). A condição de contorno em todas as fronteiras é de Neumann.

As Figuras 6.28 e 6.29 mostram a visualização das soluções obtidas com os códigos CARMEN-MHD e FLASH. Nas duas simulações, os resultados obtidos estão plotados entre os mesmos valores máximos e mínimos, a fim de permanecer na mesma escala de cores e evidenciar as estruturas. As maiores discontinuidades na solução estão localizadas na região onde os vórtices estão situados, próximos a $y = -0.5$ e $y = 0.5$. Para o caso específico da densidade, é possível encontrar discontinuidades da mesma ordem de magnitude que o caso ideal e, mesmo não utilizando uma malha cheia, as estruturas são bem capturadas pela multirresolução.

Os resultados resistivos, quando comparados com o caso ideal, são visivelmente mais difusivos, apresentando a estrutura do vórtex menos acentuada. Tal comportamento é esperado devido aos termos fonte adicionados nas equações da densidade de energia e campo magnético, os quais adicionam efeitos de natureza dissipativa ao sistema. Os cortes em $x = 0.5$ e $y = 0.5$ no tempo $t = 0.5$, estão na Figura 6.27 para as variáveis ρ , u_y , e B_x , para $\epsilon_0 = 0.1$, $\epsilon_0 = 0.01$ e $\epsilon = 0.05$, juntamente com a solução de referência.

O cortes estão localizados na região próxima aos vórtices, devido à concentração maior de discontinuidades, sendo possível observar que as soluções se mantêm próximas entre si, mesmo obtidas com códigos diferentes. Em particular, para truncamento por nível com $\epsilon_0 = 0.1$ e $\epsilon_0 = 0.01$, as soluções coincidem com a referência na maior parte dos pontos. O mesmo não acontece com truncamento fixo para $\epsilon = 0.05$, o que implica que a convergência da solução para a referência não é suficiente para valores de ϵ suficientemente grandes. Isso é esperado, pois a porcentagem de células utilizadas para essa simulação é de 5%, sendo insuficiente para a representação adequada das variáveis.

As malhas adaptativas para a simulação da instabilidade de Kelvin-Helmholtz nos tempos $t = 0$ e $t = 0.5$ são exibidas na Figura 6.31, para $\epsilon_0 = 0.1$. Para o parâmetro de truncamento ótimo escolhido para essa simulação, a porcentagem de células é de

25% e a economia de tempo de CPU é de 72%. Ao comparar esses valores com o caso ideal, observa-se que há uma redução no número de células. Tal redução ocorre devido aos efeitos dissipativos, os quais deixam as estruturas com maiores gradientes mais difusas, necessitando de menos células para serem representadas.

Os erros de aproximação entre a solução adaptativa e a referência estão dispostos na Tabela 6.9, para todas as variáveis não-nulas do modelo. Os valores para o caso VF são ligeiramente menores do que os erros do caso MR, o que é esperado devido ao número reduzido de células no último caso. Novamente, comparando com o caso ideal, percebe-se que os valores dos erros são menores para o caso resistivo, devido às estruturas difusas na solução.

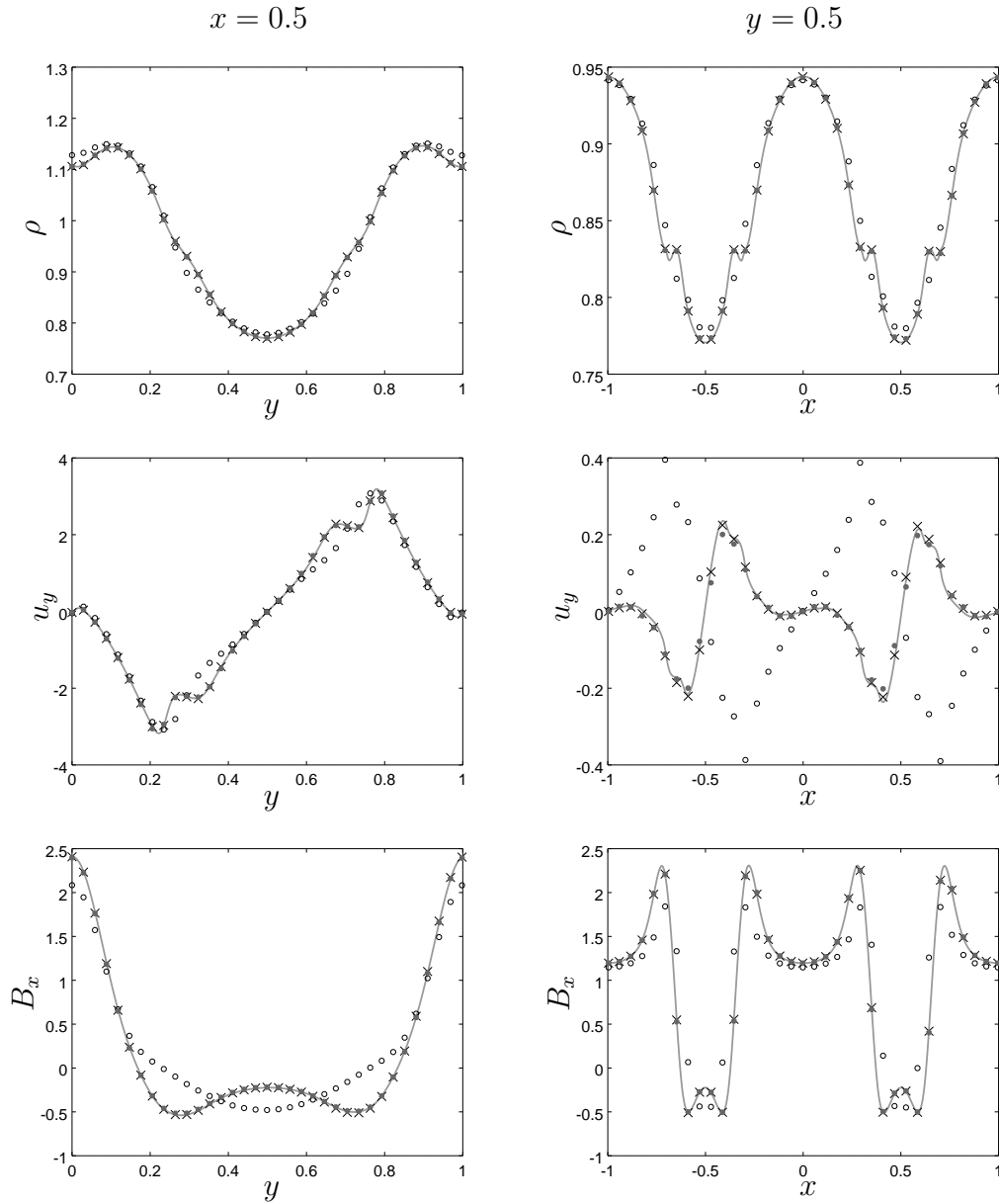
O valor ε_{div} , associado ao erro da divergência do campo magnético, assume um valor da ordem de 10^{-6} para o caso uniforme e para o adaptativo com $\epsilon_0 = 0.01$. Já para os casos adaptativos por nível $\epsilon_0 = 0.1$ e fixo $\epsilon = 0.05$, os valores são da ordem de 10^{-5} . Com isso, todos os casos estudados satisfazem $\varepsilon_{div} < 1$.

Para ilustrar o comportamento difusivo do modelo resistivo, à medida que o valor de η varia, a Figura 6.32 mostra a variável densidade obtida para $\eta = 0$ (caso ideal), $\eta = 0.005$, $\eta = 0.02$ e $\eta = 0.05$. No último caso, os vórtices presentes na topologia da instabilidade se tornam quase imperceptíveis.

Conclusões parciais

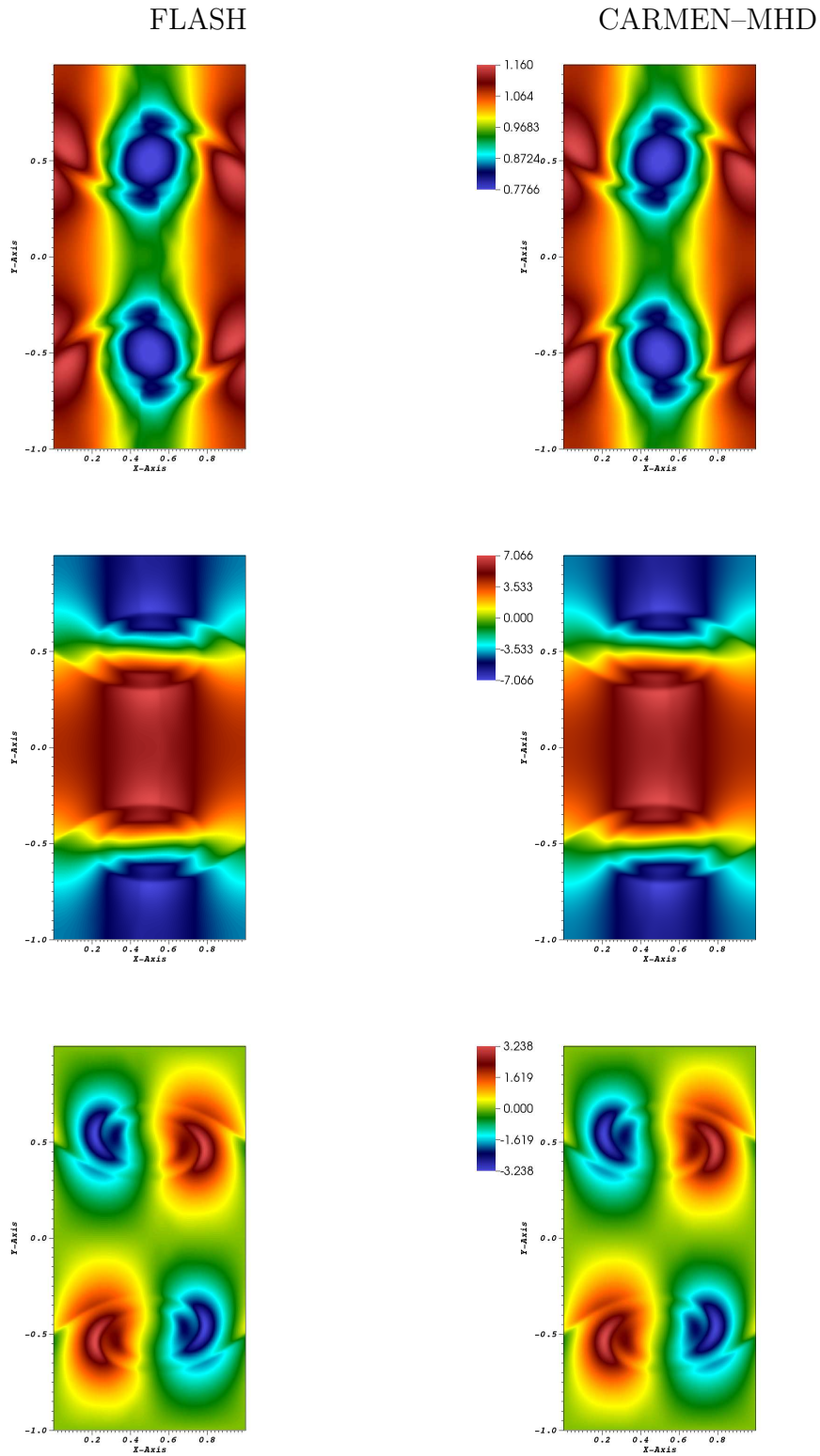
Com os resultados discutidos, conclui-se que a solução adaptativa obtida com o código CARMEN-MHD e $\epsilon_0 = 0.1$ preserva a topologia das estruturas pertinentes à instabilidade de Kelvin-Helmholtz, ao comparado com a solução de referência, utilizando aproximadamente 25% das células de uma malha cheia. Essa economia de células, causa a redução significativa do tempo de CPU da simulação, promovendo um ganho computacional de 72%. Com isso, a abordagem de multirresolução adaptativa se mostrou eficiente na obtenção de soluções do modelo MHD resistivo.

Figura 6.27 - Cortes nas variáveis ρ , u_y , and B_x (de cima para baixo) obtidas com o modelo MHD resistivo em $t = 0.5$ e $L = 9$, com a solução de referência (linha) e a solução do código CARMEN-MHD para $\epsilon^0 = 0.01$ (ponto), $\epsilon = 0.05$ (círculo), $\epsilon^0 = 0.1$ (cruz), em $x = 0.5$ e $y = 0.5$.



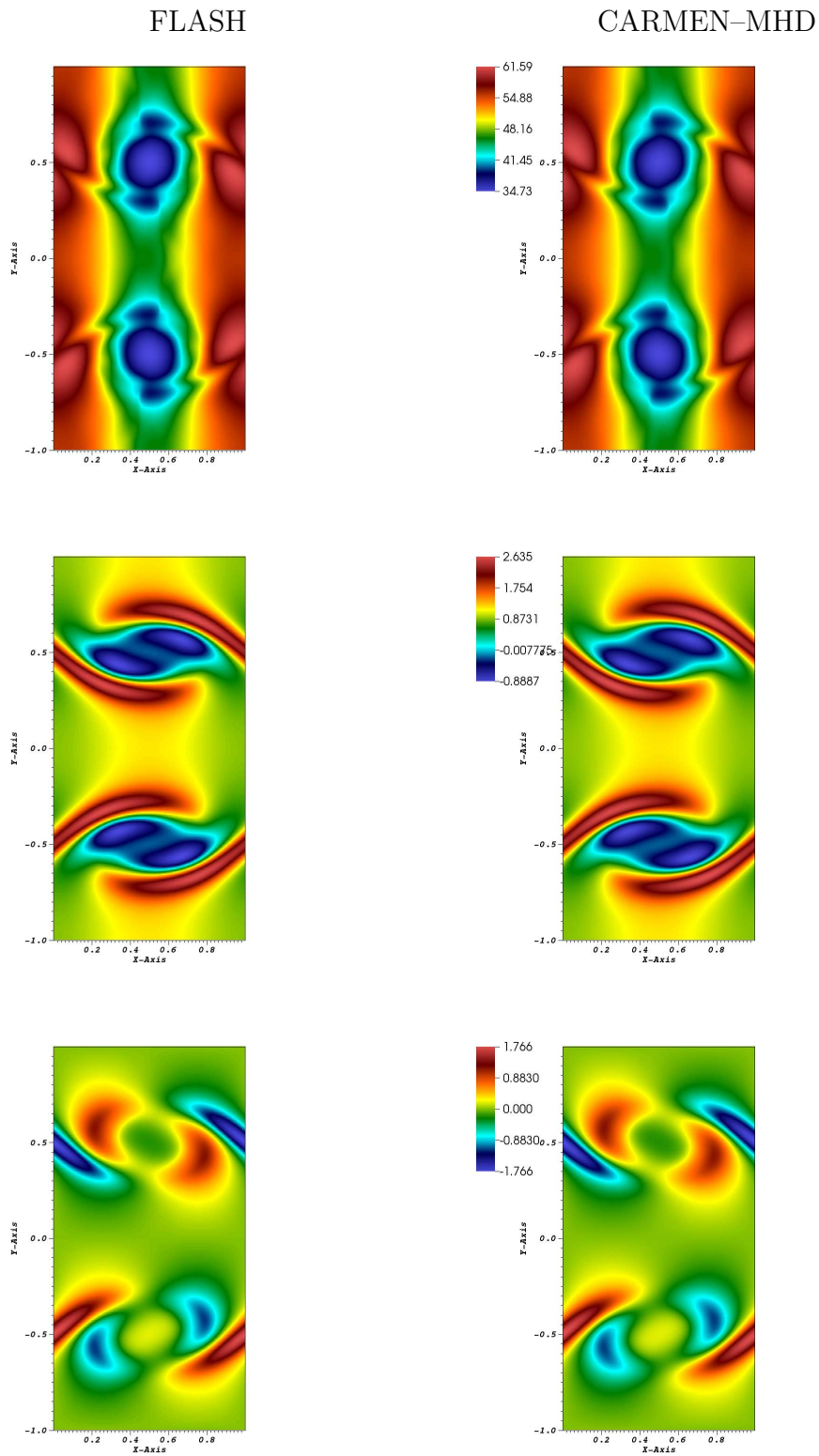
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.28 - Variáveis ρ , u_x e u_y (de cima para baixo) obtidas no tempo $t = 0.5$, nível $L = 9$ e $\eta = 0.02$, para o problema K-H com os códigos CARMEN-MHD MR com $\epsilon_0 = 0.1$ e FLASH.



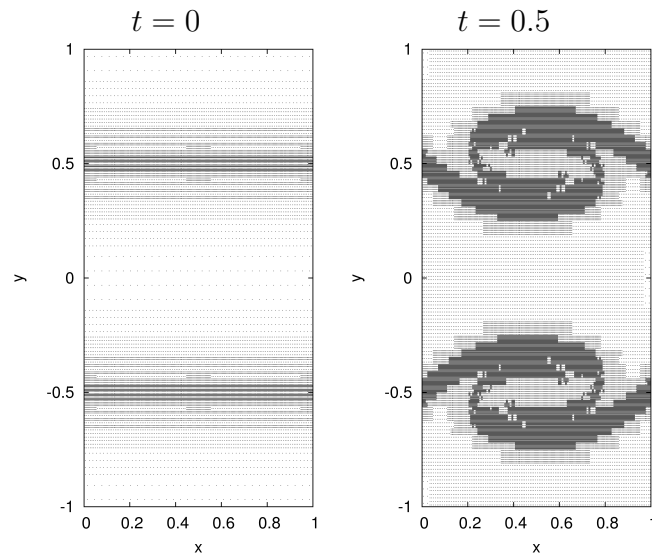
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.29 - Variáveis p , B_x e B_y (de cima para baixo) obtidas no tempo $t = 0.5$, nível $L = 9$ e $\eta = 0.02$, para o problema K-H com os códigos CARMEN-MHD MR com $\epsilon_0 = 0.1$ e FLASH.



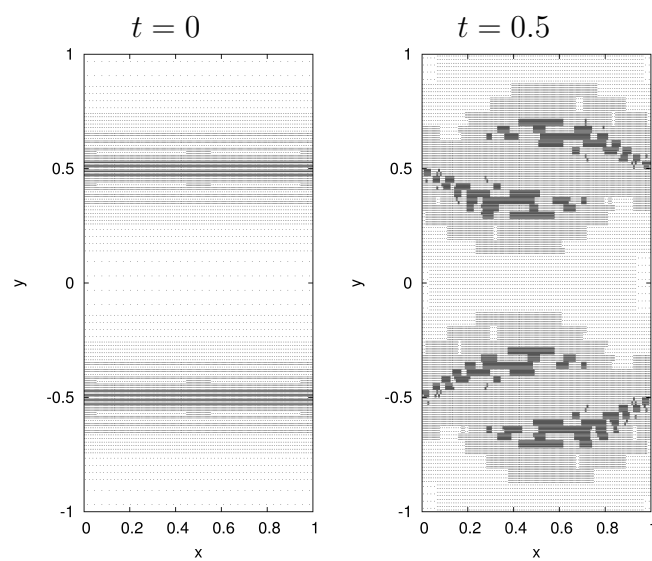
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.30 - Malhas adaptativas para o problema da instabilidade de Kelvin-Helmholtz, obtidas com o modelo MHD ideal nos tempos $t = 0$ e $t = 0.5$, para $L = 9$ e $\epsilon_0 = 0.1$.



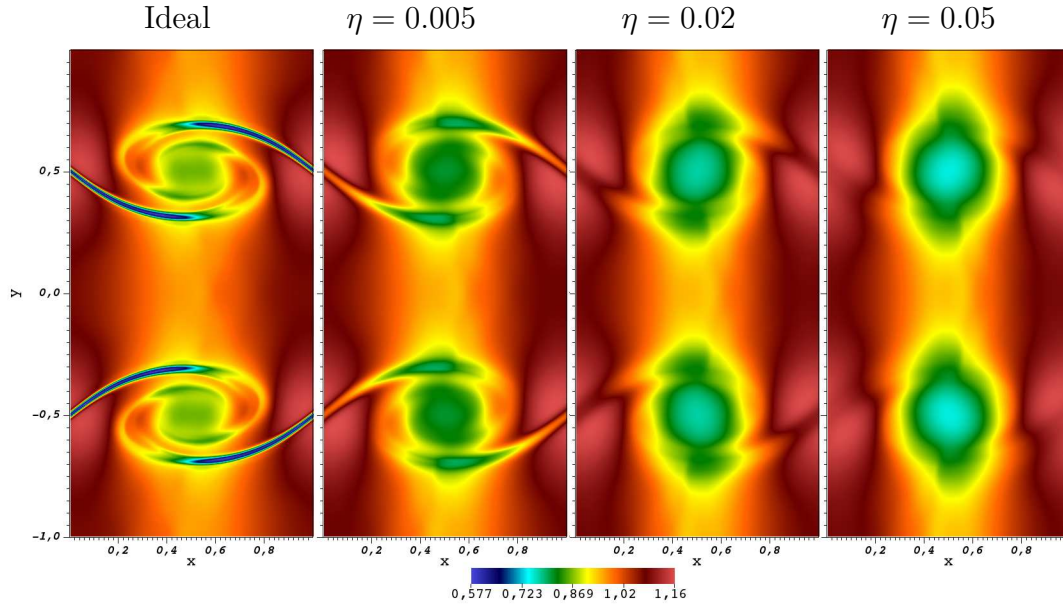
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.31 - Malhas adaptativas para o problema da instabilidade de Kelvin-Helmholtz, obtidas com o modelo MHD resistivo nos tempos $t = 0$ e $t = 0.5$, para $\eta = 0.02$, $L = 9$ e $\epsilon_0 = 0.1$.



Fonte: Produção do autor.

Figura 6.32 - Variável ρ obtida com o código CARMEN-MHD code no tempo $t = 0.5$ para o caso ideal e resistivos $\eta = 0.005$, $\eta = 0.02$, $\eta = 0.05$ (da esquerda para a direita) e $\epsilon^0 = 0.1$.



Fonte: Produção do autor.

Tabela 6.9 - Erros para o problema da instabilidade de Kelvin-Helmholtz obtidos com a simulação MHD ideal, com MR ($\epsilon^0 = 0.1$) e VF no código CARMEN-MHD, comparados com os resultados de referência.

Código	Variáveis	Erros			
		$\mathcal{L}^1(\times 10^{-3})$	$\mathcal{L}^2(\times 10^{-1})$	$\mathcal{L}^\infty(\times 10^{-2})$	
CARMEN-MHD	ρ	0.16	0.17	0.28	
	p	5.99	7.39	3.44	
	Malha uniforme	u_x	2.17	3.42	2.34
		u_y	1.15	1.91	1.35
		B_x	1.22	1.83	0.78
		B_y	0.83	1.16	0.40
MR	ρ	0.23	0.30	0.26	
	p	14.6	18.6	9.36	
	u_x	3.08	4.31	2.57	
	u_y	2.18	3.28	1.96	
	B_x	1.68	2.46	1.17	
	B_y	1.61	2.43	1.11	

6.3 Nuvem magnética

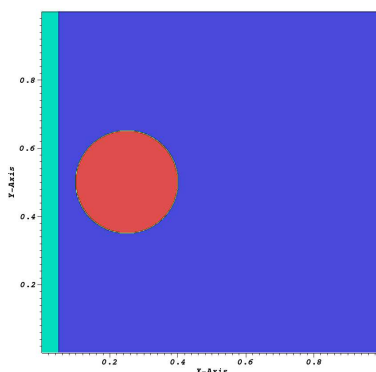
O problema da nuvem magnética é de interesse da comunidade de Astrofísica e Física Espacial, e modela o rompimento de uma nuvem de alta densidade por uma onda de choque. Inicialmente proposto em duas dimensões por Dai e Woodward 1998, é bastante utilizado na literatura para avaliação de códigos e métodos numéricos (TÓTH, 2000; HELZEL et al., 2011; XISTO et al., 2014), e sua abordagem tridimensional é baseada em (TOUMA; ARMINJON, 2006). O choque magnetosônico, definido inicialmente, se propaga na direção x , em direção à nuvem em repouso, criando um comportamento próximo a uma explosão. Esse tipo de problema possui descontinuidades significantes na pressão e na densidade, dificultando a representação das estruturas que ocorrem na simulação. Com isso, é um teste comum para se verificar a estabilidade da simulação e a robustez do código.

Considera-se uma nuvem circular 10 vezes mais densa que o meio, de raio $r = 0.15$ e uma descontinuidade em $x = 0.05$. Os valores das variáveis são definidos na Tabela 6.10 e a variável densidade no tempo inicial é dada na Figura 6.33. Como parâmetros de simulação tem-se o tempo final $t = 0.06$, a constante de correção dada por $\alpha_p = 0.4$, o parâmetro de truncamento $\epsilon = 0.08$, domínio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, nível de refinamento $L = 9$, $\gamma = 5/3$ e $CFL = 0.4$.

Tabela 6.10 - Condição inicial da onda de choque.

	ρ	p	v_x	v_y	v_z	B_x	B_y	B_z
$x \leq 0.05$	3.86859	167.345	0.0	0.0	0.0	0.0	2.1826182	-2.1826182
$x > 0.05$	1.0	1.0	11.2536	0.0	0.0	0.0	0.56418958	0.56418958

Figura 6.33 - Condição inicial para o problema da nuvem magnética 2D, para a variável densidade.



Fonte: Produção do autor.

6.3.1 Caso bidimensional

Para a abordagem bidimensional, considera-se a nuvem como sendo um círculo inicial de centro $(0.25, 0.5)$ e raio $r = 0.15$, com $\rho = 10$.

A visualização das variáveis é apresentada pelas Figuras 6.35 e 6.36, obtidas a partir de simulações com os códigos CARMEN-MHD e FLASH. É possível observar que no intervalo $[0.4, 0.5]$ em x , há uma diferença perceptível na estrutura da solução. Tal estrutura é obtida a partir da explosão que ocorre após o encontro com a nuvem de alta densidade. A diferença observada nessas estruturas ocorre devido à escolha do esquema numérico de cada código utilizado que, neste trabalho, possuem a mesma ordem de precisão, porém formulações numéricas diferentes que podem resultar em variações nas estruturas da solução numérica.

Em um primeiro momento, existe claramente similaridades entre as soluções. Esse argumento é reforçado com os cortes nas soluções, em $x = 0.5$, $y = 0.5$ e $t = 0.06$, apresentados na Figura 6.37, com os quais é possível avaliar a convergência local da solução. Para o truncamento por nível $\epsilon_0 = 0.01$ e fixo $\epsilon = 0.003$, as soluções se aproximam suficientemente bem da referência. Em alguns casos, como na pressão total e na componente y de \mathbf{B} , observa-se em $x = 0.5$, ao longo do intervalo que varia de $y = 0.3$ até $y = 0.7$, que a solução adaptativa não coincide com a referência em alguns pontos amostrados, o que é esperado para esse tipo de problema.

Ambas as simulações adaptativas, com os parâmetros de truncamento por nível $\epsilon_0 = 0.01$ e fixo $\epsilon = 0.003$, utilizam aproximadamente 40% das células ao longo do tempo. Conseqüentemente, há uma redução de 55% a 58% de tempo de CPU. As malhas obtidas delineiam as estruturas localizadas do problema da nuvem e choque. Em particular, para $\epsilon_0 = 0.01$, apresentam-se as malhas nos tempos inicial $t = 0$ e final $t = 0.06$ na Figura 6.34. Em $t = 0$, a maior concentração de células se encontra na frente de choque localizada em $x = 0.05$ e na fronteira da nuvem, onde estão localizadas as maiores descontinuidades na solução. Já no tempo final, as estruturas mais marcadas da solução numérica indicam a maior densidade da distribuição das células na malha.

Para avaliar quantitativamente a proximidade entre as soluções, apresentam-se os erros na Tabela 6.11, obtidos ao comparar as soluções MR e uniforme do código CARMEN–MHD com a solução uniforme do código FLASH. O erro máximo \mathcal{L}^∞ assume valores elevados, devido às estruturas diferentes discutidas anteriormente. O erro \mathcal{L}^1 se mantém na ordem de 10^{-1} a 10^{-2} , exceto pela variável pressão, que acumula o erro de todas as variáveis. Os valores dos erros \mathcal{L}^1 , \mathcal{L}^2 e \mathcal{L}^∞ são similares entre os casos VF e MR, se mantendo na mesma ordem de precisão. Isso mostra que, com uma economia de mais de 50% de tempo, é possível obter soluções numéricas com acurácia similar.

O valor ε_{div} da divergência do campo magnético é da ordem de 10^{-4} para os casos adaptativos e o uniforme, satisfazendo a física do problema. O problema na nuvem magnética possui fortes descontinuidades desde a sua condição inicial, além de ser o problema mais complicado no ponto de vista de estabilidade, devido às explosões resultantes. Então, levando em consideração esses aspectos, o valor médio obtido é significativo.

Conclusões parciais

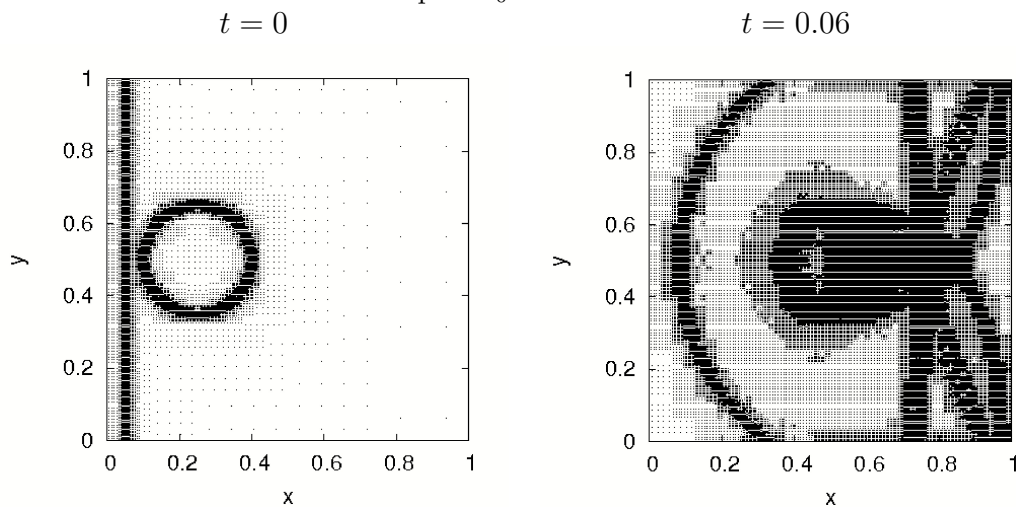
Com os resultados discutidos, conclui-se que a solução adaptativa obtida com o código CARMEN–MHD representa de forma adequada a topologia das estruturas do problema da nuvem magnética bidimensional. Os resultados são comparados com a solução de referência rodadas com o código FLASH. Observa-se que, mesmo as regiões onde há fortes descontinuidades na solução foram representadas de forma coerente com a abordagem adaptativa.

Para essa simulação não há instabilidades numéricas, sendo possível a sua simulação até o tempo final sem maiores problemas. O esquema numérico se manteve

estável ao modelar a explosão, caracterizada por descontinuidades difíceis de serem representadas.

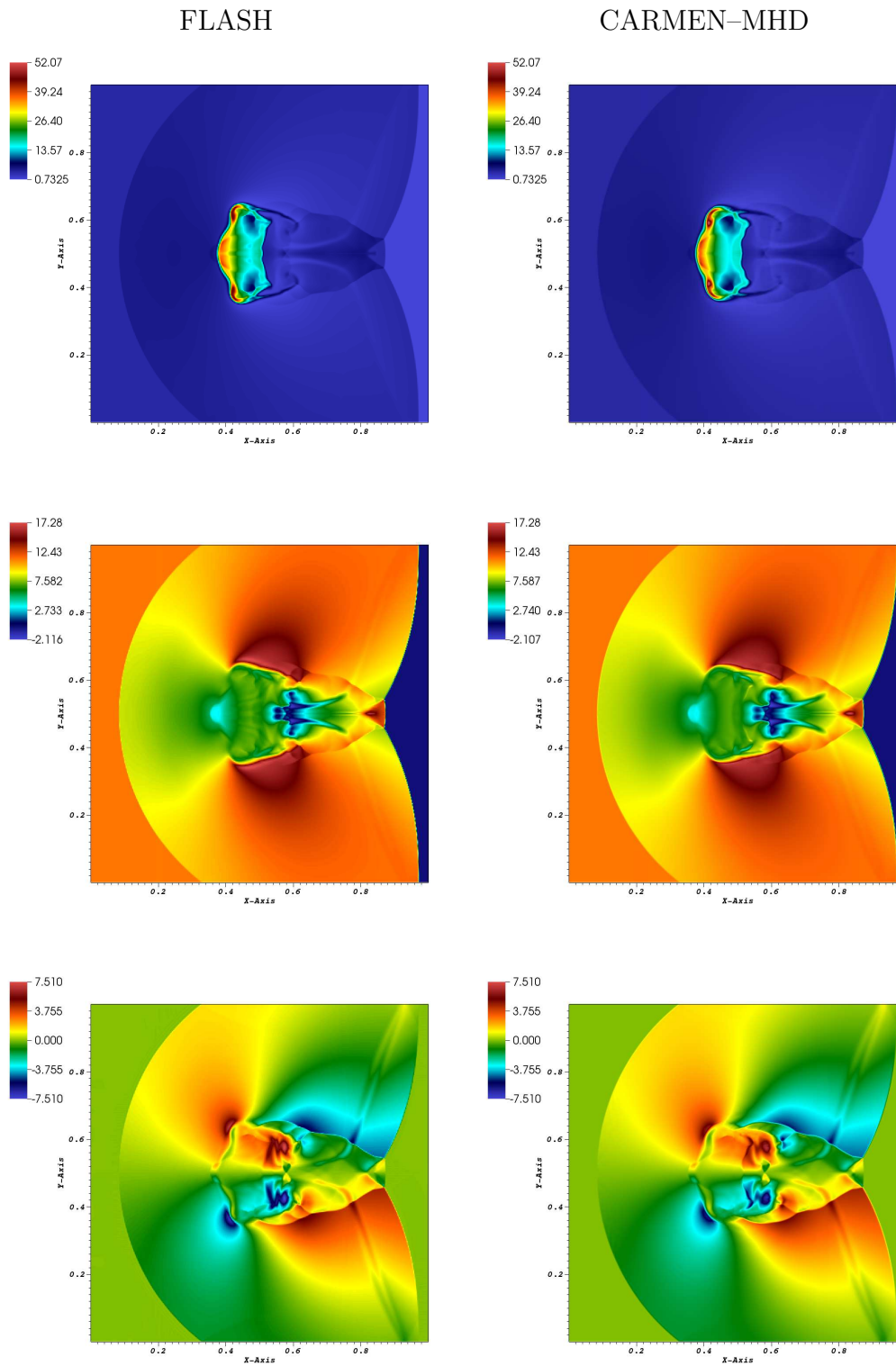
Além disso, há uma economia de mais da metade do tempo de simulação, como consequência da adaptatividade. Com isso, a abordagem de multirresolução adaptativa se mostrou eficiente na obtenção de soluções do modelo MHD.

Figura 6.34 - Malha adaptativa para o problema da nuvem magnética, em $t = 0$ e $t = 0.06$, e nível máximo $L = 9$ para $\epsilon_0 = 0.01$.



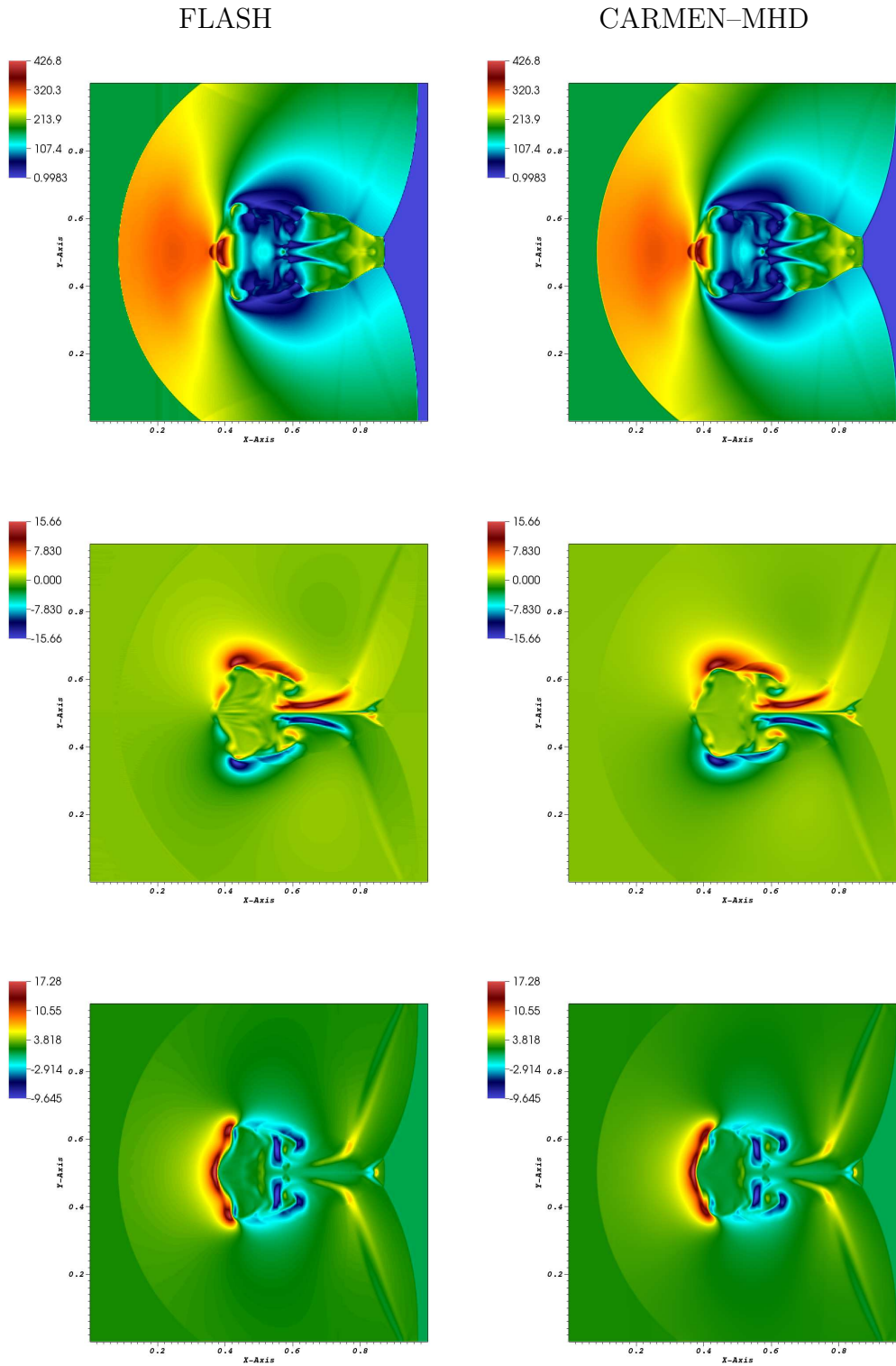
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.35 - Variáveis ρ , u_x e u_y (de cima para baixo) obtidas no tempo $t = 0.06$ e nível $L = 9$ com o modelo MHD ideal para o problema da nuvem magnética com os códigos CARMEN-MHD MR com $\epsilon_0 = 0.01$ e FLASH.



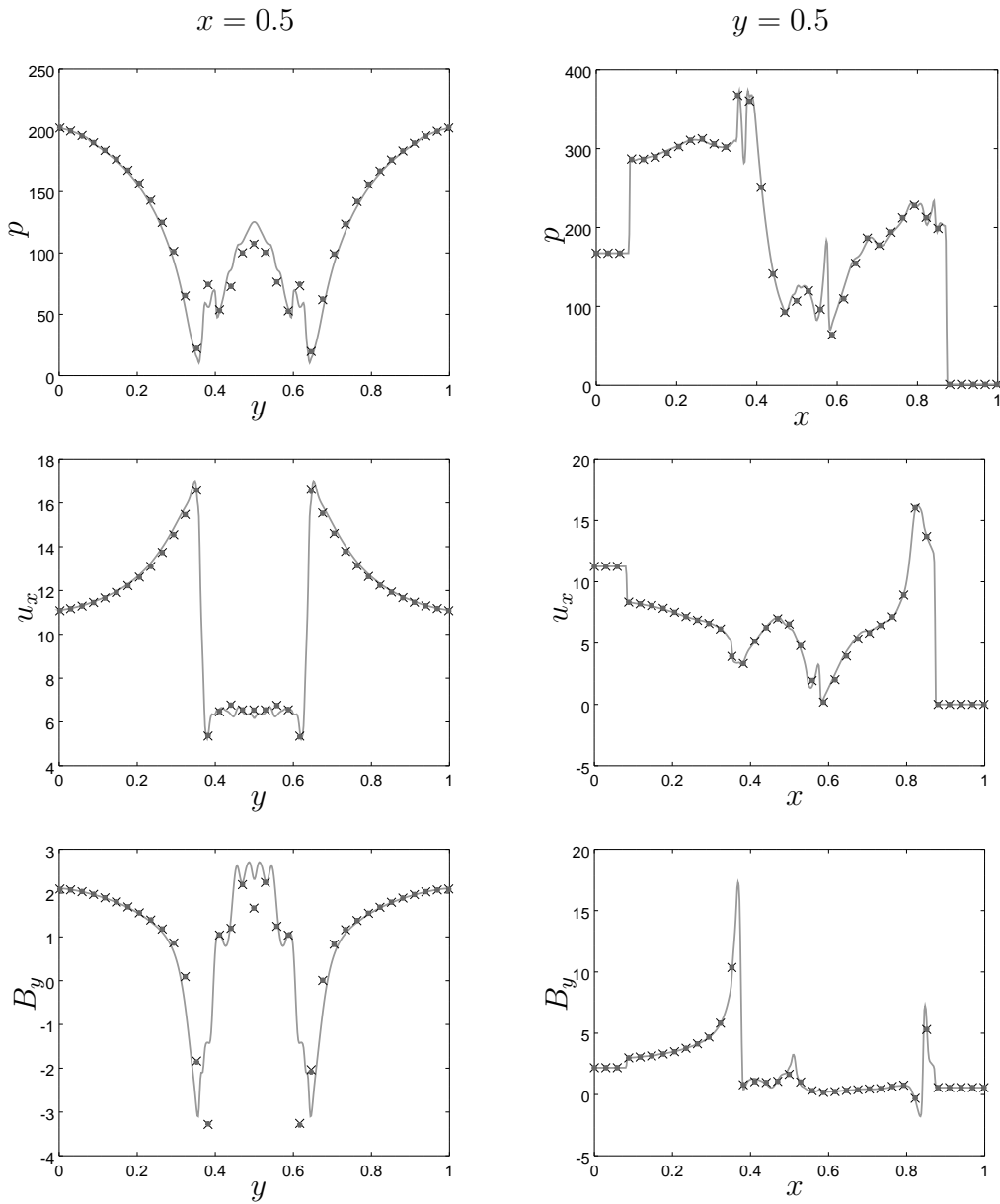
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.36 - Variáveis p , B_x e B_y (de cima para baixo) obtidas no tempo $t = 0.06$ e nível $L = 9$ com o modelo MHD ideal para o problema da nuvem magnética com os códigos CARMEN-MHD MR com $\epsilon_0 = 0.01$ e FLASH.



Fonte: Produção do autor.

Figura 6.37 - Cortes nas variáveis p , u_x , e B_y (de cima para baixo) obtidas com o modelo MHD ideal para o problema da nuvem magnética, em $t = 0.06$ e $L = 9$, com a solução de referência (linha) e a solução do código CARMEN-MHD para $\epsilon_0 = 0.01$ (cruz), $\epsilon = 0.003$ (ponto), em $x = 0.5$ e $y = 0.5$.



Fonte: Produção do autor.

Tabela 6.11 - Erros obtidos com as simulações do problema da nuvem magnética ideal, com MR ($\epsilon^0 = 0.01$) e VF no código CARMEN–MHD, comparados com a solução de referência, em duas dimensões para $L = 9$.

Código	Variáveis	Erros		
		$\mathcal{L}^1(\times 10^{-1})$	$\mathcal{L}^2(\times 10^{-1})$	$\mathcal{L}^\infty(\times 10^1)$
CARMEN–MHD				
Malha uniforme	ρ	1.543	11.55	3.653
	p	22.48	66.72	17.15
	u_x	0.883	3.051	0.772
	u_y	0.895	2.980	0.405
	u_z	0.110	5.684	0.371
	B_x	1.254	5.760	1.534
	B_y	1.140	4.589	0.928
	B_z	0.391	1.509	0.432
MR	ρ	1.539	11.60	3.557
	p	22.39	66.34	17.26
	u_x	0.878	3.028	0.778
	u_y	0.893	2.978	0.415
	u_z	0.110	5.835	0.363
	B_x	1.246	5.710	1.514
	B_y	1.134	4.603	0.974
	B_z	0.390	1.511	0.440

6.3.2 Caso tridimensional

No caso tridimensional, a nuvem é representada por uma esfera de centro $(0.25, 0.5, 0.5)$ e raio $r = 0.15$, com $\rho = 10$. A estrutura de problema continua a mesma para as outras variáveis, mas estendida para a direção z .

MHD ideal

Nesta seção, apresentam-se as soluções do problema da nuvem magnética em três dimensões para os níveis $L = 7$ e $L = 8$, com $\epsilon_0 = 0.01$. Nas Figuras 6.39 e 6.40, tem-se as representações gráficas das soluções do modelo MHD ideal para $L = 7$, $\epsilon_0 = 0.01$ e $t = 0.06$, obtidas com os códigos CARMEN–MHD e FLASH. Fixando os mesmos limites superiores e inferiores para o gráfico de ambas as soluções, obtém-se uma visualização mutuamente coerente, sendo possível observar as similaridades e diferenças entre os casos apresentados. As estruturas das soluções adaptativa são coerentes com as estruturas esperadas, de acordo com a solução de referência obtida com o código FLASH.

Os erros de aproximação são apresentados na Tabela 6.12. Embora o erro máximo \mathcal{L}^∞ assuma valores elevados, o erro \mathcal{L}^1 se mantém na ordem de 10^{-3} a 10^{-4} para o caso adaptativo e volumes finitos. Novamente, a pressão acumula o erro das outras variáveis, e o seu erro absoluto se destaca em relação aos outros, pois assume valores da ordem de 10^{-2} . Comparando com o caso bidimensional, os valores associados aos erros têm um decaimento da ordem de 10^{-2} para \mathcal{L}^1 e \mathcal{L}^∞ . Isso pode acontecer devido à dimensão z , que faz com que o problema apresente, de forma global, mais comportamentos suaves do que o caso bidimensional, que apresenta estruturas complexas ao longo de todo o domínio.

A malha da simulação para $\epsilon_0 = 0.01$ é apresentada na Figura 6.38, decomposta em função dos planos xy , yz e zx . Para a obtenção dessas representações, considera-se alguns intervalos do domínio computacional. Para o plano xy , coletam-se os valores da malha pertencentes ao intervalo $[0.45, 0.55]$ no eixo z ; para o plano yz , os valores são limitados em x pelo mesmo intervalo; analogamente, os valores da malha limitados entre $[0.45, 0.55]$ no eixo y compoem o plano zx . Dessa forma, fica mais clara a visualização da adaptatividade local de uma malha tridimensional.

Essa simulação demanda 58% das células ao longo do tempo, em comparação com uma malha cheia, causando uma redução de 34% no tempo de CPU da simulação. Com o intuito de aumentar a economia de tempo e memória, o código também é rodado para $\epsilon_0 = 0.05$ e $\epsilon_0 = 0.02$. O primeiro caso se tornou instável, pois a quantidade de células necessárias para completar a simulação não é atingida, levando a instabilidades numéricas. O segundo caso rodou completamente, sem problemas. No entanto, a melhora de tempo foi de menos de 1%.

Nesse ponto, inicia-se uma nova discussão sobre a influência do nível de refinamento no percentual de células necessárias para a simulação e, conseqüentemente, para a economia de tempo. Para investigar o impacto de uma malha mais refinada nesse contexto, apresenta-se a simulação tridimensional da nuvem e choque com $\epsilon_0 = 0.01$ um nível acima, ou seja, no nível $L = 8$.

A visualização da solução no nível $L = 8$ é apresentada na Figura 6.42, com $t = 0.06$ e $\epsilon_0 = 0.01$. Nesse caso, já não solução de referência com o código FLASH, devido a problemas de excesso de memória com o qual o código não lida. No entanto, a solução obtida apresenta o mesmo tipo de estrutura observada na solução no nível $L = 7$, mas em maior resolução. Para essa simulação, foi necessário 42% das células ao longo do tempo, gerando uma economia de 54% de tempo de CPU, ao comparado com o caso uniforme. As malhas nos planos xy , yz e zx obtidas no intervalo $[0.45, 0.55]$ no

eixos z , x e y , respectivamente, estão na Figura 6.41.

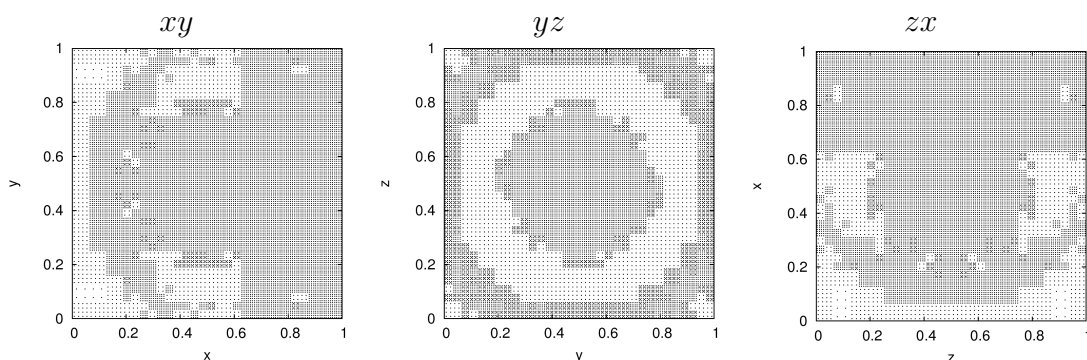
Conclusões parciais

Para as simulações tridimensionais apresentadas não há instabilidades numéricas, sendo possível obter a solução numérica no tempo final desejado sem problemas. A estabilidade do esquema numérico é mantida ao modelar a explosão em três dimensões, representando as descontinuidades intrínsecas do problema.

A solução adaptativa obtida com o código CARMEN-MHD é adequada com o resultado esperado, sendo coerente em sua representação física. Os resultados no nível $L = 7$ são comparados com a solução de referência do código FLASH. Pode-se observar que as estruturas na solução foram representadas de forma adequada na abordagem adaptativa.

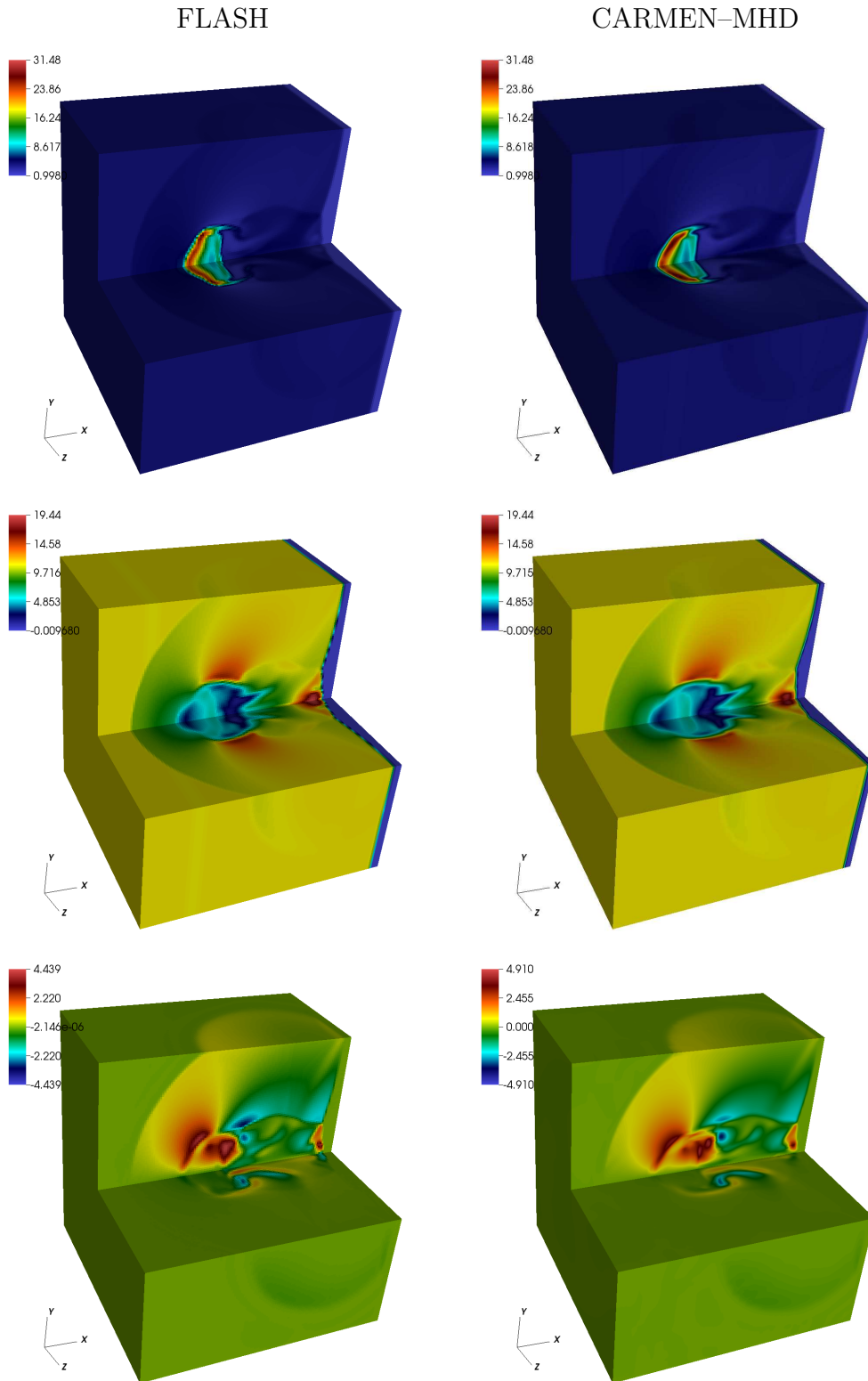
Com os resultados apresentados, conclui-se que, utilizando o mesmo parâmetro de truncamento, há uma melhora na redução do número de células da simulação à medida que o nível de refinamento máximo é aumentado, implicando em uma redução no tempo de CPU.

Figura 6.38 - Malhas no plano xy , yz e zx para o problema da nuvem magnética em três dimensões, com $L = 7$, $\epsilon_0 = 0.01$ e $t = 0.06$, obtidas com o modelo MHD ideal.



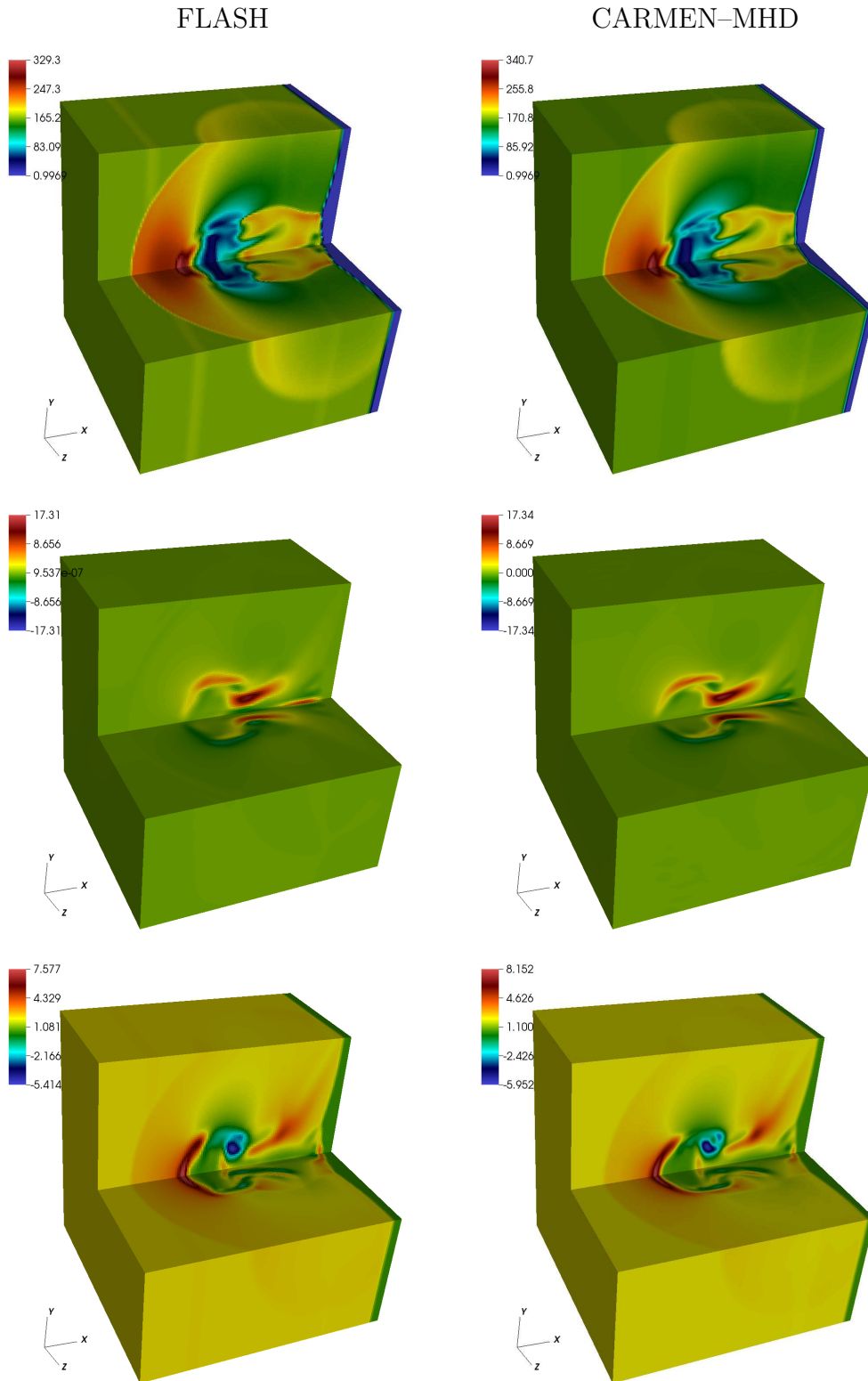
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.39 - Variáveis ρ , u_x e u_y (de cima para baixo) obtidas no tempo $t = 0.06$ e nível $L = 7$ com o modelo MHD ideal para o problema da nuvem magnética 3D com os códigos CARMEN-MHD, com $\epsilon_0 = 0.01$, e FLASH.



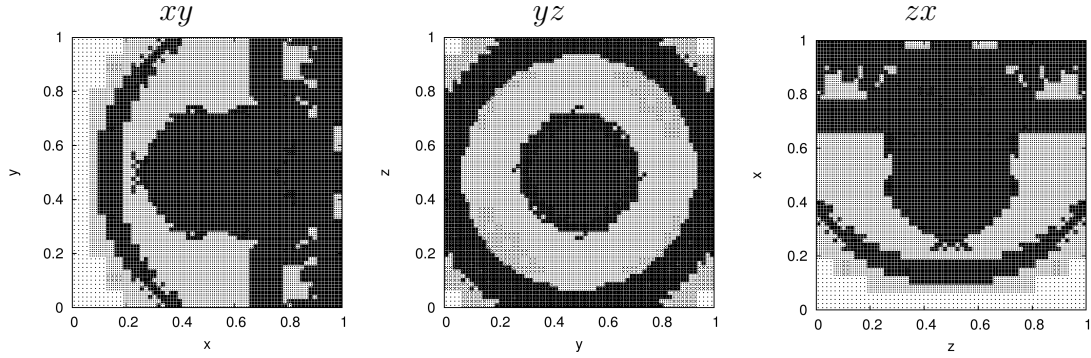
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.40 - Variáveis p , B_x e B_y (de cima para baixo) obtidas no tempo $t = 0.06$ e nível $L = 7$ com o modelo MHD ideal para o problema da nuvem magnética 3D com os códigos CARMEN-MHD, com $\epsilon_0 = 0.01$, e FLASH.



Fonte: Produção do autor.

Figura 6.41 - Malhas no plano xy , yz e zx para o problema da nuvem magnética em três dimensões, com $L = 8$, $\epsilon_0 = 0.01$ e $t = 0.06$, obtidas com o modelo MHD ideal.

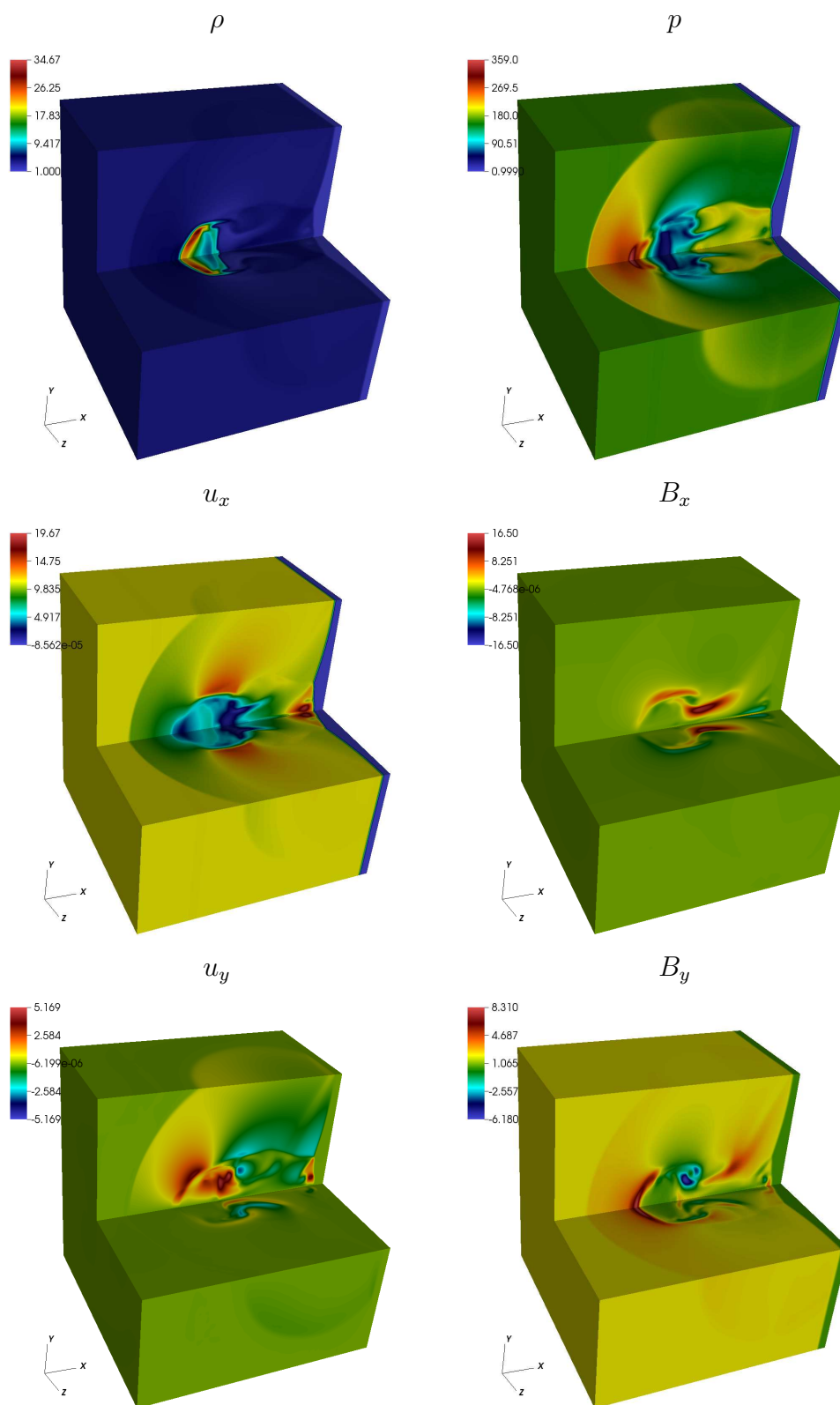


Fonte: Produção do autor

Tabela 6.12 - Erros obtidos com as simulações do problema da nuvem magnética ideal, com MR ($\epsilon^0 = 0.01$) e VF no código CARMEN-MHD, comparados com a solução de referência, em três dimensões com $L = 7$.

Código	Variáveis	Erros			
		$\mathcal{L}^1(\times 10^{-4})$	$\mathcal{L}^2(\times 10^{-3})$	\mathcal{L}^∞	
CARMEN-MHD	ρ	1.431	4.798	23.69	
	p	73.51	289.3	99.02	
	Malha uniforme	u_x	3.007	18.30	5.790
		u_y	0.234	0.654	3.863
		u_z	0.469	1.185	4.727
	B_x	0.691	1.482	8.109	
	B_y	0.813	2.694	3.359	
	B_z	1.320	3.966	3.795	
MR	ρ	1.460	4.818	23.69	
	p	75.74	291.2	99.02	
	u_x	3.073	18.31	5.789	
	u_y	0.304	0.834	3.861	
	u_z	0.537	1.448	4.722	
	B_x	0.703	1.525	8.109	
	B_y	0.849	2.707	3.359	
	B_z	1.376	4.089	3.795	

Figura 6.42 - Variáveis ρ , p , u_x , u_y , B_x e B_y obtidas no tempo $t = 0.06$ e nível $L = 8$ com o modelo MHD ideal para o problema da nuvem e choque com o código CARMEN-MHD com $\epsilon_0 = 0.01$.



Fonte: Produção do autor

MHD resistivo

Para simular o caso resistivo, adiciona-se uma resistividade constante ao domínio computacional, dada por $\eta = 0.02$. Com o código CARMEN–MHD são obtidas simulações para os níveis $L = 6$ e 7 . No entanto, com o código FLASH apenas é viável obter simulações no nível $L = 6$, para fins comparativos. Para a simulação no nível $L = 7$ ou acima, a simulação torna-se dispendiosa, além de apresentar interrupções, impossibilitando a obtenção da solução numérica. Com isso, são apresentados e comparados os resultados obtidos com os códigos CARMEN–MHD e FLASH para o nível $L = 6$ ($64 \times 64 \times 64$).

Nas Figuras 6.43 e 6.44, são apresentadas as visualizações das variáveis MHD obtidas com os códigos CARMEN–MHD e FLASH. Pode-se observar que para o nível de refinamento $L = 6$ as estruturas são menos acentuadas, devido à quantidade de células. Além disso, o efeito dissipativo adicionado com a resistividade contribui para esse comportamento.

Há uma visível similaridade entre as soluções para todas as variáveis. A topologia intrínseca desse tipo de fenômeno é mantida. Na variável B_x , apresentada na Figura 6.44, é possível notar uma estrutura diferenciada no centro do domínio computacional para a simulação com o código FLASH. Esse tipo de comportamento pode ser proveniente da escolha do esquema numérico.

A simulação adaptativa necessita de 76% das células e não há ganho em tempo de CPU. Em alguns casos, o custo computacional do cálculo da solução numérica adaptativa, quando há um número de células próximo à malha uniforme, é mais alto do que o custo computacional da evolução da solução numérica em uma malha uniforme em si.

Para avaliar a proximidade das soluções, na Tabela 6.13 são apresentados os erros \mathcal{L}^1 , \mathcal{L}^2 e \mathcal{L}^∞ para essa simulação. As soluções obtidas com o código CARMEN–MHD para malhas adaptativa e uniforme se aproximam da solução de referência, apresentando erro da ordem de 10^{-4} e 10^{-3} para \mathcal{L}^1 e \mathcal{L}^2 , respectivamente. Pode-se observar que o erro \mathcal{L}^∞ é igual para os casos uniforme e MR. Isso pode ocorrer devido ao baixo refinamento da malha, que torna as estruturas da solução mais suaves.

Na Figura 6.45 são apresentadas as variáveis ρ , p , u_x , u_y , B_x e B_y obtidas com o código CARMEN–MHD para o nível $L = 7$. Essa simulação utiliza 55% das células e gera uma economia de 35% no tempo de CPU. Mais uma vez é observado que o

aumento do refinamento da simulação contribui para uma malha melhor adaptada ao problema e um maior ganho de CPU.

Conclusões parciais

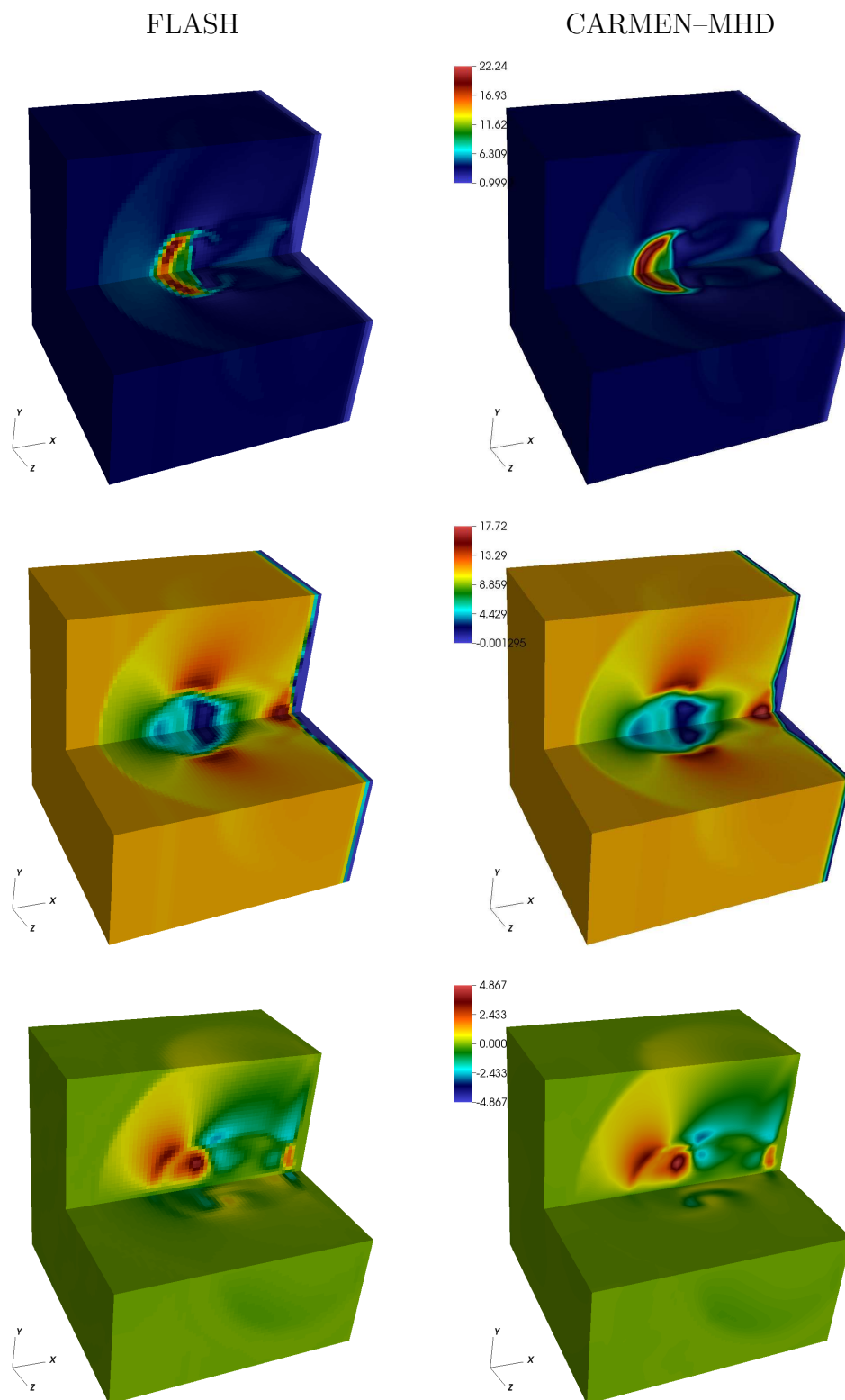
As soluções do problema tridimensional resistivo para $L = 6$ são obtidas e comparadas. As topologias nas soluções são similares e apresentam estruturas difusas. A solução adaptativa é obtida com 76% das células necessárias para a simulação e não há ganho de CPU. Isso ocorre devido à baixa resolução do problema. Quantitativamente, os resultados se mantêm próximos, indicando que existem uma coerência entre eles.

Os resultados obtidos para o nível $L = 7$ apresenta as mesmas estruturas do nível inferior, porém melhor representadas. Neste caso, há uma porcentagem menor de células utilizadas na simulação e uma melhora no ganho de tempo de CPU.

Tabela 6.13 - Erros obtidos com as simulações do problema da nuvem magnética ideal, com MR ($\epsilon^0 = 0.01$) e VF no código CARMEN-MHD, comparados com a solução de referência, em três dimensões.

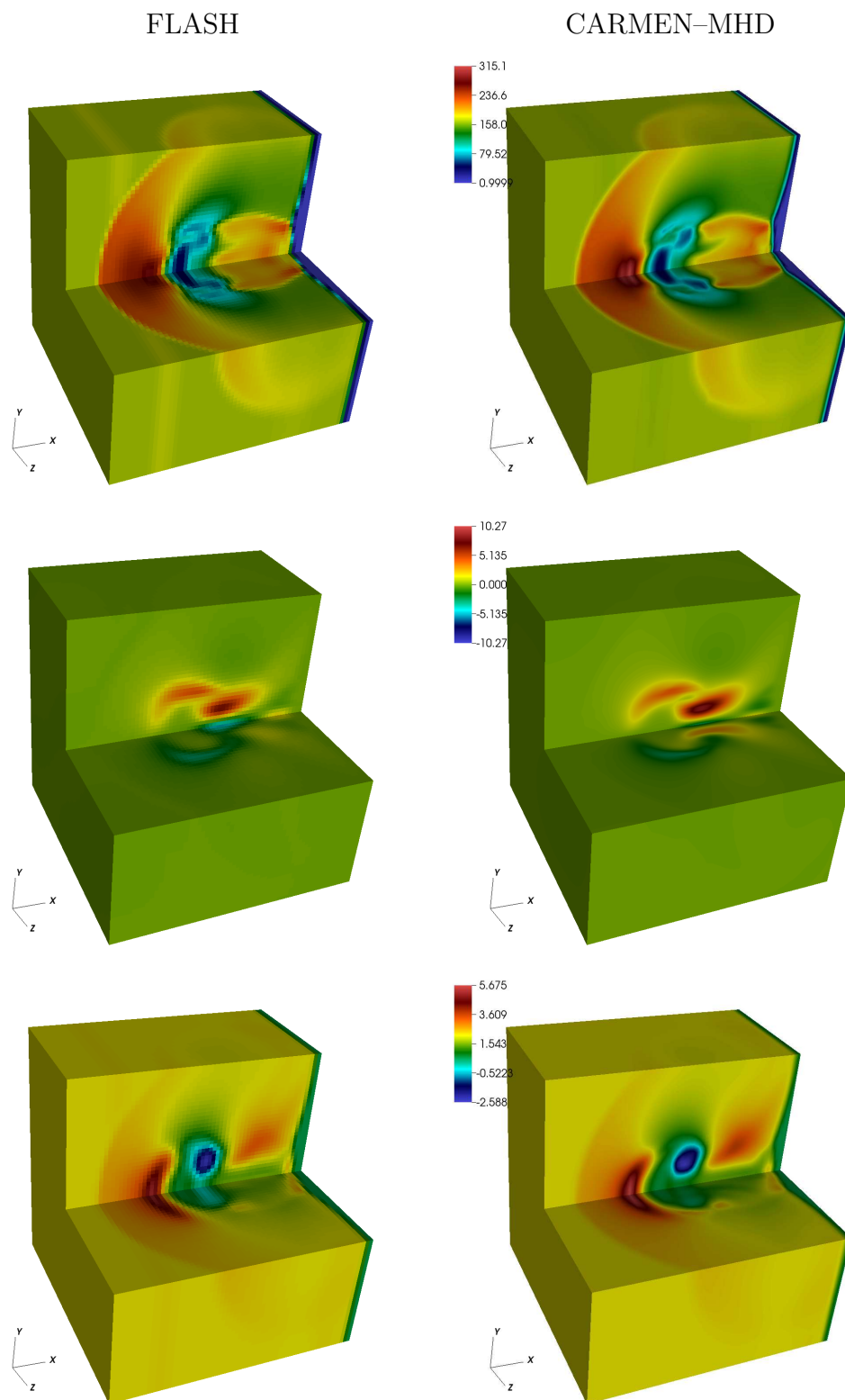
Código	Variáveis	Erros			
		$\mathcal{L}^1(\times 10^{-4})$	$\mathcal{L}^2(\times 10^{-3})$	\mathcal{L}^∞	
CARMEN-MHD	ρ	4.005	5.549	8.239	
	p	207.3	328.8	58.78	
	Malha uniforme	u_x	7.026	20.18	2.450
		u_y	0.779	1.244	2.339
		u_z	1.634	2.285	2.626
		B_x	1.369	1.860	2.374
		B_y	2.127	3.322	1.134
		B_z	2.139	3.234	1.012
MR		ρ	4.027	5.558	8.239
	p	208.9	329.7	58.78	
	u_x	7.048	20.18	2.450	
	u_y	0.813	1.324	2.339	
	u_z	1.666	2.417	2.626	
	B_x	1.363	1.852	2.374	
	B_y	2.134	3.321	1.134	
	B_z	2.138	3.230	1.012	

Figura 6.43 - Variáveis ρ , u_x e u_y (de cima para baixo) obtidas no tempo $t = 0.06$ e nível $L = 6$ com o modelo MHD resistivo para o problema da nuvem magnética com os códigos CARMEN-MHD MR com $\epsilon_0 = 0.01$ e FLASH.



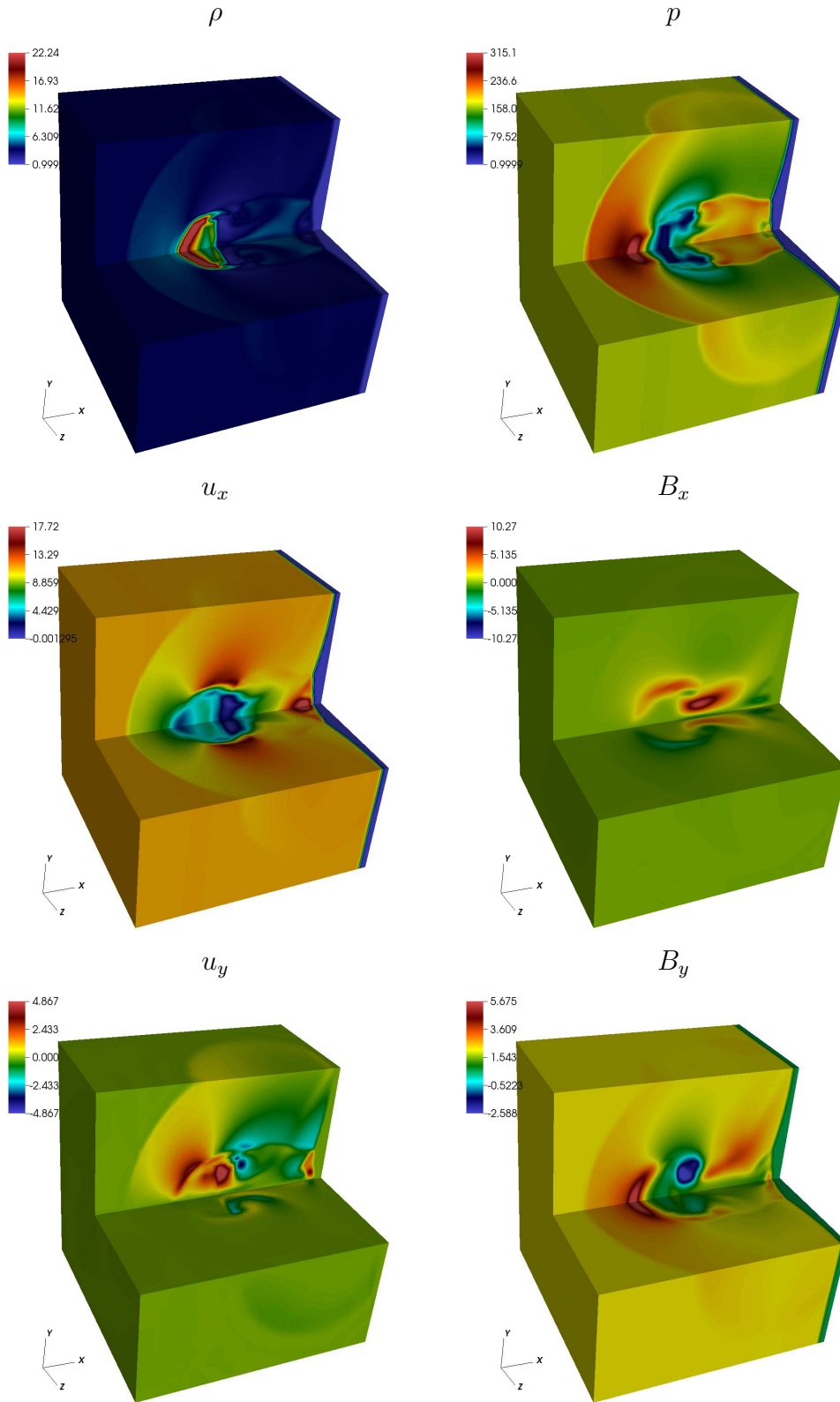
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.44 - Variáveis p , B_x e B_y (de cima para baixo) obtidas no tempo $t = 0.06$ e nível $L = 6$ com o modelo MHD resistivo para o problema da nuvem magnética com os códigos CARMEN-MHD MR com $\epsilon_0 = 0.01$ e FLASH.



Fonte: Produção do autor.

Figura 6.45 - Variáveis ρ , p , u_x , u_y , B_x e B_y obtidas no tempo $t = 0.06$ e nível $L = 7$ com o modelo MHD resistivo para o problema da nuvem e choque com o código CARMEN-MHD com $\epsilon_0 = 0.03$.



Fonte: Produção do autor

6.4 Reconexão magnética

No Capítulo 2 é discutida a não-conservação de fluxo magnético que ocorre quando efeitos resistivos são adicionados ao sistema MHD. Esse tipo de situação física permite com que a topologia das linhas de campo magnético seja modificada. Com isso, pode-se simular fenômenos nos quais ocorrem a reconexão das linhas de campo magnético. A reconexão magnética, é um processo fundamental em plasmas altamente condutores, e foi introduzida no início dos anos 50 como um processo central que permite a conversão de energia magnética em energia cinética.

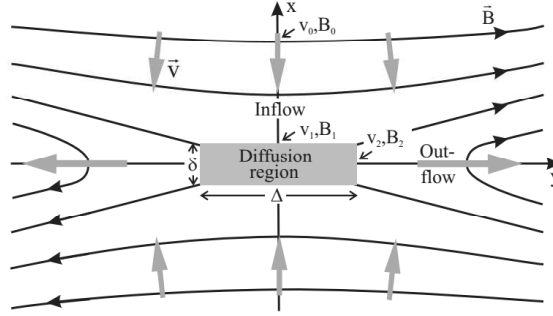
No contexto dos fenômenos espaciais e astrofísicos, o processo de reconexão magnética ocorre quando as linhas de campo magnético se conectam e, em seguida, se separam, mudando de direção e reestruturando as quantidades macroscópicas do plasma, como o fluxo e energia térmica. A reconexão é, ao mesmo tempo, um fenômeno local e global. A resistividade localizada pode gerar efeitos globais no domínio de interesse. Com isso, o campo magnético tem uma topologia antes e depois do fenômeno, ou seja, uma certa configuração espacial correspondendo a uma certa densidade de energia que é transferida para as partículas durante o processo.

Em um fluido resistivo, o número de Lundquist mede a importância da resistividade em um meio. Esse valor é denotado por \mathcal{S} e definido por

$$S = \frac{c_A L}{\eta}, \quad (6.1)$$

em que c_A é a velocidade de Alfvén, L é a escala global e η é a resistividade. Para valores altos de \mathcal{S} , que são comuns em plasmas espaciais ou astrofísicos, há uma correspondência com efeitos resistivos pequenos. Na Figura 6.46, é apresentada uma ilustração do processo de reconexão magnética em duas dimensões. Uma região de difusão é definida com dimensão $\delta \times \Delta$, com δ e Δ as variações em x e y , na qual o valor da resistividade é não-nulo e ocorre o processo de reconexão das linhas de campo magnético. Nessa configuração, as linhas de campo magnético possuem direções opostas. A velocidade inicialmente aponta na direção da região de difusão (inflow) e, durante o processo, assume outra direção e sentido baseada na localização dessa região.

Figura 6.46 - Ilustração do processo de reconexão magnética em duas dimensões.



Fonte: https://www.cfa.harvard.edu/scranmer/ITC/eaaa_reconn_schindler.ps

Os modelos mais conhecidos de reconexão são o *Sweet-Parker* (PARKER, 1957) e o *Petscheck* (PETSCHKEK, 1964). A seguir, é feita uma contextualização simplificada desses modelos. No modelo Sweet-Parker, a região de difusão é caracterizada como uma estrutura bem fina em x ($\delta \ll L$) e com extensão da ordem de L em y . Com isso, a taxa de reconexão nessa configuração é dada por $M = \frac{1}{\sqrt{S}}$. Já no modelo Petscheck, a região de difusão é definida como $\delta \times \Delta$, tal que $\Delta \ll L$ e $\Delta > \delta$. Nesse caso, a taxa de reconexão ocorre de forma que $M < \frac{\pi}{8} \frac{1}{\ln(S)}$. Normalmente, essa taxa de reconexão é maior que a do modelo Sweet-Parker. Isso implica que no modelo Petscheck, o processo de reconexão ocorre mais rápido. Neste trabalho, apresentam-se os resultados para o problema da reconexão magnética no contexto de Petscheck.

A condição inicial para o problema da reconexão magnética (JIANG et al., 2012), é dada por $\rho = 1$, $p = 0.1$, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $B_x = 0$ e

$$B_y = \begin{cases} -1, & \text{se } x < -0.05 \\ \sin(\pi x/0.01), & \text{se } |x| \leq 0.05 \\ 1, & \text{se } x > 0.05 \end{cases} \quad (6.2)$$

Na região de difusão $[-0.05, 0.05] \times [0.2, 0.2]$, a resistividade é definida por

$$\eta = 0.25 \eta_0 (\cos(\pi x/0.1) + 1) (\cos(\pi y/0.4) + 1), \quad (6.3)$$

em que $\eta_0 = 0.00075$ é a resistividade inicial. O domínio computacional é dado por $\Omega = [-0.5, 0.5] \times [-2, 2]$ e os parâmetros de simulação são o tempo final $t = 2.5$,

$\alpha_p = 0.4$, número de Courant $\nu = 0.4$, parâmetro de truncamento $\epsilon = 0.0005$, nível de refinamento $L = 9$ e constante adiabática $\gamma = 5/3$.

Para esse problema não é obtida uma solução com o código FLASH, pois não é possível realizar simulações numéricas com a resistividade variando no espaço. O código FLASH utiliza apenas valores constantes no domínio computacional. Sendo assim, os resultados obtidos com o código CARMEN–MHD são apresentados e discutidos juntamente com os resultados originais presentes no artigo em que essa condição inicial é proposta (JIANG et al., 2012). Alguns parâmetros da simulação, como o valor η_0 , não são informados pelo autor. Com isso, após alguns testes e análises, esses valores são aproximados. É importante ressaltar que os resultados obtidos no artigo são obtidos para uma malha 2048×4096 , enquanto os resultados do CARMEN–MHD utiliza uma malha 512×512 . Dessa forma, podem existir estruturas diferentes entre os dois resultados. O objetivo dos resultados apresentados é avaliar o comportamento da solução do problema dentro do que é discutido pelo autor.

Na Figura 6.49 é apresentada a variável pressão, juntamente com as linhas de campo magnético, exibida em Jiang et al (esquerda) e obtida com o código CARMEN–MHD (direita). As duas soluções apresentam os mesmos valores máximo e mínimo para a escala de cores. Pode-se observar que existe uma região central bem representada, com simetria em relação ao eixo y . Em ambos os casos, essa estrutura se encontra bem representada, com contornos acentuados e bem definidos. Outras estruturas mais suaves, como nas fronteiras horizontais em $x = -0.5$ e $x = 0.5$, também ocorrem em ambos os casos. Na figura do artigo, existem algumas estruturas não presentes na solução do código CARMEN–MHD, devido à sua alta resolução.

Os cortes na solução em $y = 0.5$ são apresentados para as variáveis ρ , u_y , p e $B^2/2$ (pressão magnética) na Figura 6.48, para o intervalo $[-0.2, 0, 2]$. O comportamento dos cortes é semelhante para as duas soluções, no entanto há algumas diferenças que podem ser provenientes da alta resolução ou dos esquemas numéricos escolhidos. A variável densidade, apresenta valores mais elevados ao comparada com o resultado do artigo e uma estrutura acentuada no centro do domínio. No geral, o cortes do solução obtida com o código CARMEN–MHD apresenta estruturas coerentes com o resultado do artigo.

As variáveis MHD obtidas com o código CARMEN MHD são apresentadas na Figura 6.47. A estrutura central do problema ocorre em todas as variáveis do modelo, bem representadas e definidas dentro do domínio. A simulação numérica no tempo final é obtida sem instabilidades ou oscilações numéricas na solução. Também é si-

mulado o caso com $\epsilon = 0.008$, o qual roda até o final, mas o valor do parâmetro de truncamento não é necessário para representar as estruturas do problema.

Com a abordagem adaptativa, necessita-se de 55% das células para a simulação, implicando em uma economia de 40% de tempo de CPU. Para simulações em maior resolução, é possível que haja uma melhora nesses valores.

A variável \mathcal{E} é apresentada juntamente com o campo de velocidade e a malha adaptativa na Figura 6.50. Pode-se observar que a malha adaptativa concentra o maior número de células na parte central do domínio, que é onde existem as maiores descontinuidades do problema, sendo eficaz na representação das estruturas existentes. Além disso, analisando os vetores do campo de velocidade, pode-se observar que a sua estrutura se assemelha ao processo de reconexão magnética ilustrado na Figura 6.46, em que a velocidade se direciona no sentido da região de reconexão e muda a sua orientação.

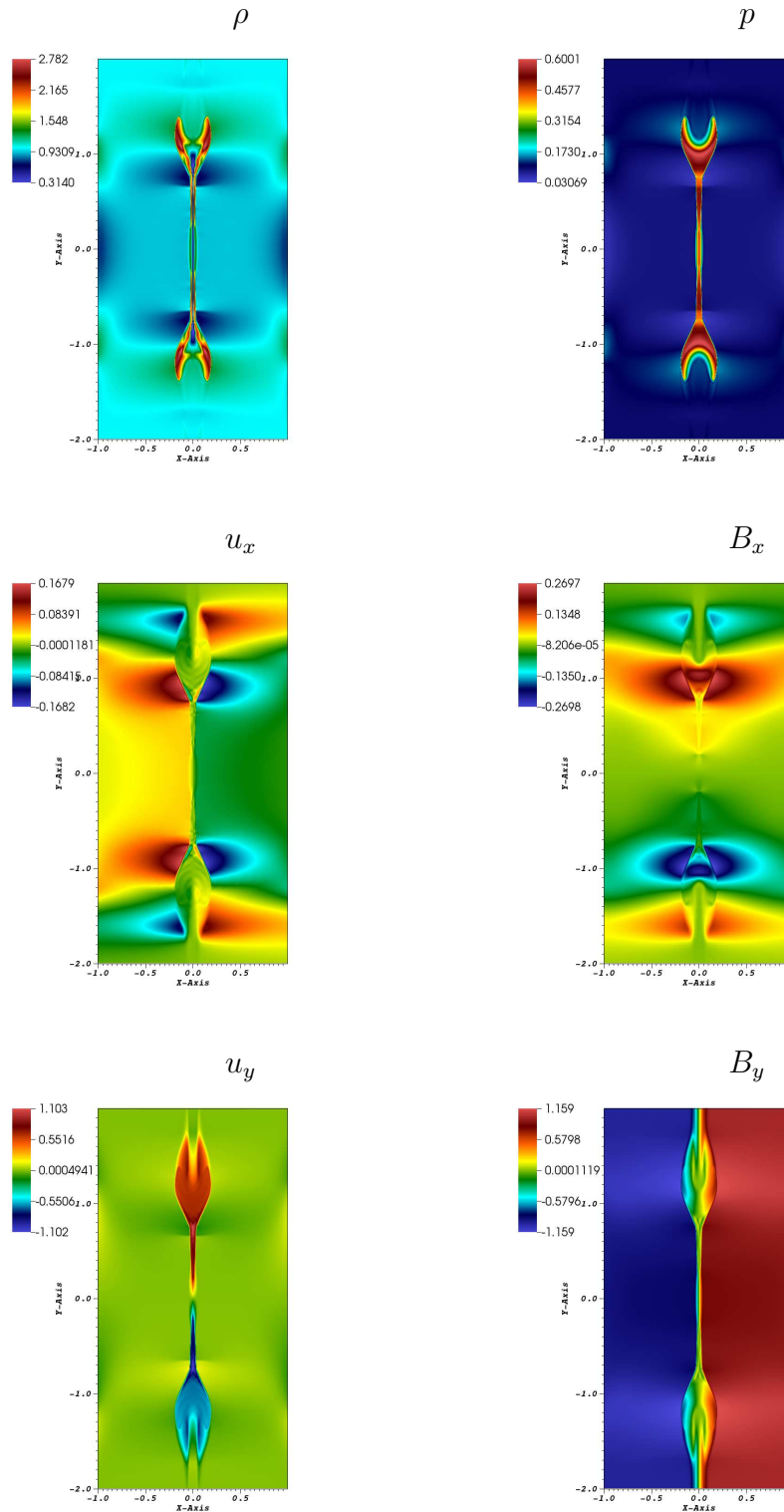
Conclusões parciais

O problema da reconexão magnética é comparado com os resultados obtidos em Jiang et al 2012, verificando o comportamento da solução em todo o domínio e localmente a partir de cortes na solução. É importante ressaltar que alguns dados não foram disponibilizados pelo autor em seu artigo, levando a dificuldades para a reprodução do problema proposto. Dados como a resistividade η_0 e os locais de corte das variáveis foram obtidos a partir de estudos desses valores, permitindo a aproximação e comparação dos resultados obtidos. Além disso, a alta resolução apresentada no artigo limitou algumas comparações que poderiam ser feitas.

As estruturas presentes na solução do código CARMEN–MHD são coerentes com os resultados apresentados em (JIANG et al., 2012). Os perfis das variáveis têm comportamentos próximos aos esperados, sugerindo que os resultados locais são coerentes entre si e a física do problema é mantida. A estrutura da solução é coerente com o processo de reconexão descrito, juntamente com o comportamento dos campos de vetores obtidos.

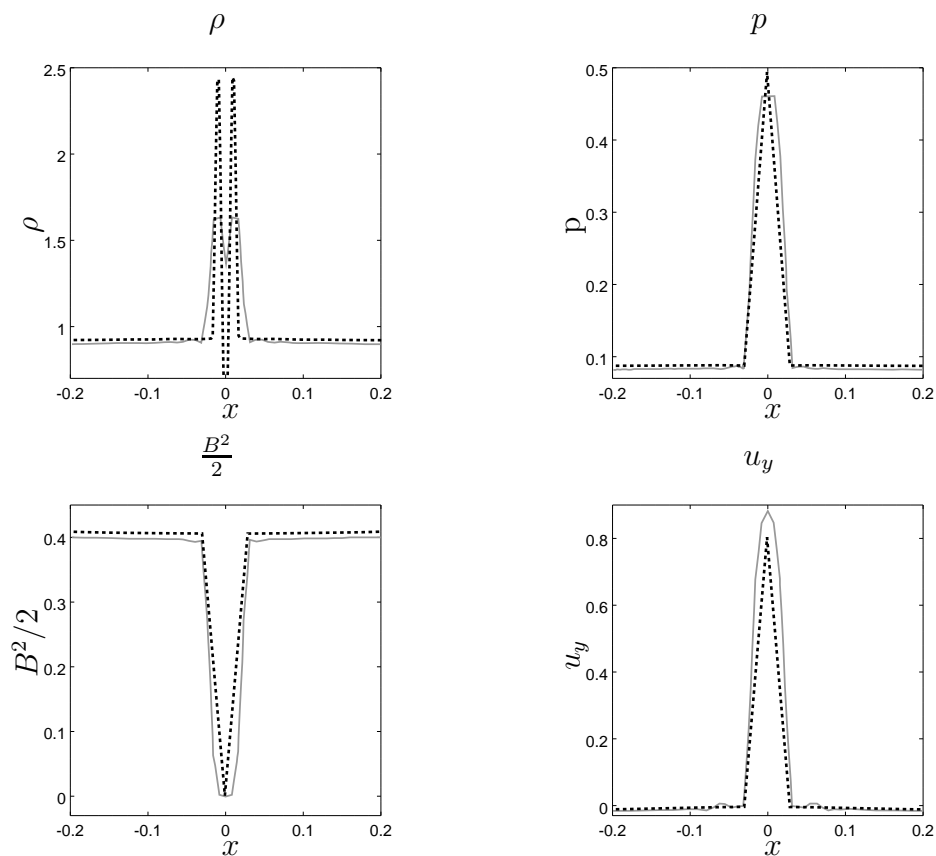
A malha da simulação se adapta à solução, concentrando a maior parte das células na estrutura central do domínio, onde ocorre as maiores variações. No entanto, estruturas menores e mais próximas à fronteira, também apresentadas na figura em (JIANG et al., 2012), são capturadas e localizadas de forma adequada com a malha adaptativa.

Figura 6.47 - Variáveis ρ , p , u_x , u_y , B_x e B_y obtidas no tempo $t = 2.5$ e nível $L = 9$ com o modelo MHD resistivo para a reconexão magnética com o código CARMEN-MHD com $\epsilon_0 = 0.005$.



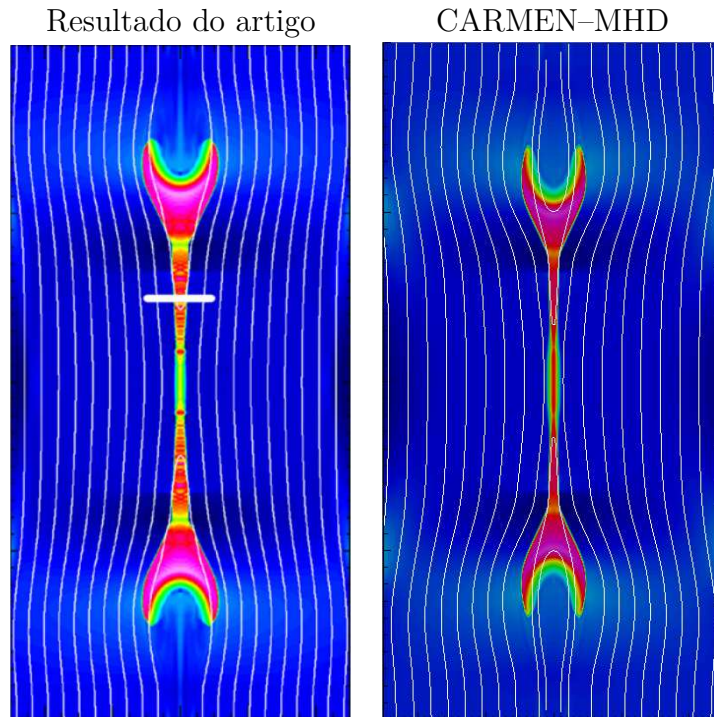
Fonte: Produção do autor

Figura 6.48 - Variáveis ρ , p e v_x , e a pressão magnética $B^2/2$, obtidas para o problema da reconexão magnética, no tempo $t = 2.5$, para o resultado do artigo (linha) e com o código CARMEN-MHD com $\epsilon_0 = 0.005$ (tracejado).



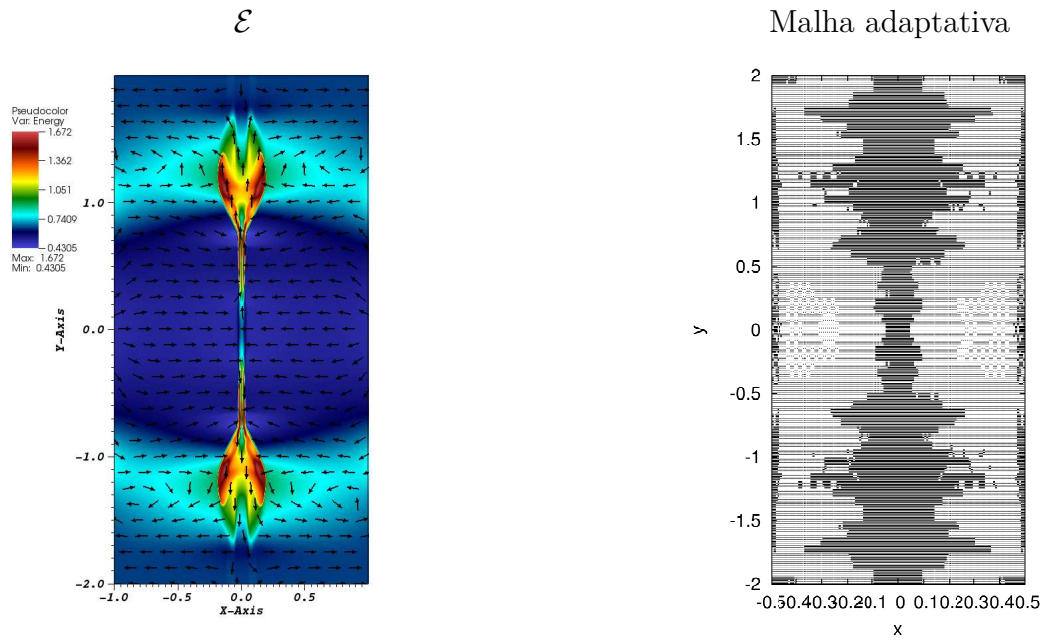
Fonte: Produção do autor

Figura 6.49 - Variável p e linhas de campo magnético, obtidas para o problema da reconexão magnética, no tempo $t = 2.5$, para o resultado do artigo e o com o código CARMEN-MHD com $\epsilon_0 = 0.005$.



Fonte: Produção do autor

Figura 6.50 - Variável \mathcal{E} e campo de velocidade com a respectiva malha adaptativa da simulação obtidas no tempo $t = 2.5$ e nível $L = 9$ com o modelo MHD resistivo para a reconexão magnética com o código CARMEN-MHD com $\epsilon_0 = 0.005$.



Fonte: Produção do autor

7 CONCLUSÕES

Ao longo deste trabalho são apresentadas a abordagem teórica MHD desenvolvidas e ferramentas numéricas utilizadas para a sua simulação numérica. Utilizando uma discretização por volumes finitos, o código CARMEN–MHD possibilita a simulação numérica MHD adaptativa de um novo ponto de vista: a análise de multirresolução adaptativa. Esse tipo de metodologia é recente do contexto de MHD e tem um grande potencial de localização de estruturas na solução e de ganhos computacionais.

As simulações são rodadas com o código CARMEN–MHD com o objetivo de verificação das implementações e dos resultados obtidos, utilizando como referência resultados obtidos com um código verificado e conhecido na área. Os problemas estudados são escolhidos de forma a abranger uma variedade diferente de situações físicas e de complexidades, de forma a garantir o funcionamento do código de forma coerente e eficiente na captura da topologia intrínseca de cada situação. São realizadas discussões acerca dos resultados e comparações qualitativas e quantitativas com soluções de referência, a fim de avaliar a coerência das soluções numéricas obtidas e a suas convergências para os resultados esperados.

Os resultados obtidos mostram-se coerentes tanto na abordagem adaptativa quanto na abordagem uniforme. As restrições físicas do modelo MHD são respeitadas do ponto de vista numérico, contribuindo para a manutenção da física dos problemas simulados e sua reprodução adequada.

As estruturas presentes na solução do modelo MHD são localizadas em diferentes regiões em cada variável, pois não ocorrem necessariamente no mesmo local. Esse tipo de situação é complicada do ponto de vista de adaptabilidade, pois a malha deve ser escolhida de forma a contemplar todas essas estruturas. O critério de adaptabilidade utilizado para a solução numérica do modelo MHD mostra-se eficaz na avaliação das estruturas presentes nas soluções, mesmo em casos onde existem estruturas em todo o domínio computacional. Além disso, a estabilidade da simulação numérica é garantida.

É observado que há a possibilidade de obter uma adaptabilidade ótima de malha, a partir de uma avaliação do valor do parâmetro de truncamento escolhido e dos erros obtidos na aproximação. Além disso, à medida que o nível máximo de refinamento é aumentado, as estruturas locais da solução se tornam mais acentuadas e, assim, são melhor adaptadas, diminuindo a proporção do número de células necessárias ao longo da simulação com relação à malha uniforme e, conseqüentemente, aumentando

o ganho de tempo de CPU. Demonstra-se que há possibilidades de ganhos computacionais significantes com a utilização da MR adaptativa, mesmo em simulações não paralelas. Com isso, a abordagem MR é eficiente do ponto de vista computacional dos problemas MHD propostos.

Pela primeira vez a multirresolução adaptativa no contexto MHD é avaliada com o modelo resistivo e em três dimensões. Ao longo deste trabalho, verifica-se o seu potencial de uso, mostrando a sua eficiência na representação de estruturas localizadas e a coerência física da solução obtida. Conclui-se que o desafio de adaptar os modelos MHD ideal e resistivo em duas e três dimensões, juntamente com os esquemas numéricos necessários, foi bem sucedido, produzindo o código CARMEN–MHD verificado e documentado como um produto desse trabalho e facilitando simulações numéricas eficientes e de qualidade.

Trabalhos futuros

A partir da contribuição deste trabalho, alguns tópicos que podem ser derivados em trabalhos futuros são

- Verificação do modelo MHD resistivo em três dimensões com malhas com maior resolução.
- Implementação de uma entrada de dados reais para o código CARMEN–MHD.
- Utilização de uma abordagem paralela, a fim de diminuir o tempo de simulação.
- Validação do código a partir da comparação com eventos reais.
- Implementação de métodos numéricos de alta ordem.

Este código CARMEN–MHD verificado possui uma grande usabilidade, é uma ferramenta útil para validações MHD e comparações de adaptatividade, contando com um manual de documentação (GOMES,) e disponibilização online do código¹ e da documentação². Ao longo do desenvolvimento deste trabalho foram submetidos trabalhos para eventos científicos (GOMES; DOMINGUES, 2013; GOMES et al., 2017c). Também foram aceitos trabalhos em periódicos (DOMINGUES et al., 2013; GOMES et

¹<https://github.com/waveletApplications/carmenMHD>

²<https://waveletapplications.github.io/carmenMHD/>

al., 2015; GOMES et al., 2017a; GOMES et al., 2017b). Já existe um trabalho derivado da contribuição desta tese, que resultou em submissão para periódico (LOPES et al., 2017), em uma versão em bloco usando a adaptabilidade por meio do método de gradiente escalonado no ambiente AMROC para um MHD ideal. Atualmente, um artigo com os resultados finais da tese está em redação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALBADA, G. V.; LEER, B. V.; ROBERTS, W. A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics. In: **Upwind and High-Resolution Schemes**. [S.l.]: Springer, 1997. p. 95–103. 49
- ALFVÉN, H. Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves. **Nature**, v. 150, n. 3805, p. 405–406, 1942. 1, 47
- BALSARA, D. S.; KIM, J. A comparison between divergence-cleaning and staggered-mesh formulations for numerical magnetohydrodynamics. **The Astrophysical Journal**, v. 602, n. 2, p. 1079, 2004. 2
- BALSARA, D. S.; SPICER, D. S. A staggered mesh algorithm using high order godunov fluxes to ensure solenoidal magnetic fields in magnetohydrodynamic simulations. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 149, n. 2, p. 270–292, 1999. 2
- BASTING, M.; KUZMIN, D. An FCT finite element scheme for ideal MHD equations in 1d and 2d. **Journal of Computational Physics**, v. 338, p. 585 – 605, 2017. 21
- BERGER, M. J.; COLELLA, P. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. **Journal of Computational Physics**, v. 82, p. 64–84, maio 1989. 2
- BERGER, M. J.; OLIGER, J. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. **Journal of Computational Physics**, v. 53, n. 3, p. 484–512, 1984. 2, 169
- BIHARI, B. L.; HARTEN, A. Multiresolution schemes for the numerical solution of 2-D conservation laws i. **SIAM Journal on Scientific Computing**, SIAM, v. 18, n. 2, p. 315–354, 1997. 3, 32
- BITTENCOURT, J. **Fundamentals of plasma physics**. 3rd ed.. ed. [S.l.]: Springer-Verlag, New York, 2004. 7
- BRACKBILL, J. U.; BARNES, D. C. Note: The effect of nonzero $\nabla \cdot \mathbf{B}$ on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations. **Journal of Computational Physics**, v. 35, n. 3, p. 426–430, 1980. 41

BRECHT, S.; LYON, J.; FEDDER, J.; HAIN, K. A simulation study of east-west IMF effects on the magnetosphere. **Geophysical Research Letters**, Wiley Online Library, v. 8, n. 4, p. 397–400, 1981. 2

BRECHT, S. H.; LYON, J. G.; FEDDER, J. A.; HAIN, K. A time dependent three-dimensional simulation of the earth's magnetosphere: Reconnection events. **Journal of Geophysical Research: Space Physics**, Wiley Online Library, v. 87, n. A8, p. 6098–6108, 1982. 1

BRIO, M.; WU, C. C. An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. **Journal of computational physics**, Elsevier, v. 75, n. 2, p. 400–422, 1988. 2

BRYAN, G. L.; NORMAN, M. L.; O'SHEA, B. W.; ABEL, T.; WISE, J. H.; TURK, M. J.; REYNOLDS, D. R.; COLLINS, D. C.; WANG, P.; SKILLMAN, S. W.; SMITH, B.; HARKNESS, R. P.; BORDNER, J.; KIM, J. hoon; KUHLEN, M.; XU, H.; GOLDBAUM, N.; HUMMELS, C.; KRITSUK, A. G.; TASKER, E.; SKORY, S.; SIMPSON, C. M.; HAHN, O.; OISHI, J. S.; SO, G. C.; ZHAO, F.; CEN, R.; LI, Y.; COLLABORATION, T. E. Enzo: An adaptive mesh refinement code for astrophysics. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 211, n. 2, p. 19, 2014. 2

CALLEN, J. D. Plasma descriptions II: MHD. In: **Fundamentals of plasma physics**. Madison: University of Wisconsin-Madison: [s.n.], 2003. 8, 13

CHEN, F. **Introduction to plasma physics**. [S.l.]: Springer US, 1974. 1, 7

CHILDS, H.; BRUGGER, E.; WHITLOCK, B.; MEREDITH, J.; AHERN, S.; PUGMIRE, D.; BIAGAS, K.; MILLER, M.; HARRISON, C.; WEBER, G. H.; KRISHNAN, H.; FOGAL, T.; SANDERSON, A.; GARTH, C.; BETHEL, E. W.; CAMP, D.; RÜBEL, O.; DURANT, M.; FAVRE, J. M.; NAVRÁTIL, P. VisIt: An End-User Tool For Visualizing and Analyzing Very Large Data. In: **High Performance Visualization—Enabling Extreme-Scale Scientific Insight**. [S.l.: s.n.], 2012. p. 357–372. 65

COHEN, A. **Numerical analysis of wavelet methods**. Paris: Elsevier, 2003. 3, 21, 35, 61

COHEN, A.; KABER, S. M.; MÜLLER, S.; POSTEL, M. Fully Adaptive Multiresolution Finite Volume Schemes for Conservation Laws. **Mathematics of Computation**, v. 72, n. 241, p. 183–225, 2003. 3

COLELLA, P.; GRAVES, D.; LIGOCKI, T.; MARTIN, D.; MODIANO, D.; SERAFINI, D.; STRAALEN, B. V. **Chombo software package for amr applications-design document**. [S.l.]: unpublished, 2000. 2

COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics. **IBM Journal of Research and Development**, v. 11, n. 2, p. 215–234, march 1967. 26

DAI, W.; WOODWARD, P. R. A simple Riemann solver and high-order Godunov schemes for hyperbolic systems of conservation laws. **Journal of Computational Physics**, v. 121, p. 51–65, 1995. 2

_____. A simple finite difference scheme for multidimensional magnetohydrodynamical equations. **Journal of Computational Physics**, v. 142, n. 2, p. 331–369, 1998. 2, 21, 109

DAVIS, S. F. Simplified second-order Godunov-type methods. **SIAM J. Sci. Statist. Comput.**, v. 9, p. 445, 1988. 51

DEDNER, A.; KEMM, F.; KRÖNER, D.; MUNZ, C.-D.; SCHNITZER, T.; WESENBERG, M. Hyperbolic divergence cleaning for the MHD equations. **Journal of Computational Physics**, v. 175, p. 645–673, 2002. 2, 41, 42, 44, 47

DEITERDING, R.; DOMINGUES, M. O.; GOMES, S. M.; ROUSSEL, O.; SCHNEIDER, K. Adaptive multiresolution or adaptive mesh refinement: A case study for 2D Euler equations. **ESAIM Proceedings**, v. 29, p. 28–42, 2009. 3

DEITERDING, R.; DOMINGUES, M. O.; GOMES, S. M.; SCHNEIDER, K. Comparison of adaptive multiresolution and adaptive mesh refinement applied to simulations of the compressible euler equations. **SIAM Journal on Scientific Computing**, SIAM, v. 38, n. 5, p. S173–S193, 2016. 3, 169

DOMINGUES, M. O.; GOMES, A. K. F.; GOMES, S.; MENDES, O.; PIERRO, B. D.; SCHNEIDER, K. Extended generalized lagrangian multipliers for magnetohydrodynamics using adaptive multiresolution methods. **ESAIM Proceedings**, v. 43, p. 95–107, 2013. 59, 138, 139

DOMINGUES, M. O.; GOMES, S. M.; ROUSSEL, O.; SCHNEIDER, K. An adaptative multiresolution scheme with local time stepping for evolutionary PDEs. **Journal of Computational Physics**, v. 227, p. 3758–3780, 2008. 28

- _____. Space-time adaptive multiresolution methods for hyperbolic conservation laws: Applications to compressible Euler equations. **Applied Numerical Mathematics**, v. 59, p. 2303–2311, 2009. 28
- _____. Adaptive multiresolution methods. **ESAIM Proceedings**, v. 34, p. 1–96, 2011. 3, 21, 27, 34, 35
- EINFELDT, B.; MUNZ, C.-D.; ROE, P. L.; SJÖGREEN, B. On Godunov-type methods near low densities. **Journal of Computational Physics**, v. 92, p. 273, 1991. 51
- EVANGELISTA, E. d. F.; DOMINGUES, M. O.; MENDES, O.; MIRANDA, O. D. A brief study of instabilities in the context of space magnetohydrodynamic simulations. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 38, n. 1, 2016. 94, 102
- EVANS, C. R.; HAWLEY, J. F. Simulation of magnetohydrodynamic flows—a constrained transport method. **The Astrophysical Journal**, v. 332, p. 659–677, 1988. 2
- EYMARD, R.; GALLOUËT, T.; HERBIN, R. Finite volume methods. **Handbook of numerical analysis**, v. 7, p. 713–1018, 2000. 27
- FITZPATRICK, R. **Plasma physics: an introduction**. [S.l.]: Crc Press, 2014. 19
- FRANK, A.; JONES, T. W.; RYU, D.; GAALAAS, J. B. The magnetohydrodynamic Kelvin-Helmholtz instability: A two-dimensional numerical study. **The Astrophysical Journal**, v. 460, p. 777, 1996. 94
- FRYXELL, B.; OLSON, K.; RICKER, P.; TIMMES, F. X.; ZINGALE, M.; LAMB, D. Q.; MACNEICE, P.; ROSNER, R.; TRURAN, J. W.; TUFO, H. FLASH: An Adaptive Mesh Hydrodynamics Code for Modeling Astrophysical Thermonuclear Flashes. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 131, p. 273–334, nov. 2000. 1, 169
- GOEDBLOED, J. P.; POEDTS, S. **Principles of magnetohydrodynamics: with applications to laboratory and astrophysical plasmas**. [S.l.]: Cambridge university press, 2004. 7
- GOMES, A. K. F. **Carmen-MHD Code Manual (version 1.0)**. São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. IBI: <8JMKD3MGP3W34P/3PULLA8>. Disponível em: <<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/11.08.19.04>>. 138

GOMES, A. K. F. **Análise Multirresolução adaptativa no contexto da resolução numérica de um modelo de magnetohidrodinâmica ideal**. 2012. 199 p. IBI: <8JMKD3MGP7W/3CE6FSE>.

(sid.inpe.br/mtc-m19/2012/08.10.15.02-TDI). Dissertação (Mestrado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), São José dos Campos, 2012. Disponível em: <<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3CE6FSE>>. 50, 59, 155

GOMES, A. K. F.; DOMINGUES, M. O. A preliminary study of a MHD model in the adaptive multiresolution context. In: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. [S.l.: s.n.], 2013. v. 1. 138

GOMES, A. K. F.; DOMINGUES, M. O.; MENDES, O. Ideal and resistive magnetohydrodynamic two-dimensional simulation of the kelvin-helmholtz instability in the context of adaptive multiresolution analysis. **TEMA (São Carlos)**, SciELO Brasil, v. 18, n. 2, p. 317–333, 2017. 59, 138, 139

GOMES, A. K. F.; DOMINGUES, M. O.; MENDES, O.; SCHNEIDER, K. On the verification of adaptive three-dimensional multiresolution computations of the magnetohydrodynamic equations. **Journal of Applied Nonlinear Dynamics**, aceito, 2017. 138, 139

_____. A resistive magneto-hydrodynamic numerical model in the context of cell-averaged adaptive multiresolution methods: Verification tests. In: **CSE17 Abstracts**. Atlanta, Georgia: [s.n.], 2017. 138

GOMES, A. K. F.; DOMINGUES, M. O.; SCHNEIDER, K.; MENDES, O.; DEITERDING, R. An adaptive multiresolution method for ideal magnetohydrodynamics using divergence cleaning with parabolic–hyperbolic correction. **Applied Numerical Mathematics**, v. 95, p. 199–213, 2015. Fourth Chilean Workshop on Numerical Analysis of Partial Differential Equations (WONAPDE 2013). 50, 59, 138, 139

HARTEN, A. Discrete multi-resolution analysis and generalized wavelets. **Applied Numerical Mathematics**, v. 12, n. 1, p. 153 – 192, 1993. SPECIAL ISSUE. 2, 3, 21, 28, 32, 35

_____. Adaptive multiresolution schemes for shock computations. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 115, n. 2, p. 319–338, 1994. 2, 3, 21, 28, 32, 35

_____. Multiresolution Algorithms for the Numerical Solution of Hyperbolic Conservation Laws. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 48, n. 12, p. 1305–1342, 1995. 2, 3, 21, 28, 32

_____. Multiresolution representation of data: a general framework. **SIAM Journal of Numerical Analysis**, v. 33, n. 3, p. 385–394, 1996. 2, 3, 21, 28, 35

HARTEN, A.; ENGQUIST, B.; OSHER, S.; CHAKRAVARTHY, S. R. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III. **Journal of Computational Physics**, v. 131, n. 1, p. 3 – 47, 1997. 32

HARTEN, A.; LAX, P. D.; LEER, B. van. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. **SIAM Review**, v. 25, p. 35, 1983. 2, 26, 50

HELZEL, C.; ROSSMANITH, J. A.; TAETZ, B. An unstaggered constrained transport method for the 3D ideal magnetohydrodynamic equations. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 230, n. 10, p. 3803–3829, 2011. 70, 84, 109

HOLST, B. Van der; TOTH, G.; SOKOLOV, I.; POWELL, K.; HOLLOWAY, J.; MYRA, E.; STOUT, Q.; ADAMS, M.; MOREL, J.; KARNI, S. et al. CRASH: A block-adaptive-mesh code for radiative shock hydrodynamics-implementation and verification. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, IOP Publishing, v. 194, n. 2, p. 23, 2011. 2

HOPKINS, P. F. A constrained-gradient method to control divergence errors in numerical mhd. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, The Royal Astronomical Society, v. 462, n. 1, p. 576–587, 2016. 62

JIANG, G.-S.; WU, C.-C. A high-order WENO finite difference scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 150, n. 2, p. 561–594, 1999. 70, 71

JIANG, G.-S.; WU, C. chin. A high-order WENO finite difference scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. **Journal of Computational Physics**, v. 150, n. 2, p. 561 – 594, 1999. 21

JIANG, R.-L.; FANG, C.; CHEN, P.-F. A new MHD code with adaptive mesh refinement and parallelization for astrophysics. **Computer Physics Communications**, v. 183, n. 8, p. 1617 – 1633, 2012. 129, 130, 131

- KAIBARA, M. K.; GOMES, S. M. A fully adaptive multiresolution scheme for shock computations. In: _____. **Godunov Methods: Theory and Applications**. Boston, MA: Springer US, 2001. p. 497–503. ISBN 978-1-4615-0663-8. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-0663-8_49>. 3
- LAMB, H. Hydrodynamics. Cambridge University Press, 1924. 9
- LAX, P. D. **Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves**. [S.l.]: SIAM, 1973. 10, 22
- LEBOEUF, J.; TAJIMA, T.; KENNEL, C. F.; DAWSON, J. Global simulation of the time-dependent magnetosphere. **Geophysical Research Letters**, Wiley Online Library, v. 5, n. 7, p. 609–612, 1978. 1
- LEDVINA, S. A.; MA, Y. J.; KALLIO, E. Modeling and Simulating Flowing Plasmas and Related Phenomena. **Space Science Reviews**, v. 139, p. 143–189, 2008. 7
- LEE, D. A solution accurate, efficient and stable unsplit staggered mesh scheme for three dimensional magnetohydrodynamics. **Journal of Computational Physics**, v. 243, p. 269 – 292, 2013. 21, 70
- LEER, B. V. Towards the ultimate conservative difference scheme. ii. monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. **Journal of computational physics**, Elsevier, v. 14, n. 4, p. 361–370, 1974. 49
- _____. Towards the ultimate conservative difference scheme iii. upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 23, n. 3, p. 263–275, 1977. 48
- LEVEQUE, R. J. **Finite volume methods for hyperbolic problems**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 558 p. 21, 22, 27, 62
- LI, S. An HLLC Riemann solver for Magnetohydrodynamics. **Journal of Computational Physics**, v. 203, p. 344–357, 2005. 2
- LONDRILLO, P.; ZANNA, L. D. High-order upwind schemes for multidimensional magnetohydrodynamics. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 530, n. 1, p. 508, 2000. 70, 71
- LOPES, M. M.; DEITERDING, R.; GOMES, A. K. F.; DOMINGUES, M. O.; MENDES, O. An ideal compressible magnetohydrodynamic solver with parallel

block-structured adaptive mesh refinement. **Computer & Fluids**, Submitted, 2017. 28, 139

MACNEICE, P.; OLSON, K. M.; MOBARRY, C.; FAINCHEIN, R. D.; PACKER, C. PARAMESH: A parallel adaptive mesh refinement community toolkit. **Computer Physics Communications**, Elsevier, v. 126, n. 3, p. 330–354, 2000. 2

MALLAT, S. G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. **Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on**, Ieee, v. 11, n. 7, p. 674–693, 1989. 27

MARDER, B. A method for incorporating gauss' law into electromagnetic pic codes. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 68, n. 1, p. 48–55, 1987. 169

MAYIGUÉ, C. C.; GROLL, R. A density-based method with semi-discrete central-upwind schemes for ideal magnetohydrodynamics. **Archive of Applied Mechanics**, v. 87, n. 4, p. 667–683, Apr 2017. 2

MIGNONE, A.; BODO, G.; MASSAGLIA, S.; MATSAKOS, T.; TESILEANU, O.; ZANNI, C.; FERRARI, A. Pluto: A numerical code for computational astrophysics. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 170, n. 1, p. 228, 2007. 1

MIGNONE, A.; TZEFERACOS, P. A second-order unsplit Godunov scheme for cell-centered MHD: The CTU-GLM scheme. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 229, n. 6, p. 2117–2138, 2010. 2, 42

MIGNONE, A.; TZEFERACOS, P.; BODO, G. High-order conservative finite difference glm–mhd schemes for cell-centered MHD. **Journal of Computational Physics**, v. 229, n. 17, p. 5896 – 5920, 2010. 21

MIYOSHI, T.; KUSANO, K. A multi-state HLL approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics. **Journal of Computational Physics**, v. 208, p. 315–344, 2005. 2, 26, 49, 51, 70, 71

_____. A comparative study of divergence-cleaning techniques for multi-dimensional mhd schemes. **Plasma and Fusion Research**, The Japan Society of Plasma Science and Nuclear Fusion Research, v. 6, p. 2401124–2401124, 2011. 2, 43

- MÜLLER, S. **Adaptive multiscale schemes for conservation laws.** Heidelberg: Springer, 2003. (Lectures Notes in Computational Science and Engineering, v. 27). 3
- MUNZ, C.-D.; OMMES, P.; SCHNEIDER, R.; SONNENDRÜCKER, E.; VOSS, U. Divergence corrections techniques for Maxwell solvers based on a hyperbolic model. **Journal of Computational Physics**, v. 161, n. 2, p. 484, 2000. 2, 41
- OGINO, T.; WALKER, R.; ASHOUR-ABDALLA, M. A global magnetohydrodynamic simulation of the response of the magnetosphere to a northward turning of the interplanetary magnetic field. **Journal of Geophysical Research: Space Physics**, v. 99, n. A6, p. 11027–11042, 1994. 167
- OGINO, T.; WALKER, R.; ASHOUR-ABDALLA, M.; DAWSON, J. An mhd simulation of the effects of the interplanetary magnetic field by component on the interaction of the solar wind with the earth's magnetosphere during southward interplanetary magnetic field. **Journal of Geophysical Research: Space Physics**, Wiley Online Library, v. 91, n. A9, p. 10029–10045, 1986. 1
- ORAIN, F.; BÉCOULET, M.; DIF-PRADALIER, G.; HUIJSMANS, G.; PAMELA, S.; NARDON, E.; PASSERON, C.; LATU, G.; GRANDGIRARD, V.; FIL, A. et al. Non-linear magnetohydrodynamic modeling of plasma response to resonant magnetic perturbations. **Physics of Plasmas**, AIP, v. 20, n. 10, p. 102510, 2013. 167
- ORSZAG, S. A.; TANG, C.-M. Small-scale structure of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge Univ Press, v. 90, n. 01, p. 129–143, 1979. 70
- OTTO, A. Magnetohydrodynamics. Basic Plasma Physics: Lecture Notes. 2006. 47
- PARKER, E. N. Sweet's mechanism for merging magnetic fields in conducting fluids. **Journal of Geophysical Research**, Wiley Online Library, v. 62, n. 4, p. 509–520, 1957. 129
- PARKS, G. **Physics of space plasmas: an introduction.** [S.l.]: Redwood City, CA; Addison-Wesley Publishing Co., 1991. 17
- PETSCHEK, H. E. Magnetic field annihilation. **NASA Special Publication**, v. 50, p. 425, 1964. 129

POWELL, K. G. An approximate riemann solver for magnetohydrodynamics. In: _____. **Upwind and High-Resolution Schemes**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1997. p. 570–583. [2](#), [51](#)

POWELL, K. G.; ROE, P. L.; LINDE, T. J.; GOMBOSI, T. I.; ZEEUW, D. L. D. A Solution-Adaptative Upwind Scheme for Ideal Magnetohydrodynamics. **Journal of Computational Physics**, v. 154, p. 284–309, 1999. [2](#), [169](#)

ROE, P. L. Characteristic-based schemes for the euler equations. **Annual review of fluid mechanics**, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 18, n. 1, p. 337–365, 1986. [49](#)

ROUSSEL, O. **Developpement d'un algorithme multiresolution adaptatif tridimensionnel pour la resolution des equations aux derivees partielles paraboliques**: application aux instabilites thermodiffusives de flamme. Tese (Doutorado) — Université de la Mediterranee, 2003. [3](#), [32](#), [38](#), [61](#)

ROUSSEL, O.; SCHNEIDER, K.; TSIGULIN, A.; BOCKHORN, H. A conservative fully adaptative multiresolution algorithm for parabolic PDEs. **Journal of Computational Physics**, v. 188, p. 493–523, 2003. [3](#), [28](#), [29](#), [30](#), [32](#), [38](#), [59](#)

_____. A conservative fully adaptive multiresolution algorithm for parabolic {PDEs}. **Journal of Computational Physics**, v. 188, n. 2, p. 493 – 523, 2003. [3](#), [59](#)

RYU, D.; MINIATI, F.; JONES, T.; FRANK, A. A divergence-free upwind code for multidimensional magnetohydrodynamic flows. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 509, n. 1, p. 244, 1998. [2](#), [70](#), [71](#)

SALAH, N. B.; SOULAIMANI, A.; HABASHI, W. G. A finite element method for magnetohydrodynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 43–44, p. 5867 – 5892, 2001. [21](#)

SCHNACK, D. D. **Lectures in magnetohydrodynamics**: with an appendix on extended MHD. [S.l.]: Springer, 2009. [9](#), [10](#)

SKÁLA, J.; BARUFFA, F.; BÜCHNER, J.; RAMPP, M. The 3D MHD code GOEMHD3 for astrophysical plasmas with large Reynolds numbers-Code description, verification, and computational performance. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 580, p. A48, 2015. [1](#), [54](#), [70](#), [167](#)

- SOVINEC, C.; GLASSER, A.; GIANAKON, T.; BARNES, D.; NEBEL, R.; KRUGER, S.; SCHNACK, D.; PLIMPTON, S.; TARDITI, A.; CHU, M. Nonlinear magnetohydrodynamics simulation using high-order finite elements. **Journal of Computational Physics**, v. 195, n. 1, p. 355 – 386, 2004. 21
- SPRUIT, H. C. Essential Magnetohydrodynamics for Astrophysics. **ArXiv e-prints**, jan. 2013. 7
- STONE, J. M. The zeus code for astrophysical magnetohydrodynamics: new extensions and applications. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 109, n. 1, p. 261 – 280, 1999. 1
- STONE, J. M.; GARDINER, T. A simple unsplit godunov method for multidimensional MHD. **New Astronomy**, v. 14, n. 2, p. 139 – 148, 2009. 21
- STONE, J. M.; GARDINER, T. A.; TEUBEN, P.; HAWLEY, J. F.; SIMON, J. B. Athena: A new code for astrophysical mhd. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 178, n. 1, p. 137, 2008. 1
- TORO, E. F. **Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction**. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999. 48
- TÓTH, G. The $\nabla \cdot \mathbf{B}$ constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes. **Journal of Computational Physics**, v. 161, p. 605–652, 2000. 2, 43, 109
- TÓTH, G.; ROE, P. L. Divergence and curl-preserving prolongation and restriction formulas. **Journal of Computational Physics**, v. 180, p. 736–750, 2002. 21
- TOUMA, R.; ARMINJON, P. Central finite volume schemes with constrained transport divergence treatment for three-dimensional ideal MHD. **Journal of Computational Physics**, v. 212, n. 2, p. 617 – 636, 2006. 2, 109
- Van Leer, B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V - A second-order sequel to Godunov’s method. **Journal of Computational Physics**, v. 32, p. 101–136, jul. 1979. 48
- WESENBERG, M. **Efficient finite-volume schemes for magnetohydrodynamic simulations in solar physics**. Tese (Doutorado) — Universitätsbibliothek Freiburg, 2003. 2, 26
- XISTO, C. M.; PÁSCOA, J. C.; OLIVEIRA, P. J. A pressure-based high resolution numerical method for resistive mhd. **Journal of Computational Physics**, v. 275, n. Supplement C, p. 323 – 345, 2014. 109

XU, Z.; BALSARA, D. S.; DU, H. Divergence-free weno reconstruction-based finite volume scheme for solving ideal mhd equations on triangular meshes.

Communications in Computational Physics, Cambridge University Press, v. 19, n. 4, p. 841–880, 2016. [2](#)

ZACHARY, A. L.; MALAGOLI, A.; COLELLA, P. A higher-order godunov method for multidimensional ideal magnetohydrodynamics. **SIAM Journal on Scientific Computing**, SIAM, v. 15, n. 2, p. 263–284, 1994. [2](#), [70](#)

ZHANG, W.; ALMGREN, A. S.; DAY, M.; NGUYEN, T.; SHALF, J.; UNAT, D. Boxlib with tiling: An AMR software framework. **CoRR**, abs/1604.03570, 2016. [2](#)

APÊNDICE A - IDENTIDADES VETORIAIS

Neste apêndice são apresentadas as identidades vetoriais utilizadas ao longo deste trabalho. Sejam f uma função real e $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vetores, todos deriváveis em relação a x, y e z .

$$\nabla \cdot (f \mathbf{a}) = f \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla f, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) = (\nabla \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{b}, \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \nabla \cdot \mathbf{a}, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}, \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}), \quad (\text{A.5})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \mathbf{a}, \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla \cdot (\mathbf{b} \mathbf{a} - \mathbf{a} \mathbf{b}), \quad (\text{A.7})$$

APÊNDICE B - OPENMP APLICADO AO CÓDIGO MHD–FV

Este apêndice foi desenvolvido a partir de uma sugestão apresentada durante o exame de proposta de Tese. O código MHD–FV foi primeiro código base para este trabalho desenvolvido para a simulação do modelo MHD ideal em volumes finitos (GOMES, 2012), com o objetivo de verificação da implementação, comparação de tempo e acuracidade da solução adaptativa. Com ele foi possível avaliar qual o impacto que uma implementação paralela tem sobre esse tipo de simulação. O compilador utilizado com o código CARMEN–MHD é o g^{++} versão 4.8.4, no sistema operacional *Ubuntu 14.04*. O servidor utilizado para as simulações possui processador *Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2640 v2 2.00GHz*, com memória RAM de 128GB.

Primeiramente, avaliaram-se quais eram as funções que utilizavam a maior porcentagem de tempo de CPU da simulação. Para tal, foi utilizado o software livre *GNU gprof*¹, desenvolvido por Jay Fenlason, o qual possibilita o conhecimento da distribuição de custo computacional das funções de um determinado código durante a sua execução. Essas informações podem ser utilizadas como um indicativo de onde o código necessita de paralelização. Nesse contexto, foram feitos testes para dois problemas já apresentados: o problema de Riemann 2D e a instabilidade de Kelvin Helmholtz, ambos em duas dimensões.

Em *B.1* é apresentado o perfil obtido com o software *GNU gprof* para uma simulação do problema Riemann 2D em uma malha com 256×256 células. São apresentados os valores percentuais mais relevantes e suas respectivas funções: `stateUstar`, que calcula os estados intermediários do fluxo HLLD; `main`, a função principal; `consStepRK2`, que performa a evolução temporal da solução; e `eigenvalue`, que calcula os autovalores do sistema MHD. Com isso, observa-se que o maior percentual

¹<https://sourceware.org/binutils/docs/gprof/>

Texto B.1 - Perfil da simulação do problema Riemann 2D em uma malha com 256×256 células.

% time	cumulative seconds	self seconds	self ms/call	total ms/call	name
30.41	202.22	202.22	0.00	0.00	stateUstar
19.39	331.14	128.92			main
7.68	382.21	51.07	0.04	0.06	consStepRK2
7.45	431.75	49.54	0.00	0.00	eigenvalue

Texto B.2 - Perfil da simulação do problema da instabilidade de Kelvin-Helmholtz em uma malha com 256×256 células.

%	cumulative	self	self	total	
time	seconds	seconds	ms/call	ms/call	name
29.88	59.50	59.50	0.00	0.00	stateUstar
19.17	97.67	38.17			main
8.34	114.28	16.61	0.00	0.00	eigenvalue
8.27	130.75	16.46	9.58	14.62	consStepRK2

de tempo de CPU está associado ao cálculo do fluxo numérico, o qual é chamado separadamente em duas dimensões. Para o caso da instabilidade de Kelvin-Helmholtz, em que o perfil é apresentado em B.2, para uma malha de 256×256 células o mesmo padrão é observado. Então, devido ao alto custo computacional do cálculo do fluxo numérico, a paralelização foi restringida a esse processo.

Para a paralelização, é utilizado o chamado *OpenMP*², o qual é uma interface simples e flexível para desenvolver aplicações paralelas em plataformas desde um computador portátil até um super computador. No contexto dos fluxos numéricos do modelo MHD, utilizam-se as diretivas de seções paralelas. Diretivas do *OpenMP* são aplicadas a um bloco estruturado, que consiste em uma única declaração ou um conjunto delas, com uma única entrada no início e outra no fim. A construção das seções paralelas é um atalho para especificar uma construção paralela contendo seções, denotada por `#pragma omp parallel sections`. No Texto B.3, apresenta-se a seção da função `main` que inclui o cálculo dos fluxos numéricos em ambas as direções. As diretivas `#pragma omp section` nas linhas 3 e 23 são utilizadas para separar os blocos da direção x e y . Como eles são independentes, o cálculo dos dois será feito ao mesmo tempo, resultando em um ganho de tempo de CPU.

Os problemas Riemann 2D e instabilidade de Kelvin-Helmholtz são rodados para malhas com 128×128 , 256×256 e 512×512 células, com o objetivo de avaliar os ganhos em tempo de CPU obtidos ao utilizar o paralelismo para o cálculo dos fluxos numéricos. Na Figura B.1, apresentam-se os gráficos mostrando os tempos de CPU (em $\log_1 0$) à medida que a resolução malha aumenta, com as simulações serial (linha sólida) e paralela (linha pontilhada), para os problemas de Riemann 2D (à esquerda) e Kelvin-Helmholtz (à direita). Pode-se observar que há um ganho no custo computacional em ambos os casos para as simulações paralelas, mantendo-

²<http://www.openmp.org/>

Texto B.3 - Implementação da parte paralela no código MHD-FV. Essa seção do código compreende o cálculo dos fluxos nas duas direções.

```

#pragma omp parallel sections 1
{ 2
  #pragma omp section 3
  { 4
    // Fluxo numerico na direcao x 5
    for(int j=1; j<JMAX-1;j++){ 6
      for(int i=0; i<IMAX-1;i++){ 7
        for(int kvar=0; kvar<VAR;kvar++){ 8
          vecx[0][kvar] = primitive[i][j][kvar]; 9
          vecx[1][kvar] = primitive[i+1][j][kvar]; 10
          auxFx[0][kvar] = Fx[i][j][kvar]; 11
          auxFx[1][kvar] = Fx[i+1][j][kvar]; 12
        } 13
        auxRhoEx[0] = rhoE[i][j]; 14
        auxRhoEx[1] = rhoE[i+1][j]; 15
        RiemannSolver(vecx, auxRhoEx, auxFx, 3, xSlopeMax, 6); 16
      } 17
      for(int kvar=0; kvar<VAR;kvar++){ 18
        F[i][j][kvar] = auxFx[0][kvar]; 19
      } 20
    } 21
  } 22
  #pragma omp section 23
  { 24
    // Fluxo numerico na direcao y 25
    for(int i=1; i<IMAX-1;i++){ 26
      for(int j=0; j<JMAX-1;j++){ 27
        for(int kvar=0; kvar<VAR;kvar++){ 28
          vecy[0][kvar] = primitive[i][j][kvar]; 29
          vecy[1][kvar] = primitive[i][j+1][kvar]; 30
          auxFy[0][kvar] = Fy[i][j][kvar]; 31
          auxFy[1][kvar] = Fy[i][j+1][kvar]; 32
        } 33
        auxRhoEy[0] = rhoE[i][j]; 34
        auxRhoEy[1] = rhoE[i][j+1]; 35
        RiemannSolver(vecy, auxRhoEy, auxFy, 4, ySlopeMax, 7); 36
      } 37
      for(int kvar=0; kvar<VAR;kvar++){ 38
        G[i][j][kvar] = auxFy[0][kvar]; 39
      } 40
    } 41
  } 42
} 43

```

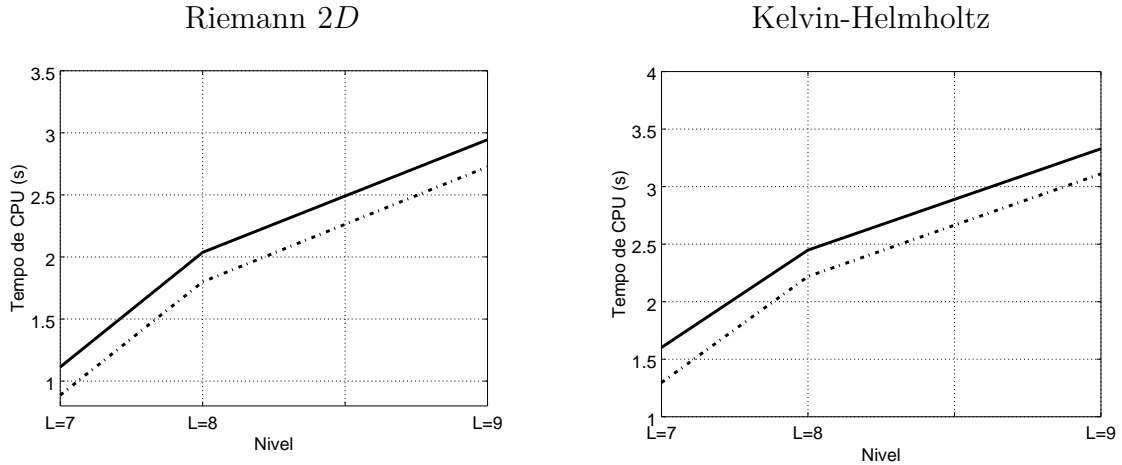


Figura B.1 - Gráficos comparativos entre as simulações serial e paralela, para os problemas de Riemann 2D e instabilidade de Kelvin-Helmholtz, com malhas de tamanhos 128×128 , 256×256 e 512×512 .

Tamanho da malha	Riemann 2D			Kelvin-Helmholtz		
	128	256	512	128	256	512
Ganho em tempo OpenMP (%)	49	42	39	50	41	40

se na faixa de 50 – 60% independente da quantidade de células na malha, como apresentado na Tabela .

Conclui-se, então, que utilizando a diretivas *OpenMP* para para a paralelização dos fluxos numéricos no código MHD-FV em duas dimensões é possível reduzir o custo computacional da simulação em aproximadamente 40%, de forma simples e sem alterar a estrutura inicial do código. A extensão desse estudo para o código CARMEN-MHD não foi realizada, pois a estrutura e a implementação dos algoritmos neste código são diferentes das presentes no código MHD-FV, demandando um estudo mais aprofundado acerca dos métodos de paralelização, o qual não faz parte do escopo deste trabalho.

APÊNDICE C - IMPLEMENTAÇÃO RESISTIVA

Neste apêndice é discutida a implementação dos termos fonte referentes ao modelo MHD resistivo apresentado no Capítulo 2.

Como discutido anteriormente, o modelo MHD resistivo pode ser entendido como uma generalização do modelo ideal na qual é adicionada dissipação ao sistema e, com isso, não há mais conservação de fluxo magnético. Nesse modelo, as equações de conservação de energia e fluxo magnético do modelo ideal são acrescidas pelos seguintes termos fonte:

- a) fluxo de energia denotado pelo termo $\mathbf{B} \times \eta \mathbf{J}$ e
- b) resistividade Ôhmica expressa pelo termo $\eta \mathbf{J}$.

As Equações 2.28c e 2.28d, associadas à densidade de energia e ao campo magnético, que possuem os termos fonte de interesse são apresentadas novamente

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\mathbf{u} (\mathcal{E} + p) + \mathbf{u} \cdot \left(\frac{B^2}{2} \mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{B} \right) \right] = \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \eta \mathbf{J}), \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u}) = -\nabla \times \eta \mathbf{J}, \quad (\text{C.2})$$

em que a densidade de corrente $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ é dada por

$$\eta \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}. \quad (\text{C.3})$$

Os termos fontes das Equações C.1 e C.2 estão em função de \mathbf{J} , diferente da forma apresentada no Capítulo 2 (em função de \mathbf{B}), pois é necessário o cálculo das componentes J_x, J_y, J_z individualmente na implementação resistiva.

A implementação é feita em cada direção do fluxo separadamente e, em cada caso, os cálculos são apresentados para cada dimensão. Primeiramente, o valor da resistividade η é aproximado como uma média de células adjacentes. Esse valor é utilizado para todas as dimensões. A partir disso, são calculados os valores das componentes de \mathbf{J} . Com os valores atualizados, adiciona-se os termos resistivos aos fluxos de \mathbf{B} e \mathcal{E} .

Nas próximas seções, a implementação dos termos fonte associados à resistividade é apresentada passo-a-passo, de forma a complementar a abordagem numérica apresentada no Capítulo 3, explicitando o cálculo dos termos em cada dimensão.

C.1 Passo 1: Cálculo da densidade de corrente \mathbf{J}

Primeiramente, levando em conta que a densidade de corrente não é computada como uma variável do modelo, o seu cálculo é explicitado para uma, duas e três dimensões, considerando $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$, isto é,

$$1D : \quad J_x = 0, \quad J_y = -\frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad J_z = \frac{\partial B_y}{\partial x}, \quad (C.4)$$

$$2D : \quad J_x = \frac{\partial B_z}{\partial y}, \quad J_y = -\frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad J_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}, \quad (C.5)$$

$$3D : \quad J_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad J_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad J_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}, \quad (C.6)$$

lembrando que a densidade de corrente é calculada a partir do rotacional de \mathbf{B} . Na discretização, denota-se o valor $\mathbf{J}_{i,j,k} = (J_x|_{i,j,k}, J_y|_{i,j,k}, J_z|_{i,j,k})$, associado à célula $C_{i,j,k}$, em que i, j, k estão relacionados às direções x, y, z , em um tempo arbitrário t^n . Por simplicidade, os índices i, j, k são explicitados apenas quando estão sendo utilizados na discretização. A mesma ideia é utilizada para $\mathbf{B}_{i,j,k}$ e $\mathcal{E}_{i,j,k}$.

A discretização utilizada é do tipo *Upwind* de primeira ordem para as derivadas parciais. Por exemplo, a derivada espacial na direção x de uma quantidade $U = U_{i,j,k}$, ou seja, $\frac{\partial U}{\partial x}$ pode ser aproximada por $\frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x}$. Nesse contexto, tem-se o cálculo numérico da densidade de corrente em uma, duas e três dimensões.

Caso unidimensional

No caso unidimensional, como não existe fluxo nas direções y e z , as componentes J_y e J_z são obtidas a partir do valor das células nas variáveis B_y e B_z .

$$\begin{aligned} J_x &= 0, \\ J_y &= -\frac{(B_z|_i - B_z|_{i-1})}{\Delta x}, \\ J_z &= \frac{(B_y|_i - B_y|_{i-1})}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Caso bidimensional

Neste caso, como não há fluxo apenas em z , então calcula-se apenas as derivadas em x e y

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{(B_z|_j - B_z|_{j-1})}{\Delta y}, \\ J_y &= -\frac{(B_z|_i - B_z|_{i-1})}{\Delta x}, \\ J_z &= \frac{(B_y|_i - B_y|_{i-1})}{\Delta x} - \frac{(B_x|_j - B_x|_{j-1})}{\Delta y}. \end{aligned}$$

Caso tridimensional

Em três dimensões as componentes do vetor \mathbf{J} são calculadas para todas as direções.

$$J_x = \frac{(B_z|_j - B_z|_{j-1})}{\Delta y} - \frac{(B_y|_k - B_y|_{k-1})}{\Delta z}, \quad (\text{C.7})$$

$$J_y = \frac{(B_x|_k - B_x|_{k-1})}{\Delta z} - \frac{(B_z|_i - B_z|_{i-1})}{\Delta x}, \quad (\text{C.8})$$

$$J_z = \frac{(B_y|_i - B_y|_{i-1})}{\Delta x} - \frac{(B_x|_j - B_x|_{j-1})}{\Delta y}. \quad (\text{C.9})$$

Com todas as componentes da densidade de corrente obtidos, segue-se adiante para o cálculo do termo de resistividade Ôhmica.

C.2 Passo 2: Resistividade Ôhmica

Neste passo, o valor da resistividade η é discretizado por $\eta_{i,j,k}$, não importando se é constante ou variável ao longo da malha computacional, pois o cálculo pode ser utilizado em ambos os casos. Com isso, dentro do contexto do método do volumes finitos, em cada caso de estudo, esse valor é aproximado como uma média.

Como o termo da resistividade Ôhmica é obtido a partir do campo elétrico \mathbf{E} , o valor resultante é denotado nas próximas equações como \mathbf{E}_{mf} , isto é, $(E_{mf_x}, E_{mf_y}, E_{mf_z}) = \eta(J_x, J_y, J_z)$.

Caso unidimensional

O cálculo de $\bar{\eta}$ neste caso é naturalmente a média dos estados à esquerda e à direita, visto que há apenas uma direção onde há fluxo.

$$\begin{aligned}\bar{\eta} &= \frac{1}{2}(\eta_i + \eta_{i-1}), \\ E_{mf_x} &= 0, \\ E_{mf_y} &= \bar{\eta}J_y, \\ E_{mf_z} &= \bar{\eta}J_z.\end{aligned}$$

Caso bidimensional

Em duas dimensões, a aproximação de η é feita de acordo com a direção escolhida. Para a direção x, tem-se a média da resistividade entre as posições i e $i - 1$, assim como no caso unidimensional. Na direção y, a média é obtida entre os valores de η em j e $j - 1$. Em cada direção são atribuídos os valores correspondentes de \mathbf{J} .

–Direção x

$$\begin{aligned}\bar{\eta} &= \frac{1}{2}(\eta + \eta_{i-1}), \\ E_{mf_x} &= 0, \\ E_{mf_y} &= \bar{\eta}J_y, \\ E_{mf_z} &= \bar{\eta}J_z.\end{aligned}$$

–Direção y

$$\begin{aligned}\bar{\eta} &= \frac{1}{2}(\eta + \eta_{j-1}), \\ E_{mf_x} &= \bar{\eta}J_x, \\ E_{mf_y} &= 0, \\ E_{mf_z} &= \bar{\eta}J_z.\end{aligned}$$

Caso tridimensional

A idéia do cálculo de $\bar{\eta}$ no caso tridimensional é análoga aos outros casos, adicionando a direção z , na qual a média $\bar{\eta}$ é obtida a partir das posições adjacentes k e $k - 1$.

–Direção x

$$\begin{aligned}\bar{\eta} &= \frac{1}{2}(\eta + \eta_{i-1}), \\ E_{mf_x} &= 0, \\ E_{mf_y} &= \bar{\eta}J_y, \\ E_{mf_z} &= \bar{\eta}J_z.\end{aligned}$$

–Direção y

$$\begin{aligned}\bar{\eta} &= \frac{1}{2}(\eta + \eta_{j-1}), \\ E_{mf_x} &= \bar{\eta}J_x, \\ E_{mf_y} &= 0, \\ E_{mf_z} &= \bar{\eta}J_z.\end{aligned}$$

–Direção z

$$\begin{aligned}\bar{\eta} &= \frac{1}{2}(\eta + \eta_{k-1}), \\ E_{mf_x} &= \bar{\eta}J_x, \\ E_{mf_y} &= \bar{\eta}J_y \\ E_{mf_z} &= 0.\end{aligned}\tag{C.10}$$

Observa-se que a componente de \mathbf{E}_{mf} que coincide com a direção que está sendo calculado o termo Ôhmico assume valor nulo, pois não há derivadas parciais nesse componente associadas à direção de interesse, como apresentado nas Equações C.4, C.5 e C.6.

Assim, o cálculo da resistividade Ôhmica é finalizado para todas as dimensões. O próximo passo é o cálculo do termo de energia.

C.3 Passo 3: Fluxos de energia

Nessa seção, o cálculo do termo $\mathbf{B} \times \eta \mathbf{J} = \mathbf{B} \times \mathbf{E}_{mf}$ é explicitado. Primeiramente são apresentados os valores analíticos para cada direção e, depois, sua discretização em todas as dimensões. O fluxo de energia é denotado por $\mathbf{E}_F = (E_{F_x}, E_{F_y}, E_{F_z})$.

Ao calcular o produto vetorial pertinente ao termo, tem-se

$$\mathbf{E}_F = \mathbf{B} \times \mathbf{E}_{mf} = (B_y E_{mf_z} - B_z E_{mf_y}) \vec{i} \quad (\text{C.11})$$

$$+ (B_z E_{mf_x} - B_x E_{mf_z}) \vec{j} \quad (\text{C.12})$$

$$+ (B_x E_{mf_y} - B_y E_{mf_x}) \vec{k}. \quad (\text{C.13})$$

Para o cálculo das componentes do vetor \mathbf{E}_F , utilizam-se os valores do vetor \mathbf{E}_{mf} e as componentes do campo magnético B_x , B_y e B_z . Assim como feito com a resistividade na seção anterior, as variáveis B_x, B_y, B_z são aproximadas na interface por uma média entre os estados adjacentes nas direções x, y, z . Sendo assim, obtém-se os valores $E_{F_x}, E_{F_y}, E_{F_z}$, dados por

$$\begin{aligned} E_{F_x} &= \frac{1}{2} [(B_y + B_y|_{i-1}) E_{mf_z} - (B_z + B_z|_{i-1}) E_{mf_y}], \\ E_{F_y} &= \frac{1}{2} [(B_z + B_z|_{j-1}) E_{mf_x} - (B_x + B_x|_{j-1}) E_{mf_z}], \\ E_{F_z} &= \frac{1}{2} [(B_x + B_x|_{k-1}) E_{mf_y} - (B_y + B_y|_{k-1}) E_{mf_x}]. \end{aligned}$$

C.4 Passo 4: Atualização dos fluxos

Depois do cálculo de \mathbf{E}_{mf} e \mathbf{E}_F , os fluxos em \mathbf{B} e \mathcal{E} devem ser atualizados. Lembrando que esses vetores são acompanhados por operadores diferenciais, ou seja, $\nabla \times \eta \mathbf{J}$ e $\nabla \cdot \mathbf{B} \times \eta \mathbf{J}$.

Direção x

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{E}) &= \mathcal{F}(\mathcal{E}) - E_{F_x} \\ \mathcal{F}(B_y) &= \mathcal{F}(B_y) - E_{mf_z} \\ \mathcal{F}(B_z) &= \mathcal{F}(B_z) + E_{mf_y}, \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Direção y

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\mathcal{E}) &= \mathcal{G}(\mathcal{E}) - E_{F_y} \\ \mathcal{G}(B_x) &= \mathcal{G}(B_x) + E_{mf_z} \\ \mathcal{G}(B_z) &= \mathcal{G}(B_z) - E_{mf_x},\end{aligned}\tag{C.15}$$

Direção z

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathcal{E}) &= \mathcal{H}(\mathcal{E}) - E_{F_z} \\ \mathcal{H}(B_x) &= \mathcal{H}(B_x) - E_{mf_y} \\ \mathcal{H}(B_y) &= \mathcal{H}(B_y) + E_{mf_x},\end{aligned}\tag{C.16}$$

em que \mathcal{F} , \mathcal{G} e \mathcal{H} são os fluxos numéricos estimados nas direções x , y e z , respectivamente.

Para a construção da implementação dos termos resistivos no código CARMEN–MHD, foram estudados os códigos Athena, apresentado no Apêndice E e FLASH, apresentado no Capítulo 5. Ambos os códigos são utilizados na simulação MHD resistiva e já verificados nesse contexto. Além disso, possuem discretização em volumes finitos, assim como o código CARMEN–MHD apresentado nesse trabalho.

A implementação no código CARMEN–MHD levou em consideração o cálculo das derivadas espaciais dos fluxos numéricos para a evolução temporal da solução. Por isso, o cálculo dos operadores diferenciais $\nabla \cdot$ e $\nabla \times$ associados aos termos $\mathbf{B} \times \eta \mathbf{J}$ e $\eta \mathbf{J}$, é realizado juntamente com o fluxo numérico. Esse procedimento evita que sejam feitos cálculos desnecessários ao longo da simulação e, além disso, a estrutura já implementada no código é aproveitada.

APÊNDICE D - TERMOS DE DIFUSÃO ARTIFICIAL

Em alguns casos, a simulação do modelo MHD pode se tornar instável devido a valores abruptos de gradientes, criando oscilações locais na solução numérica do modelo. Nesse contexto, adiciona-se ao modelo numérico termos de difusão artificial nas variáveis conservativas, ou seja, operadores Laplacianos de ρ , $\rho\mathbf{u}$ e \mathcal{E} juntamente com o coeficiente de difusão χ . Como esse tipo de instabilidade ocorre de forma local, então os termos de difusão apenas são utilizados onde são necessários, de forma que não influenciem de forma negativa na topologia do problema. Esse tipo de metodologia é comumente utilizado para auxiliar a estabilidade da simulação (SKÁLA et al., 2015; ORAIN et al., 2013; OGINO et al., 1994). O modelo MHD resistivo com difusão artificial e correção parabólica-hiperbólica é dado por

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) &= \chi\nabla^2\rho, \\ \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(\mathcal{E} + p + \frac{B^2}{2} \right) \mathbf{u} - \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \right] &= \nabla \cdot [\mathbf{B} \times \eta (\nabla \times \mathbf{B})] + \chi\nabla^2\mathcal{E}, \\ \frac{\partial\rho\mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho\mathbf{u}\mathbf{u} + \left(p + \frac{1}{2}B^2 \right) \mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{B} \right] &= \chi\nabla^2(\rho\mathbf{u}) \\ \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u}) + \nabla\psi &= -\nabla \times (\eta\nabla \times \mathbf{B}). \\ \frac{\partial\psi}{\partial t} + c_h^2\nabla \cdot \mathbf{B} &= -\frac{c_h^2}{c_p^2}\psi.\end{aligned}$$

Os termos Laplacianos adicionados nas equações da continuidade, momento e energia, associados a essas mesmas variáveis, contribuem com comportamentos dissipativos, suavizando possíveis oscilações numéricas que possam ocorrer durante a simulação do modelo. É importante que valores de χ sejam suficientemente pequenos para que removam as oscilações, ao mesmo tempo que não modifique a topologia esperada do problema.

É importante ressaltar que, neste trabalho, os termos de difusão não são utilizados no modelo, pois a solução numérica se comporta de maneira estável e não é interrompida durante a simulação, possibilitando a sua obtenção.

APÊNDICE E - OUTROS CÓDIGOS MHD

Neste apêndice são apresentados brevemente alguns códigos conhecidos e relevantes dentro do contexto da simulação MHD.

E.1 FLASH

FLASH¹ é um código verificado de metafísica modular e paralelo, desenvolvido nas linguagens FORTRAN90 e *C* no *Flash Center* da Universidade de Chicago, bem conhecido pela comunidade de geofísica espacial e astrofísica (FRYXELL et al., 2000). Esse código inclui a implementação dos modelos MHD ideal e resistivo, com a discretização pelo método dos volumes finitos. É possível rodar simulações adaptativas, utilizando o algoritmo chamado *Adaptive Mesh Refinement* (BERGER; OLIGER, 1984), e com uma malha uniforme, que é o interesse para este trabalho. Não são apresentadas comparações entre diferentes tipos de adaptabilidade, no entanto, essa comparação é possível (DEITERDING et al., 2016). Os resultados obtidos com o código FLASH são utilizados apenas para fins de comparações de topologia da solução do problema, e para o cálculo do erro associado às simulações com o código CARMEN.

Para a simulação com o código FLASH, as seguintes configurações são definidas: para a evolução temporal, utiliza-se o esquema numérico Hancock de um passo; para corrigir os erros associados à divergência do campo magnético, utiliza-se o algoritmo conhecido como *δ -wave*, baseado na correção de divergência introduzida por Powell (1999), que estabiliza o método numérico adicionando termos fontes proporcionais a $\nabla \cdot \mathbf{B}$, ou seja, o vetor termo fonte dado por $\mathcal{S} = (0, -\mathbf{B}\nabla \cdot \mathbf{B}, -\mathbf{u}\nabla \cdot \mathbf{B}, -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})\nabla \cdot \mathbf{B})$ é adicionado do lado direito das equações MHD.

A implementação da correção de divergência do campo magnético no FLASH é uma versão modificada do algoritmo *eight-wave* (MARDER, 1987; POWELL et al., 1999). Essa formulação remove a restrição $\nabla \cdot \mathbf{B}$ ao adicionar um termo $\mathbf{u}\nabla \cdot \mathbf{B}$ na equação de \mathbf{B} , levando ao sistema quasi linear clássico, no qual apenas a equação do campo magnético não está na forma conservativa.

Os resultados obtidos com o código FLASH são utilizados como uma referência para os resultados do código CARMEN–MHD. Esse tipo de procedimento comparativo é usual no contexto de verificação de códigos. Há uma grande dificuldade em encontrar códigos que possuam exatamente os mesmos métodos numéricos. Como o FLASH é um código verificado e muito utilizado por uma comunidade ativa, o objetivo da sua

¹flash.uchicago.edu/site/flashcode/

utilização é garantir que os resultados do código CARMEN–MHD estão convergindo para a referência, utilizando um esquema de segunda ordem em ambos os códigos.

E.2 Athena

O código Athena é um código MHD astrofísico livre desenvolvido inicialmente para estudos relacionados ao meio interestelar e formação estelar. Esse código permite a simulação dos modelos MHD ideal e resistivo, utilizando uma discretização por volumes finitos na linguagem C^{++} . Em particular, o Athena possui a implementação dos modelos MHD não-ideais associados aos termos de resistividade Ôhmica, efeito Hall e difusão ambipolar.

Com esse código é possível performar simulações em duas e três dimensões, em coordenadas cartesianas ou cilíndricas, com quatro tipos diferentes de fluxos numéricos (Force flux, HLLE, HLLD e Roe), reconstruções até terceira ordem e dois tipos de integração no tempo (CTU e MUSCL-Hancock). O código Athena é adequado tanto para uso em máquinas pessoais quanto em super computadores, e é disponibilizado pela Universidade de Princeton.

E.3 PLUTO

O código PLUTO² é utilizado para obter a solução numérica do modelo GLM–MHD no contexto da dinâmica de fluidos astrofísicos, desenvolvido nas linguagens C/C^{++} e *FORTRAN*. As equações diferenciais parciais são utilizadas em suas formas de leis de conservação, utilizando uma discretização pelo método dos volumes finitos. As simulações numéricas podem ser realizadas com abordagens adaptativa no contexto da metodologia *adaptive mesh refinement* e malha uniforme.

Assim como o código Athena, o código PLUTO é altamente portátil, podendo ser rodado em computadores pessoais ou em máquinas de alta performance, utilizando uma paralelização MPI. A sua disponibilização é feita pela Università Degli Studi di Torino.

E.4 OTTO MHD-2D

Esse código é disponibilizado na página do A. Otto³ e tem o objetivo de performar uma simulação MHD de processos básicos na magnetosfera, como a entrada de plasma proveniente do vento solar e a liberação de energia na cauda magné-

²<http://plutocode.ph.unito.it/>

³<http://how.gi.alaska.edu/ao/2dprog/>

tica. O código é composto por 5 módulos: reconexão magnética, instabilidade de Kelvin-Helmholtz, instabilidade de Raleigh-Taylor, reconexão de causa e plasmóides e *tearing mode*.

Diferente dos códigos Athena e FLASH apresentados anteriormente, o código MHD apresentado nessa seção utiliza uma discretização em diferenças finitas. Com isso, são adicionados ao modelo outros termos fonte nas equações de conservação de massa e momento. Esses termos têm o objetivo de evitar o surgimento de oscilações na solução, mantendo a estabilidade do método. Esses termos não são necessários nos casos anteriores, pois o método dos volumes finitos é baseado na forma integral de leis de conservação.

E.5 BATS-R-US

O código BATS-R-US⁴ (Block-Adaptive-Tree-Solarwind-Roe-Upwind-Scheme) é desenvolvido na Universidade de Michigan, pelo grupo de magneto-hidrodinâmica computacional. Além disso, faz parte do *Space Weather Modeling Framework*.

Sua implementação permite a simulação numérica das equações MHD em três dimensões, utilizando uma discretização pelo método de volumes finitos e uma abordagem adaptativa de *mesh refinement* com blocos retangulares. Possui implementação paralela utilizando MPI e a linguagem utilizada é FORTRAN90. Além disso, esse código é desenvolvido para realizar simulações da magnetosfera no contexto MHD, permitindo a entrada de dados reais.

⁴<https://ccmc.gsfc.nasa.gov/models/modelinfo.php?model=BATS-R-US>

PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE

Teses e Dissertações (TDI)

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

Manuais Técnicos (MAN)

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

Notas Técnico-Científicas (NTC)

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programas de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

Relatórios de Pesquisa (RPQ)

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

Publicações Didáticas (PUD)

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

Publicações Seriadas

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Contam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

Programas de Computador (PDC)

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. Aceitam-se tanto programas fonte quanto os executáveis.

Pré-publicações (PRE)

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.