UMA POLÍTICA ÓTIMA PARA UM SISTEMA DE MANUTENÇÃO COM CONTROLE SOBRE A DISTRIBUIÇÃO DO TEMPO DE REPARO

Abdurahiman Vakulathil (ITA)
Paulo Renato de Morais (CNPq/INPE)

RESUMO

Este trabalho considera um sistema de manutenção em que o tamanho da fila na oficina de reparo pode ser controlado variando a distribuição do tempo de reparo. O sistema de produção possui um número finito de máquinas idênticas; estas estão sujeitas à falhas, tendo o tempo até a falha uma distribuição exponencial. Cada máquina quebrada é enviada para uma oficina de reparo. Esta tem um único servidor que pode usar uma de duas distribuições para o tempo de reparo disponíveis. A estrutura de custos inclui um custo de espera, um custo de reparo e um custo fixo de troca da distribuição do tempo de reparo. Este problema de controle é representado por um modelo de decisão semimarkoviano em que os instantes de decisão são os instantes de término de reparo. O critério de otimalidade considerado é o custo médio por unidade de tempo a longo prazo. Um algoritmo de iteração de políticas é empregado para determinar os parâmetros da política de controle ótima dentro de uma subclasse particular da classe de todas as políticas estacionárias. Resultados numéricos são apresentados para o caso de uma distribuição exponencial para o tempo de reparo.

ABSTRACT

This paper considers a maintenance system in which the queue size at the repair facility can be controlled by varying the repair time distribution. The production system consists of a finite number of identical machines; they are subject to failure with an exponential time-to-failure distribution. Each failed machine is repaired at a single server repair facility by using one of two available repair time distributions. The cost structure includes a holding cost, a repair cost, and a fixed switch-over cost when the repair time distribution is changed from one distribution to the other. This control problem is represented by a semi-Markov decision model in which the decision epochs are given by the repair completion epochs. The optimality criterion considered is the long-run average cost per unit time. A policy-iteration algorithm is used to compute the parameters of the optimal control policy within a particular subclass of the class of all stationary policies. Numerical results are given for an exponential repair time distribution.

1. INTRODUÇÃO

O sistema de manutenção a ser estudado neste trabalho consiste de uma linha de produção, uma oficina de reparo e uma fila de reparo. A linha de produção contém M máquinas idênticas, que quebram durante o uso. O termo idênticas significa que as máquinas têm a mesma distribuição para o tempo até a quebra e para os tempos de reparo, e que não há prioridade de atendimento, utilizando-se a disciplina da fila "primeiro a chegar, primeiro a ser atendido".

A linha de produção utiliza todas estas M máquinas independentes, em paralelo, para produção. O tempo até a quebra de uma máquina é independente do tempo até a quebra das outras máquinas. A linha de produção continua a operar com menos do que M máquinas, se pelo menos uma estiver disponível para produção.

Quando uma máquina em operação quebra é imediatamente enviada para a oficina de reparo. Se esta estiver ocupada, a máquina quebrada espera na fila de reparo até que a oficina de reparo esteja disponível. Após o reparo, a máquina é enviada para a linha de produção. Um diagrama esquemático do sistema de manutenção é mostrado na Figura 1.

A oficina de reparo emprega um único servidor que usa um dos dois tipos de reparo disponíveis para consertar a máquina quebrada. O tipo de reparo é escolhido com base no tamanho da fila na oficina de reparo e de acordo com uma política de controle que será discutida na Seção 2.

A estrutura de custos consiste de um custo de reparo, que depende do tipo de reparo que está sendo usado, de um custo de espera na oficina de reparo e de um custo fixo de troca, quando o tipo de reparo muda de um tipo para o outro. O objetivo deste trabalho é obter uma política de controle ótima, de maneira a minimizar o custo médio por unidade de tempo do sistema a longo prazo.

Crabill (1974) e Winston (1977) consideraram o controle de sistemas de manutenção com taxa de reparo variável. Porém, em ambos os artigos, os sistemas de manutenção são analisados sem considerar um custo de troca quando muda a taxa de reparo.

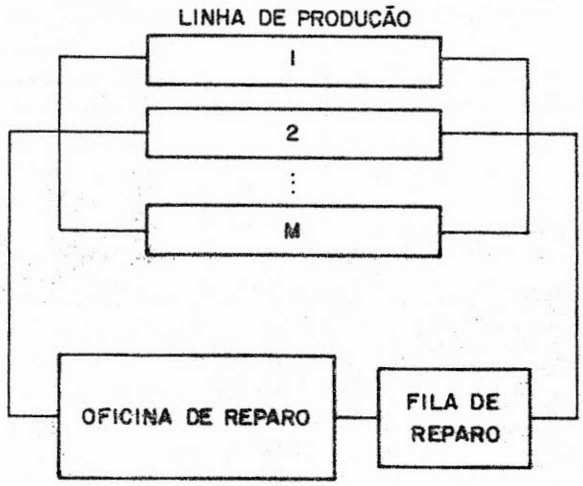

Fig. 1 - O sistema de manutenção.

Por outro lado, Cohen (1976) e Tijms (1977) estudaram o controle de sistemas de filas com taxa de reparo variável e com custos de troca. Porém, em ambos os artigos, a troca da taxa de reparo é baseada na quantidade de trabalho acumulado no sistema e não no tamanho da fila.

Tijms (1980) analisou um sistema de filas M/G/1 com dois tipos de serviço disponíveis e com custos de troca. A troca de tipo de serviço é baseada no tamanho da fila no sistema de serviço. Ele desenvolveu um algoritmo para computar o tipo de serviço ótimo para cada tamanho da fila, de maneira a minimizar o custo médio por unidade de tempo do sistema a longo.

No presente trabalho pretende-se introduzir um custo fixo de troca em um sistema de manutenção, quando o tipo de reparo é trocado na oficina. Então, o modelo de Tijms (1980) será modificado para avaliar tal sistema.

Na Seção 2 especifica-se o sistema de manutenção a ser estudado. Na Seção 3 descreve-se o cálculo dos custos e das probabilidades de transição. Na Seção 4 apresenta-se um algoritmo de iteração de políticas para computar os níveis ótimos de troca de tipo de reparo. Finalmente, na Seção 5, apresentam-se alguns resultados numéricos e algumas sugestões para estudos futuros.

2. ESPECIFICAÇÃO DO SISTEMA

Admitem-se as seguintes hipóteses para o sistema de manutenção descrito na Seção 1. Considera-se que o tempo até a quebra de cada máquina tem uma distribuição exponencial com tempo médio entre quebras igual a $1/\lambda$. O conserto de cada máquina usa um dos dois tipos de reparo disponíveis. Em qualquer instante de término de reparo, o servidor tem de decidir que tipo de reparo deve ser usado no próximo reparo. O tempo de reparo de uma máquina tem uma função de distribuição F_k, com média $1/\mu_k$, quando o tipo de reparo k é usado, onde $F(0) < 1$, para $k=1, 2$. Admite-se que $F_2(t) > F_1(t)$ para todo $t \geq 0$, de modo que o tipo de reparo 2 é mais "rápido" do que o tipo de reparo 1. Admite-se que $\lambda/\mu_2 < 1$. A estrutura de custos contém os seguintes custos: há um custo de espera com taxa h.i quando i máquinas estão esperando pelo reparo, e um custo de reparo a uma taxa r_k quando o servidor está ocupado e usa o tipo de reparo k. Além disso, incorre-se num custo de troca R_k quando, no instante de término de um reparo, o servidor decidir trocar do tipo de reparo k para o outro tipo. Admite-se que os parâmetros dos custos são não-negativos.

Este problema de controle pode ser representado por um modelo semimarkoviano de decisão em que os instantes de decisão são dados pelos instantes de término de reparo. Em qualquer instante de decisão, o sistema pode ser classificado em um dos estados do espaço de estados finito:

$$I = \{i \mid i=0,1, \ldots, M-1\} \cup \{i' \mid i'=0,1, \ldots, M-1\},$$

onde o estado i(i') corresponde à situação em que o número de máquinas na oficina de reparo é i e o tipo de reparo 1(2) foi usado para o último reparo concluído. Note-se que não tem sentido falar que há M máquinas esperando por reparo logo após o término de um reparo de uma máquina, porque no total existem somente M máquinas.

Para qualquer estado $i \in I$, o conjunto das ações disponíveis é dado por $A = \{1,2\}$, onde a ação k indica que o tipo de reparo k deve ser usado para o próximo reparo. Define-se a seguir o conjunto das políticas admissíveis.

Define-se uma política estacionária, denotada por f, como uma regra de controle que sempre escolhe uma ação única $f(i) \in A$ quando o estado do sistema é $i \in I$. Denota-se por F_0 a classe das políticas estacionárias que possuem a seguinte forma simples. Caracteriza-se ~~qualquer~~ política ~~admissível~~ $f \in F_0$ por dois níveis de troca I_1 e I_2, com $0 \leq I_2 \leq I_1$ e $I_1 \geq 1$. Sob esta política, denotada por $f = (I_1, I_2)$, o servidor troca do tipo de reparo 1 para o tipo de reparo 2 somente nos ~~ins~~tantes de término de reparo em que o tamanho da fila é maior do que I_1 e troca do tipo de reparo 2 para o tipo de reparo 1 somente nos instantes de término de reparo em que o tamanho da fila é menor ou igual ao valor I_2. Esta política de controle está representada na Figura 2.

O objetivo deste trabalho não é encontrar a política estacionária ótima mas sim a política ótima dentro da classe F_0. Para isto, definem-se primeiro as seguintes quantidades. Dado que no instante 0 o estado do sistema é $i \in I$ e escolhe-se a ação $k \in A$, definem-se:

$\tau(i,k)$ = tempo esperado até o próximo instante de decisão;

$P_{ij}(k)$ = probabilidade de que no próximo instante de decisão o estado do sistema seja j;

$c(i,k)$ = custo esperado incorrido até o próximo instante de decisão.

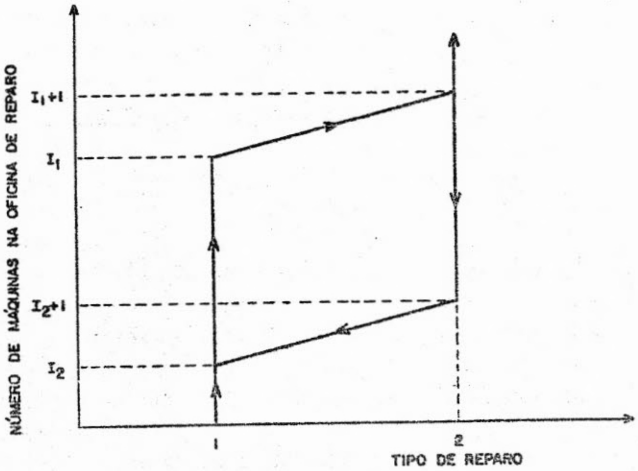

Fig. 2 - Controle de dois níveis para o tipo de reparo.

Na Seção 3 mostra-se como computar estas quantidades para o sistema de manutenção descrito nesta seção. Elas são necessárias para utilização no teorema seguinte (Tijms, 1980), que é de grande importância para o algoritmo de iteração de políticas apresentado na Seção 4.

TEOREMA 1 - *Para qualquer* $f \in f_0$,

$$w(i,f) = c(i,f(i)) - g(f)\,\tau(i,f(i)) + \\ + \sum_{j \in I} P_{ij}(f(i))\, w(j,f), \qquad (1)$$

onde g(f) *é o custo médio por unidade do sistema a longo prazo, sob a política* f, *e* w(i,f) *é a função de custo relativo.*

3. DETERMINAÇÃO DOS TEMPOS E CUSTOS ESPERADOS E DAS PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO

Nesta seção apresenta-se o método de obtenção dos tempos e custos esperados entre transições e das probabilidades de transição para o sistema de manutenção descrito na Seção 2.

Caso se adote a ação $k \epsilon A$ no estado $i \epsilon I$, então a distribuição do tempo até o próximo instante de decisão é igual à distribuição do tempo de reparo sob o tipo de reparo k, desde que $i \neq 0$, $0'$. Caso contrário, a distribuição do tempo até o próximo instante de decisão é igual à distribuição da soma do tempo entre quebras sucessivas com o tempo de reparo sob o tipo de reparo k. Assim, o tempo esperado até o próximo instante de decisão, $\tau(i,k)$, é dado por, para $k=1,2$:

$$\tau(i,k) = \tau(i',k) = 1/\mu_k, \text{ para } i \geq 1, \text{ e}$$

$$\tau(0,k) = \tau(0',k) = 1/(M-1)\lambda + 1/\mu_k. \tag{2}$$

Obtém-se a seguir as probabilidades de transição $P_{ij}(k)$. Seja N o número de máquinas que estão funcionando na linha de producão. Para $k=1,2$, define-se

$$P_k(n) = \int_0^\infty \binom{N}{n} \left(1-e^{-\lambda t}\right)^n \left(e^{-\lambda t}\right)^{N-n} dF_k(t). \tag{3}$$

Isto é, $P_k(n)$ é a probabilidade de que n máquinas quebrem durante um reparo sob o tipo de reparo k.

As probabilidades de transição $P_{ij}(k)$ podem ser expressas diretamente em termos das probabilidades $P_k(n)$. Seja a política $f = (I_1, I_2) \epsilon F_0$. Então, obtêm-se as probabilidades de transição sob esta política como se segue.

Para $I_1 < i \leq M-1$ e $i-1 \leq j \leq M-1$, tem-se que $f(i) = 2$ e então

$$P_{ij'}(f(i)) = P_2(j-i+1);$$

$$P_{ij}(f(i)) = 0.$$

Para $1 \le i \le I_1$ e $i-1 \le j \le M-1$, tem-se que $f(i) = 1$ e então

$$P_{ij}\ (f(i)) = P_1\ (j-i+1);$$

$$P_{ij'}\ (f(i)) = 0;$$

$$P_{0j}\ (f(i)) = P_{ij}\ (f(i));$$

$$P_{0j'}\ (f(i)) = 0.$$

Para $I_2 < i' \le M-1$ e $i-1 \le j \le M-1$, tem-se que $f(i') = 2$ e então

$$P_{i'j'}\ (f(i')) = P_2\ (j-i+1);$$

$$P_{i'j}\ (f(i)) = 0.$$

Para $0 \le i' \le I_2$ e $i-1 \le j \le M-1$, tem-se que $f(i') = 1$ e então

$$P_{i'j}\ (f(i')) = P_1\ (j-i+1);$$

$$P_{i'j'}\ (f(i')) = 0.$$

Antes de computar o custo $c(i,k)$, formulam-se os seguintes teoremas.

Considere-se que foi informado que exatamente uma quebra ocorreu no intervalo $[0,t]$ e seja pedido determinar a distribuição do instante em que esta quebra ocorreu. Esta pode ser determinada como $Pr(S \le s|N(t) = 1)$, onde S é o instante de quebra e $N(t)$ é o número de quebras durante o tempo t. Usando o fato de que $Pr(N(t)= n) = \binom{N}{n} \left(1-e^{-\lambda t}\right)^n \left(e^{-\lambda t}\right)^{N-n}$, onde N é o número de máquinas que estão funcionando na linha de produção, obtém-se que:

$$Pr(S \le s|N(t) = 1) = \frac{Pr(N(s)=1,\ N(t-s)=0)}{Pr(N(t)=1)}$$

$$= \frac{Pr(N(s)=1)\,Pr(N(t-s)=0\,|\,N(s)=1)}{Pr(N(t)=1)}$$

$$= \frac{N(1-e^{-\lambda s})\ (e^{-\lambda s})^{N-1}\ \left[e^{-\lambda(t-s)}\right]^{N-1}}{N(1-e^{-\lambda t})\ (e^{-\lambda t})^{N-1}}$$

$$= \frac{1-e^{-\lambda s}}{1-e^{-\lambda t}} . \tag{4}$$

Então,

$$E(S|N(t)=1) = \frac{1}{\lambda} - \frac{t\ e^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda t}} . \tag{5}$$

Formula-se a seguir o seguinte teorema que generaliza o resultado acima.

TEOREMA 2 - *Dado que* $N(t) = n$, *os instantes de quebra* $S_1, S_2, \ldots, S_n$ *têm a mesma distribuição que a estatística de ordem correspondente a* n *variáveis aleatórias independentes distribuídas como na Equação* 4 *no intervalo* $[0,t]$.

PROVA: A prova deste teorema encontra-se em Vakuiathil (1983). Ela é omitida aqui devido a sua extensão.

Formula-se agora o seguinte teorema. Dado que no instante 0 um reparo começa quando $i \geq 1$ máquinas estão esperando na fila de reparo, define-se:

ξ_i = tempo total gasto pelas máquinas na oficina de reparo enquanto o primeiro reparo ocorre.

TEOREMA 3 - *Para qualquer* $i \geq 1$,

$$E(\xi_i) = \frac{i}{\mu_k} + (M-i)\left[\frac{1}{\mu_k} - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\ dF_k(t)\right] . \tag{6}$$

PROVA: Dado que ocorrem n quebras no intervalo $[0,t]$, a distribuição conjunta desses n instantes de quebra é igual à da estatística de ordem de n variáveis aleatórias independentes com distribuição igual à apresentada na Expressão 4 no intervalo $[0,t]$. Seja T_1 a du ração do primeiro reparo e seja N o número de quebras durante este primeiro reparo. Então, levando em conta a Expressão 5, tem-se que, para qualquer $i \geq 1$,

$$E(\xi_i | N_1 = n,\ T_1 = t) = it + n \left[t - \frac{1}{\lambda} + \frac{t\, e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda t}} \right].$$

Usando propriedades da esperança condicional, chega-se à Expressão 6 e completa-se a prova do teorema.

Usando a Expressão 6 pode-se computar agora o custo esperado incorrido até o próximo instante de decisão, $c(i,k)$. Assim, para $i \geq 0$,

$$c(i,1) = \frac{h(iV1)}{\mu_1} + h(M-(iV1)) \left[\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, dF_1(t) \right] + \frac{r_1}{\mu_1};$$

$$c(i',2) = \frac{h(iV1)}{\mu_2} + h(M-(iV1)) \left[\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, dF_2(t) \right] + \frac{r_2}{\mu_2};$$

$$c(i,2) = R_1 + c(i',2);$$

$$c(i',1) = R_2 + c(i,1), \qquad (7)$$

onde $(iV1) = \max\ (i,1)$.

Completou-se assim o cálculo das quantidades necessárias para aplicação do algoritmo de iteração de políticas. Na próxima seção apresenta-se este algoritmo de iteração de políticas que obtém os níveis ótimos de troca I_1 e I_2 de maneira a minimizar o custo médio por unidade de tempo do sistema a longo prazo.

4. ALGORITMO DE ITERAÇÃO DE POLÍTICAS

Nesta seção descreve-se um algoritmo para computar os níveis ótimos de troca I_1 e I_2. Este algoritmo é baseado em Tijms (1980).

Passo 1: Este é um passo em que se escolhe uma política $f = (I_1, I_2)$ com $0 \leq I_2 \leq I_1$, $I_1 \geq 1$. Seja $f = (I_1, I_2) \varepsilon F_0$ a política atual. Calcule, usando a Equação 1, as quantidades $g(f)$ e $w(i,f)$, $i \varepsilon I$.

Antes de passar para o segundo passo, define-se a seguir a quantidade de teste $T(i,k,f)$, $i\varepsilon I$, $k\varepsilon A$, $f\varepsilon F_0$, para realizar a operação de melhoria de política:

$$T(i,k,f)=c(i,k)-g(f)\tau(i,k) + \sum_{j\varepsilon I} P_{ij}(k)w(j,f).$$

Assim, para $0 \leq i \leq I_2$,

$$T(i',2,f)=c(i',2)-g(f)\tau(i',2) + \sum_{j\varepsilon I} P_{ij}(2)w(j,f)$$

e, para $I_2 < i \leq I_1$,

$$T(i',1,f)=c(i',1)-g(f)\tau(i',1) + \sum_{j\varepsilon I} P_{ij}(1)w(j,f)$$

$$=R_1 + c(i,1)-g(f)\tau(i',1) + \sum_{j\varepsilon I} P_{ij}(1)w(j,f).$$

Passo 2: a) Determine primeiro um inteiro $\overline{I}_2$ tal que $0 \leq \overline{I}_2 \leq I_1$. Define-se $\overline{I}_2$ como o maior inteiro k tal que $I_2 < k \leq I_1$ e $T(i',1,f) < w(i',f)$ para todo $I_2 < i \leq k$ se existir tal inteiro k. Caso contrário, faça $\overline{I}_2$ igual a m-1, onde m é o menor inteiro tal que $1 \leq m \leq I_2$ e $T(i',2,f) < w(i',f)$ para todo $m \leq i \leq I_2$, se existir tal inteiro m, e, caso contrário, faça $\overline{I}_2 = I_2$.

Em seguida especificam-se as quantidades de teste para determinar um inteiro $\overline{I}_1$.

Para $i > I_1$,

$$T(i,1,f)=c(i,1)-g(f)\tau(i,1) + \sum_{j\varepsilon I} P_{ij}(1)w(j,f)$$

e, para $\overline{I}_2 \leq i \leq I_1$,

$$T(i,2,f) = c(i,2) - g(f)\tau(i,2) + \sum_{j \in I} P_{ij}(2) w(j,f)$$

$$= R_1 + c(i',2) - g(f)\tau(i,2) + \sum_{j \in I} P_{ij}(2) w(j,f).$$

b) A seguir, determine um inteiro $\overline{I}_1$ tal que $\overline{I}_2 \leq \overline{I}_1$ e $\overline{I}_1 \geq 1$. Define-se $\overline{I}_1$ como o maior inteiro k tal que $I_1 + 1 \leq k \leq M-1$ e $T(i,1,f) < w(i,f)$ para todo $I_1+1 \leq i \leq k$, se existir tal inteiro k. Caso contrário, faça $\overline{I}_1$ igual a m-1, onde m é o menor inteiro tal que $\overline{I}_2 < m \leq I_1$, $m \geq 2$, e $T(i,2,f) < w(i,f)$ para todo $m \leq i \leq I_1$, se existir tal inteiro m, e, caso contrário, faça $\overline{I}_1 = I_1$.

Passo 3: Seja $\overline{f} = (\overline{I}_1, \overline{I}_2)$. Se $\overline{f} = f$, então pare. Caso contrário, retorne ao Passo 1 com a política anterior $f = (I_1, I_2)$ substituída pela nova política $\overline{f} = (\overline{I}_1, \overline{I}_2)$.

O algoritmo pára após um número finito de iterações e $g(\overline{f}) < g(f)$ se a nova política $\overline{f} = (\overline{I}_1, \overline{I}_2)$ é diferente da política anterior $f = (I_1, I_2)$. Em todos os exemplos testados neste trabalho foi possível verificar numericamente a condição de otimalidade (veja-se Tijms, 1980) para a política finalmente obtida, de modo que esta política é ótima dentro da classe de políticas admissíveis F_0, de acordo com o critério de custo médio mínimo por unidade de tempo.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO

Este modelo foi testado adotando diferentes valores para h, r_k, R_k.

Considerem-se os seguintes exemplos com tempo de reparo exponencial: $M=3$, $\mu_1=1{,}25$, $\mu_2=1{,}875$, $r_1=5$, $\lambda=1$. A Tabela 1 mostra os níveis críticos da política ótima e o custo médio mínimo por unidade de tempo, para diferentes valores do custo de reparo, do custo de espera e do custo de troca. Pode-se notar da tabela que, quando o custo de reparo para o tipo de reparo 2, r_2, é comparativamente alto, o algoritmo obtém uma política ótima tal que o servidor nunca usa o tipo de reparo 2. Note-se que para $I_1=2$, o servidor nunca usa o tipo de reparo 2 a longo prazo e então têm-se os mesmos custos para as políticas (2,0) e (2,2). Além disso, se se aumentar os custos de troca do tipo de reparo (R_1 ou R_2), o algoritmo seleciona uma política ótima que evita estes altos custos de troca, ou seja, a política (2,0), que nunca usa o tipo de reparo 2. Note-se também que, quando o custo de espera for muito alto, o algoritmo encontra uma política ótima que facilita reparar as máquinas o mais rápido possível, ou seja, a política (1,0), que permite o uso do tipo de reparo 2.

TABELA 1

RESULTADOS NUMÉRICOS

r_2	h	R_1	R_2	$g(I_1^*, I_2^*)$	(I_1^*, I_2^*)
10	15	2	3	30,26892	(1, 0)
25	15	2	3	31,07658	(2, 2)
40	15	2	3	31,07658	(2, 2)
100	15	2	3	31,07658	(2, 2)
10	15	50	3	31,07658	(2, 0)
10	15	2	60	31,07658	(2, 0)
10	5	2	3	13,07658	(2, 2)
10	10	2	3	22,15316	(2, 0)
10	20	2	3	38,16177	(1, 0)
10	30	2	3	53,94746	(1, 0)

Este modelo pode ser estendido e modificado de diversas maneiras. Uma modificação possível consiste em considerar um sistema de manutenção com mais do que um servidor na oficina de reparo. Assim, uma comparação poderia ser feita entre a adição de mais servidores e o aumento na taxa de reparo. Esta modificação foi estudada por Costa (1984). Veja-se também Tijms (1980) para uma análise semelhante em um sistema de filas.

Outra modificação consiste em considerar mais do que dois tipos de reparo disponíveis. Neste caso, deve-se desenvolver um algoritmo semelhante ao da Seção 4.

Outra modificação consiste em analisar um sistema de manutenção com máquinas de reserva. Com uma única máquina de reserva, os resultados deste trabalho ainda se aplicam, bastando substituir nas fórmulas encontradas M por M+1. Isto ocorre porque sempre se observa o estado do sistema nos instantes de término de reparo e nesses instantes todas as máquinas em boas condições estão funcionando e não há mais máquinas de reserva disponíveis para substituir as máquinas quebradas. Quando o sistema contém mais do que uma máquina de reserva, as máquinas em excesso, em boas condições, esperam na fila da linha de produção e cada uma delas pode entrar na linha de produção para substituir uma máquina quebrada durante um tempo de reparo. Isto conduz a uma maior complexidade no cálculo das probabilidades de transição e dos custos e tempos esperados entre transições. O presente modelo não considera tal caso e o mesmo deve ser estudado separadamente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COHEN, J.W. On the optimal switching level for an M/G/1 queueing system. *Stochastic Processes and Their Applications*, 4:297-316, 1976.

CRABILL, T.B. Optimal control of a maintenance system with variable service rates. *Operations Research*, 22(4):726-745, 1974.

COSTA, S.R.X. *Um problema de determinação de política ótima em sistemas de manutenção com máquinas de reserva e número variável de servidores*. Dissertação de Mestrado em Análise de Sistemas e Aplicações. São José dos Campos, Instituto de Pesquisas Espaciais, 1984.

TIJMS, H.C. On a switch-over policy for controlling the workload in a queueing system with two constant service rates and a fixed switch-over cost. *Zeitschrift für Operations Research*, 21:19-32, 1977.

______ An algorithm for average costs denumerable state semi-Markov decision problems with applications to controlled production and queueing systems. In: HARTLEY, R.; THOMAS, L.; WHITE, D.J., ed. *Recent developments in Markov decision theory*. New York, Academic Press, 1980. p. 143-179.

VAKULATHIL, A. *Controle da taxa de reparo em um sistema de manutenção*. Tese de Mestrado em Pesquisa Operacional. São José dos Campos, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 1983.

WINSTON, W. Optimal control of discrete and continuous time maintenance systems with variable service rates. *Operations Research*, 25(2):259-268, 1977.