



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21b/2015/03.16.15.46-TDI

ABORDAGEM DE PARETO PARA A OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO DO DESEMPENHO DE UM CONTROLADOR SDRE APLICADO A UM SISTEMA NÃO LINEAR

Pierre Gaston Bigot

Dissertação de Mestrado do Curso
de Pós-Graduação em Engenharia
e Tecnologia Espaciais/Mecânica
Espacial e Controle, orientada pelo
Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza,
aprovada em 10 de abril de 2015.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3J69U48>>

INPE
São José dos Campos
2015

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

**COMISSÃO DO CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO
DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (DE/DIR-544):****Presidente:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Membros:

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Dr. Amauri Silva Montes - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espaciais (ETE)

Dr. André de Castro Milone - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas
(CEA)

Dr. Joaquim José Barroso de Castro - Centro de Tecnologias Espaciais (CTE)

Dr. Manoel Alonso Gan - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos
(CPT)

Dr^a Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SID)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação
(SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Marcelo de Castro Pazos - Serviço de Informação e Documentação (SID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21b/2015/03.16.15.46-TDI

**ABORDAGEM DE PARETO PARA A OTIMIZAÇÃO
MULTIOBJETIVO DO DESEMPENHO DE UM
CONTROLADOR SDRE APLICADO A UM SISTEMA
NÃO LINEAR**

Pierre Gaston Bigot

Dissertação de Mestrado do Curso
de Pós-Graduação em Engenharia
e Tecnologia Espaciais/Mecânica
Espacial e Controle, orientada pelo
Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza,
aprovada em 10 de abril de 2015.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3J69U48>>

INPE
São José dos Campos
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Bigot, Pierre Gaston.

B487a Abordagem de pareto para a otimização multiobjetivo do desempenho de um controlador SDRE aplicado a um sistema não linear / Pierre Gaston Bigot. – São José dos Campos : INPE, 2015. xxvi + 112 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21b/2015/03.16.15.46-TDI)

Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2015.

Orientador : Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza.

1. Controle SDRE. 2. Braço robótico rotativo rígido-flexível. 3. Controle não linear. 4. Otimização multiobjetivo. 5. Fronteira de pareto. I.Título.

CDU 517.57:629.7-048.34



Esta obra foi licenciada sob uma [Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](#).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](#).

Aprovado (a) pela Banca Examinadora
em cumprimento ao requisito exigido para
obtenção do Título de **Mestre** em

**Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica
Espacial e Controle**

Dr. Antonio Fernando Bertachini de
Almeida Prado



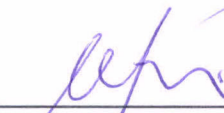
Presidente / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza



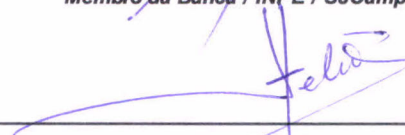
Orientador(a) / UNB / Brasília - DF

Dr. Mario Cesar Ricci



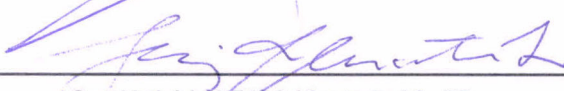
Membro da Banca / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Hélio Koiti Kuga



Membro da Banca / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Luiz de Siqueira Martins Filho



Convidado(a) / UFABC / Santo André - SP

Este trabalho foi aprovado por:

() maioria simples

(X) unanimidade

Título: "Abordagem de Pareto para a otimização multiobjetivo do desempenho de um controlador
SDRE aplicado a um sistema não linear".

Aluno (a): **Pierre Gaston Bigot**

São José dos Campos, 10 de abril de 2015

A minha família: Papa, Maman, Val e Vio que sempre estiverem do meu lado, assim que a minha futura família: Lorena, Annika e Amélie.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros e profundos agradecimentos,

A toda minha família, mesmo que muito longe daqui, pelo apoio moral sempre que precisei.

A meu orientador Luiz Carlos Gadelha de Souza, por me aceitar como seu orientado, pela ajuda nos processos administrativos necessários para conseguir um visto de estudo no Brasil e pelos conselhos técnicos.

A Lorena pela revisão detalhada da dissertação.

A todos os professores que participaram da minha formação durante o meu curso INPE.

A meus queridos amigos que me ajudaram muito quando cheguei ao Brasil: Mauro & Bete e Marianna.

A todos meus amigos, colegas de república, galera do Couch Surfing, galera do basquete e do polo aquático pelos bons momentos.

A CAPES, pela ajuda financeira que me possibilitou levar este curso mesmo tão longe do meu país.

Ao Brasil que me acolheu.

Ao futuro, Lorena, Annika e Amélie.

A todos, muito obrigado.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal o estudo do controlador baseado na Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE); um Regulador Quadrático Linear (LQR) adaptativo que permite considerar as não linearidades do sistema controlado. A fim de usar este controlador, desenvolve-se um modelo matemático não linear de um braço robótico rotativo com haste flexível aplicando a formulação Lagrangiana. O deslocamento flexível do braço robótico é modelado usando o método dos modos assumidos e o amortecimento estrutural faz uso da teoria de Rayleigh. Os objetivos de controle são múltiplos: controlar a posição angular do braço e minimizar as deformações flexíveis da haste. Via simulações computacionais, obtém-se o mapa de desempenho do sistema que mostra todos os desempenhos que o controlador SDRE pode atingir. Depois, um algoritmo de ordenação permite obter a fronteira de Pareto que representa o conjunto dos desempenhos ótimos. Por outro lado, analisando a influência dos termos das matrizes peso no desempenho do sistema, mostra-se que é possível obter desempenhos ótimos usando somente um número reduzido de termos para regular o controlador SDRE. Com base nesta análise, desenvolve-se uma lei que permite obter os valores das matrizes peso diretamente em função de um requisito de desempenho. Por último, são usadas matrizes peso dependentes do estado para mostrar que isso permite melhorar ainda mais o desempenho do sistema. A partir dos resultados obtidos, verifica-se que o controlador SDRE permite obter um melhor desempenho do que o LQR, não somente porque ele considera as não linearidades do modelo, mas também porque o seu ajuste é mais flexível.

PARETO APPROACH FOR PERFORMANCE MULTIOBJECTIVE OPTIMIZATION OF A SDRE REGULATOR APPLIED TO A NONLINEAR SYSTEM

ABSTRACT

The main objective of this work is to study the State Dependent Riccati Equation (SDRE) regulator; an adaptive Linear Quadratic Regulator (LQR) which allows to deal with the non linearities of the system to be controlled. In order to use this controller, a nonlinear mathematical model of a flexible rotatory beam is built through the Lagrangian formulation. The flexible displacement is modelled using the assumed modes theory and a structural damping is added applying the Rayleigh technique. There are two main objectives related to control: the first one is to control the hub angular position and the second one is the need to minimize flexible displacements of the robotic arm. Doing computational simulations, it is possible to draw the performance map of the system which map all SDRE reachable performances. Then, a sorting algorithm enables to get the Pareto's border which represents the set of optimal performances. On the other hand, analyzing the influence of the weight matrixes terms, it is shown that it is possible to get the Pareto's border performances using only a few terms of the SDRE weight matrixes. On the basis of this analysis, a law enabling to get weight matrixes' values in function of a required performance is developed. Last of all, state dependent weight matrixes are used to show that they can improve the system performance. Based on the results, it turned out that the SDRE's performance is better than the LQR's one, not only because it can deal with non linearities, but also because its design is more flexible.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
Figura 2.1 - O dispositivo FlexGage: um braço robótico rotativo rígido-flexível..	7
Figura 2.2 – Representação esquemática do sistema braço robótico rotativo rígido-flexível.	7
Figura 2.3 – Representação das forças atuando sobre um elemento infinitesimal da viga.	9
Figura 2.4 - Cinco primeiras funções de forma normalizadas de tal forma que os modos sejam ortogonais para uma viga de 41,9 cm	17
Figura 2.5 – Representação esquemática do braço robótico rotativo rígido-flexível com os parâmetros e as variáveis usados na modelagem matemática.	18
Figura 2.6 – Diagrama de blocos da viga.	25
Figura 2.7 – Representação esquemática do moto-reductor DC.	26
Figura 2.8 – Diagrama de blocos do moto-reductor DC detalhando as equações elétricas e mecânicas.	31
Figura 2.9 – Representação em diagrama de blocos do sistema “braço rotativo rígido-flexível” completo.	32
Figura 2.10 - Resultados de simulação experimental e computacional do sistema sujeito a um sinal de entrada combinando degrau, rampa e sinusoidal.	39
Figura 2.11 – Comparação entre a resposta real do sistema e as respostas de dois modelos com os parâmetros B_{eq} , E , ξ_1 e ξ_n diferentes.	41
Figura 2.12 – Resposta do sistema não linear com o amortecimento viscoso e estrutural função de θ	44
Figura 2.13 – Comparação dos termos lineares e não lineares relativos à inércia de rotação durante o movimento.	45
Figura 2.14 – Comparação dos termos lineares e não lineares relativos o amortecimento viscoso durante o movimento.	46
Figura 2.15 – Variação dos coeficientes de Rayleigh a e b durante o movimento.	46
Figura 2.16 – Diferenças entre as respostas do modelo não linear completo e do modelo não linear simplificado.	48
Figura 3.1 – Algoritmo SDRE.	54
Figura 3.2 – Representação da controlabilidade do sistema em função do tempo para diferentes valores de α_1 e α_3 e com $\alpha_2 = 0.5$	59

Figura 3.3 – Paralelo entre os instantes de perda de controlabilidade e o comportamento do sistema.	60
Figura 4.1 – Representação dos objetivos de desempenho: tempo de estabilização de θ na faixa de $\pm 5\%$, amplitude máxima do deslocamento flexível e energia necessária para realizar a manobra.	67
Figura 3.4 – Representação esquemática do espaço de design, conjunto das matrizes Q e R estabilizando o sistema e do espaço de desempenho, representando os desempenhos atingíveis e os desempenhos ótimos do sistema na fronteira de Pareto.	69
Figura 4.2 – Comportamentos do sistema controlado via SDRE com e sem normalização das matrizes peso para uma entrada tipo degrau de 120°	71
Figura 4.3 – Análise da influência do peso Ru no comportamento do sistema com os pesos $Q\theta, Qq, Q\theta, Qq = 1$	73
Figura 4.4 - Análise da influência do peso $Q\theta$ no comportamento do sistema com os pesos $Qq, Q\theta, Qq = 1$ e $Ru = 1000$	75
Figura 4.5 - Análise da influência do peso Qq no comportamento do sistema com os pesos $Q\theta, Q\theta, Qq = 1$ e $Ru = 1000$	76
Figura 4.6 – Análise da influência do peso $Q\theta$ no comportamento do sistema com os pesos $Q\theta, Qq, Qq = 1$ e $Ru = 1000$	77
Figura 4.7 - Análise da influência do peso Qq no comportamento do sistema com os pesos $Q\theta, Qq, Q\theta = 1$ e $Ru = 1000$	78
Figura 4.8 – Mapa de desempenho do braço robótico rotativo rígido-flexível controlado por SDRE obtido com os valores de desempenho de 31500 simulações diferentes usando pesos de controle Q e R diferentes.	80
Figura 4.9 – Interpolação da fronteira de Pareto do braço robótico rotativo rígido-flexível controlado via SDRE por funções matemáticas simples.	81
Figura 4.10 – Mapa de desempenho do braço robótico rotativo rígido-flexível destacando os desempenhos obtidos para diferentes valores do peso Ru	82
Figura 4.11 - Mapa de desempenho do braço robótico rotativo rígido-flexível destacando os desempenhos obtidos para diferentes valores do peso $Q\theta$	83
Figura 4.12 – Mapa de desempenho do braço robótico rotativo rígido-flexível destacando os desempenhos obtidos para diferentes valores do peso Qq	84

Figura 4.13 – Identificação do desempenho obtido por diferentes valores de $Q\theta$ com $Qq \in 0.11000$ e os outros pesos constantes: $R = 1000R$, $Q\theta = 1$, $Qq = 1$.	85
Figura 4.14 – Identificação do desempenho obtido por diferentes valores de Qq com $Q\theta \in 0.12$ e os outros pesos constantes: $R = 1000R$, $Q\theta = 1$, $Qq = 1$.	86
Figura 4.15 – Combinações dos pesos $Q\theta$ e Qq que permitem obter desempenhos similares a fronteira de Pareto. Os outros pesos são constantes: $R = 1000R$, $Q\theta = 1$ e $Qq = 1$.	87
Figura 4.16 – Valores dos objetivos de desempenho em função do peso Qq com os outros pesos constantes: $R = 1000R$, $Q\theta = 0.2$, $Q\theta = 1$ e $Qq = 1$.	88
Figura 4.17 – Interpolação da relação entre o tempo de estabilização $Tr5\%$ e o peso Qq com polinômio de quarto grau.	89
Figura 4.18 – Comparação entre os desempenhos na fronteira de Pareto e os desempenhos obtidos usando a lei $Qq = PTr5\%$.	90
Figura 4.19 – Comparação entre os desempenhos possíveis com o peso $Q\theta$ dependente do estado θ ou constante.	93
Figura 4.20 – Comparação do mapa de desempenho e da fronteira de Pareto dos controladores SDRE e LQR.	94
Figura 4.21 - Comparação dos mapas de desempenho obtidos com controladores LQR, SDRE usando pesos constantes e SDRE usando o peso $Q\theta$ dependente do estado θ .	95
Figura 4.22 - Comparação do melhor desempenho verificando $yLmax < 3$ cm para os controladores LQR, SDRE usando pesos constantes e SDRE usando o peso $Q\theta$ dependente do estado θ .	97
Figura 5.1 – Controle SDRE do braço robótico FlexGage com estimador de estados.	101
Figura 5.2 – Planta generalizada do braço robótico com incertezas paramétricas nas matrizes de massa, amortecimento e rigidez.	102
Figura B.1 - Modelo Simulink do sistema controlado completo: planta do braço robótico rotativo e controlador SDRE.	109
Figura B.2 – Modelo Simulink do controlador SDRE.	110
Figura.B.3 - Modelo Simulink da planta: braço robótico rotativo rígido-flexível.	111
Figura B.4 - Bloco calculado o inverso da matriz massa $M - 1$ e a segunda derivada de θqT .	111

Figura B.5 - Bloco permitindo calcular a parte não linear N_n da matriz de amortecimento N em função dos valores dos estados do sistema x	112
--	-----

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
Tabela 2-1 - A deflexão e as suas derivadas	13
Tabela 2-2 - Primeiras soluções da equação característica de uma viga livre- presa	15
Tabela 2-3 - Interpretação física do amortecimento em função do número de período de oscilação necessário para reduzir de um fator 10 as oscilações.....	37
Tabela 2-4 - Valores dos parâmetros utilizados para a identificação do sistema.	40
Tabela 2-5 – Valores dos coeficientes estáticos e dinâmicos de amortecimento viscoso e estrutural.	43
Tabela 4-1 – Valores dos pesos utilizados para a criação do mapa de desempenho do braço robótico rígido-flexível controlado por SDRE.	79
Tabela 4-2 – Valores dos erros relativos do tempo de estabilização e do deslocamento flexível máximo usando a lei $Qq = PTr5\%$	91

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

LQR	Regulador Linear Quadrático (do inglês “ <i>Linear Quadratic Regulator</i> ”)
SDRE	Equação de Riccati Dependente do Estado (do inglês “ <i>State Dependent Riccati Equation</i> ”)
ARE	Equação Algébrica de Riccati (do inglês “ <i>Algebraic Riccati Equation</i> ”)
SDARE	Equação Algébrica de Riccati Dependente do Estado (do inglês “ <i>State Dependent Algebraic Riccati Equation</i> ”)
SDC	Coefficientes Dependentes do Estado (do inglês “ <i>State Dependent Coeficientes</i> ”)

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{R}^n	Conjunto dos vetores de números reais de dimensão n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjuntos das matrizes de números reais de n linhas e m colunas
$\mathbb{N}^{[n_i, n_f]}$	Números naturais de n_i até n_f
$\mathbb{R}^{[a, b]}$	Números reais de a até b
\mathbb{R}^*	Conjuntos dos números reais com exceção do elemento nulo 0.
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$	Função pegando valores em \mathbb{R} com imagens em \mathbb{N} .
Γ_l	Torque do moto-redutor aplicado à viga.
U_m	Tensão de alimentação do motor.
θ	Ângulo de rotação do motor e coordenada generalizada rígida.
y	Deslocamento flexível de um ponto da viga.
y_L	Deslocamento flexível na extremidade da viga.
α	Ângulo de deslocamento flexível em um ponto da viga.
α_L	Ângulo de deslocamento flexível na extremidade da viga.
Q	Força de cisalhamento.
M	Momento fletor.
E	Modulo de Young.
I_z	Momento de inércia da seção em rotação em torno do eixo Z .
K_b	Rigidez.
e	Espessura da viga.
h	Largura da viga.
L	Comprimento da viga.
ρ	Densidade linear.
Φ	Vetor das funções de forma.
Φ_i	Função de forma associada ao modo de vibração i .
\mathbf{q}	Vetor dos modos de vibração e vetor das coordenadas generalizadas flexíveis.
q_i	Modo de vibração i e coordenada generalizada flexível i .
ω	Vetor das frequências de vibração.
ω_i	Frequência de vibração do modo i .
β	Vetor das pulsações espaciais.

β_i	Pulsção espacial do modo i .
n	Número de modos considerados.
T	Energia cinética.
V	Energia potencial.
\mathcal{L}	Função Lagrangiana.
F_i	Força generalizada associada à coordenada generalizada i .
p_i	Coordenada generalizada i .
Ω_l	Taxa de rotação do motor no eixo de saída ($\Omega_l = \dot{\theta}$).
C_m	Uma constante do motor.
B_{eq}	Coefficiente de fricção equivalente do motor e da engrenagem.
\mathbf{M}	Matriz massa.
\mathbf{N}	Matriz de amortecimento.
\mathbf{K}	Matriz de rigidez.
\mathbf{F}	Vetor das forças.
a, b	Coefficientes de Rayleigh para o amortecimento estrutural.
\mathbf{x}	Vetor dos estados do sistema.
\mathbf{u}	Vetor dos sinais de controle.
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$	Matrizes modelando o sistema no espaço dos estados.
\mathbf{Q}	Matrix peso do LQR/SDRE relativa aos estados \mathbf{x} do sistema.
\mathbf{R}	Matrix peso do LQR/SDRE relativa aos controles \mathbf{u} do sistema.
$\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{R}}$	Matrizes peso normalizadas.
Q_{x_i}	Peso da matriz peso \mathbf{Q} associado ao estado x_i .
\mathbf{P}	Solução da equação de Riccati.
\mathbf{K}	Vetor dos ganhos de realimentação do sistema de controle.
θ_c	Valor do posicionamento angular θ a ser atingido pelo controlado.
$T_{r5\%}$	Tempo de estabilização do posicionamento angular na faixa $\pm 5\% \theta_c$.
y_{Lmax}	Amplitude máxima (valor absoluto) do deslocamento flexível y_L .
E_u	Energia de controle necessária para realizar a manobra.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1. Motivação.....	1
1.2. Objetivos	2
1.3. Contribuição principal	3
1.4. Breve revisão bibliográfica	3
1.5. Organização da dissertação	4
2 MODELAGEM	7
2.1. Método dos modos assumidos	8
2.1.1. Equação geral de uma viga uniforme em vibração transversal	9
2.1.2. Solução da equação de vibração.....	11
2.1.3. Condições iniciais e condições de contorno	12
2.2. Equação do movimento da viga.....	17
2.2.1. Cinemática.....	18
2.2.2. Energias cinética e potencial	19
2.2.3. Formulação Lagrangiana	22
2.2.3.1. Equação de Lagrange do modo rígido.....	23
2.2.3.2. Equações de Lagrange dos modos flexíveis	24
2.3. Equação de funcionamento do motor	25
2.3.1. Equação elétrica	26
2.3.2. Equação mecânica	27
2.3.3. Relação entrada saída.....	29
2.4. Equações do sistema completo	31

2.5. Amortecimento estrutural	33
2.5.1. Amortecimento de Rayleigh: teoria	33
2.5.2. Amortecimento de Rayleigh: adição ao modelo	37
2.6. Validação do modelo	38
2.6.1. Ajuste do modelo matemático	40
2.6.2. Adição de amortecimento dinâmico	42
2.6.3. Análise da influência dos termos não lineares	44
3 CONTROLE SDRE	49
3.1. Função de custo quadrática	50
3.2. Equação SDARE	51
3.3. Parametrização SDC	55
3.3.1. Parametrização da equação	55
3.3.2. Parametrização SDC do modelo do braço robótico	56
3.3.3. Controlabilidade das diferentes parametrizações SDC	58
3.4. Matrizes peso do SDRE Q e R	60
3.4.1. Influência das matrizes peso	61
3.4.2. Normalização das matrizes peso	62
3.4.3. Pesos dependentes do estado	63
4 SIMULAÇÃO E RESULTADOS	65
4.1. Otimização multiobjetivo com abordagem de Pareto	65
4.1.1. Objetivos de desempenho	66
4.1.2. Abordagem clássica da otimização multiobjetivo	67
4.1.3. Fronteira de Pareto	68
4.2. Normalização das matrizes peso	69

4.3. Análise das influências dos termos das matrizes peso	72
4.3.1. Matriz peso R	72
4.3.2. Matriz peso Q	74
4.4. Mapa de desempenho	79
4.4.1. Identificação da fronteira de Pareto	81
4.4.2. Identificação da influência dos pesos no mapa de desempenho	82
4.5. Uma lei para calcular os pesos em função do desempenho	84
4.5.1. Pesos que permitem atingir a fronteira de Pareto	85
4.5.2. Peso Q_q em função do desempenho desejado	87
4.5.3. Verificação da lei de cálculo das matrizes peso	90
4.6. Peso Q_0 dependente do estado	92
4.7. Comparação SDRE - LQR	94
5 CONCLUSÃO	99
5.1. Trabalhos futuros	100
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	107
APÊNDICE A - DOCUMENTAÇÃO TÉCNICA DO SRV02	110
APÊNDICE B - MODELAGEM SIMULINK	113

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas físicos complexos, na sua grande maioria, são de natureza não linear. Por outro lado, grande parte dos métodos de controle usualmente empregados foram desenvolvidos para sistemas lineares, isso faz com que os modelos dos sistemas devam ser linearizados. Essa aproximação é geralmente válida, sendo possível controlar o sistema não linear com técnicas lineares. Porém, existem algumas situações em que os sistemas são altamente não lineares, por exemplo, quando se realizam manobras de atitude com grandes ângulos ou quando se movem estruturas flexíveis com alta velocidade. Neste caso, o controlador, projetado a partir de um modelo linear, não é capaz de controlar o sistema real. Para poder solucionar este tipo de problema foram desenvolvidas técnicas de controle que são capazes de considerar as não linearidades do sistema (SLOTINE et al., 1991). Uma delas é o controlador da Equação de Riccati Dependente do Estado (ÇİMEN, 2008, 2012; MRACEK et al., 1998)(SDRE, do inglês *State Dependent Riccati Equation*). O SDRE é uma adaptação do Regulador Quadrático Linear (KWAKERNAAK et al., 1972, cap. 3)(LQR, do inglês *Linear Quadratic Regulator*) para sistemas não lineares.

1.1. Motivação

O ajuste do controlador SDRE é feito mediante duas matrizes peso que estão associadas diretamente aos estados e o sinal de controle (KATSEV, 2006). Essa regulagem é de extrema importância, pois é a escolha correta dos pesos (i.e. termos das matrizes peso) que garante a estabilidade e o bom desempenho do sistema. Para alguns controladores existem técnicas que permitem regular os pesos de maneira sistemática; por exemplo, técnicas de auto-regulagem do controle Proporcional Integral Derivativo (McCORMACK et al., 1998) como os métodos de Ziegler-Nichols (ZIEGLER et al., 1942). Os pesos do SDRE podem ser inicialmente escolhidos com a regra de Bryson (BRYSON et al., 1975) mas isso é geralmente só o ponto inicial de um processo de tentativa e erro para obter o desempenho desejado (HESPANHA, 2005, p. 7). Além disso, não é garantido que os pesos escolhidos forneçam um desempenho ótimo, sempre fica a dúvida de saber se não existe outra

combinação de pesos que permitiria um melhor desempenho. Assim, para evitar o método de tentativa e erro, este trabalho quer propor um método mais sistemático para obter os pesos do controlador SDRE que otimizem o desempenho do sistema.

1.2. Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é estudar as possibilidades de ajuste do controlador SDRE, um controlador LQR “generalizado” tendo a vantagem de poder considerar as não linearidades do modelo, para mostrar que o ajuste dele é mais flexível do que o do LQR e que isso permite obter um melhor desempenho. Para aplicar o controle SDRE, pretende-se desenvolver um modelo matemático não linear da dinâmica de um braço robótico rotativo rígido-flexível sobre o qual é realizado o controle da posição angular. O braço robótico é uma haste flexível acoplada a um servomotor que gira no plano horizontal.

Na modelagem matemática da viga, esta é considerada do tipo Euler-Bernoulli, os modos de vibração são modelados usando o método dos modos assumidos (JUNKINS et al., 1993), o amortecimento estrutural segue a teoria de Rayleigh (WILSON, 1996) e as não linearidades são de primeira ordem (SAAD et al., 2012). Para validar este modelo matemático, os resultados de simulação computacional em malha aberta são comparados com os resultados experimentais do sistema real: o dispositivo FlexGage da Quanser®.

O controlador SDRE tem dois objetivos de controle: primeiro ele precisa controlar a posição angular do braço robótico e segundo, ele precisa minimizar o deslocamento flexível da haste; assim, trata-se de controle multiobjetivo. Para realizar o melhor controle possível, i.e., aquele que otimiza os dois objetivos de desempenho (BOYD et al., 1991), deve ser estudado qual é a influência dos pesos (i.e. termos das matrizes peso) do controlador SDRE sobre o desempenho do sistema. Entretanto, como tem-se vários objetivos de desempenho, existem vários conjuntos de pesos fornecendo um desempenho ótimo: eles formam a fronteira de Pareto (PARETO, 1971). Um dos objetivos é identificar a fronteira de Pareto do sistema controlado para saber qual é o

melhor desempenho que o sistema de controle permite atingir. Uma vez a fronteira de Pareto identificada, pretende-se identificar uma maneira de calcular as matrizes peso do controlador SDRE que permitem obter um desempenho ótimo (na fronteira de Pareto) escolhendo apenas o desempenho desejado. O último objetivo é mostrar que é possível melhorar o desempenho do sistema utilizando matrizes peso dependentes do valor do estado do sistema.

Portanto, os objetivos deste trabalho podem ser resumidos como segue: (1) desenvolver o modelo matemático do braço robótico rotativo rígido-flexível, (2) desenvolver o controlador SDRE, (3) identificar a fronteira de Pareto do sistema controlado via SDRE, (4) obter uma lei que permite calcular as matrizes peso com base nos objetivos de desempenho, (5) melhorar o desempenho do SDRE usando uma matriz peso dependente do estado, (6) verificar que o desempenho obtido com controle SDRE é melhor do que aquele obtido com controle LQR.

1.3. Contribuição principal

A contribuição principal deste trabalho é propor uma metodologia sistemática para a seleção dos termos das matrizes peso do controlador SDRE de forma que o controlador formado otimize o desempenho do sistema controlado. Com esta metodologia o projetista escolhe unicamente quais são os critérios de desempenho que ele considera. Assim, a escolha difícil dos valores numéricos das matrizes peso passa a ser unicamente uma escolha de critérios de desempenho.

1.4. Breve revisão bibliográfica

Existem muitos trabalhos na literatura tratando da modelagem de estruturas rígido-flexíveis. Mesmo se a grande maioria dos trabalhos não considerar as não linearidades e desprezar todos os termos não lineares, Saad et al. (2012) propõe uma modelagem não linear de um braço robótico rotativo rígido flexível. O modelo que ele apresenta é relativamente genérico, pois ele considera a

rotação do braço em um plano qualquer (efeito da gravidade) e considera uma massa na ponta (carga útil).

Castro (2005) propõe dois modelos do braço robótico do dispositivo FlexGage da Quanser®: o modelo massa-mola e o modelo dos modos assumidos. Neste estudo ele aplica o controle LQR e LQG experimentalmente.

Mainenti-Lopes (2008) determina os ganhos de controle de uma lei do tipo proporcional derivativo (PD) visando a controlar a atitude de um satélite rígido-flexível aplicando o método de Otimização Extrema Generalizada (GEO) para obter o controlador que otimize o tempo de estabilização do sistema e a energia necessária para realizar a manobra.

No seu estudo, SHAWKY et al. (2007) aplica as técnicas de controle SDRE e H_∞ para controlar um braço robótico rotativo rígido-flexível.

A técnica de controle SDRE é relativamente recente (MRACEK et al., 1998; PARRISH et al., 1997) e é ainda o assunto de muitas pesquisas. O estado da arte desta técnica se encontra nos artigos de Çimen (2008, 2010, 2012).

Existem também alguns trabalhos relativos à aplicação da técnica de controle SDRE para controlar a atitude de satélite (GONZALES, 2009; PARRISH et al., 1997).

1.5. Organização da dissertação

No primeiro capítulo deste trabalho é feita uma breve introdução sobre o problema do controle SDRE para sistemas não lineares, apresentando algumas referências bibliográficas importantes. Depois, são apresentadas as motivações que levaram à realização deste trabalho assim como os objetivos do estudo.

No segundo capítulo é desenvolvido um modelo não linear de um braço robótico rígido-flexível girando no plano horizontal. As equações do movimento são desenvolvidas usando o formalismo lagrangiano. A modelagem é baseada no método dos modos assumidos e o amortecimento estrutural é modelado com o método de Rayleigh.

No terceiro capítulo é estudado e desenvolvido o controlador SDRE. Assim, primeiro é apresentado as bases teóricas do controle SDRE, é realizada a parametrização das equações do modelo do braço robótico para obter o formato matricial próprio à aplicação do controle SDRE e por último estuda-se a influência e a forma das matrizes peso utilizadas para regular o controlador SDRE.

O quarto capítulo apresenta os resultados dos diferentes estudos realizados nesta dissertação. Primeiro, no início do capítulo, são identificados quais são os objetivos de controle e aborda-se brevemente os conceitos de otimização multiobjetivo e de fronteira de Pareto aplicando-os ao caso do controlador SDRE. Em seguida, são apresentados os resultados da influência de cada peso das matrizes peso do SDRE. Analisando essas influências é obtida uma lei para obter uma matriz peso dependente dos estados. Em outra seção, é construído o mapa de desempenho do sistema controlado por SDRE e identificada sua fronteira de Pareto; a análise deste mapa leva a construção de uma lei permitindo calcular as matrizes peso que fornecem os desempenhos ótimos da fronteira de Pareto em função do desempenho desejado. Por último é apresentado a comparação dos desempenhos obtidos com os controladores SDRE e LQR.

Por fim, no quinto capítulo, é apresentada a conclusão final do trabalho, incluindo ideias para futuros trabalhos que deem continuidade ao atual.

2 MODELAGEM

O sistema estudado é o dispositivo FlexGage da Quanser®: um braço robótico rotativo rígido-flexível com um grau de liberdade em rotação. Esse dispositivo é representado na Figura 2.1



Figura 2.1 - O dispositivo FlexGage: um braço robótico rotativo rígido-flexível.

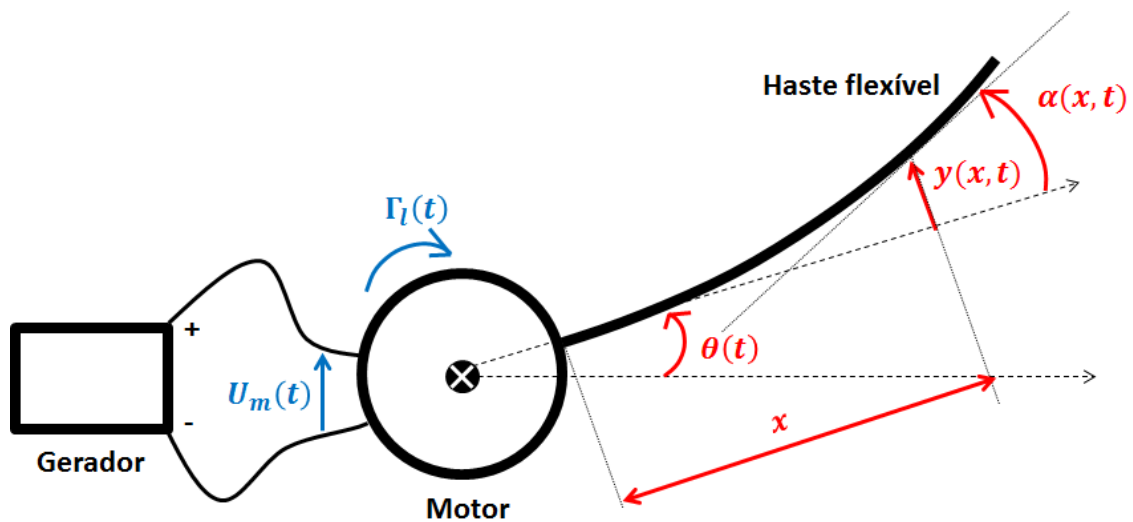


Figura 2.2 – Representação esquemática do sistema braço robótico rotativo rígido-flexível.

A rotação do motor desse dispositivo induz dois movimentos; primeiro, a rotação da haste flexível no plano horizontal: é o movimento rígido, segundo, a deflexão da haste flexível induzida pelo movimento rígido: é o movimento

flexível. A Figura 2.2 representa esses movimentos de maneira esquemática. U_m e Γ_l são respectivamente a tensão de alimentação do motor e o torque do motor aplicado à viga. θ é o ângulo de rotação do motor, y é a deflexão da viga e α é a deflexão angular.

Nesta seção é apresentado primeiro o método dos modos assumidos (seção 2.1) que permite calcular as equações do movimento da haste flexível (seção 2.2). Depois, realiza-se a modelagem do motor (seção 2.3). Em seguida, juntam-se os modelos do motor e da viga para obter o modelo completo do braço robótico rotativo rígido-flexível (seção 2.4). Depois, adiciona-se amortecimento estrutural ao modelo usando a teoria de Rayleigh (seção 2.5). Por último, realiza-se a validação do modelo completo comparando o comportamento do modelo matemático com o comportamento da simulação experimental (seção 2.6).

2.1. Método dos modos assumidos

Nesse trabalho, considera-se uma viga flexível nas condições de Euler-Bernouilli (HAN et al., 1999):

1. O formato da viga é um prisma reto, cujo comprimento é muito maior do que as outras dimensões.
2. O ângulo de rotação (deformação elástica) é muito pequeno.
3. A viga é constituída de material homogêneo.
4. A viga é constituída de um material linearmente elástico.
5. A deformação transversal em relação à direção longitudinal de aplicação da carga é considerada nula (i.e. o Coeficiente de Poisson é desprezível).
6. A seção transversal é simétrica em relação ao plano vertical, de forma que a linha neutra está contida nele.

7. Planos perpendiculares à linha neutra permanecem planos e perpendiculares depois da deformação.
8. Os efeitos do momento de inércia de rotação são desprezados.
9. A energia envolvida no cisalhamento é desprezada.

2.1.1. Equação geral de uma viga uniforme em vibração transversal

Para modelar o deslocamento flexível $y(x, t)$ pode-se analisar quais são as forças que atuam em um elemento infinitesimal dx da viga. A Figura 2.3 representa essas forças.

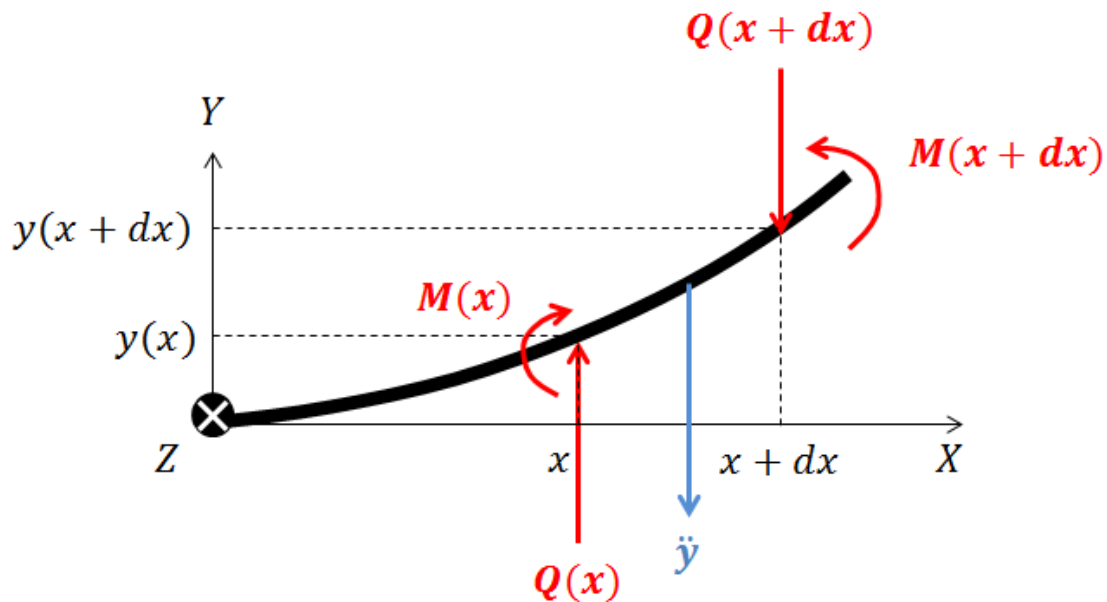


Figura 2.3 – Representação das forças atuando sobre um elemento infinitesimal da viga.

Na Figura 2.3, Q é a força de cisalhamento e M é o momento fletor. É bom lembrar uma das propriedades do cálculo diferencial: seja uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivável em \mathbb{R} então $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \quad (2.1)$$

Segundo a segunda lei de Newton, a resultante das forças aplicadas no elemento dx é igual ao produto massa/aceleração desse elemento. Aplicando essa lei em projeção no eixo Y obtém-se a equação seguinte:

$$Q(x) - Q(x + dx) = -\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

Em seguida, usando a Equação (2.1) pode-se deduzir que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

Também, a equação dos torques segundo o eixo Z_0 no ponto $x + dx$ é:

$$M(x + dx) - M(x) - Q(x)dx = 0 \quad (2.4)$$

Usando outra vez a propriedade do calculo diferencial Equação (2.1) obtém-se

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q \quad (2.5)$$

Conclui-se combinando Equação (2.3) e Equação (2.5) que

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

O momento fletor pode ser descrito também em função da rigidez K_b da viga:

$$K_b = EI_z \quad (2.7)$$

A rigidez é definida como o produto do modulo de Young E (propriedade do material) e do momento de inércia da seção I (função das características geométricas da viga). Para uma viga prismática de espessura e , largura h e comprimento L , o momento de inércia da seção no eixo Z da rotação do braço é

$$I_z = \frac{he^3}{12} \quad (2.8)$$

e o momento fletor é dado por

$$M = -EI_z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.9)$$

Combinando as Equações (2.6) e (2.9) obtém-se a equação geral de uma viga uniforme em vibração transversal:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho}{EI_z} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2.10)$$

2.1.2. Solução da equação de vibração

Uma maneira clássica de resolver a Equação (2.10) é procurar uma solução y que seja o produto de uma função temporal q e de uma função do espaço Φ :

$$y(x, t) = \Phi(x)q(t) \quad (2.11)$$

Adotando essa forma para y , a Equação (2.10) pode se reescrever como

$$\frac{d^4 \Phi(x)}{dx^4} q(t) + \frac{\rho}{EI_z} \Phi(x) \frac{d^2 q(t)}{dt^2} = 0 \quad (2.12)$$

ou ainda

$$\underbrace{\frac{1}{\Phi(x)} \frac{d^4 \Phi(x)}{dx^4}}_{f(x)} = - \underbrace{\frac{\rho}{EI_z} \frac{1}{q(t)} \frac{d^2 q(t)}{dt^2}}_{g(t)} \quad (2.13)$$

Como f é função somente do espaço x e g é função somente do tempo t , a única maneira de ter essa igualdade $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$ é que

$$\exists K \in \mathbb{R} / \begin{cases} \frac{1}{\Phi(x)} \frac{d^4 \Phi(x)}{dx^4} = K \\ -\frac{\rho}{EI_z} \frac{1}{q(t)} \frac{d^2 q(t)}{dt^2} = K \end{cases} \quad (2.14)$$

ou, reorganizando os termos

$$\exists K \in \mathbb{R} / \begin{cases} \frac{d^4 \Phi(x)}{dx^4} - K \Phi(x) = 0 \\ \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + K \frac{EI_z}{\rho} q(t) = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

A Equação (2.15) apresenta um sistema de duas equações diferenciais lineares independentes. As soluções são conhecidas e são da forma:

$$\exists (A, B, C, D, \beta) \in \mathbb{R}^5 / \begin{cases} \Phi(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x + C \cosh \beta x + D \sinh \beta x \\ \beta^4 = K \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\exists (E, F, \omega) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} q(t) = E \cos \omega t + F \sin \omega t \\ \omega^2 = \frac{KEI_z}{\rho} \end{cases} \quad (2.17)$$

onde ω é a pulsação temporal chamada de frequência natural de vibração e β é a pulsação espacial. Usando as Equações (2.16) e (2.17), pode-se deduzir uma relação entre essas duas frequências:

$$\beta^4 = \frac{\rho \omega^2}{EI_z} \quad (2.18)$$

Uma vez conhecida a forma de Φ e de q , precisam-se determinar as constantes A, B, C, D, E, F e β para caracterizar totalmente $y(x, t)$.

2.1.3. Condições iniciais e condições de contorno

As constantes E e F da Equação (2.17) dependem das condições iniciais do movimento. Elas podem ser determinadas sabendo o deslocamento flexível inicial $y(L, 0)$ e a velocidade de deslocamento flexível inicial $y'(L, 0)$.

As constantes A, B, C e D da Equação (2.18) dependem das condições de contorno físicas, ou seja, das condições nas extremidades do braço. Aqui a viga é fixa em $x = 0$, assim não existe deslocamento flexível em posição e ângulo nessa extremidade. Matematicamente isso é

$$y(0, t) = 0 \quad \alpha(0, t) = 0 \quad (2.19)$$

A relação entre a deflexão y e a deflexão angular α é de forma:

$$\alpha(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (2.20)$$

Na outra extremidade, em $x = L$ a viga é livre de qualquer esforço ou torque; matematicamente:

$$M(L, t) = 0 \quad Q(L, t) = 0 \quad (2.21)$$

Os resultados das Equações (2.5), (2.9) e (2.20) são resumidos na tabela seguinte:

Tabela 2-1 - A deflexão e as suas derivadas

Grau de derivação da deflexão y	Nome	Símbolo	Fórmula
0	Deflexão / Deslocamento flexível	y	y
1	Deflexão angular	α	$\frac{\partial y}{\partial x}$
2	Momento fletor	M	$-EI_z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$
3	Força de cisalhamento	Q	$-EI_z \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$

Usando essa tabela podem-se reescrever as condições de contorno das Equações (2.19) e (2.21) em função de y :

$$\begin{cases} y(0, t) = 0 & \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L, t) = 0 & \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(L, t) = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Como essas condições são validas para $\forall t \in \mathbb{R}^+$, usando a Equação (2.11) obtém-se essas condições em função da função de forma. Adotando a notação $\Phi'(x) = d\Phi/dx$, obtém-se

$$\begin{cases} \Phi(0) = 0 & \Phi'(0) = 0 \\ \Phi''(L) = 0 & \Phi'''(L) = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Agora se podem usar essas condições diretamente na solução da equação de vibração Equação (2.16):

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 0 \\ -A \cos \beta L - B \sin \beta L + C \cosh \beta L + D \sinh \beta L = 0 \\ A \sin \beta L - B \cos \beta L + C \sinh \beta L + D \cosh \beta L = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Injetando as duas primeiras nas duas segundas, obtém-se um sistema de duas equações com duas variáveis. Para simplificar este cálculo adota-se a notação $c = \cos \beta L$, $s = \sin \beta L$, $ch = \cosh \beta L$ e $sh = \sinh \beta L$;

$$\begin{cases} C(c + ch) + D(s + sh) = 0 \\ C(-s + sh) + D(c + ch) = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

que da forma matricial é

$$\begin{bmatrix} c + ch & s + sh \\ -s + sh & c + ch \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Esse sistema tem uma solução $\{C, D\}$ não nula se e somente se

$$\det \begin{bmatrix} c + ch & s + sh \\ -s + sh & c + ch \end{bmatrix} = 0 \quad (2.27)$$

Após alguns cálculos básicos apresentados na Equação (2.28), esse sistema se reduz a um sistema de uma equação só: Equação (2.29).

$$\begin{aligned} (c + ch)(c + ch) - (-s + sh)(s + sh) &= 0 \\ c^2 + ch^2 + 2cch - (-s^2 + sh^2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \underbrace{c^2 + s^2}_1 + \underbrace{ch^2 - sh^2}_1 + 2cch &= 0 \\ 1 + \cos \beta L \cosh \beta L &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

A Equação (2.29) é chamada de equação característica, ela tem um número infinito de soluções. As soluções dessa equação podem ser calculadas numericamente e são tabeladas.

Tabela 2-2 - Primeiras soluções da equação característica de uma viga livre-presa

Modo i	1	2	3	4	5	6	7
Solução β_i	1.875104	4.694091	7.854757	10.99554	14.13717	17.27876	20.42035

A Tabela 2-2 apresenta as sete primeiras soluções da equação característica Equação (2.29) da viga em oscilações livres.

Para concluir basta reescrever Φ usando as constantes determinadas. Define-se a constante σ como:

$$\sigma = \frac{\sin \beta L + \sinh \beta L}{\cos \beta L + \cosh \beta L} \quad (2.30)$$

Usando a Equação (2.30) e a primeira equação do sistema de Equações (2.25) tem-se que $C = -\sigma D$. Assim o sistema de Equações (2.24) é equivalente a

$$\begin{cases} A = -C = \sigma D \\ B = -D \\ C = -\sigma D \\ 1 + \cos \beta L \cosh \beta L = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

Assim a expressão da função de forma Equação (2.16) pode ser escrita eliminando as constantes determinadas:

$$\Phi(x) = \sigma D \cos \beta x - D \sin \beta x - \sigma D \cosh \beta x + D \sinh \beta x \quad (2.32)$$

Fatorando a Equação (2.32) obtém-se

$$\Phi(x) = D(\sinh \beta x - \sin \beta x + \sigma(\cos \beta x - \cosh \beta x)) \quad (2.33)$$

Assim, pode-se concluir que as soluções para a equação diferencial Equação (2.16) são, $\forall i \in \mathbb{N}$:

$$\Phi_i(x) = D_i(\sinh \beta_i x - \sin \beta_i x + \sigma_i(\cos \beta_i x - \cosh \beta_i x)) \quad (2.34)$$

Os coeficientes D_i da Equação (2.34) são geralmente escolhidos seguindo um método de normalização. Na prática, essa normalização é geralmente feita de maneira a respeitar a condição de ortogonalidade dos modos (HAN et al., 1999) conforme

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \int_0^L \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (2.35)$$

onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker (se $i = j$ $\delta_{ij} = 1$, se $i \neq j$ $\delta_{ij} = 0$). Introduzindo a Equação (2.34) nessa condição de ortogonalidade dos modos obtém-se o valor da última constante ainda não determinada:

$$D_i = \frac{1}{\sqrt{\int_0^L (\sinh \beta_i x - \sin \beta_i x + \sigma_i(\cos \beta_i x - \cosh \beta_i x))^2 dx}} \quad (2.36)$$

Na Equação (2.36), nota-se que o valor da constante D_i depende unicamente do comprimento da viga L .

A Figura 2.4 apresenta as cinco primeiras funções de forma normalizadas para uma viga de comprimento $L = 41,9$ [cm] (tamanho da viga do experimento apresentado na introdução do capítulo 2).

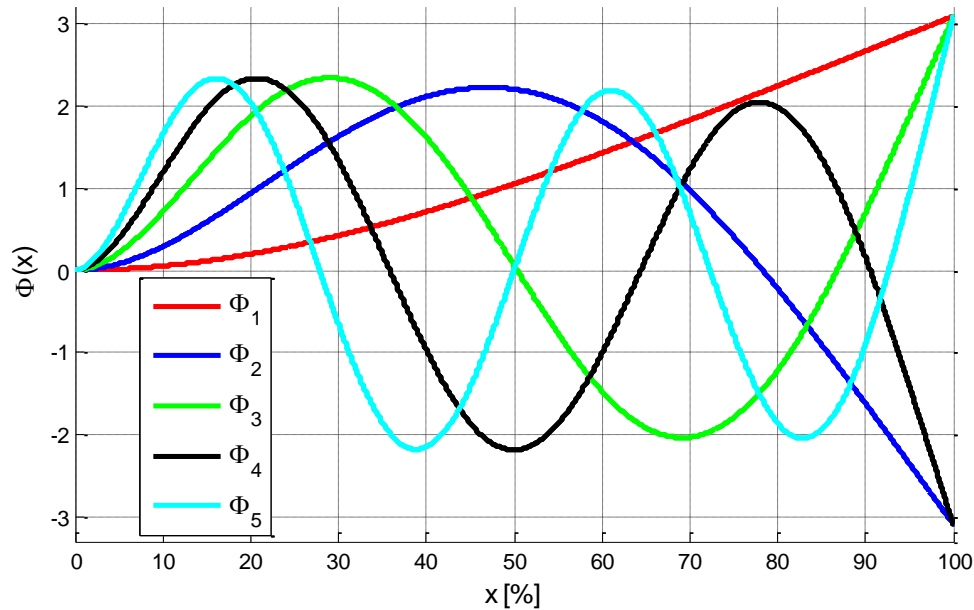


Figura 2.4 - Cinco primeiras funções de forma normalizadas de tal forma que os modos sejam ortogonais para uma viga de 41,9 cm

A Equação (2.11) permite calcular o deslocamento flexível, porém, conforme à Equação (2.34) sabe-se que existe um número infinito de funções de forma Φ . A técnica dos modos assumidos (JUNKINS et al., 1993) consiste em assumir que o deslocamento flexível é uma combinação linear dos diferentes produtos função de forma \times modos:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) q_i(t) \quad (2.37)$$

2.2. Equação do movimento da viga

Seja uma viga de comprimento L , densidade linear ρ , modulo de Young E e momento de inércia da seção I_z rigidamente embutida a uma distancia r do eixo de saída do um moto-redutor. A inércia de rotação equivalente do conjunto moto-redutor ao redor do eixo Z_0 é $J_{m,eq}$.

A Figura 2.5 representa de maneira esquemática a viga em rotação quando um torque Γ_l (l do inglês *load* significando carga) é aplicado no eixo de saída do moto-redutor. A posição angular da viga θ e o deslocamento flexível de um ponto da viga y são também representados na Figura 2.5.

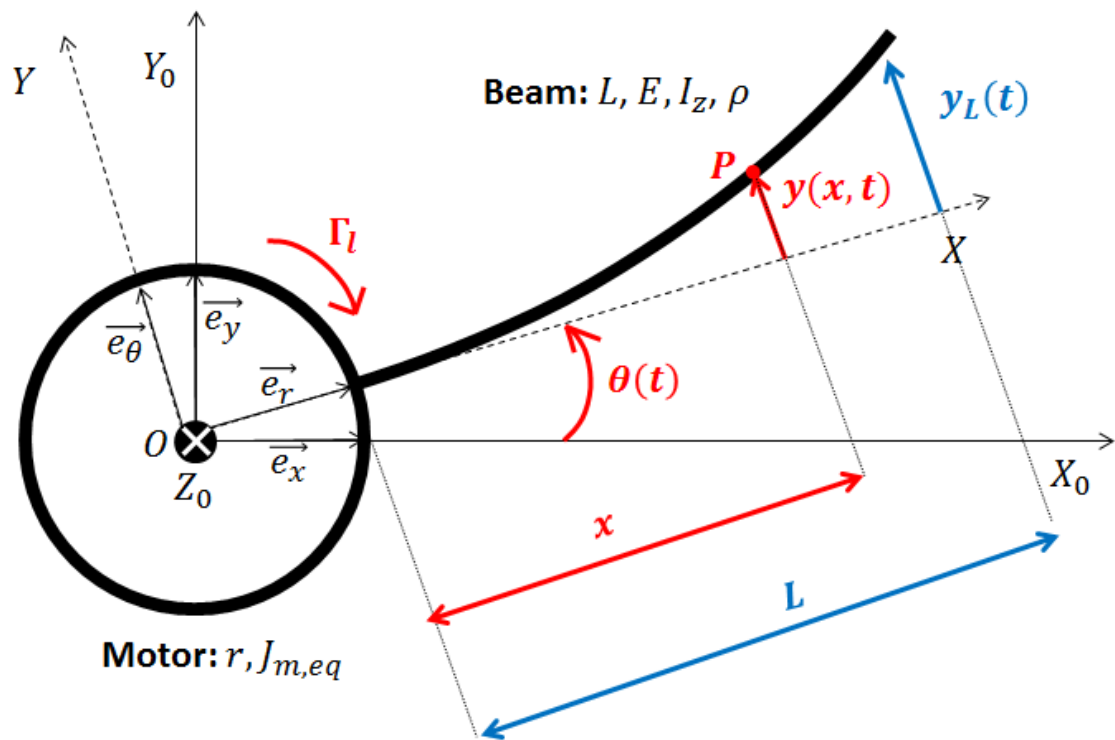


Figura 2.5 – Representação esquemática do braço robótico rotativo rígido-flexível com os parâmetros e as variáveis usados na modelagem matemática.

Para obter as equações do movimento usa-se a abordagem Lagrangiana; para isso precisam calcular primeiro as energias cinéticas e potenciais do sistema.

2.2.1. Cinemática

Seja P um ponto da viga. No referencial da viga $\mathcal{R}(X, Y, Z)$ as coordenadas de P são definidas como:

$${}^O P = \begin{bmatrix} r + x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}} \quad (2.38)$$

A velocidade desse ponto é a derivada da posição com relação ao referencial inercial $\mathcal{R}_0(X_0, Y_0, Z_0)$.

$$v_P = \left. \frac{dOP}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \quad (2.39)$$

Isso pode ser calculado usando o teorema de transformação:

$$\left. \frac{dOP}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{dOP}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \times OP|_{\mathcal{R}} \quad (2.40)$$

Assim

$$v_P = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}} \times \begin{bmatrix} r+x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}} \quad (2.41)$$

Neste estudo, segundo as hipóteses Euler Bernoulli adotadas, a viga é considerada inextensível, i.e., $\dot{x} = 0$. Isso permite concluir que o vetor velocidade em P é

$$v_P = \begin{bmatrix} -y\dot{\theta} \\ (r+x)\dot{\theta} + \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}} \quad (2.42)$$

2.2.2. Energias cinética e potencial

Neste sistema, a produção de energia cinética T é devida ao movimento da viga flexível e à rotação do motor:

$$T = T_m + T_b \quad (2.43)$$

A energia cinética do moto-redutor T_m é determinada em função da inércia equivalente do moto-redutor calculado no eixo de saída, $J_{m,eq}$, e da velocidade de rotação $\dot{\theta}$:

$$T_m = \frac{1}{2} J_{m,eq} \dot{\theta}^2 \quad (2.44)$$

A energia cinética T_b (b do inglês *beam* significando viga) do braço é:

$$T_b = \frac{1}{2} \rho \int_0^L v_P^T v_P dx \quad (2.45)$$

Considerando a expressão da velocidade estabelecida na Equação (2.42) obtém-se:

$$T_b = \frac{1}{2} \rho \int_0^L y^2 \dot{\theta}^2 + \left((r+x)\dot{\theta} + \dot{y} \right)^2 dx \quad (2.46)$$

Assim a energia cinética total é

$$T = \frac{1}{2} J_{m,eq} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \rho \left(\int_0^L y^2 \dot{\theta}^2 dx + \int_0^L \dot{y}^2 dx + \int_0^L (r+x)^2 \dot{\theta}^2 dx + 2 \int_0^L (r+x) \dot{\theta} \dot{y} dx \right) \quad (2.47)$$

Fatorando essa expressão chega-se a

$$T = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \left(J_{m,eq} + \frac{1}{3} \rho ((r+L)^3 - r^3) + \rho \int_0^L y^2 dx \right) + \rho \dot{\theta} \int_0^L (r+x) \dot{y} dx + \frac{1}{2} \rho \int_0^L \dot{y}^2 dx \quad (2.48)$$

Por outro lado, a energia potencial V de um corpo se deformando é dada por

$$V = \frac{1}{2} E I_z \int_0^L y''^2 dx \quad (2.49)$$

Agora, precisam-se explicitar essas energias em função de x e t . Para isso utiliza-se a teoria dos modos assumidos (veja seção 2.1). Na prática, como os modos altos são de amplitude pequena, pode-se limitar a um número finito de modos n , assim a Equação (2.37) é equivalente a

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) q_i(t) \quad (2.50)$$

De maneira mais compacta com $\Phi = [\Phi_1 \quad \dots \quad \Phi_n]^T$ e $\mathbf{q} = [q_1 \quad \dots \quad q_n]^T$ a Equação (2.50) pode-se escrever

$$y(x, t) = \Phi^T(x) \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^T(x) \Phi(t) \quad (2.51)$$

Nota-se que se usa o negrito para diferenciar os vetores e matrizes dos escalares. Para simplificar as notações daqui para frente, as referencias aos

vetores de funções de forma e dos modos são feitas sem a variável correspondente (i.e. $\Phi = \Phi(x)$ e $q = q(t)$) Dessa forma podem-se deduzir outras fórmulas úteis para o desenvolvimento futuro:

$$\begin{aligned}
y^2 &= q^T \Phi \Phi^T q \\
\dot{y} &= \Phi^T \dot{q} = \dot{q}^T \Phi \\
\dot{y}^2 &= \dot{q}^T \Phi \Phi^T \dot{q} \\
y'' &= \Phi''^T q = q^T \Phi'' \\
y''^2 &= q^T \Phi'' \Phi''^T q
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Usando as fórmulas da Equação (2.52), podem-se reescrever as energias das Equações (2.48) e (2.49) em função dos vetores de funções de forma e modos.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \left(J_{m,eq} + \frac{1}{3} \rho ((r+L)^3 - r^3) + \rho \int_0^L q^T \Phi \Phi^T q dx \right) \\
&\quad + \rho \dot{\theta} \int_0^L (r+x) \Phi^T \dot{q} dx + \frac{1}{2} \rho \int_0^L \dot{q}^T \Phi \Phi^T \dot{q} dx
\end{aligned} \tag{2.53}$$

$$V = \frac{1}{2} E I_z \int_0^L q^T \Phi'' \Phi''^T q dx \tag{2.54}$$

Para simplificar essas expressões, adotam-se as notações

$$J_{eq} = J_{m,eq} + \frac{1}{3} \rho ((r+L)^3 - r^3) \tag{2.55}$$

$$M_{rf} = \rho \int_0^L (r+x) \Phi dx \tag{2.56}$$

$$M_{ff} = \rho \int_0^L \Phi \Phi^T dx \tag{2.57}$$

$$K_{ff} = E I_z \int_0^L \Phi'' \Phi''^T dx \tag{2.58}$$

sendo os índices: eq para equivalente, r para rígido e f para flexível. Aplicando essas notações, as Equações (2.53) e (2.54) se tornam

$$T = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 (J_{eq} + q^T M_{ff} q) + \dot{\theta} M_{rf}^T \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T M_{ff} \dot{q} \tag{2.59}$$

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_{ff} \mathbf{q} \quad (2.60)$$

Percebe-se que a expressão de \mathbf{M}_{ff} da Equação (2.57) pode ser simplificada usando a propriedade de ortogonalidade dos modos da Equação (2.35)

$$\mathbf{M}_{ff} = \rho \int_0^L \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Phi}^T dx = \rho \int_0^L \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \dots & \Phi_n \Phi_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_n \Phi_1 & \dots & \Phi_{nn} \end{bmatrix} dx = \rho \mathbf{I}_n \quad (2.61)$$

onde \mathbf{I}_n é a matriz unidade de ordem n .

2.2.3. Formulação Lagrangiana

Seja \mathcal{L} a função Lagrangiana definida por

$$\mathcal{L} = T - V \quad (2.62)$$

onde T é a energia cinética calculada na Equação (2.59) e V é a energia potencial da Equação (2.60) As equações de Lagrange em função das coordenadas generalizadas p_i podem ser deduzidas usando

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} = F_i \quad \forall i \in [0, n] \quad (2.63)$$

Aqui as coordenadas generalizadas são: $p_0 = \theta$, o modo rígido do movimento e $[p_1, \dots, p_n] = [q_1, \dots, q_n]$ os modos flexíveis. F_i são as forças generalizadas externas ao sistema. Como a energia potencial V (Equação (2.54)) não depende de derivadas de coordenadas generalizadas \dot{p}_i , a Equação (2.63) pode ser simplificada:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial T}{\partial p_i} + \frac{\partial V}{\partial p_i} = F_i \quad \forall i \in [0, n] \quad (2.64)$$

Antes de chegar às equações de Lagrange fatoradas, alguns cálculos precisam ser feitos; primeiro, em função da primeira coordenada generalizada, o modo rígido θ , depois, em função das outras coordenadas generalizadas, os modos de vibração \mathbf{q} .

2.2.3.1. Equação de Lagrange do modo rígido

A equação de Lagrange em relação ao modo rígido θ é obtida usando a Equação (2.64) em função das coordenadas generalizadas θ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = F_{\theta} \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (2.65)$$

Derivar a Equação (2.59) em função de $\dot{\theta}$ permite obter

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \dot{\theta}(J_{eq} + \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \mathbf{q}) + \mathbf{M}_{rf}^T \dot{\mathbf{q}} \quad (2.66)$$

Agora, derivando a Equação (2.66) em relação ao tempo, chega-se ao primeiro termo da Equação (2.65):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \ddot{\theta}(J_{eq} + \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \mathbf{q}) + 2\dot{\theta} \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_{rf}^T \ddot{\mathbf{q}} \quad (2.67)$$

Por outro lado, como a energia cinética T (Equação (2.59)) e a energia potencial V (Equação (2.60)) não dependem de θ tem-se

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \quad (2.68)$$

O torque do moto-reductor Γ_l aplicado na viga é a única força externa considerada. Como ela age no eixo Z , eixo da rotação θ , ela deve ser considerada na primeira equação de Lagrange, pelo que $F_{\theta} = \Gamma_l$. Por último, usando os resultados das Equações (2.67) e (2.68) obtém-se a primeira equação de Lagrange, Equação (2.65), em relação à coordenada generalizada θ :

$$\ddot{\theta}(J_{eq} + \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \mathbf{q}) + 2\dot{\theta} \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_{rf}^T \ddot{\mathbf{q}} = \Gamma_l \quad (2.69)$$

Nota-se que esta equação é escalar apesar de estar composta por termos matriciais e vetoriais.

2.2.3.2. Equações de Lagrange dos modos flexíveis

As equações de Lagrange em relação aos modos flexíveis são obtidas usando a Equação (2.64) em função das coordenadas generalizadas \mathbf{q} .

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F}_q \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \quad (2.70)$$

Derivar a Equação (2.59) em função de \mathbf{q} permite obter

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \dot{\theta} \mathbf{M}_{rf} + \mathbf{M}_{ff} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.71)$$

Agora, derivando a Equação (2.66) em relação ao tempo, chega-se ao primeiro termo da Equação (2.70):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \ddot{\theta} \mathbf{M}_{rf} + \mathbf{M}_{ff} \ddot{\mathbf{q}} \quad (2.72)$$

Por fim, considerando as Equações (2.59) e (2.60) obtém-se

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \dot{\theta}^2 \mathbf{M}_{ff} \mathbf{q} \quad \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{K}_{ff} \mathbf{q} \quad (2.73)$$

Os parâmetros generalizados \mathbf{q} não têm contribuições externas, pois não tem forças externas na direção Y , assim $\mathbf{F}_q = \mathbf{0}$. Finalmente, usando os resultados das Equações (2.67) e (2.68) obtém-se as equações de Lagrange em relação às coordenadas generalizadas \mathbf{q} :

$$\ddot{\theta} \mathbf{M}_{rf} + \mathbf{M}_{ff} \ddot{\mathbf{q}} - \dot{\theta}^2 \mathbf{M}_{ff} \mathbf{q} + \mathbf{K}_{ff} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.74)$$

Nota-se que esta equação é vetorial, ou seja, n equações escalares (com n número de modos flexíveis considerados).

A Figura 2.6 a seguir apresenta de maneira condensada os resultados desta seção, ou seja, o deslocamento flexível expressado usando os modos

assumidos e as equações de Lagrange para as coordenadas generalizadas θ e q .

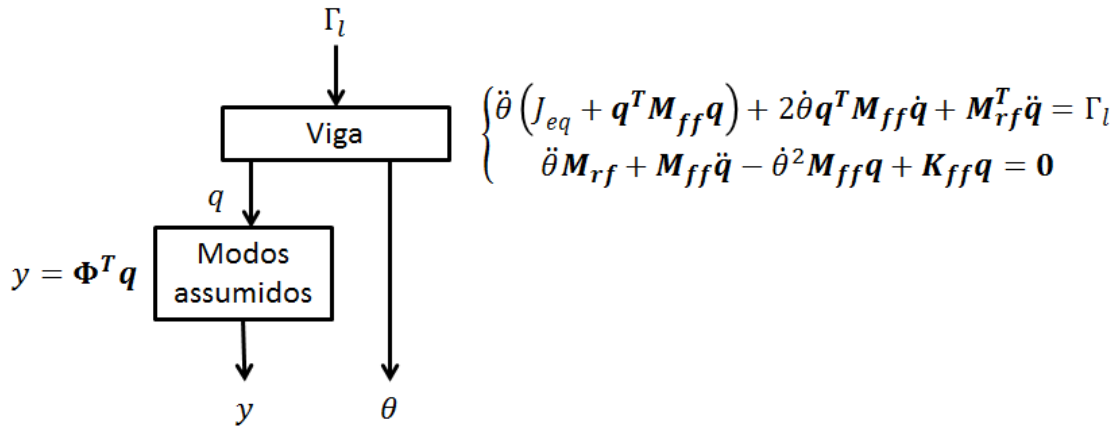


Figura 2.6 – Diagrama de blocos da viga.

2.3. Equação de funcionamento do motor

Nesta seção, desenvolve-se a equação do funcionamento do motor que relaciona a tensão de alimentação U_m com a taxa de rotação Ω_l . Primeiro, calcula-se a equação elétrica do motor (seção Equação elétrica 2.3.1) Depois, calcula-se a equação mecânica do motor (seção 2.3.2). Por último, obtém-se a relação entrada saída do motor juntando as equações elétrica e mecânica (seção 2.3.3).

A Figura 2.7 representa de maneira esquemática o conjunto motor DC + redutor e identifica as partes elétrica e mecânica. Todas as constantes e variáveis aparecendo nesta figura serão apresentadas nas seções seguintes.

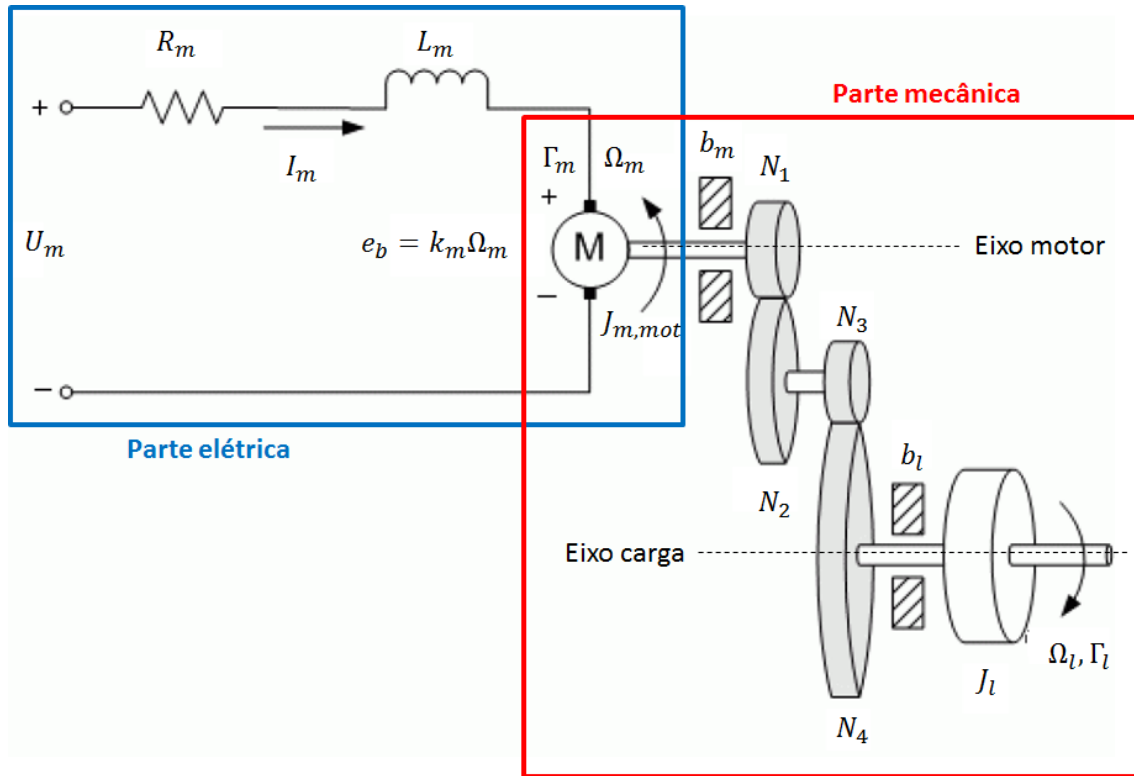


Figura 2.7 – Representação esquemática do moto-reductor DC.

Fonte: Adaptada do manual SRV02 modeling using QuaRC

2.3.1. Equação elétrica

Conforme a Figura 2.7, a primeira lei de Kirshoff permite estabelecer a relação:

$$U_m = R_m I_m + L_m \frac{dI_m}{dt} + e_b \quad (2.75)$$

A força eletromotriz inversa do motor e_b (back-emf) é proporcional à taxa de rotação do motor Ω_m :

$$e_b = K_m \Omega_m \quad (2.76)$$

A indutância $L_m \ll R_m$, assim o termo $L_m dI_m/dt$ da Equação (2.75) pode ser desprezado e obtém-se:

$$I_m = \frac{U_m - K_m \Omega_m}{R_m} \quad (2.77)$$

Por último, sabe-se que a relação entre a corrente no motor I_m e o torque do motor Γ_m é uma relação de proporcionalidade:

$$\Gamma_m = \eta_m K_t I_m \quad (2.78)$$

onde η_m é a eficiência do motor e K_t a constante de torque. Assim usando as Equações (2.77) e (2.78) chega-se a

$$\Gamma_m = K_t \eta_m \frac{U_m - K_m \Omega_m}{R_m} \quad (2.79)$$

2.3.2. Equação mecânica

A segunda lei de Newton para uma rotação em um único eixo de rotação é

$$\Gamma = J \frac{d\Omega}{dt} \quad (2.80)$$

onde Γ é o torque resultante, J é a inércia de rotação do corpo e Ω a taxa de rotação. Aplica-se essa lei nos dois eixos de rotação diferentes: o eixo do motor e o eixo da carga (Veja Figura 2.7).

Primeiro, a equação no eixo motor:

$$\Gamma_m = J_{m,mot} \frac{d\Omega_m}{dt} + b_m \Omega_m + \Gamma_{ml} \quad (2.81)$$

Onde Γ_m é o torque motor, $J_{m,mot}$ é o momento de inércia do rotor, b_m é o coeficiente de fricção no eixo motor e Γ_{ml} o torque aplicado pela eixo da carga sobre o eixo motor.

Depois, aplicando a segunda lei de Newton no eixo da carga chega-se a:

$$\Gamma_l = J_l \frac{d\Omega_l}{dt} + b_l \Omega_l \quad (2.82)$$

Como se pode ver na Figura 2.7, o redutor é composto de 4 pinhões. Além disso, existe uma redução interna K_{gi} no motor. Seja N_i o número de dentes do pinhão i , então o coeficiente redutor K_g total é

$$K_g = K_{gi} \frac{N_2 N_4}{N_1 N_3} \quad (2.83)$$

De maneira intuitiva, como o motor deve girar K_g vezes mais rapidamente do que o eixo de saída deduz-se que

$$\Omega_m = K_g \Omega_l \quad (2.84)$$

Por fim, a engrenagem tem uma eficiência η_g , isso permite relacionar os torques em entrada Γ_{ml} e saída do redutor Γ_l :

$$\Gamma_l = K_g \eta_g \Gamma_{ml} \quad (2.85)$$

Agora, precisa-se estabelecer a relação entre a taxa de rotação no eixo da saída Ω_l em função do torque no eixo do motor Γ_m . Introduzindo (2.82) na Equação (2.85) obtém-se a expressão de Γ_{ml} :

$$\Gamma_{ml} = \frac{J_l \frac{d\Omega_l}{dt} + b_l \Omega_l}{K_g \eta_g} \quad (2.86)$$

Reescrevendo Γ_m (Equação (2.81)) e usando os resultados das Equações (2.84) e (2.86) chega-se a

$$\Gamma_m = J_{m,mot} K_g \frac{d\Omega_l}{dt} + b_m K_g \Omega_l + \frac{J_l \frac{d\Omega_l}{dt} + b_l \Omega_l}{K_g \eta_g} \quad (2.87)$$

e fatorando por $d\Omega_l/dt$ e Ω_l , obtém-se:

$$K_g \eta_g \Gamma_m = (J_{m,mot} K_g^2 \eta_g + J_l) \frac{d\Omega_l}{dt} + (b_m K_g^2 \eta_g + b_l) \Omega_l \quad (2.88)$$

Perceba-se que, na Equação (2.88), aparecem uma inércia e uma fricção equivalente do conjunto motor + redutor expressas em relação ao eixo da carga. Essa inércia equivalente já foi usada na seção anterior para determinar a equação mecânica: é $J_{m,eq}$ (Equação (2.44)). Adota-se a notação b_{eq} para o coeficiente de fricção equivalente do motor. Assim as expressões da inércia e da fricção equivalente são

$$\begin{aligned} J_{m,eq} &= J_{m,mot} K_g^2 \eta_g + J_l \\ b_{eq} &= b_m K_g^2 \eta_g + b_l \end{aligned} \quad (2.89)$$

Com essas notações, a Equação (2.88) torna-se

$$K_g \eta_g \Gamma_m = J_{m,eq} \frac{d\Omega_l}{dt} + b_{eq} \Omega_l \quad (2.90)$$

2.3.3. Relação entrada saída

Para concluir, basta estabelecer a relação entrada saída do motor, ou seja, a relação entre a tensão de alimentação U_m e a taxa de rotação do motor no eixo da carga Ω_l . A equação elétrica (Equação (2.79)) estabeleceu uma relação entre Γ_m e U_m enquanto a equação mecânica (Equação (2.90)) estabeleceu uma relação entre Γ_m e Ω_l . Combinando essas duas Equações estabelece-se a relação entre U_m e Ω_l :

$$K_g \eta_g \left(K_t \eta_m \frac{U_m - K_m \Omega_m}{R_m} \right) = J_{m,eq} \frac{d\Omega_l}{dt} + b_{eq} \Omega_l \quad (2.91)$$

Usando a Equação (2.84) e reorganizando os termos da Equação (2.91) obtém-se

$$\frac{K_t K_g \eta_g \eta_m}{R_m} U_m = J_{m,eq} \frac{d\Omega_l}{dt} + \left(\frac{K_m K_t^2 K_g \eta_g \eta_m}{R_m} + b_{eq} \right) \Omega_l \quad (2.92)$$

Para simplificar as expressões definem-se as seguintes constantes:

$$C_m = \frac{K_t K_g \eta_g \eta_m}{R_m} \quad B_{eq} = K_t K_m C_m + b_{eq} \quad (2.93)$$

Nota-se que B_{eq} é uma constante de amortecimento considerando a fricção mecânica e as perdas elétricas no moto-reductor. Com as notações da Equação (2.93), a Equação (2.92) torna-se

$$C_m U_m = J_{m,eq} \frac{d\Omega_l}{dt} + B_{eq} \Omega_l \quad (2.94)$$

O de torque no eixo da saída Γ_l pode-se escrever usando a segunda lei de Newton da Equação (2.80) em função da taxa de rotação e da inércia no eixo de saída:

$$\Gamma_l = J_{m,eq} \frac{d\Omega_l}{dt} \quad (2.95)$$

Assim, pode ser deduzido, combinando as Equações (2.94) e (2.95) que

$$\Gamma_l = C_m U_m - B_{eq} \Omega_l \quad (2.96)$$

A Figura 2.8 a seguir resume as relações importantes desta seção 2.3: estudando as equações elétrica e mecânica do moto-reductor, foi obtida a relação entre a tensão de alimentação do motor U_m , o torque em saída do moto-reductor Γ_l e a taxa de rotação no eixo de saída Ω_l .

Nota-se que a taxa de rotação no eixo de saída do moto-reductor corresponde à taxa de rotação da viga, i.e., $\Omega_l = \dot{\theta}$.

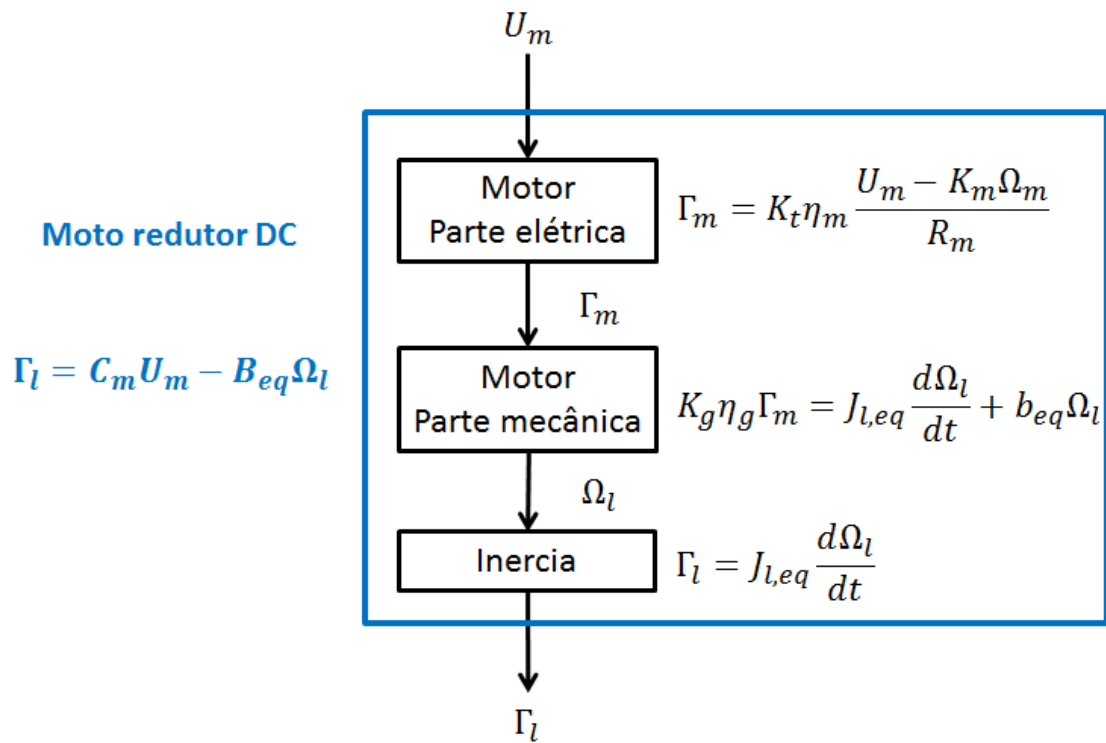


Figura 2.8 – Diagrama de blocos do moto-redutor DC detalhando as equações elétricas e mecânicas.

2.4. Equações do sistema completo

Na seção 2.2 foram desenvolvidas as equações da dinâmica do braço flexível, Equações (2.69) e (2.74). Na seção 2.3 a Equação (2.96) do motor foi calculada. Essas equações são resumidas na Figura 2.9 que representa o sistema completo do braço rotativo flexível. Nesta seção precisa-se juntar os resultados da viga e do motor para obter o modelo matemático do sistema completo.

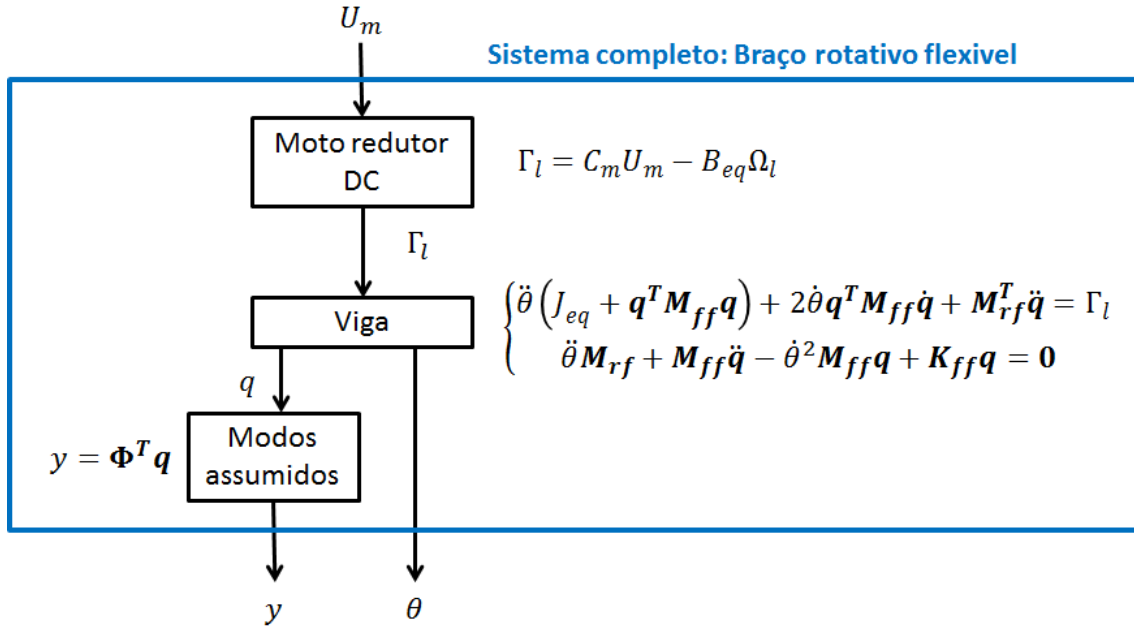


Figura 2.9 – Representação em diagrama de blocos do sistema “braço rotativo rígido-flexível” completo.

Injetando a equação do motor Equação (2.96) na primeira Equação (2.69) de Lagrange e lembrando que $\Omega_l = \dot{\theta}$, obtém-se o sistema de equações de Lagrange completo

$$\begin{cases} \ddot{\theta} (J_{eq} + \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \mathbf{q}) + 2\dot{\theta} \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \dot{\mathbf{q}} + B_{eq} \dot{\theta} + \mathbf{M}_{rf}^T \ddot{\mathbf{q}} = C_m U_m \\ \ddot{\theta} \mathbf{M}_{rf} + \mathbf{M}_{ff} \ddot{\mathbf{q}} - \dot{\theta}^2 \mathbf{M}_{ff} \mathbf{q} + \mathbf{K}_{ff} \mathbf{q} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.97)$$

Esse sistema contém equações diferenciais não lineares; ele pode ser colocado no formato matricial como segue:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_{eq} + \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \mathbf{q} & \mathbf{M}_{rf}^T \\ \mathbf{M}_{rf} & \mathbf{M}_{ff} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_{eq} + \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \dot{\mathbf{q}} & \dot{\theta} \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \\ -\mathbf{M}_{ff} \mathbf{q} \dot{\theta} & \mathbf{0}_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1n} \\ \mathbf{0}_{n1} & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_m \\ \mathbf{0}_{n1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} U_m \quad (2.98)$$

Conforme a Equação (2.98), a partir de agora se adotarão as notações seguintes para definir vetores ou matrizes nulos:

$$\mathbf{0}_{1n} = [0 \quad \dots \quad 0] \in \mathbb{R}^n \quad (2.99)$$

$$\mathbf{0}_{n1} = [0 \quad \dots \quad 0]^T \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{0}_{nn} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Perceba-se que a forma da Equação (2.98) tem uma forma conhecida: é uma equação diferencial de segundo ordem do tipo massa-mola-amortecedor no formato matricial:

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \mathbf{N} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} \theta \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \mathbf{F} U_m \quad (2.100)$$

Para concluir, é importante notar que a Equação diferencial (2.100) é não linear: as matrizes massa \mathbf{M} e amortecimento \mathbf{N} não são matrizes constantes; elas dependem de \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ e $\dot{\theta}$ e podem ser separadas em duas matrizes: \mathbf{M}_0/N_0 para a parte constante e \mathbf{M}_q/N_q para a parte não constante.

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_q(q^2) = \begin{bmatrix} J_{eq} & \mathbf{M}_{rf}^T \\ \mathbf{M}_{rf} & \mathbf{M}_{ff} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \mathbf{q} & \mathbf{0}_{1n} \\ \mathbf{0}_{n1} & \mathbf{0}_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_0 + \mathbf{N}_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} B_{eq} & \mathbf{0}_{1n} \\ \mathbf{0}_{n1} & \mathbf{0}_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \dot{\mathbf{q}} & \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \dot{\theta} \\ -\mathbf{M}_{ff} \mathbf{q} \dot{\theta} & \mathbf{0}_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

2.5. Amortecimento estrutural

O modelo obtido na seção anterior (Equação (2.98)) não é ainda completo: não foi considerada a dissipação de energia devida à vibração da viga. Uma maneira simples de modelar esse fenômeno é usando a teoria de Rayleigh.

2.5.1. Amortecimento de Rayleigh: teoria

Quando uma estrutura vibra, ela dissipa energia. Esse fenômeno é responsável do amortecimento das vibrações. A modelagem dessa dissipação de energia não é trivial porque ela é baseada nas propriedades físicas dos materiais da estrutura real. Muitas vezes, é complicado ou impossível saber com suficiente precisão as características dos materiais utilizados. Uma maneira mais simples de modelar essa dissipação de energia é usando o amortecimento modal ou de

Rayleigh que permite esta modelagem sem conhecimento das propriedades do material, (WILSON, 1996): a matriz de amortecimento é proporcional à matriz massa e à matriz rigidez. Aqui, para obter o amortecimento estrutural, considera-se unicamente o deslocamento flexível, sendo o movimento rígido considerado nulo, i.e., $\theta = \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$. Nessas condições, usando a Equação (2.98) pode ser deduzido que:

$$\mathbf{M}_{ff}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_{ff}\mathbf{q} = \mathbf{0}_{1n} \quad (2.103)$$

Lembrando-se que $\mathbf{M}_{ff} = \rho \mathbf{I}_n$ (Equação (2.61)), a Equação (2.103) se torna

$$\ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{\rho} \mathbf{K}_{ff} \mathbf{q} = \mathbf{0}_{1n} \quad (2.104)$$

Também, voltando à teoria dos modos assumidos e derivando duas vezes a Equação (2.17) para n modos flexíveis obtém-se

$$\forall i \in \mathbb{N}^{[1,n]} \quad \ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0 \quad (2.105)$$

que no formato matricial fica como

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}^2 \mathbf{q} = \mathbf{0}_{1n} \quad (2.106)$$

onde $\mathbf{W}^2 = \text{diag}(\omega_i^2)$. Por último, identificando as Equações (2.104) e (2.106) deduz-se que

$$\frac{1}{\rho} \mathbf{K}_{ff} = \mathbf{W}^2 \quad (2.107)$$

Isso significa que a matriz \mathbf{K}_{ff} é diagonal e os termos diagonais k_{ff} dessa matriz são:

$$\forall i \in \mathbb{N}^{[1,n]} \quad k_{ff}[i] = \rho \omega_i^2 \quad (2.108)$$

Na Equação (2.108) reconhece-se a frequência de pulsação de um amortecedor clássico massa-mola para cada um dos modos: $\omega_i = \sqrt{k_{ff}[i]/\rho}$.

Para modelar o amortecimento flexível, um termo de amortecimento N_{ff} deve ser adicionado na Equação (2.103)

$$M_{ff}\ddot{q} + N_{ff}\dot{q} + K_{ff}q = 0_{1n} \quad (2.109)$$

Substituindo as Equações (2.61) e (2.107) na Equação (2.109) obtém-se

$$\ddot{q} + \frac{1}{\rho}N_{ff}\dot{q} + W^2q = 0_{1n} \quad (2.110)$$

Para conservar a condição de ortogonalidade dos modos, a matriz N_{ff} escrita na base modal deve ser uma matriz diagonal. Por esse motivo, usa-se uma representação clássica massa-mola-amortecedor para cada um dos modos:

$$\forall i \in \mathbb{N}^{[1,n]} \quad \ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2q_i = 0 \quad (2.111)$$

Em seguida, comparando as Equações (2.110) e (2.111) identifica-se a forma que devem ter os termos diagonais n_{ff} da matriz de amortecimento N_{ff} :

$$\forall i \in \mathbb{N}^{[1,n]} \quad n_{ff}[i] = 2\rho\xi_i\omega_i \quad (2.112)$$

Como visto na introdução desta seção 2.5, a modelagem do amortecimento do tipo Rayleigh supõe que a matriz de amortecimento é proporcional às matrizes massa e rigidez, assim:

$$N_{ff} = aM_{ff} + bK_{ff} = \rho(aI_n + bW^2) \quad (2.113)$$

onde $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Finalmente, combinando as duas expressões diferentes dos termos da matriz de amortecimento N_{ff} que foram encontrados nas Equações (2.112) e (2.113) obtém-se

$$\forall i \in \mathbb{N}^{[1,n]} \quad 2\xi_i\omega_i = a + b\omega_i^2 \quad (2.114)$$

e isolando ξ_i , chega-se a:

$$\forall i \in \mathbb{N}^{[1,n]} \quad \xi_i = \rho \left(\frac{a}{2\omega_i} + \frac{b\omega_i}{2} \right) \quad (2.115)$$

Os coeficientes de amortecimento $\xi_i \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ devem ser escolhidos empiricamente. Existem métodos empíricos para determinação numérica desses coeficientes (CHOWDHURY et al., 2003). Um método clássico é escolher o amortecimento ξ para o primeiro modo e o último, o que permite calcular os coeficientes a e b , resultando:

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{a}{2\omega_1} + \frac{b\omega_1}{2} \\ \xi_n = \frac{a}{2\omega_n} + \frac{b\omega_n}{2} \end{cases} \quad (2.116)$$

ou no formato matricial

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_n \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 \\ \frac{1}{\omega_n} & \omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (2.117)$$

Assim, para calcular os coeficientes de Rayleigh a e b , basta inverter esta Equação (2.117), obtendo

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{2}{\frac{\omega_n}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega_n}} \begin{bmatrix} \frac{\omega_n}{\omega_1} & -\omega_1 \\ -\frac{1}{\omega_n} & \frac{1}{\omega_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_n \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

ou ainda:

$$\begin{cases} a = \frac{2\omega_1\omega_n}{(\omega_n^2 - \omega_1^2)} (\xi_1\omega_n - \xi_n\omega_1) \\ b = \frac{2\omega_1\omega_n}{(\omega_n^2 - \omega_1^2)} \left(\frac{\xi_1}{\omega_n} - \frac{\xi_n}{\omega_1} \right) \end{cases} \quad (2.119)$$

Fisicamente, o amortecimento está diretamente relacionado com o número de períodos necessários para amortecer totalmente a oscilação (WILSON, 1996). A tabela seguinte apresenta essa relação:

Tabela 2-3 - Interpretação física do amortecimento em função do número de período de oscilação necessário para reduzir de um fator 10 as oscilações

Amortecimento em % $\xi\%$	Constante de decaimento $r = e^{-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$	Número de períodos necessários para ter um amortecimento de um fator 10 $n_T = \frac{\ln(0.10)}{\ln r}$
1	0.9391	36.64
5	0.7301	7.32
10	0.5318	3.65
20	0.2773	1.79
30	0.1386	1.16
50	0.0266	0.63

Fonte: Adaptada de (WILSON, 1996)

A Tabela 2-3 apresenta as relações o amortecimento ξ e o número de períodos n_T necessários para que as oscilações da viga sejam amortizadas em um fator 10.

Em conclusão, nesta seção 2.5 foi visto o método de Rayleigh que permite calcular o amortecimento das vibrações devido à dissipação de energia quando a estrutura vibra. Foi visto que precisa adicionar ao modelo um termo de amortecimento N_{ff} proporcional às matrizes de massa M_{ff} e rigidez K_{ff} (Equação (2.113)). Os parâmetros de proporcionalidade a e b devem ser calculados via as relações da Equação (2.119). As frequências de vibrações ω_i são calculadas resolvendo a equação característica da viga em vibração (Equação (2.29)) e usando a relação entre as frequências naturais do sistema, Equação (2.18). Os amortecimentos do primeiro modo ξ_1 e do último modo ξ_n devem ser escolhidos de maneira empírica ajudando-se da Tabela 2-3 que fornece uma explicação física do amortecimento em função do seu valor.

2.5.2. Amortecimento de Rayleigh: adição ao modelo

Nesta seção o amortecimento do tipo Rayleigh é adicionado ao modelo obtido na seção 2.4. Define-se a matriz de amortecimento de Rayleigh N_r como

$$N_r = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1n} \\ \mathbf{0}_{n1} & a\mathbf{M}_{ff} + b\mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix} \quad (2.120)$$

Esse termo é adicionado à matriz de amortecimento N da Equação (2.102)

$$\mathbf{N} = \underbrace{\begin{bmatrix} B_{eq} & \mathbf{0}_{1n} \\ \mathbf{0}_{n1} & \mathbf{0}_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \dot{\mathbf{q}} & \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \dot{\theta} \\ -\mathbf{M}_{ff} \mathbf{q} \dot{\theta} & \mathbf{0}_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_q} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1n} \\ \mathbf{0}_{n1} & a\mathbf{M}_{ff} + b\mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_r} \quad (2.121)$$

A equação global da dinâmica resultante é a Equação (2.98) com a adição do termo \mathbf{N}_r Equação (2.120):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_{eq} + \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \mathbf{q} & \mathbf{M}_{rf}^T \\ \mathbf{M}_{rf} & \mathbf{M}_{ff} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_{eq} + \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \dot{\mathbf{q}} & \dot{\theta} \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \\ -\mathbf{M}_{ff} \mathbf{q} \dot{\theta} & a\mathbf{M}_{ff} + b\mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0}_{1n} \\ \mathbf{0}_{n1} & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_m \\ \mathbf{0}_{n1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} U_m \quad (2.122)$$

Por fim, adotando a notação $\underline{x} = x/\rho$, a Equação (2.122) da dinâmica pode ser simplificada usando as relações das Equações (2.61) e (2.107).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_{eq} + \mathbf{q}^T \mathbf{q} & \mathbf{M}_{rf}^T \\ \mathbf{M}_{rf} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{M}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{N}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_{eq} + \mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}} & \dot{\theta} \mathbf{q}^T \\ -\mathbf{q} \dot{\theta} & a\mathbf{I}_n + b\mathbf{W}^2 \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{N}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{N}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1n} \\ \mathbf{0}_{n1} & \mathbf{W}^2 \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{K}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{F}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_m/\rho \\ \mathbf{0}_{n1} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{F}}} U_m \quad (2.123)$$

2.6. Validação do modelo

Foi desenvolvido um modelo de simulação computacional a partir do modelo matemático da Equação (2.122) (ver Figura.B.3 do APÊNDICE B). Para validar este modelo de simulação computacional, é preciso comparar o seu comportamento com o comportamento do experimento real FlexGage. Essa validação é feita conferindo a similitude entre as respostas temporais das simulações computacional e experimental excitadas pelo mesmo sinal (tensão de alimentação do motor U_m). Os sensores do experimento FlexGage medem a posição angular do braço θ via um potenciômetro e o deslocamento flexível na ponta do braço y_L através um extensômetro (strain gage). Essas duas grandezas são apresentadas na Figura 2.10 para as simulações computacional e experimental.

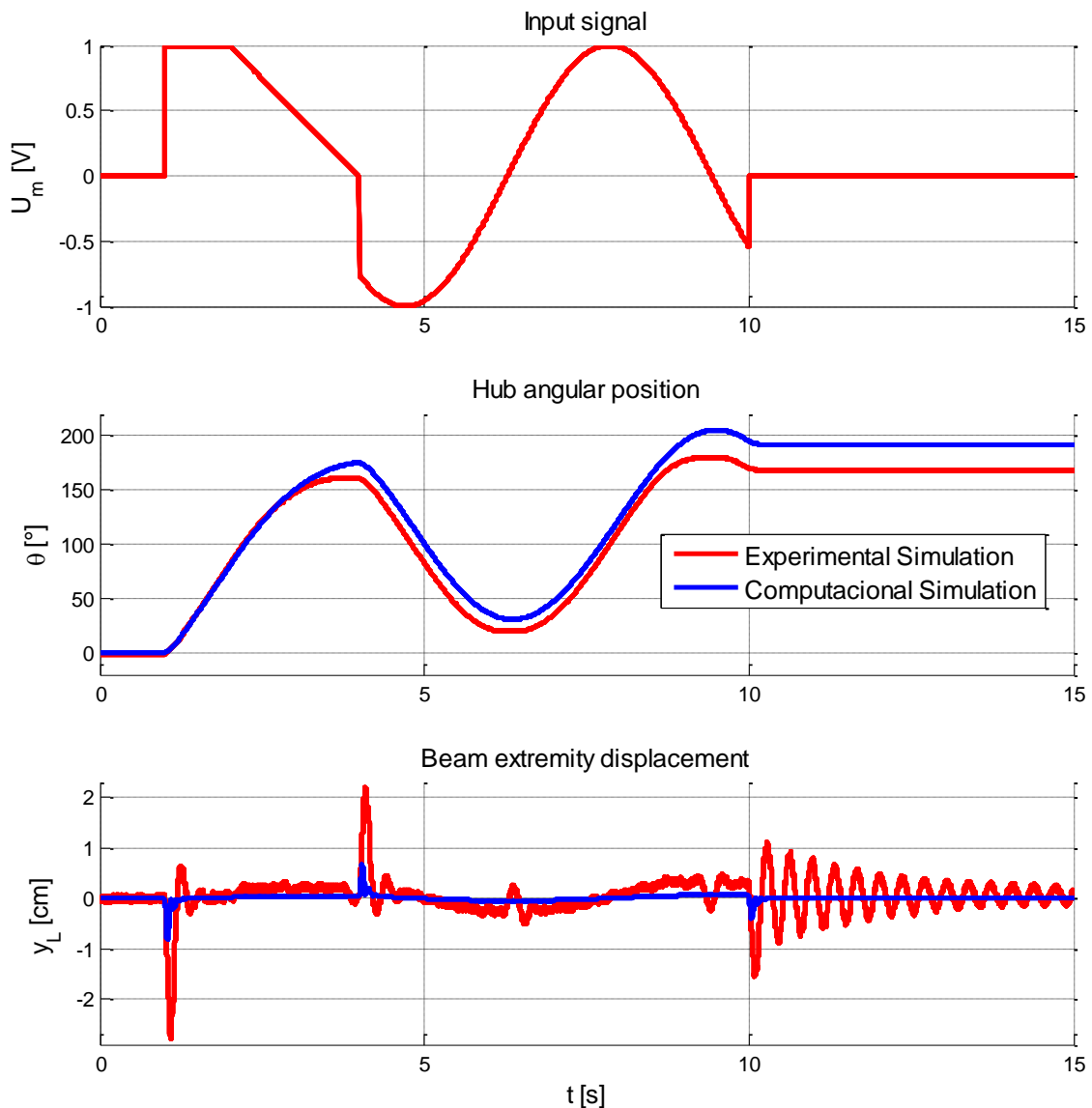


Figura 2.10 - Resultados de simulação experimental e computacional do sistema sujeito a um sinal de entrada combinando degrau, rampa e sinusoidal.

O primeiro gráfico da Figura 2.10 mostra a tensão de alimentação aplicada nas simulações. Esse sinal de entrada tem por objetivo representar diferentes tipos de sinais que podem ser aplicados na realidade: um degrau (controle de posição), uma rampa (controle de velocidade) e uma sinusoidal (sinal alternativo). O segundo e terceiro gráfico da Figura 2.10 mostram respectivamente: a posição angular do braço θ e o deslocamento flexível na extremidade do braço y_L . Comparando as respostas de simulação

computacional (azul) e experimental (vermelho), observa-se que a modelagem do sistema não é boa: a posição final alcançada não é a mesma e as oscilações na ponta da viga não representam a realidade. Isso acontece porque alguns parâmetros são desconhecidos ou não são conhecidos com suficiente precisão; esses parâmetros são:

- O amortecimento equivalente B_{eq} (definido nas Equações (2.93) e (2.89)) é função do amortecimento viscoso do motor b_{eq} . Este valor é dado na documentação do experimento, mas é um valor experimental e pouco confiável, pois ele depende muito da montagem do experimento.
- O módulo de Young E caracterizando o material da viga do experimento não é conhecido. O valor usado foi reutilizado de outro trabalho que estudava o mesmo experimento (CASTRO, 2005).
- A inércia equivalente J_{eq} pode ser calculada conforme as Equações (2.55) e (A-1), mas o resultado fica muito aproximado.
- Os valores para ξ_1 e ξ_n precisam ser escolhidos para calcular os coeficientes de Raleigh a e b conforme a Equação (2.119).

Assim, precisam-se realizar alguns ajustes nesses parâmetros para obter um modelo matemático fiel a realidade.

2.6.1. Ajuste do modelo matemático

Após várias tentativas e erros, chega-se a dois conjuntos de parâmetros que permitem uma boa aproximação do comportamento real do experimento. A Tabela 2-4 mostra os valores utilizados inicialmente para obter a Figura 2.10 e os valores de dois conjuntos de parâmetro que permitem obter um bom modelo.

A Figura 2.11 apresenta as respostas de simulação computacional usando os dois conjuntos de parâmetros definidos na Tabela 2-4.

Tabela 2-4 - Valores dos parâmetros utilizados para a identificação do sistema.

	Conjunto inicial	Conjunto 1	Conjunto 2
J_{eq}	0,00730	0,00813	0,00813
B_{eq}	0.0840	0,0958	0,1520
E	$193 \cdot 10^9$	$395 \cdot 10^8$	$322 \cdot 10^8$
ξ_1	2 %	1 %	6,5 %
ξ_n	20 %	6 %	100 %

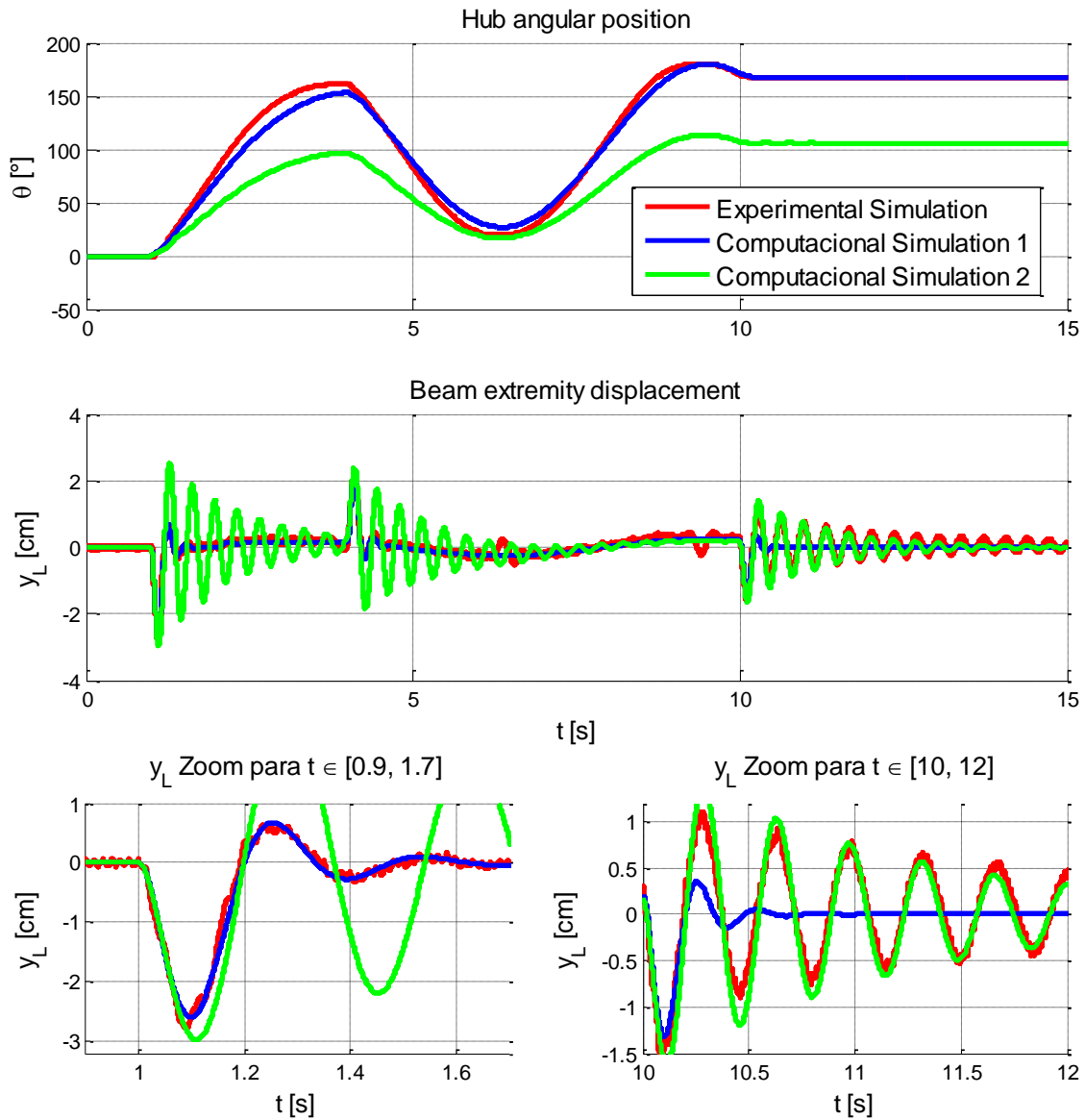


Figura 2.11 – Comparação entre a resposta real do sistema e as respostas de dois modelos com os parâmetros B_{eq} , E , ξ_1 e ξ_n diferentes.

O primeiro gráfico representa a posição angular do braço θ , o segundo é o deslocamento flexível y_L e os dois últimos, zooms do deslocamento flexível y_L no início e no final do movimento (i. e. quando o braço começa a se mover e no final, quando o braço está parado e vibrando).

Pode-se ver que, com o primeiro conjunto de parâmetros (azul) obtém-se um deslocamento flexível muito parecido ao real em quanto o braço esta se deslocando, porém o deslocamento flexível é muito diferente quando o braço para de se movimentar: este modelo atenua as oscilações rápido demais. Nota-se também que o deslocamento angular do braço está bem modelado em qualquer momento do movimento.

Com o segundo conjunto de parametros (verde), acontece o contrário; a modelagem não é boa enquanto o braço esta-se deslocando mas é boa quando o braço está parado vibrando. Porém, o deslocamento angular não é bem modelado em nenhum momento do movimento.

2.6.2. Adição de amortecimento dinâmico

Não foi possível achar um conjunto de parâmetros que modelem bem o sistema para todas as fases do movimento. Esse fenômeno pode ser explicado da seguinte maneira: o amortecimento do sistema é dinâmico: ele é diferente quando o braço se move e quando ele está parado. Considerando este fenômeno, escolheu-se representar os termos de amortecimento como função linear do módulo da velocidade angular:

$$\begin{aligned} B_{eq} &= B_{eq0} + k_{B_{eq}} |\dot{\theta}| \\ a &= a_0 + k_a |\dot{\theta}| \\ b &= b_0 + k_b |\dot{\theta}| \end{aligned} \tag{2.124}$$

Os coeficientes de proporcionalidade $(k_{B_{eq}}, k_a, k_b) \in \mathbb{R}^3$. Essa modelagem para os coeficientes de Rayleigh é confirmada por (WILSON, 1996) que afirma que o amortecimento estrutural é geralmente não linear e função da amplitude do deslocamento flexível (porque é evidente que quando a velocidade angular $\dot{\theta}$ aumenta o deslocamento flexível também). Considerando as expressões da Equação (2.124), a Equação (2.122) do sistema pode ser reescrita:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\begin{bmatrix} C_m \\ \mathbf{0}_{n1} \end{bmatrix}}_F \mathbf{U}_m = & \underbrace{\begin{bmatrix} J_{eq} + \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \mathbf{q} & \mathbf{M}_{rf}^T \\ \mathbf{M}_{rf} & \mathbf{M}_{ff} \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1n} \\ \mathbf{0}_{n1} & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix}}_K \begin{bmatrix} \theta \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \\
+ & \underbrace{\begin{bmatrix} B_{eq0} + k_{B_{eq}}|\dot{\theta}| + \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \dot{\mathbf{q}} & \dot{\theta} \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \\ -\mathbf{M}_{ff} \mathbf{q} \dot{\theta} & (a_0 + k_a|\dot{\theta}|)\mathbf{M}_{ff} + (b_0 + k_b|\dot{\theta}|)\mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix}}_N \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (2.125)$$

Nota-se na (2.125) que a matriz de amortecimento N possui termos não lineares a mais. Esse termos podem ser juntados em uma matriz representando o amortecimento dinâmico: $N_{|\dot{\theta}|}$ (porque ela depende do valor absoluto de θ). Assim, N da Equação (2.121) é agora:

$$\begin{aligned}
N = & \underbrace{\begin{bmatrix} B_{eq} & \mathbf{0}_{1n} \\ \mathbf{0}_{n1} & \mathbf{0}_{nn} \end{bmatrix}}_{N_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \dot{\mathbf{q}} & \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \dot{\theta} \\ -\mathbf{M}_{ff} \mathbf{q} \dot{\theta} & \mathbf{0}_{nn} \end{bmatrix}}_{N_q} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1n} \\ \mathbf{0}_{n1} & a\mathbf{M}_{ff} + b\mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix}}_{N_r} \\
+ & \underbrace{\begin{bmatrix} k_{B_{eq0}}|\dot{\theta}| & \mathbf{0}_{1n} \\ \mathbf{0}_{n1} & k_a|\dot{\theta}|\mathbf{M}_{ff} + k_b|\dot{\theta}|\mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix}}_{N_{|\dot{\theta}|}}
\end{aligned} \quad (2.126)$$

Os parâmetros usados para a simulação são aqueles do segundo conjunto da Tabela 2-4. Os coeficientes de proporcionalidade para a, b e B_{eq} , conforme definidos na Equação (2.124), que fornecem um bom resultado são resumidos na tabela seguinte:

Tabela 2-5 – Valores dos coeficientes estáticos e dinâmicos de amortecimento viscoso e estrutural.

	Valor do parâmetro quando $\dot{\theta} = 0$	Coeficiente de proporcionalidade a $ \dot{\theta} $
B_{eq}	0,1520	-0,046
a	-9,657	6
b	0,0207	-0,00067

A Figura 2.12 apresenta as respostas desse modelo não linear comparando-as com as resposta esperadas do experimento real. O resultado é muito melhor do que qualquer uma das duas respostas da Figura 2.11. Nesta simulação com amortecimento dinâmico, a resposta da posição angular é muito boa e é parecida àquela com o primeiro conjunto de parâmetros. Além disso, o

deslocamento da ponta da viga é bem representado, seja durante o movimento ou no final deste, quando a viga está parada e vibrando.

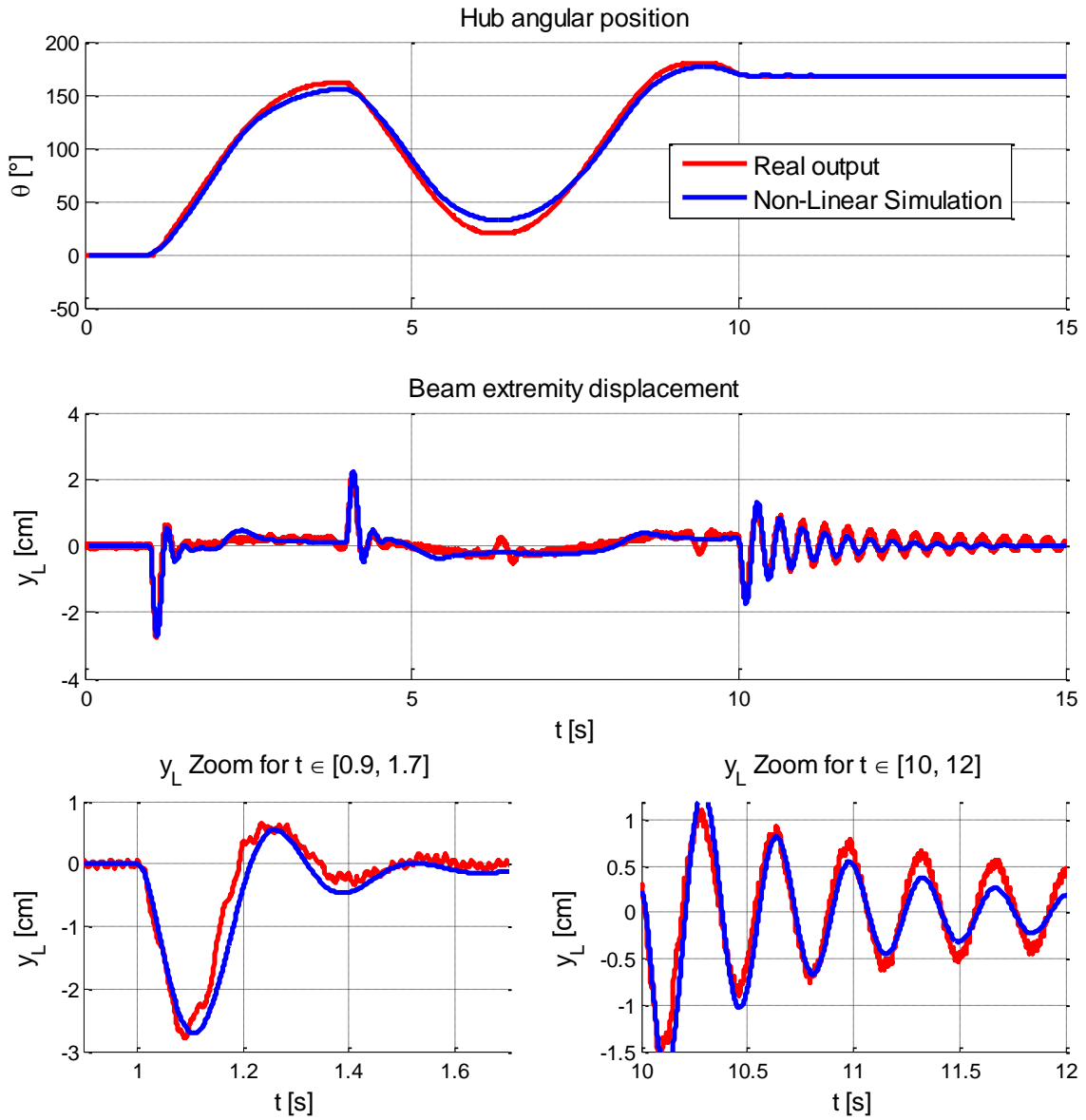


Figura 2.12 – Resposta do sistema não linear com o amortecimento viscoso e estrutural função de $|\dot{\theta}|$

Pode-se concluir que somente uma modelagem não linear do sistema permite modelar de maneira boa o experimento real durante todas as etapas do movimento.

2.6.3. Análise da influência dos termos não lineares

Uma análise dos valores dos coeficientes não lineares dos termos \mathbf{M} e \mathbf{N} da Equação (2.126) permite saber quais destes termos são desprezáveis. Para isto, comparam-se os valores constantes e os valores variáveis dos termos não lineares do modelo para o movimento realizado na Figura 2.12.

Começa-se com os termos não lineares da matriz de massa \mathbf{M} que correspondem à inércia de rotação.

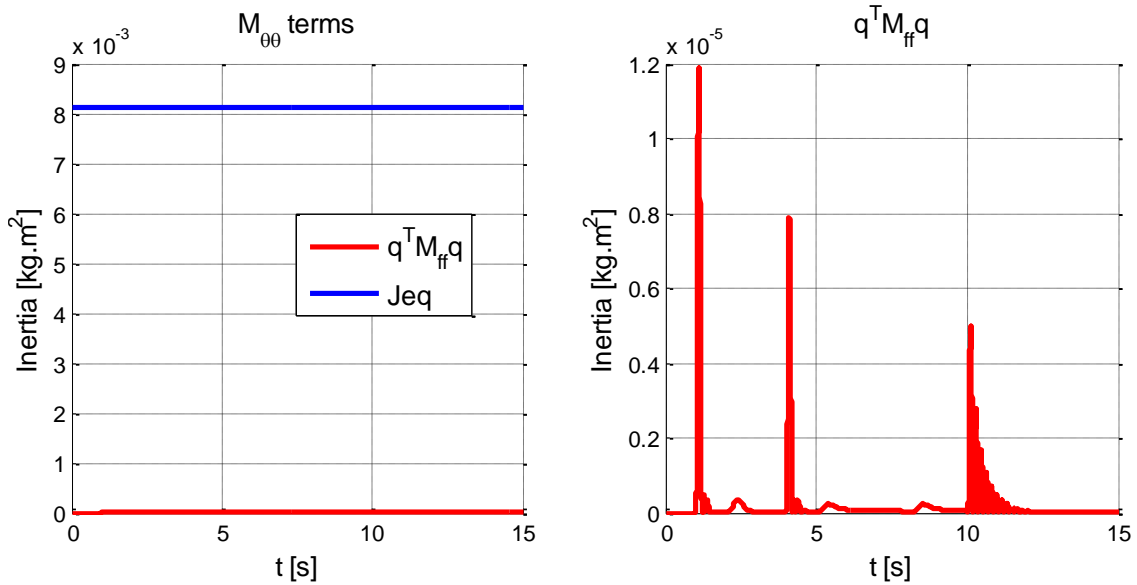


Figura 2.13 – Comparação dos termos lineares e não lineares relativos à inércia de rotação durante o movimento.

Na Figura 2.13 é possível ver que o termo de inércia devido aos modos assumidos é totalmente desprezável em comparação com o valor da inércia constante: $\mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \mathbf{q} \ll J_{eq}$. Isso pode ser explicado considerando que nas condições de Euler Bernoulli, o deslocamento flexível y deve ser pequeno. Isto faz como que os modos \mathbf{q} tenham valores pequenos (veja Equação (2.51)), assim, $\mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \mathbf{q}$ de segundo grau em \mathbf{q} pode ser desprezado.

Depois, analisam-se os termos não lineares na matriz de amortecimento \mathbf{N} . Primeiro analisam-se os termos relativos ao amortecimento viscoso da rotação do braço, os termos $\mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \dot{\mathbf{q}}$, $k_{Beq} |\dot{\theta}|$ e B_{eq0} . Os valores destes termos ao longo do movimento aparecem na Figura 2.14.

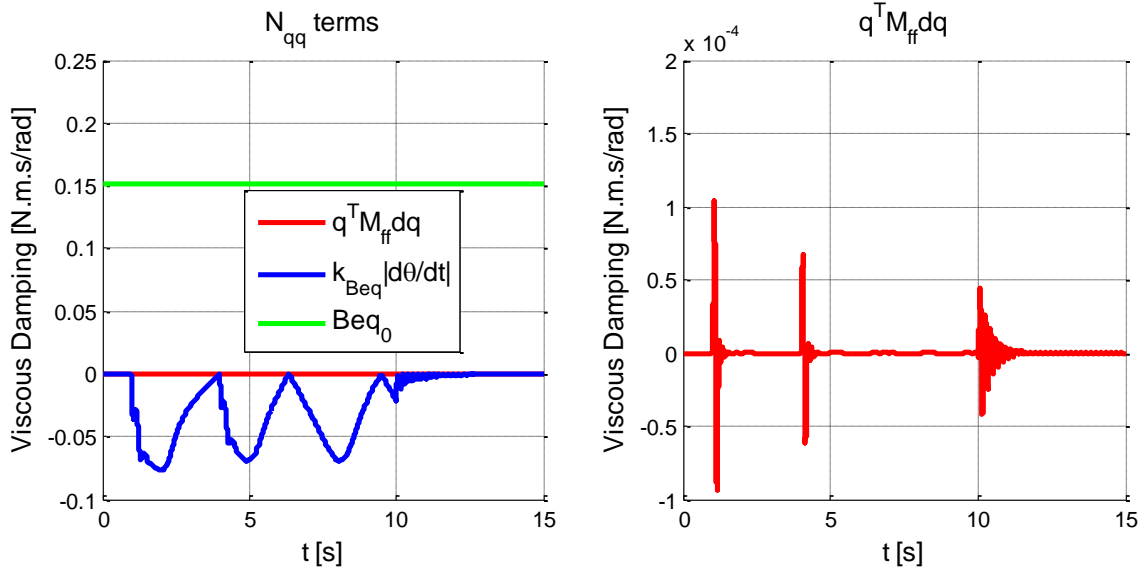


Figura 2.14 – Comparação dos termos lineares e não lineares relativos o amortecimento viscoso durante o movimento.

Percebe-se na Figura 2.14 que o termo $\mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \dot{\mathbf{q}}$ (amortecimento viscoso devido aos modos assumidos) é muito inferior aos outros dois. À vista disso, ele pode ser desprezado.

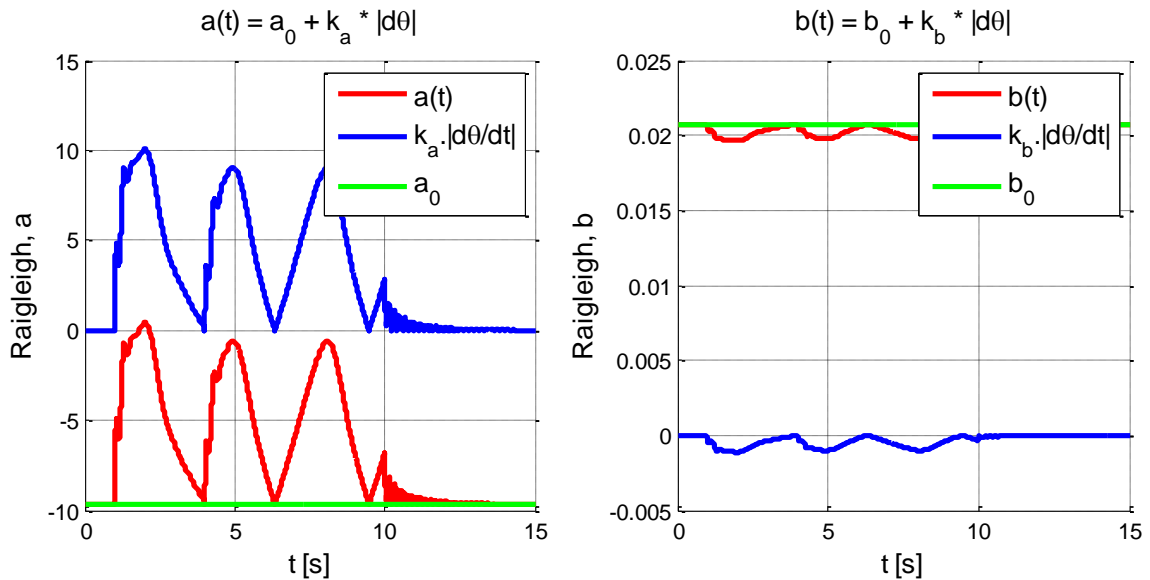


Figura 2.15 – Variação dos coeficientes de Rayleigh a e b durante o movimento.

Por último, analisam-se outros termos não lineares na matriz de amortecimento \mathbf{N} relativos ao amortecimento de Rayleigh. A Figura 2.15 representa a variação dos coeficientes de Rayleigh a e b durante o movimento. No primeiro gráfico se

observa que a varia bastante, porém, olhando para o segundo gráfico percebe-se que b é quase constante com valor 0,0202. Isso significa que o termo $k_b|\dot{\theta}|K_{ff}$ pode ser desprezado em frente à bK_{ff}

Considerando essas duas simplificações, a Equação (2.125) pode ser simplificada:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_m \\ \mathbf{0}_{n1} \end{bmatrix}}_F \mathbf{U}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} J_{eq} & \mathbf{M}_{rf}^T \\ \mathbf{M}_{rf} & \mathbf{M}_{ff} \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}}_N + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0}_{1n} \\ \mathbf{0}_{n1} & K_{ff} \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} \theta \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}}_N + \underbrace{\begin{bmatrix} B_{eq0} + k_{B_{eq0}}|\dot{\theta}| & \dot{\theta} \mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ff} \\ -\mathbf{M}_{ff} \mathbf{q} \dot{\theta} & (a_0 + k_a|\dot{\theta}|)\mathbf{M}_{ff} + b_0 K_{ff} \end{bmatrix}}_N \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}}_N \quad (2.127)$$

Por fim, a Figura 2.16 mostra as respostas do modelo não linear completo e do modelo não linear simplificado. Pode-se notar que as diferenças são mínimas, mesmo observando as diferencias com uma precisão de 0.5 s (terceiro e quarto gráfico). Pode-se concluir então que as simplificações feitas na Equação (2.127) são válidas. Daqui pra frente, será utilizado este modelo para representar o sistema braço robótico rotativo rígido-flexível.

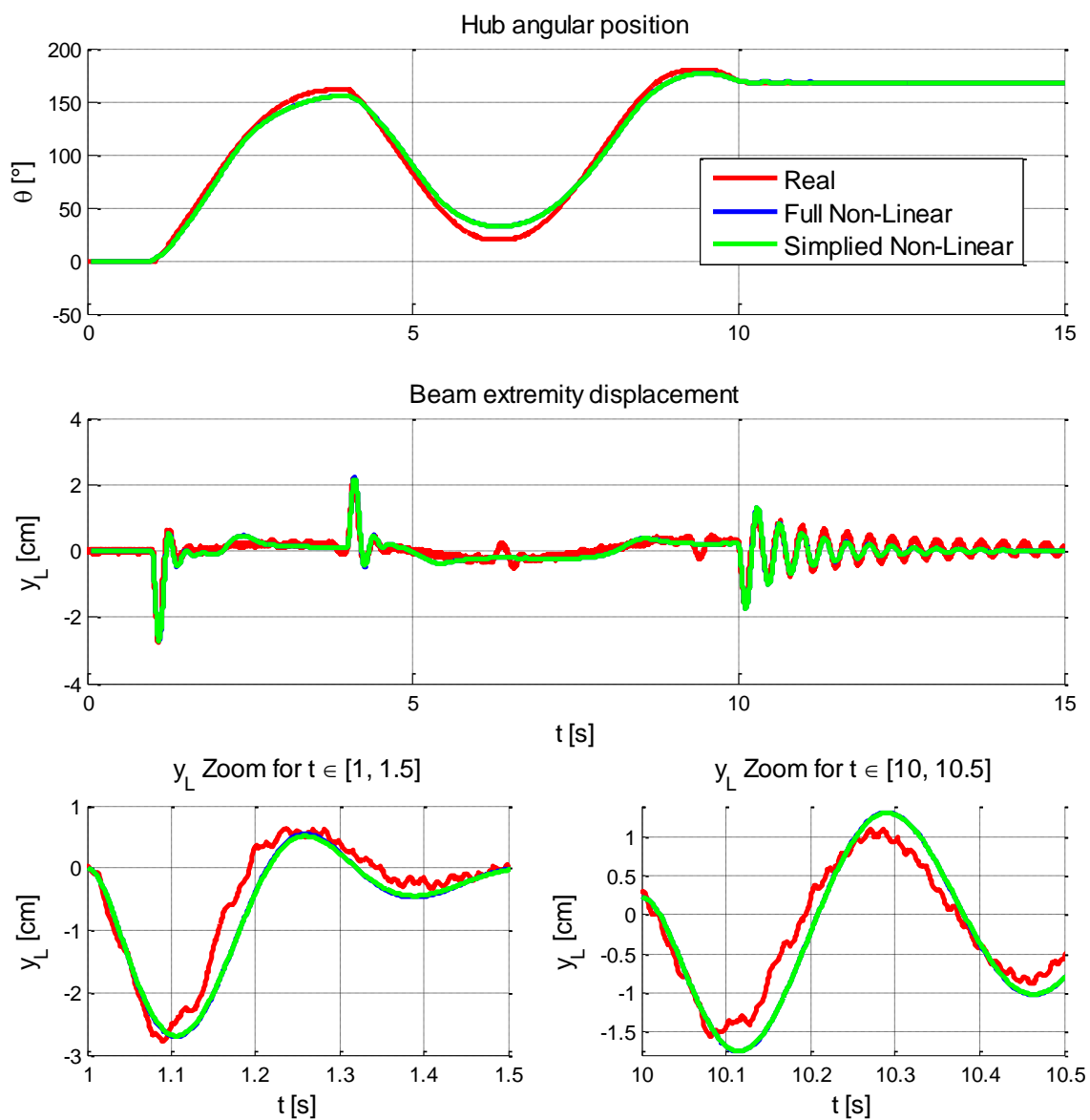


Figura 2.16 – Diferenças entre as respostas do modelo não linear completo e do modelo não linear simplificado.

3 CONTROLE SDRE

O controle SDRE ou controle da Equação de Riccati Dependente do Estado (do inglês “*State Dependent Riccati Equation*”) é um método de controle ótimo que permite o design de controladores não lineares que consideram as não linearidades do sistema. Uma vantagem desse método, além de conservar as não linearidades do sistema, é que ele permite uma grande flexibilidade no projeto de controle mediante o ajuste das chamadas matrizes peso.

Esse método foi proposto pela primeira vez por (PEARSON, 1962). Porém é só no fim dos anos 90 que esse problema começou a ser estudado mais detalhadamente (MRACEK et al., 1998; PARRISH et al., 1997). Hoje em dia esse método é ainda o assunto de muitos estudos; Çimen (2008, 2010, 2012) escreveu resumos muito bons do estado atual da pesquisa sobre esse assunto.

A ideia deste método é fatorar as equações diferenciais do sistema de maneira a fazer aparecer produtos entre vetores de estado e matrizes dependentes dos estados. Essa fatoração, chamada de parametrização SDC (Coeficientes Dependentes do Estado, do inglês “*State Dependent Coefficient*”), permite colocar o sistema em uma forma pseudo-linear (estrutura linear e conteúdo não linear).

Uma vez que o sistema é colocado em uma forma pseudo-linear, a minimização de uma função de custo quadrática permite obter um controle ótimo. Como o sistema não é linear, as matrizes dependem do estado e assim, variam com o tempo. Por isso, a minimização dessa função de custo quadrática é realizada em tempo real, o que permite obter a cada momento um novo controlador ótimo.

Nesta seção é feito um resumo rápido dos conceitos teóricos do SDRE. Primeiro, estuda-se a função de custo quadrática que é minimizada pelo controlador SDRE (seção 3.1). Depois, desenvolve-se a equação algébrica de Riccati cuja solução permite obter o ganho de controle do SDRE (seção 3.2). Em seguida, realiza-se a fatoração SDC do modelo do braço robótico obtido na

seção 2.4 (seção 3.3). Por último, estudam-se as matrizes peso do SDRE (seção 3.4).

3.1. Função de custo quadrática

Uma das contribuições mais importantes do controle SDRE é o Regulador Linear Quadrático (LQR do inglês “*Linear Quadratic Regulator*”). O LQR (KWAKERNAAK et al., 1972) é um método que permite obter um controlador mediante a minimização uma função de custo quadrática da forma:

$$J_{LQR} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (3.1)$$

Onde $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor dos estados (n_x é o número de estados do sistema), $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor dos sinais de controle (n_u é o número sinais de controles do sistema), e \mathbf{Q} e \mathbf{R} são as matrizes peso. $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ é uma matriz semi-definida positiva e $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ uma matriz e definida positiva. Isso é equivalente a:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x*} \quad & \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) > 0 \\ \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u*} \quad & \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Em outras palavras, a forma quadrática definida por \mathbf{Q} deve ser estritamente positiva e a forma quadrática definida por \mathbf{R} deve ser positiva.

A ideia desta função é chegar a um compromisso entre

- O desempenho do sistema: a matriz peso \mathbf{Q} permite regular o “tamanho” dos estados \mathbf{x} .
- A energia necessária: a matriz peso \mathbf{R} permite regular o “tamanho” dos sinais de controle \mathbf{u} .

A abordagem do SDRE é uma extensão da abordagem LQR: a função de custo quadrática é a mesma, a única diferença é que as matrizes peso \mathbf{Q} e \mathbf{R} podem depender do estado \mathbf{x} .

$$J_{\text{SDRE}} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}(\mathbf{x}) \mathbf{u}) dt \quad (3.3)$$

O problema de otimização a ser resolvido é o seguinte:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde $\mathbf{f}: \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ e $\mathbf{g}: \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}$. A primeira equação é a definição do comportamento do sistema na forma de um sistema de equações diferenciais. A segunda equação são as condições iniciais do sistema. Essas duas equações são as restrições da função de custo da Equação (3.3). Resultados relativos à existência da solução e estabilidade deste problema de otimização (Equações (3.3) e (3.4)) podem ser encontrados em (ÇIMEN, 2008).

Pode ser aplicada uma fatoração/parametrização de maneira a transformar o sistema da Equação (3.4) em uma representação com Coeficientes Dependentes do Estado (SDC do inglês “*State Dependent Coefficient*”),

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x}$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u}$. Detalhes sobre esta parametrização encontram-se na seção 3.3.

3.2. Equação SDARE

Resolver o problema de controle ótimo definido nas Equações (3.3) e (3.5) é equivalente a resolver uma Equação Algébrica de Riccati Dependente do Estado, SDARE do inglês “*State Dependent Algebraic Riccati Equation*”. É desta equação que vem o nome de controle SDRE. Nesta seção são detalhadas as etapas a serem realizadas para obter a equação SDARE.

Usando o princípio mínimo de Pontryagin (1987), mostra-se que uma condição necessária à resolução deste problema de controle ótimo é que o sinal de

controle \mathbf{u} seja escolhido de tal maneira que a função Hamiltoniana $H: \mathbb{R}^{2n_x+n_u} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}) \quad (3.6)$$

seja minimizada. O vetor $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{n_x}$ é chamado de vetor dos co-estados. As condições necessárias para o controle ótimo (ÇİMEN, 2012; MRACEK et al., 1998) são

$$\mathbf{H}_{\mathbf{u}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad \mathbf{H}_{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\dot{\boldsymbol{\lambda}} \quad (3.7)$$

Aplicando essas condições à Hamiltoniana da Equação (3.6) e lembrando que, para duas matrizes \mathbf{M} e \mathbf{N} de dimensões compatíveis, $(\mathbf{MN})^T = \mathbf{N}^T \mathbf{M}^T$ e $(\mathbf{M} + \mathbf{N})^T = \mathbf{M}^T + \mathbf{N}^T$, chega-se a

$$0 = \mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{B}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\lambda} \quad (3.8)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\mathbf{Q}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u} - \left(\mathbf{x}^T \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}} \right]^T + \mathbf{A}^T \right) \boldsymbol{\lambda} - \left[\frac{\partial \mathbf{B}\mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \boldsymbol{\lambda} \quad (3.9)$$

Nota-se que, para simplificar as expressões, as matrizes dependentes do estado como $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}$ e \mathbf{R} estão escritas sem fazer referência ao estado, i.e., $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{A}$.

Assumindo o co-estado $\boldsymbol{\lambda}$ da forma $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ onde $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e aplicando essa forma na primeira condição para o controle ótimo da Equação (3.8), obtém-se a lei de controle \mathbf{u} :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (3.10)$$

Agora, falta achar a expressão de \mathbf{P} para poder determinar completamente a lei de controle ótimo, para isso se usa a segunda condição para o controle ótimo (Equação (3.9)(3.8)). Portanto, necessita-se conhecer a expressão do diferencial do co-estado $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$:

$$\dot{\lambda} = \dot{P}x + P\dot{x} \quad (3.11)$$

Para obter a expressão de \dot{x} substitui-se a lei de controle da Equação (3.10) no sistema parametrizado da Equação (3.5) e chega-se a

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T Px \quad (3.12)$$

Substituindo a Equação (3.12) na Equação (3.11) obtém-se

$$\dot{\lambda} = \dot{P}x + PAx - PBR^{-1}B^T Px \quad (3.13)$$

Por fim, inserindo esse resultado na segunda condição para o controle ótimo (Equação (3.9)) e reorganizando os termos, resulta

$$\begin{aligned} 0_{n_x} = \dot{P}x + \frac{1}{2}x^T \frac{\partial Q}{\partial x} x + \frac{1}{2}u^T \frac{\partial R}{\partial x} u + x^T \left[\frac{\partial A}{\partial x} \right]^T Px + \left[\frac{\partial Bu}{\partial x} \right]^T Px \\ + (PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q)x \end{aligned} \quad (3.14)$$

Para que a igualdade da Equação (3.14) seja verdadeira para qualquer estado x do sistema, as duas equações seguintes devem ser respeitadas:

$$0_{n_x n_x} = PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q \quad (3.15)$$

$$0_{n_x} = \dot{P}x + \frac{1}{2}x^T \frac{\partial Q}{\partial x} x + \frac{1}{2}u^T \frac{\partial R}{\partial x} u + x^T \left[\frac{\partial A}{\partial x} \right]^T Px + \left[\frac{\partial Bu}{\partial x} \right]^T Px \quad (3.16)$$

A Equação (3.15) é uma Equação Algébrica de Riccati Dependente do Estado (SDARE). Como A, B, Q e R são matrizes conhecidas, a resolução dessa equação permite obter a matriz $P(x)$. Uma vez P conhecido é possível calcular o ganho de controle K conforme a Equação (3.10), obtendo

$$\begin{aligned} u(x) &= -K(x)x \\ K(x) &= R^{-1}(x)B^T(x)P(x) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Geralmente, não existe solução analítica para a Equação (3.15) de Riccati; a solução deve ser calculada numericamente.

Nota-se que na SDARE, Equação (3.15), os coeficientes dependem do estado, assim a solução P deve ser calculada em tempo real. A Figura 3.1 resume os passos necessários para obter a lei de controle u do sistema.

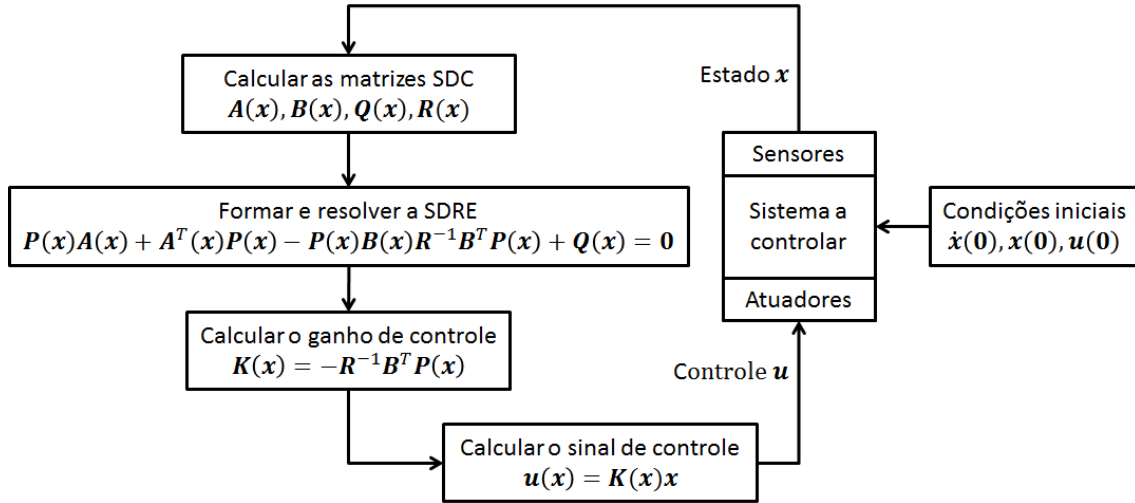


Figura 3.1 – Algoritmo SDRE.

A Figura 3.1 representa o algoritmo SDRE com um diagrama de blocos: os sensores do sistema fornecem o estado $x(t)$ do sistema no instante t ; isso permite calcular as diferentes matrizes SDC. Com as matrizes SDC determinadas para o instante t atual, forma-se e resolve-se a SDRE, o que permite obter o sinal de controle u . Por fim, esse sinal de controle é aplicado nos atuadores do sistema, isso faz como que o sistema troque de estado: $x(t + \Delta_{SDRE})$, esse novo estado é capturado pelos sensores de novo e outro ciclo de cálculo começa. A frequência de realização desse processo $1/\Delta_{SDRE}$ é limitada pela frequência de aquisição dos sensores: f_{sen} e pelo tempo de reação dos atuadores: T_{atu} :

$$\Delta_{SDRE} \geq \max \left(T_{atu}, \frac{1}{f_{sen}} \right) \quad (3.18)$$

Cabe lembrar que calcular o ganho K do controle SDRE resolvendo a Equação (3.15) de Riccati não garante que o controle obtido seja ótimo. Para isso precisa verificar também a Equação (3.16) (e assim verificar totalmente a segunda condição de otimização Equação (3.14)). A priori, nada assegura que

a Equação (3.16) seja nula também. Porém, assumindo que o sistema é assintoticamente estável, i.e., $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{u} = \mathbf{0}$, a Equação (3.16) é verificada de maneira assintótica a um ritmo quadrático (MRACEK et al., 1998).

Em conclusão, como a segunda condição de otimização, Equação (3.14), é verificada unicamente de maneira assintótica, o controle obtido não é ótimo e sim, sub-ótimo. Isso significa que o desempenho obtido com controle SDRE é perto do desempenho ótimo.

3.3. Parametrização SDC

Na seção 2.4, as equações do movimento do braço robótico foram colocadas no formato matricial. É importante notar que essa parametrização não é a única; de fato, existe um número infinito de parametrizações quando a dinâmica do sistema é não linear (ÇİMEN, 2010).

Nesta seção, primeiro, generalizando um exemplo ilustrativo, mostra-se matematicamente como representar as diferentes parametrizações dos Coeficientes Dependentes dos Estados (SDC do inglês “*State Dependent Coefficient*”) adicionando variáveis de parametrização. Depois, o modelo do braço obtido na seção 2.4 (Equação (2.98)) é generalizado adicionando as variáveis de parametrização. Por último, estuda-se como varia a controlabilidade do sistema em função das diferentes parametrizações.

3.3.1. Parametrização da equação

Para ilustrar as diferentes parametrizações SDC possíveis quando as equações do sistema não são lineares, usa-se um exemplo simples: seja uma função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x_1, x_2) = 3x_1x_2 \quad (3.19)$$

Existem várias maneiras de fatorizar essa expressão, por exemplo:

$$f(x_1, x_2) = \underbrace{\begin{bmatrix} 3x_2 & 0 \end{bmatrix}}_{A_1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 3x_1 \end{bmatrix}}_{A_2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2x_2 & x_1 \end{bmatrix}}_{A_3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Generalizando esse exemplo para o caso multivariável (mais de um estado), existem sempre no mínimo duas parametrizações $(A_1, A_2) \in (\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x})^2$ que satisfazem $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{[0,1]}$

$$A(x) = \alpha A_1(x) + (1 - \alpha) A_2(x) \quad (3.21)$$

Assim $A(x, \alpha)$ representa a família das infinitas parametrizações SDC possíveis. Essa não unicidade da SDC oferece um grau de liberdade adicional para o projeto do controlador. A escolha de α é feita de acordo com o sistema a controlar, lembrando que o sistema deve ficar controlável, ou seja, a matriz de controlabilidade $C_o \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x}$

$$C_o = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n_x-1}B] \quad (3.22)$$

deve ser de posto completo a qualquer instante.

3.3.2. Parametrização SDC do modelo do braço robótico

Na seção 2.4, as equações de Lagrange (Equação (2.97)) foram colocadas no formato matricial (Equação (2.98)). Essa representação não é única, alguns termos podem ser parametrizados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} q^T M_{ff} q \ddot{\theta} &= \alpha_1 [q^T M_{ff} q \quad 0] \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ q \end{bmatrix} + (1 - \alpha_1) [0 \quad q^T M_{ff} \ddot{\theta}] \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ q \end{bmatrix} \\ 2\dot{\theta} q^T M_{ff} \dot{q} &= \alpha_2 [2q^T M_{ff} \dot{q} \quad 0] \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + (1 - \alpha_2) [0 \quad 2\dot{\theta} q^T M_{ff}] \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \\ -\dot{\theta}^2 M_{ff} q &= \alpha_3 [-\dot{\theta} M_{ff} q \quad 0] \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ q \end{bmatrix} + (1 - \alpha_3) [0 \quad -\dot{\theta}^2 M_{ff}] \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ q \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$. Definido os parâmetros

$$\begin{aligned} M_{11} &= q^T M_{ff} q & N_{11} &= 2q^T M_{ff} \dot{q} & N_{21} &= -\dot{\theta} M_{ff} q \\ K_{12} &= q^T M_{ff} \ddot{\theta} & N_{12} &= 2\dot{\theta} q^T M_{ff} & K_{22} &= -\dot{\theta}^2 M_{ff} \end{aligned} \quad (3.24)$$

as Equações de Lagrange (2.97) podem ser colocadas no formato matricial como segue:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} J_{eq} + \alpha_1 M_{11} & \mathbf{M}_{rf}^T \\ \mathbf{M}_{rf} & \mathbf{M}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{eq} + \alpha_2 N_{11} & (1 - \alpha_2) \mathbf{N}_{12} \\ -\alpha_3 N_{21} & \mathbf{0}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 & (1 - \alpha_1) \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{0}_{n1} & \mathbf{K}_{ff} + (1 - \alpha_3) \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_m \\ \mathbf{0}_{n1} \end{bmatrix} U_m \end{aligned} \quad (3.25)$$

Esse formato é mais genérico do que aquele obtido na Equação (2.98) que é um caso específico considerando $\alpha = [0 \ 0,5 \ 1]$.

O sistema estudado tem um único sinal de controle, a tensão de alimentação do moto-reductor DC, assim $\mathbf{u} = u = U_m$. O sistema matricial parametrizado descrito acima pode ser escrito de maneira compacta como:

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \mathbf{N} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} \theta \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \mathbf{F}u \quad (3.26)$$

O objetivo é colocar esse sistema no formato da Equação (3.5). Para isso realizam-se os seguintes passos.

Primeiro, multiplicando pelo inverso de \mathbf{M} chega-se a

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{N} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \begin{bmatrix} \theta \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}u \quad (3.27)$$

Depois, define-se o vetor dos estados \mathbf{x} como

$$\mathbf{x} = [\theta \ \mathbf{q} \ \dot{\theta} \ \dot{\mathbf{q}}]^T \quad (3.28)$$

Portanto, a Equação (3.27) pode ser reescrita na forma SDC da Equação (3.5)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n+1} & \mathbf{I}_{n+1} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \theta \\ \mathbf{q} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n+1 \times 1} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u \quad (3.29)$$

Verifica-se nas Equações (3.29) e (2.122) que a matriz A é função dos estados x e dos coeficientes de parametrização α : $A(x, \alpha)$.

3.3.3. Controlabilidade das diferentes parametrizações SDC

Uma regra clássica para a seleção dos coeficientes de parametrização α é escolher esses parâmetros de maneira a aumentar a controlabilidade do sistema (ÇIMEN, 2010). A controlabilidade do sistema pode ser medida analisando o valor do $\det(C_o)$ onde C_o é a matriz de controlabilidade definida na Equação (3.22): quanto mais alto seja o valor, melhor é a controlabilidade.

O valor $\det(C_o)$ representativo da controlabilidade do sistema pode ser calculado em tempo real usando os seguintes passos:

1. Primeiro usa-se a Equação (3.24) para obter $M_{11}, K_{12}, N_{11}, N_{12}, N_{21}$ e K_{22} em função dos estados $\dot{\theta}, \ddot{\theta}, q$ e \dot{q}
2. Depois, com a Equação (3.25) é possível obter M, N e K em função de $M_{11}, K_{12}, N_{11}, N_{12}, N_{21}$ e K_{22}
3. Em seguida, a Equação (3.29) fornece A e B em função de M, N e K
4. Por fim, a Equação (3.22) é utilizada para obter C_o em função de A e B

A Figura 3.2 é obtida fazendo variar os parâmetros α_1 e α_3 e deixando α_2 constante. Nota-se que, quanto menor é o valor de α_1 , mais alto é o valor de $\det(C_o)$ e, portanto, a controlabilidade do sistema. Por outro lado, quanto maior é o valor de α_3 mais alto é o valor de $\det(C_o)$, e portanto, a controlabilidade do sistema. Assim, a melhor controlabilidade se consegue aplicando $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_3 = 1$: valor constante durante todo o movimento (curva vermelha). Nota-se que, nesta figura α_2 fica constante porque foi percebido que esse parâmetro não tinha influência sobre a controlabilidade do sistema.

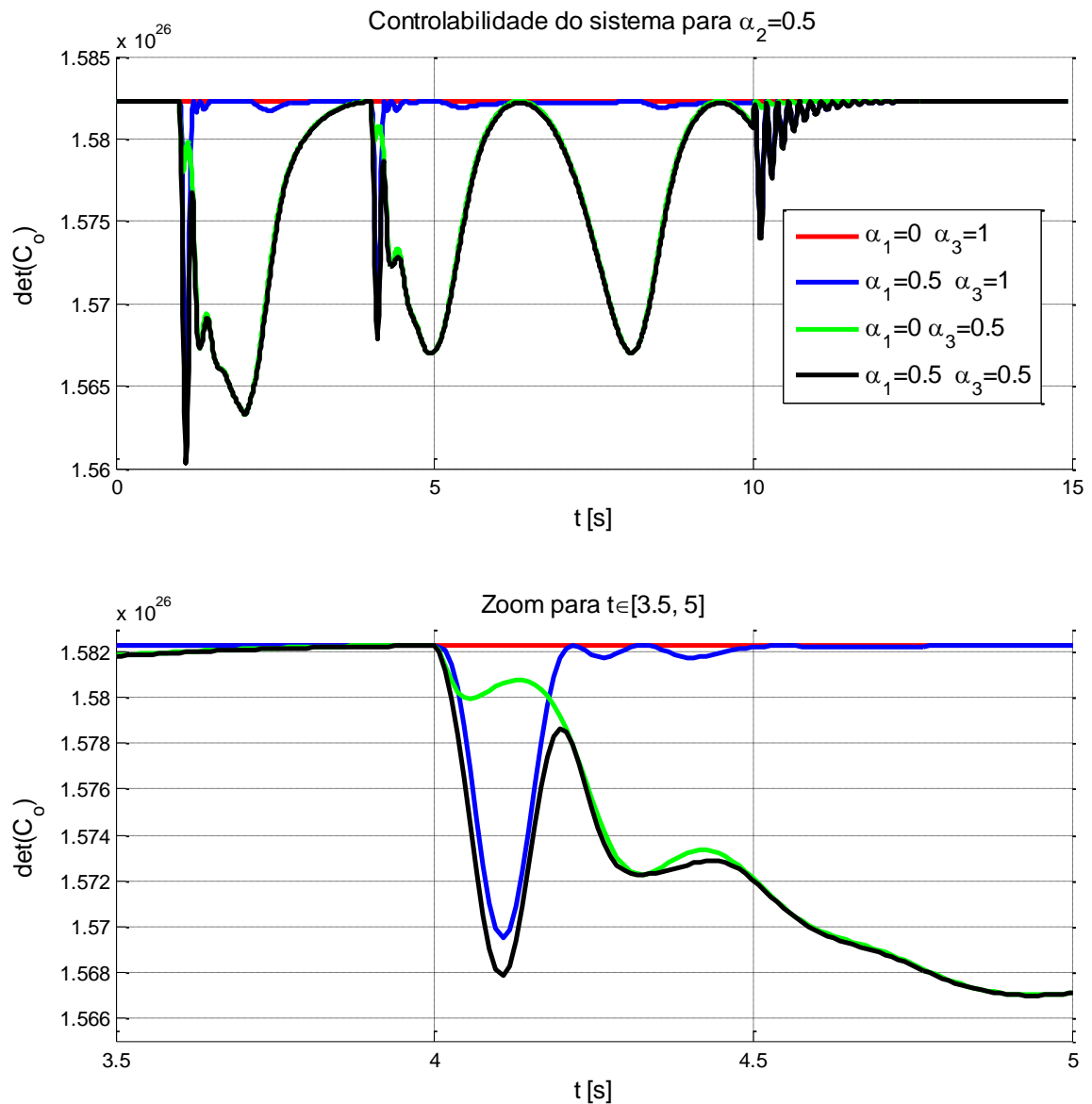


Figura 3.2 – Representação da controlabilidade do sistema em função do tempo para diferentes valores de α_1 e α_3 e com $\alpha_2 = 0.5$.

É possível ver que, quando α_1 é grande, se produzem uns picos de “pior controlabilidade” nos instantes $t \cong (1, 4, 10)$ s. Também, quando α_3 é pequeno, se produzem uns aumentos de “não controlabilidade” centralizados nos instantes $t \cong (2, 5, 8)$ s. A Figura 3.3 faz o paralelo entre a controlabilidade e o comportamento do sistema da Equação (2.127). Percebe-se que os picos de “pior controlabilidade” de α_1 correspondem aos instantes de picos do deslocamento flexível y_L . Da mesma forma, nota-se que o aumento de “não

controlabilidade” devido a α_3 corresponde aos momentos onde o deslocamento angular do braço θ se aproxima dos 90°.

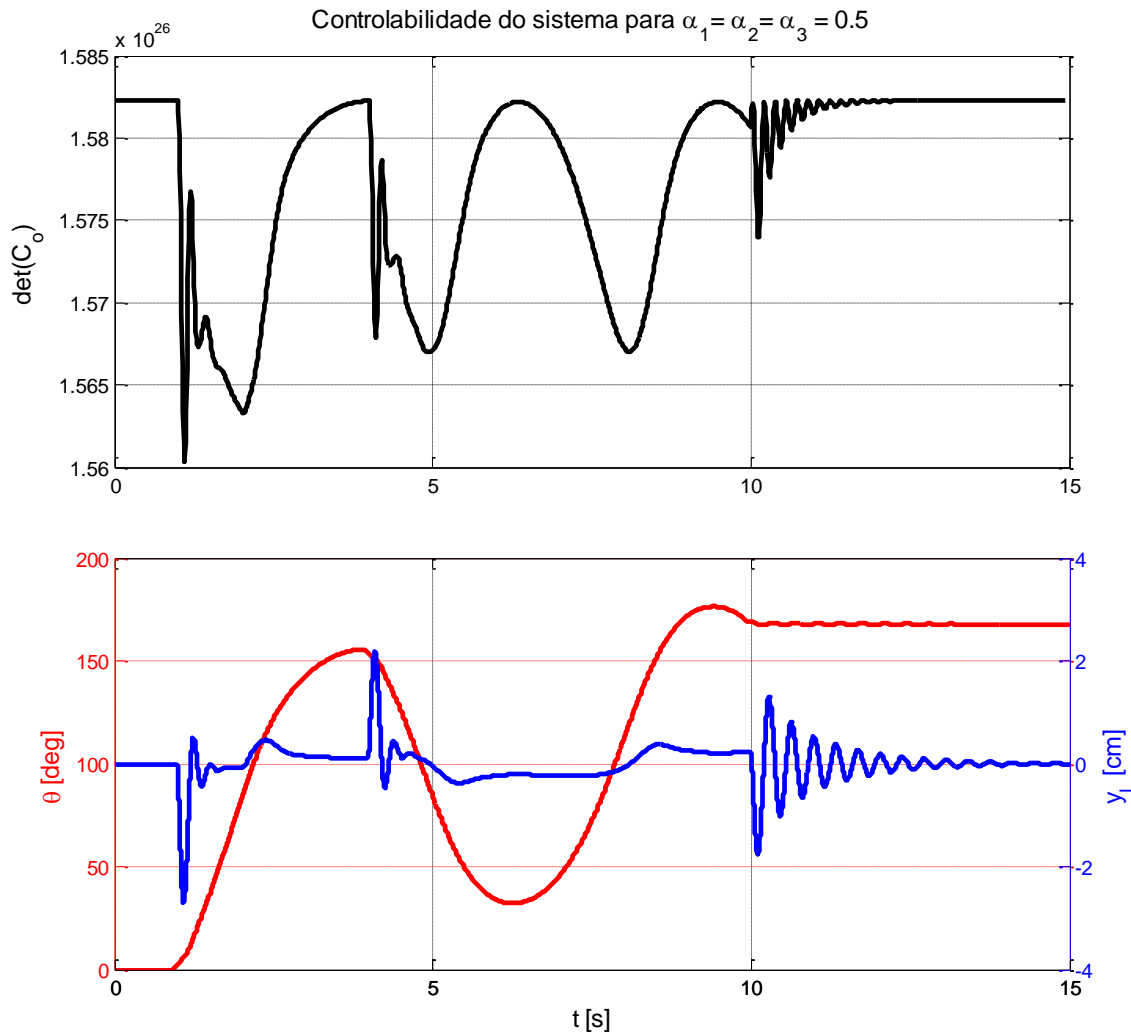


Figura 3.3 – Paralelo entre os instantes de perda de controlabilidade e o comportamento do sistema.

3.4. Matrizes peso do SDRE Q e R

A regulagem do controlador SDRE é feita escolhendo as duas matrizes peso Q e R definidas na função de custo quadrática a ser minimizada: Nesta seção, estuda-se primeiro como escolher os valores das matrizes peso. Depois, mostra-se um método de normalização das matrizes peso que permite obter os valores iniciais delas em função dos parâmetros do projeto de controle. Por fim, evoca-se a possibilidade de usar matrizes peso dependendo do estado x do sistema para melhorar o desempenho.

3.4.1. Influência das matrizes peso

Na função de custo do SDRE da Equação (3.3) aparecem dois termos:

$$\int_{t_0}^{\infty} \mathbf{x}^T \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \mathbf{x} dt \quad \text{e} \quad \int_{t_0}^{\infty} \mathbf{u}^T \mathbf{R}(\mathbf{x}) \mathbf{u} dt \quad (3.30)$$

O primeiro termo corresponde à energia dos estados do sistema \mathbf{x} que devem ser controlados, é o termo responsável do bom desempenho do sistema. O segundo termo corresponde à energia dos sinais de controle \mathbf{u} . O SDRE pretende minimizar essas duas energias ao mesmo tempo. Assim a escolha dos valores das matrizes peso \mathbf{Q} e \mathbf{R} deve chegar a um compromisso entre o desempenho do sistema e a energia de controle necessária levando em conta que:

- Quando \mathbf{R} é grande (ou \mathbf{Q} pequeno), a forma mais eficiente de diminuir a função de custo (Equação (3.3)) é de usar sinais de controle \mathbf{u} pequenos com estados \mathbf{x} grandes.
- Quando \mathbf{Q} é grande (ou \mathbf{R} pequeno), a forma mais eficiente de diminuir a função de custo (Equação (3.3)) é ter os estados \mathbf{x} pequenos com sinais de controle \mathbf{u} grandes.

Resumindo, \mathbf{Q} é a matriz de pesos utilizada para penalizar qualquer estado que toma valores altos e \mathbf{R} é a matriz peso utilizada para penalizar os sinais de controle “grandes”. Considerando este comportamento, podem ser deduzidas algumas diretrizes úteis. (KATSEV, 2006):

1. Aumentar \mathbf{Q} resulta em uma resposta do sistema mais rápida (melhor desempenho), mas, o custo de controle é maior.
2. Aumentar \mathbf{R} resulta em um consumo pequeno de energia para realizar o controle, mas o desempenho do sistema é prejudicado (tempo de estabilização alto, por exemplo).

3. Escolher \mathbf{Q} e \mathbf{R} com formato de matrizes diagonais garante que a “penalidade” sobre cada variável (estado x ou controle u) seja independente das outras.
4. Se tiver limitações de projeto ou limitações físicas para um estado x ou controle u , o peso para este parâmetro deve ser maior do que os outros.

Como consequência direta destas diretrizes, Bryson (1975) desenvolveu uma regra para obter os valores das matrizes peso: selecionar \mathbf{Q} e \mathbf{R} matrizes diagonais com os termos diagonais definidos como

$$Q_{ii} = \frac{1}{\text{Maior valor aceitavel para } x_i^2} \quad R_{jj} = \frac{1}{\text{Maior valor aceitavel para } u_j^2} \quad (3.31)$$

onde $i \in \mathbb{N}^{[1, n_x]}$ e $j \in \mathbb{N}^{[1, n_u]}$. Essa regra opera como uma normalização das variáveis da função de custo Equação (3.3). É muito útil quando os valores numéricos das diferentes variáveis (estados x e controles u) são de ordem de grandeza diferente (HESPANHA, 2005).

3.4.2. Normalização das matrizes peso

Como as ordens de grandeza das variáveis (estados x e controles u) da função de custo Equação (3.3) podem ser muito diferentes, precisa-se aplicar uma técnica de normalização para que seja possível comparar a influência de cada termo das matrizes peso sobre o desempenho do sistema. Por isso aplica-se a regra de Bryson vista na Equação (3.31) usando-se a notação $\bar{x}_i =$ Maior valor aceitavel para (x_i) :

$$\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_x = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\bar{x}_1)^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{(\bar{x}_{n_x})^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{x_1} & & \\ & \ddots & \\ & & Q_{x_{n_x}} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{R} = \bar{\mathbf{R}}\mathbf{R}_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\bar{u}_1)^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{(\bar{u}_{n_u})^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{u_1} & & \\ & \ddots & \\ & & R_{u_{n_u}} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Desta maneira, as matrizes peso são definidas como um produto de duas matrizes diagonais; primeiro, $\bar{\mathbf{Q}}$ e $\bar{\mathbf{R}}$, matrizes diagonais de normalização contendo os valores máximos aceitáveis e segundo, \mathbf{Q}_x e \mathbf{R}_u , matrizes diagonais contendo os termos diagonais Q_{x_i} e R_{u_i} a serem ajustados pelo projetista em função do desempenho desejado.

Por fim, para ilustrar o conceito de “maior valor aceitável” mostram-se alguns tipos de limitações usando exemplos concretos:

- Requisito de desempenho do sistema, por exemplo: a temperatura T do quarto não deve ultrapassar 25 °C, i.e., $\bar{T} = 25$.
- Limitação física de um atuador do sistema, por exemplo: a tensão de alimentação do motor U_m maximal é 15 V, i.e., $\bar{U}_m = 15$.
- Requisito de segurança do sistema, por exemplo: a velocidade máxima de movimento em translação do braço robótico na direção z é de 17 m/s, i.e., $\bar{V}_z = 17$.
- Limitação física de um estado do sistema, por exemplo: o limite de deformação elástica da viga não deve ser atingido, isso implica uma deformação y_L da extremidade da viga máxima aceitável de 20 cm, i.e., $\bar{y}_L = 20$.

3.4.3. Pesos dependentes do estado

Uma vantagem do controlador SDRE é poder usar matrizes peso \mathbf{Q} e \mathbf{R} dependentes do estado \mathbf{x} do sistema conforme definido na função de custo do SDRE (Equação (3.3)). Esta flexibilidade adicional aumenta a capacidade do clássico LQR de chegar a um compromisso entre a entrada e os estados. Por

exemplo, as matrizes peso podem ser escolhidas de tal maneira que quando x aumenta, Q aumenta e R diminua; economizando assim energia de controle perto da origem e garantindo que o sistema atinja o equilíbrio longe da origem (ÇIMEN, 2010).

4 SIMULAÇÃO E RESULTADOS

Os resultados desta seção são obtidos usando o modelo da Equação (2.127) e realizando a simulação com Simulink (ver modelagem no APÊNDICE B). Para a simulação são considerados apenas dois modos de vibração, i.e., $n = 2$. Desta maneira e conforme a Equação (3.28), o sistema tem seis estados, a saber, $x = [\theta \ q_1 \ q_2 \ \dot{\theta} \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2]^T$. Consequentemente, a matriz peso Q é de dimensão 6×6 . Também, como o sistema tem somente um controle (a tensão de alimentação do motor U_m), o vetor dos sinais de controle é escalar: i.e. $u = u = U_m$. Por isso, a matriz peso R é escalar, i.e., $R = R$.

Nesta seção, primeiro são apresentados os objetivos de controle (seção 4.1.1) e as matrizes peso são normalizadas usando a regra de Bryson (seção 4.1). Depois, estuda-se a influência dos diferentes termos das matrizes peso no desempenho do sistema: primeiro estudando as respostas no domínio do tempo (seção 4.3) e depois analisando o mapa de desempenho do sistema (seção 4.4). Em seguida, desenvolve-se uma lei matemática que permite obter os valores das matrizes peso que fornecem um desempenho ótimo (seção 4.5). Depois, usam-se matrizes peso dependente dos estados do sistema x para melhorar o desempenho (seção 4.6). Por fim e para concluir, compara-se o desempenho do SDRE com aquele do LQR para mostrar as vantagens do controlador SDRE (seção 4.7).

4.1. Otimização multiobjetivo com abordagem de Pareto

Para desenhar o controlador SDRE, precisam-se escolher os valores das matrizes peso R e Q . O fato de que todos os pesos não influam de maneira independente sobre os diferentes objetivos de controle do sistema dificulta a escolha dos mesmos.

O objetivo é determinar quais são os valores das matrizes peso R e Q que forneçam um desempenho ótimo ao sistema de acordo com alguns objetivos de desempenho definidos. Toda dificuldade deste problema vem do fato de que o desempenho de um sistema não se limita a um único objetivo, mas sim, a um

conjunto de vários objetivos de desempenho. Esses objetivos de desempenho são muitas vezes conflitantes e precisa-se chegar a um compromisso entre eles.

4.1.1. Objetivos de desempenho

Para medir o desempenho do sistema é necessário representar os objetivos de desempenho de maneira numérica (SAWARAGI et al., 1985). Os objetivos de desempenho escolhidos neste estudo são:

- Minimizar o tempo de estabilização do sistema para estabilizar o ângulo do braço θ em uma faixa $\pm 5\%$ do valor angular desejado θ_c .
- Minimizar a amplitude máxima em valor absoluto do deslocamento flexível y_L .
- Minimizar a energia necessária para realizar a manobra.

Matematicamente isto é:

$$T_{r5\%} = \min_{t \in [0, t_{\infty}]} (T \mid \theta(T+t) \in [0.95\theta_c \quad 1.05\theta_c]) \quad (4.1)$$

$$y_{Lmax} = \max_{t \in [0, t_{\infty}]} |y_L(t)| \quad (4.2)$$

$$E_u = \int_0^{t_{\infty}} U_m^2(t) dt \quad (4.3)$$

De maneira intuitiva, já se sabe que o objetivo $T_{r5\%}$ é conflitante com os dois outros y_{Lmax} e E_u : estabilizar o sistema mais rapidamente resulta em um deslocamento flexível no início do movimento e uma energia necessária maior.

A Figura 4.1 representa graficamente esse 3 objetivos. No primeiro gráfico, a posição angular do braço θ e o tempo de estabilização $T_{r5\%}$. No segundo gráfico, o deslocamento flexível y_L e o valor absoluto máximo y_{Lmax} . No terceiro gráfico, a energia de alimentação do sistema E e a energia necessária para realizar a manobra E_u .

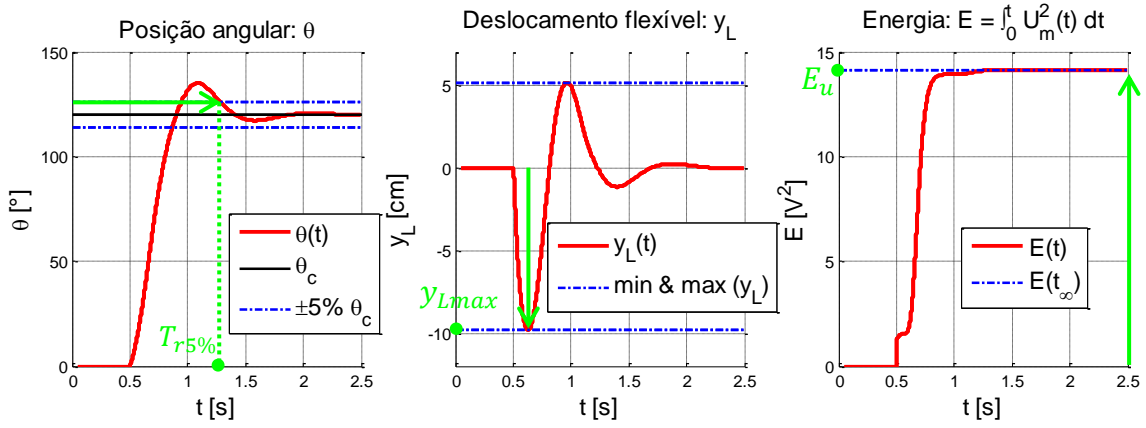


Figura 4.1 – Representação dos objetivos de desempenho: tempo de estabilização de θ na faixa de $\pm 5\%$, amplitude máxima do deslocamento flexível e energia necessária para realizar a manobra.

4.1.2. Abordagem clássica da otimização multiobjetivo

Seja n_o o número de objetivos de controle a otimizar. Assim para cada objetivo $i \in \mathbb{N}^{[1, n_o]}$ define-se uma função $f_i: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ onde \mathcal{S} é o conjunto das alternativas possíveis. O conjunto \mathcal{S} é também chamado de espaço de design ou espaço das soluções.

Tipicamente, para resolver esse problema de otimização multiobjetivo, os diferentes objetivos de otimização f_i são agregados em uma única função que, sendo minimizada, conduz a uma solução única (AGRAWAL et al., 2004):

$$\text{Minimizar } F(x) = (f_1(x), \dots, f_{n_o}(x)) \quad \forall x \in \mathcal{S} \quad (4.4)$$

Aqui, neste estudo, \mathcal{S} é o conjunto das matrizes peso que fornecem um controlador estabilizando o sistema: $\mathcal{S} = \{(\mathbf{R}, \mathbf{Q}) / \text{sistema estável}\}$ e tem 3 funções f_i conforme definidas na seção anterior 4.1.1. Assim, neste caso específico, a Equação (4.5) é

$$\text{Minimizar } F(\mathbf{R}, \mathbf{Q}) = (T_{r5\%}(\mathbf{R}, \mathbf{Q}), y_{Lmax}(\mathbf{R}, \mathbf{Q}), E_u(\mathbf{R}, \mathbf{Q})) \quad (4.5)$$

O problema deste método é que a solução obtida depende fortemente da maneira em que é construída a função F . Uma abordagem mais prática para tratar com problemas multiobjetivos é, em vez de achar uma única solução dependente fortemente da agregação dos objetivos de otimização f_i realizada (Equação (4.4)), achar um conjunto de soluções ótimas; este conjunto é conhecido como a fronteira de Pareto.

4.1.3. Fronteira de Pareto

O conjunto das soluções ótimas para um problema de otimização multiobjetivo é chamado de fronteira de Pareto ou conjunto de Pareto. Esse conceito foi introduzido nos anos 70 por Vilfredo Pareto que estudava o bem estar de uma sociedade (PARETO, 1971). A fronteira de Pareto representa uma configuração da sociedade tal que a melhoria do bem-estar de um ou mais indivíduos implica necessariamente a diminuição do bem-estar de pelo menos outro indivíduo. De maneira mais geral, uma solução é dita Pareto-ótima se ela não é dominada por nenhuma outra solução possível (i.e. não existe outra solução melhorando pelo menos um objetivo sem prejudicar a um ou mais outros objetivos).

Aplicada no contexto da teoria de controle multiobjetivo, a fronteira de Pareto representa o conjunto dos controladores que fornecem um desempenho ótimo: não existe outro controlador que possa melhorar um objetivo de desempenho do sistema sem prejudicar pelo menos outro objetivo de desempenho.

A Figura 4.2 apresenta do lado esquerdo, o espaço de design S do controlador SDRE: as matrizes Q e R que produzem um controlador estabilizando o sistema. O espaço de design S está relacionado com um espaço de desempenho que define os desempenhos atingíveis pelo sistema, sendo os desempenhos ótimos aqueles situados na fronteira de Pareto. Para passar do espaço de design até o espaço de desempenho, precisa-se calcular para cada ponto (Q, R) de S os valores dos objetivos de controle f_i .

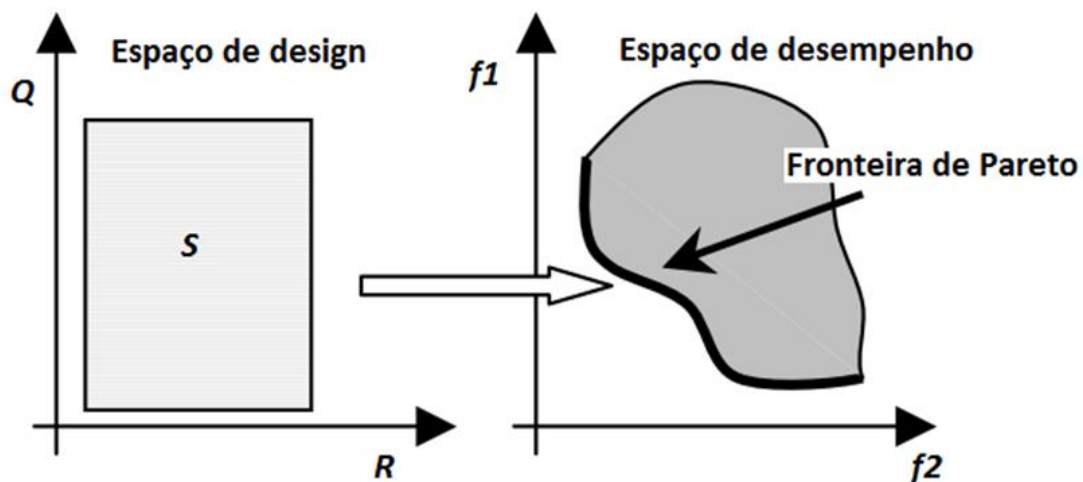


Figura 4.2 – Representação esquemática do espaço de design, conjunto das matrizes Q e R estabilizando o sistema e do espaço de desempenho, representando os desempenhos atingíveis e os desempenhos ótimos do sistema na fronteira de Pareto.

Fonte: adaptada de Agrawal et al. (2004).

A vantagem dessa abordagem é que permite obter um conjunto de controladores ótimos e depois escolher de maneira visual e gráfica qual é o controlador que corresponde melhor ao desempenho desejado. Quando tem somente dois objetivos de desempenho, i.e $n_0 = 2$, o espaço de desempenho se reduz a duas dimensões (conforme representado na Figura 4.2), nesse caso chama-se de “mapa de desempenho”.

A identificação gráfica da fronteira de Pareto é limitada a três objetivos, pois não é possível representar graficamente mais de três dimensões. Porém, existem trabalhos estendendo este conceito para otimização n -objetivos (AGRAWAL et al., 2004).

4.2. Normalização das matrizes peso

Para realizar a normalização das matrizes peso, aplica-se a regra de Bryson conforme visto na seção 3.4.2. Para isso, precisam-se definir quais são os requisitos de controle e as limitações do sistema.

Requisitos de desempenho

- O overshoot no posicionamento angular da viga não deve ultrapassar 5% do valor desejado θ_c , assim, $\bar{\theta} = 5 \cdot 10^{-2} \theta_c$.
- Estabelece-se como deslocamento flexível máximo na ponta da viga o valor de 5 cm, assim, $\bar{y}_L = 5 \cdot 10^{-2}$. Esse deslocamento pode ser expresso em função dos modos assumidos (Equação (2.51)): $y_L = \Phi^T(L)q$, assim, escolhe-se $\bar{q}_i = \bar{y}_L / \Phi_i(L)$ sendo $i \in \{1, 2\}$.

Limitações

- A tensão de alimentação do motor é limitada a ± 15 V, assim, $\bar{U}_m = 15$.
- É considerado que uma velocidade angular da viga de uma rotação por segundo é um valor alto, assim, $\bar{\dot{\theta}} = 2\pi$.
- É considerado que uma velocidade do deslocamento flexível da ponta da viga de 5 cm e meio segundo é um valor alto, assim, $\bar{\dot{y}}_L = 0.1$. Como $\dot{y}_L = \Phi^T(L)\dot{q}$, escolhe-se $\bar{q}_i = \bar{\dot{y}}_L / \Phi_i(L)$ sendo $i \in \{1, 2\}$.

Considerando esses valores limites, os valores das matrizes peso de normalização podem ser calculados conforme as Equações (3.32) e (3.33)

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_\theta & & & \\ & \bar{Q}_q & & \\ & & \bar{Q}_{\dot{\theta}} & \\ & & & \bar{Q}_{\dot{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 91 & & & \\ & 3819I_2 & & \\ & & 0.025 & \\ & & & 955I_2 \end{bmatrix} \quad \bar{R} = 0.0044 \quad (4.6)$$

lembrando que $Q = \bar{Q}Q_x$ e $R = \bar{R}R_u$, onde $Q_x = \text{diag}(Q_\theta, Q_q I_2, Q_{\dot{\theta}}, Q_{\dot{q}} I_2)$ e R_u são os termos que devem ser ajustados no processo de projeto de controle.

A Figura 4.3 apresenta as respostas do sistema não linear da Equação (2.127) controlado via SDRE usando primeiro matrizes peso unitarias e segundo as matrizes peso normalizados. O primeiro gráfico apresenta a posição angular do braço, o segundo representa o deslocamento flexível da extremidade do braço, o terceiro é a tensão de alimentação do motor e o último a energia do controle.

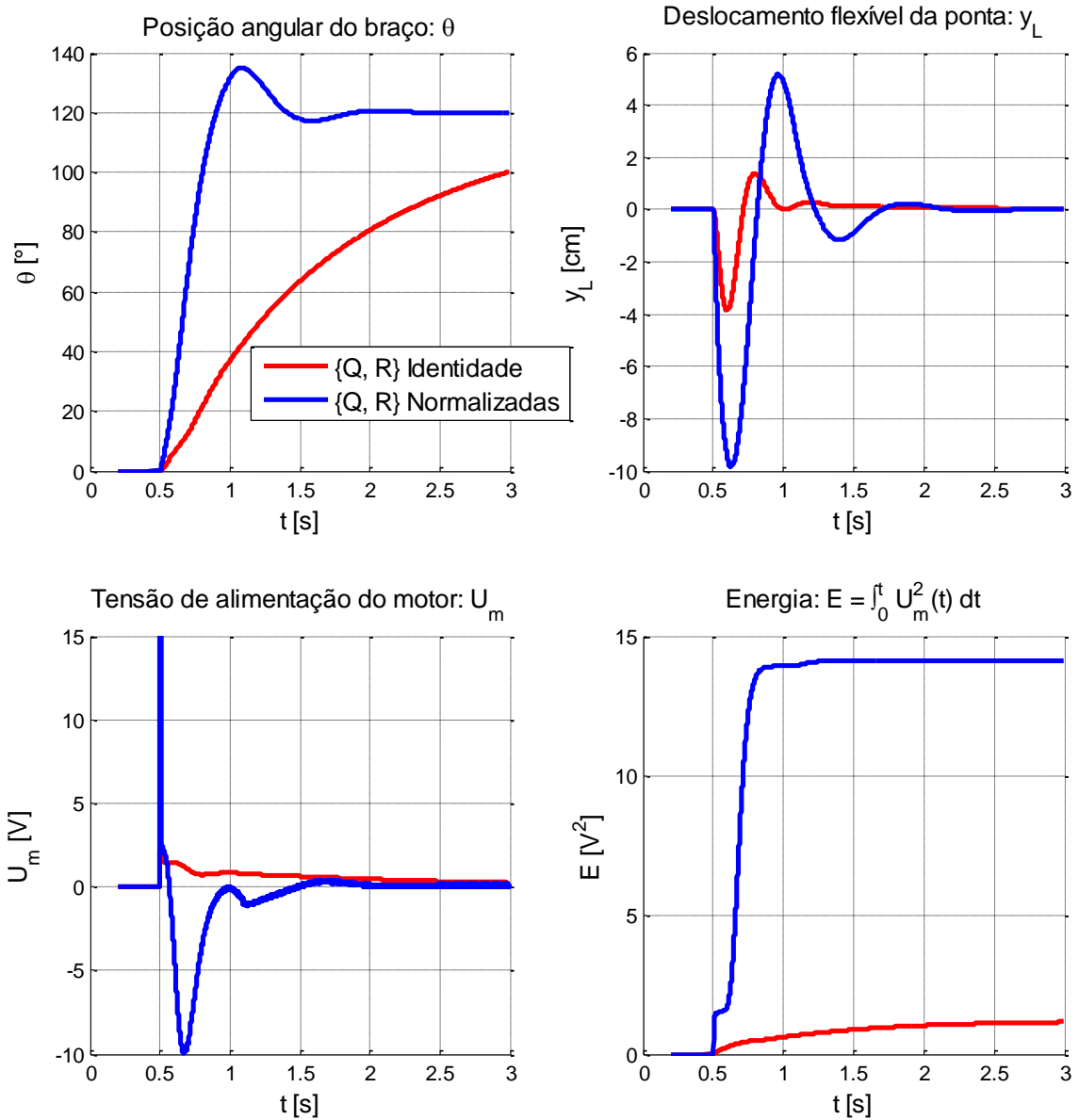


Figura 4.3 – Comportamentos do sistema controlado via SDRE com e sem normalização das matrizes peso para uma entrada tipo degrau de 120° .

Com os pesos normalizados (curva azul), a resposta é muito mais rápida: o braço se estabiliza rapidamente em volta da posição angular desejada ($\theta_c = 120^\circ$), isso com um custo de uma energia necessária para realizar a operação muito maior. Também, como o movimento inicial do braço é muito brusco produz um deslocamento flexível grande.

Note-se que, na Figura 4.3 e seguintes, a notação para as matrizes normalizadas é $\mathbf{Q}_n = \bar{\mathbf{Q}}$ e $\mathbf{R}_n = \bar{\mathbf{R}}$.

4.3. Análise das influências dos termos das matrizes peso

Nesta seção, será realizada uma análise de como os diferentes termos das matrizes peso influem no comportamento do sistema. Para isso analisam-se no domínio do tempo a posição angular do braço θ , o deslocamento flexível da ponta da viga y_L , a tensão de alimentação do motor U_m e a energia do sinal de controle u . A manobra realizada é uma mudança da posição angular do braço, passando de $\theta = 0^\circ$ para $\theta = \theta_c = 120^\circ$.

O formato das matrizes peso utilizadas em todo o capítulo 4 é

$$\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_x = \bar{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} Q_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{\dot{\theta}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{\dot{q}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{\dot{q}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \bar{\mathbf{R}}R_u \quad (4.7)$$

onde $\{\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{R}}\}$ são as matrizes peso normalizadas cujos valores são definidos na Equação (4.6) e $\{\mathbf{Q}_x, R_u\}$ são as matrizes contendo os termos a serem ajustados, sendo I_2 a matriz unidade 2×2 . Para este trabalho, adota-se a nomenclatura “peso” para se referir aos termos de \mathbf{Q}_x e R_u , i.e.,

$$\text{pesos} = \{R_u, Q_\theta, Q_q, Q_{\dot{\theta}}, Q_{\dot{q}}\} \quad (4.8)$$

Portanto, o ajuste do controlador SDRE é realizado mediante a escolha destes cinco pesos.

4.3.1. Matriz peso R

Nesta seção se analisa o efeito de uma variação do peso R_u sobre o desempenho do sistema, deixando os outros pesos da Equação (4.8) constantes e unitários, i.e., $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}}$. A Figura 4.4 apresenta o comportamento do sistema para $R_u = \{1, 10, 10^2, 10^3, 10^4\}$.

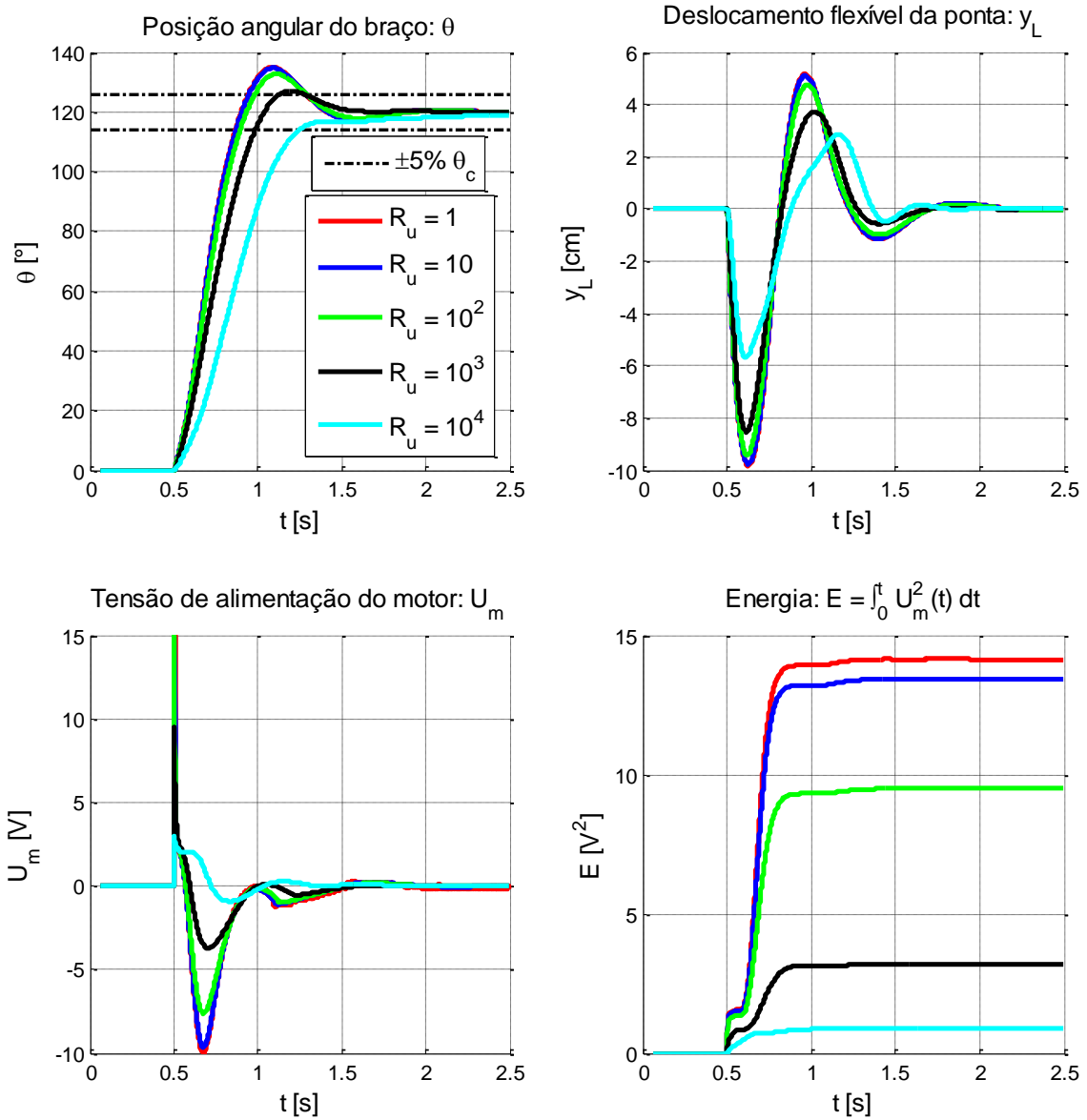


Figura 4.4 – Análise da influência do peso R_u no comportamento do sistema com os pesos $\{Q_\theta, Q_q, Q_{\dot{\theta}}, Q_{\dot{q}}\} = 1$.

Como visto na seção 3.3, ao aumentar R penaliza-se o sinal de controle, isso pode ser visto no gráfico da energia da Figura 4.4: quanto mais aumenta R mais baixa é a energia necessária para realizar a manobra. Usar menos energia para movimentar o braço resulta de maneira natural em um movimento mais suave: o deslocamento flexível é menor e o overshoot em θ é limitado.

Percebe-se na Figura 4.4 que, para o valor $R_u = 1$, i.e., $R = \bar{R}$, o sinal de controle não é suficientemente penalizado resultando em um overshoot da posição angular θ grande que aumenta o tempo de estabilização $T_{r5\%}$.

Conforme pode ser visto no primeiro gráfico da Figura 4.4, $R_u = 10^3$ permite obter uma resposta que esteja no limite do overshoot em θ . Quando R_u é maior, i.e., $R_u = 10^4$, o tempo de estabilização é bem maior, ao contrario, quando R_u é menor, i.e., $R_u = \{1, 10, 10^2\}$, o tempo de estabilização é o mesmo, mas o deslocamento flexível máximo (em valor absoluto) e a energia são maiores. Por isso, daqui para frente, para os estudos de influência dos pesos da matriz Q usa se $R_u = 10^3$.

4.3.2. Matriz peso Q

Nesta seção se estuda individualmente a influência dos termos da matriz peso Q no comportamento do sistema. Propõe-se fazer variar individualmente cada um dos pesos $\{Q_\theta, Q_q, Q_{\dot{\theta}}, Q_{\dot{q}}\}$ (veja Equação (4.7)) deixando os outros pesos constantes com o valor unitário. Além disso, o valor do peso associado a R é $R_u = 10^3$ (curva preta da Figura 4.4).

Começando com a análise do peso Q_θ ; a Figura 4.5 apresenta o comportamento do sistema para $Q_\theta = \{0.2 \ 0.5 \ 1 \ 2 \ 5\}$. Percebe-se no primeiro gráfico que um aumento de Q_θ permite estabilizar θ mais rapidamente, mas provoca um deslocamento flexível y_L maior (segundo gráfico) e uma energia necessária E_u muito maior (quarto gráfico). Além disso, nota-se que a variação do comportamento do sistema é bem regular conforme Q_θ for aumentando ou diminuindo. Variações de Q_θ de um fator dois já produzem um efeito considerável, isso significa que o peso de normalização relativo ao estado θ , i.e., $\overline{Q_\theta}$, é um bom valor. Nota-se que com o valor $Q_\theta = 0.5$ a energia necessária para realizar a manobra é muito grande. Já para $Q_\theta < 1$, o consumo de energia é muito menor, mas o tempo de estabilização $T_{r5\%}$ é maior.

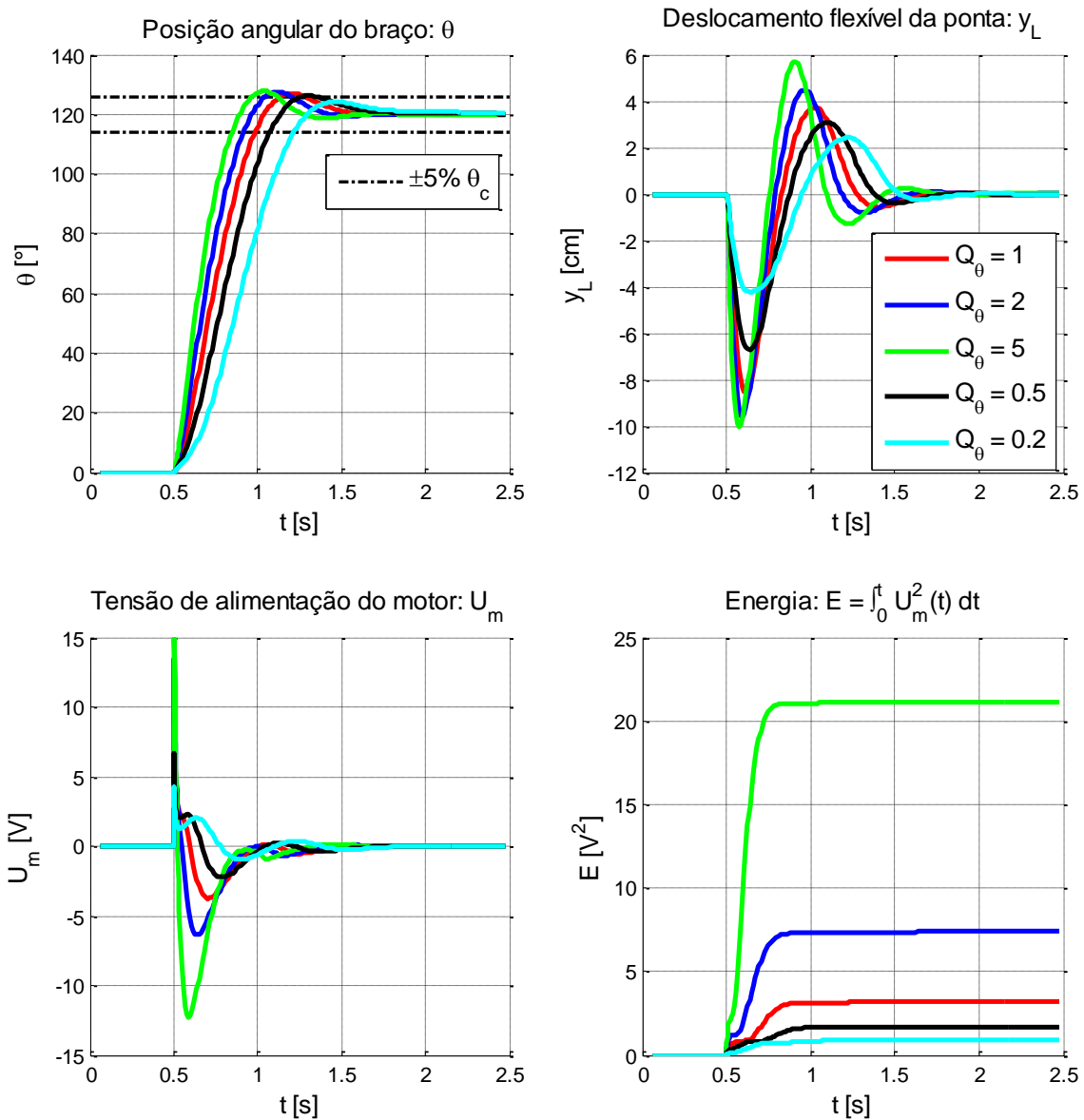


Figura 4.5 - Análise da influência do peso Q_θ no comportamento do sistema com os pesos $\{Q_q, Q_{\dot{\theta}}, Q_{\ddot{q}}\} = 1$ e $R_u = 1000$

Depois, analisa-se a influência do peso Q_q ; a Figura 4.6 apresenta o comportamento do sistema para $Q_q = \{0.001 \ 1 \ 50 \ 300 \ 1000\}$. Nota-se que os valores escolhidos para este peso são muito maiores que os de Q_θ , isso porque valores menores não influíam de maneira suficiente no comportamento do sistema para que fosse percebido graficamente. Por exemplo, com $Q_q = 50$ (curva azul marinho da Figura 4.6), o efeito no comportamento do sistema é comprável a $Q_\theta = 0.5$ (curva preta da Figura 4.5).

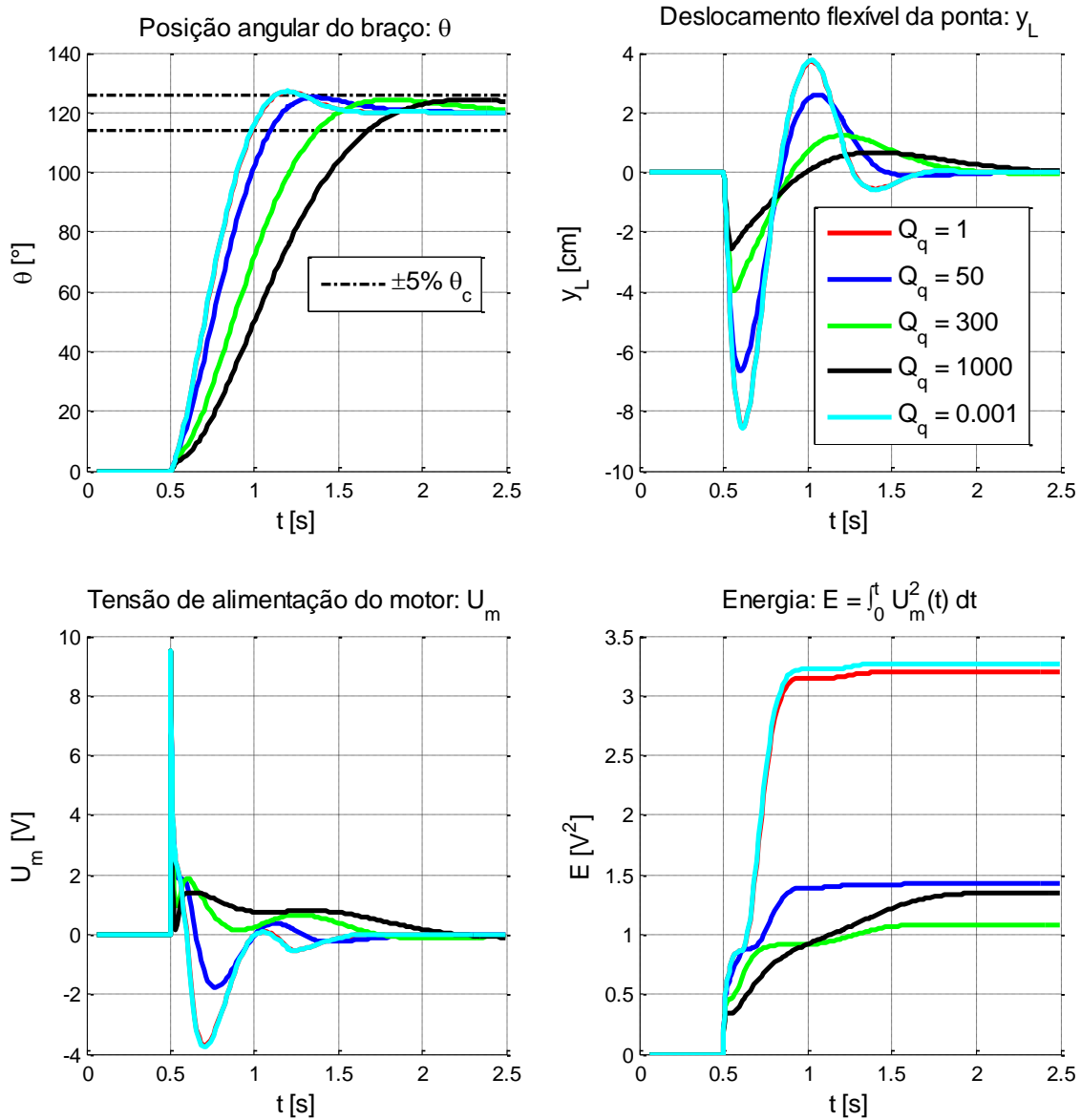


Figura 4.6 - Análise da influência do peso Q_q no comportamento do sistema com os pesos $\{Q_\theta, Q_{\dot{\theta}}, Q_{\ddot{q}}\} = 1$ e $R_u = 1000$.

De forma geral, percebe-se no segundo gráfico da Figura 4.6 que um aumento de Q_q reduz muito os valores extremos do deslocamento flexível e a energia necessária: o movimento é mais suave. Nota-se também que diminuir o peso Q_q não produz efeito significativo: para $Q_q = 0.001$, tem-se o mesmo comportamento do que com $Q_q = 1$.

Em seguida, analisa-se a influência do peso $Q_{\dot{\theta}}$; a Figura 4.7 apresenta o comportamento do sistema para $Q_{\dot{\theta}} = \{0.001 \ 1 \ 100 \ 300 \ 1000\}$.

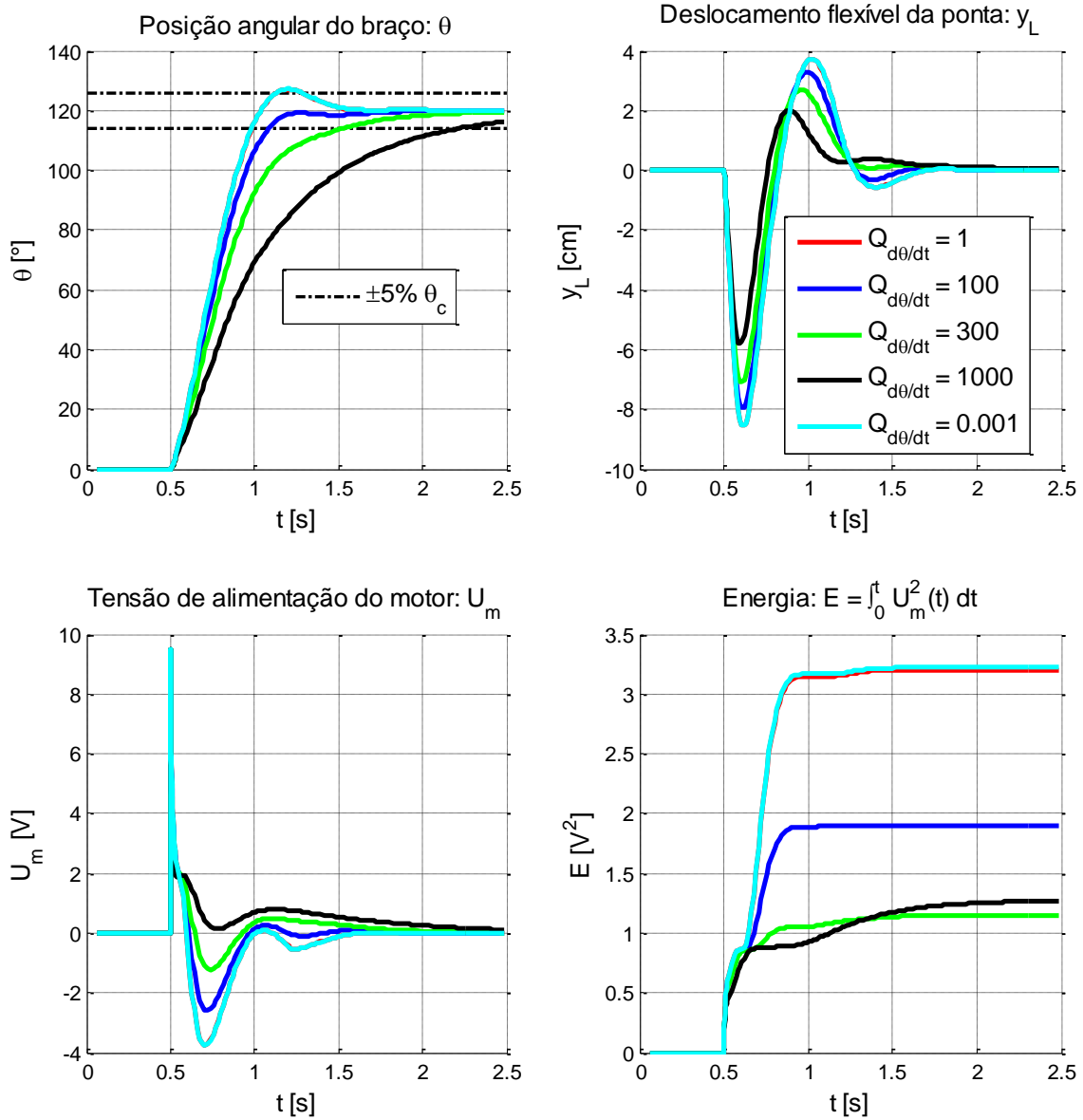


Figura 4.7 – Análise da influência do peso $Q_{\dot{\theta}}$ no comportamento do sistema com os pesos $\{Q_{\theta}, Q_q, Q_{\dot{q}}\} = 1$ e $R_u = 1000$.

De forma geral, percebe-se no primeiro gráfico da Figura 4.7 que um aumento de $Q_{\dot{\theta}}$ reduz o overshoot da posição angular θ e aumenta o tempo de estabilização de θ . Porém, o efeito deste peso sobre o deslocamento flexível y_L é muito pequeno quando comparando com os efeitos produzidos por Q_{θ} (Figura 4.5) ou Q_q (Figura 4.6). Também, percebe-se na Figura 4.7 que as curvas cian e vermelha são sobrepostas, assim, da mesma maneira do que foi percebido com o peso $Q_q = 0.001$, nota-se que diminuir o peso $Q_{\dot{\theta}}$ não produz efeito significativo: para $Q_{\dot{\theta}} = 0.001$, tem-se o mesmo comportamento do que com

$Q_{\dot{\theta}} = 1$. Variações significativas do comportamento do sistema são obtidas a partir de um fator multiplicativo de 100.

Por último, analisa-se a influência do peso $Q_{\dot{q}}$; a Figura 4.8 apresenta o comportamento do sistema para $Q_{\dot{q}} = \{0.001 \quad 1 \quad 10 \quad 100 \quad 1000\}$.

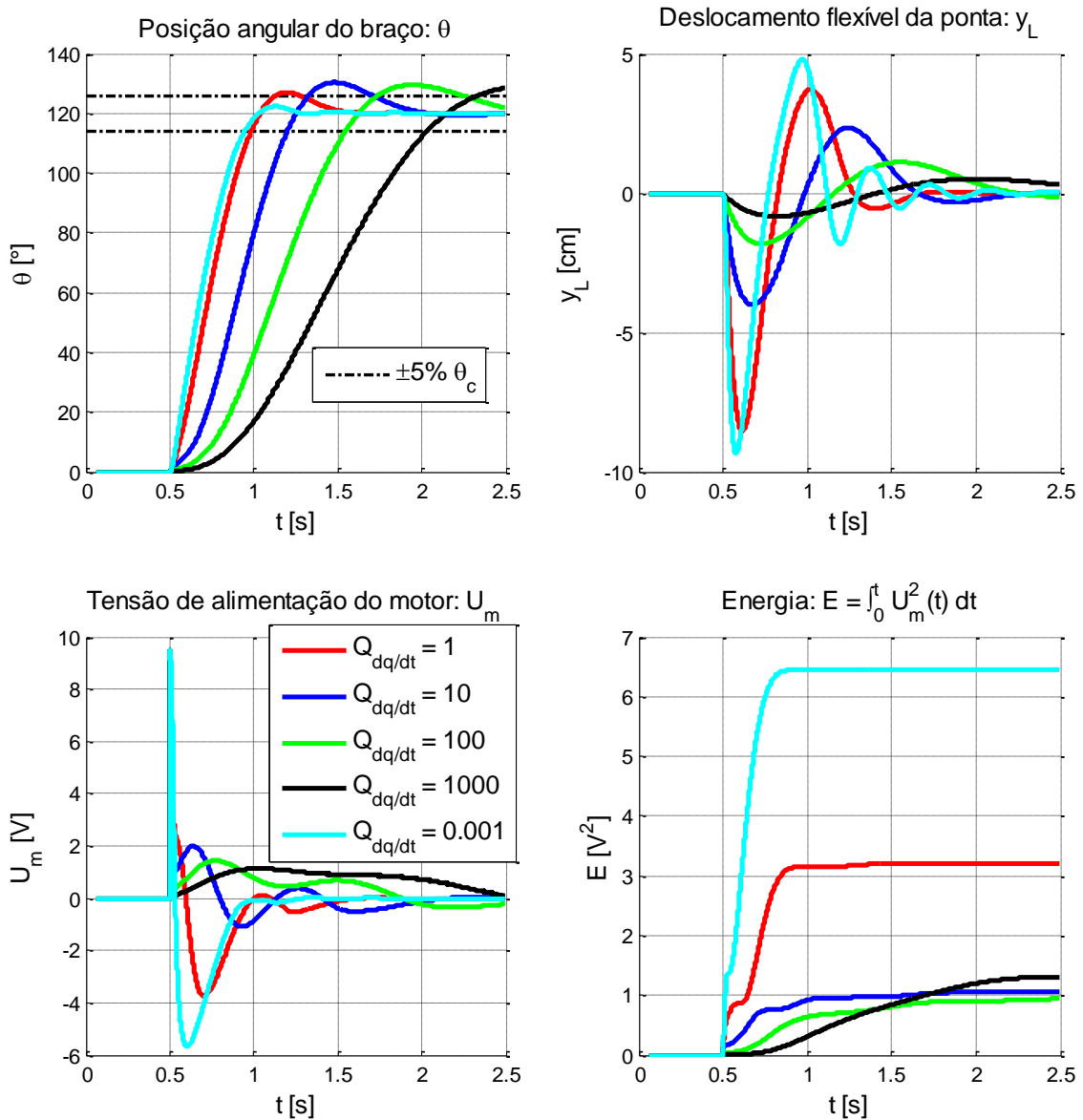


Figura 4.8 - Análise da influência do peso $Q_{\dot{q}}$ no comportamento do sistema com os pesos $\{Q_{\theta}, Q_q, Q_{\dot{\theta}}\} = 1$ e $R_u = 1000$.

Pode ser apreciado na Figura 4.8 que o peso $Q_{\dot{q}}$ pode permitir uma boa escolha do desempenho desejado já que a mudança dos comportamentos de θ (primeiro gráfico) e de y_L (segundo gráfico) são grandes. Percebe-se que um

aumento de $Q_{\dot{q}}$ reduz muito o deslocamento flexível y_L e a energia E_u necessária, mas aumenta também muito o tempo de estabilização de θ . Também, nota-se que valores inferiores a 1 para esse peso não são úteis já que aumentam muito a energia E_u e o deslocamento flexível do braço y_L sem melhorar de maneira significativa a rapidez da manobra (i.e., o tempo de estabilização de θ $T_{r5\%}$).

Como conclusão deste estudo comparativo, pode-se afirmar que os pesos Q_θ e $Q_{\dot{q}}$ são os pesos da matriz \mathbf{Q} que permitem a melhor regulação do desempenho.

4.4. Mapa de desempenho

O conceito de mapa de desempenho foi introduzido na seção 4.1.3. É um gráfico tendo por eixos dois objetivos de desempenho do sistema. Cada ponto deste mapa é obtido simulando o sistema com uma configuração do controlador SDRE diferente (diferentes valores dos pesos das matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R}).

Tabela 4-1 – Valores dos pesos utilizados para a criação do mapa de desempenho do braço robótico rígido-flexível controlado por SDRE.

$R = R_u \bar{\bar{R}}$	$\mathbf{Q} = \text{diag}(Q_\theta, Q_q \mathbf{I}_2, Q_{\dot{\theta}}, Q_{\dot{q}} \mathbf{I}_2) \bar{\bar{Q}}$			
R_u	Q_θ	Q_q	$Q_{\dot{\theta}}$	$Q_{\dot{q}}$
500	0.1	0.1	0.1	0.1
700	0.2	0.5	0.5	1
1000	0.3	1	1	2
1200	0.4	2	2	5
1500	0.5	10	10	10
2000	0.7		100	50
4000	0.9		200	200
7000	1			1000
10000	2			1200
				1500

A Tabela 4-1 apresenta os valores dos pesos SDRE utilizados para as simulações. Esses valores foram escolhidos com base na análise feita na seção 4.3. No total, são 31500 combinações diferentes. A Figura 4.9 representa o mapa de desempenho, para os objetivos $T_{r5\%}$ e y_{Lmax} (definidos nas Equações (4.1) e (4.2)), correspondendo aos pesos da Tabela 4-1

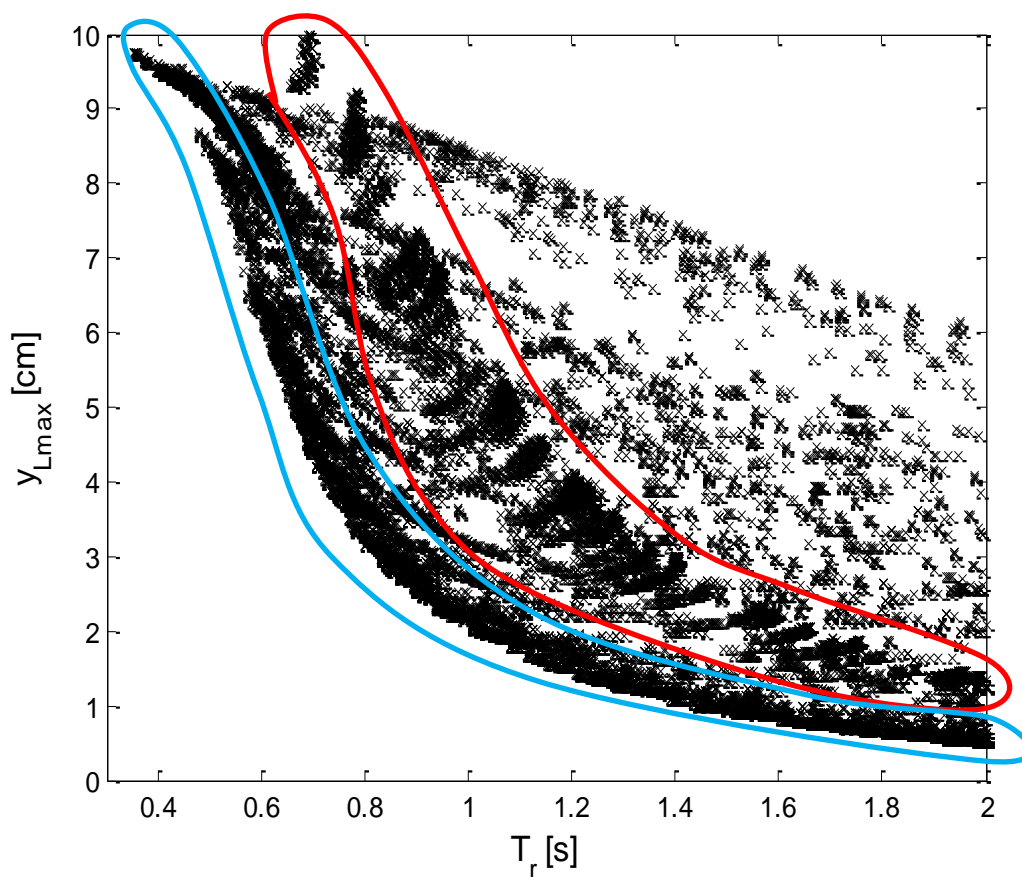


Figura 4.9 – Mapa de desempenho do braço robótico rotativo rígido-flexível controlado por SDRE obtido com os valores de desempenho de 31500 simulações diferentes usando pesos de controle Q e R diferentes.

Na Figura 4.9, pode ser visto quais são os desempenhos que o sistema da Equação (2.127) pode atingir com esse controlador SDRE. A repartição desses pontos não é uniforme; aparecem alguns conjuntos de pontos. Em azul, é o conjunto dos desempenhos perto da fronteira de Pareto; são os melhores desempenhos atingíveis. Nessa área a densidade de pontos é muito alta, isso significa que existem muitas combinações diferentes de pesos que permitem um desempenho ótimo. A área vermelha apresenta também uma densidade de pontos alta. Esses pontos representam os desempenhos com overshoot na resposta θ . Tipicamente, ao tentar aumentar a rapidez do sistema, chega um momento onde o valor de θ a ser atingido (θ_c) é ultrapassado, isso faz como que o tempo de estabilização do sistema $T_{r5\%}$ aumente de maneira brusca,

criando uma zona de relativa baixa densidade de pontos entre os conjuntos azul e vermelho.

4.4.1. Identificação da fronteira de Pareto

A fronteira de Pareto pode ser identificada de maneira simples graficamente, conforme visto acima. Para obter os pontos matematicamente, precisa-se utilizar um algoritmo que permita identificar quais pontos do mapa de desempenho não são dominados, i.e., são ótimos; foi utilizado o algoritmo de Polityko (2008). A fronteira de Pareto obtida pode ser observada na Figura 4.10 em vermelho. Intuitivamente se observa que esta curva tem um formato de função inversa. A curva verde confirma esta intuição: a lei

$$y_{Lmax} = f(T_{r5\%}) = \frac{2.1}{T_{r5\%}^2} \quad (4.9)$$

permite obter uma aproximação muito boa da fronteira de Pareto real.

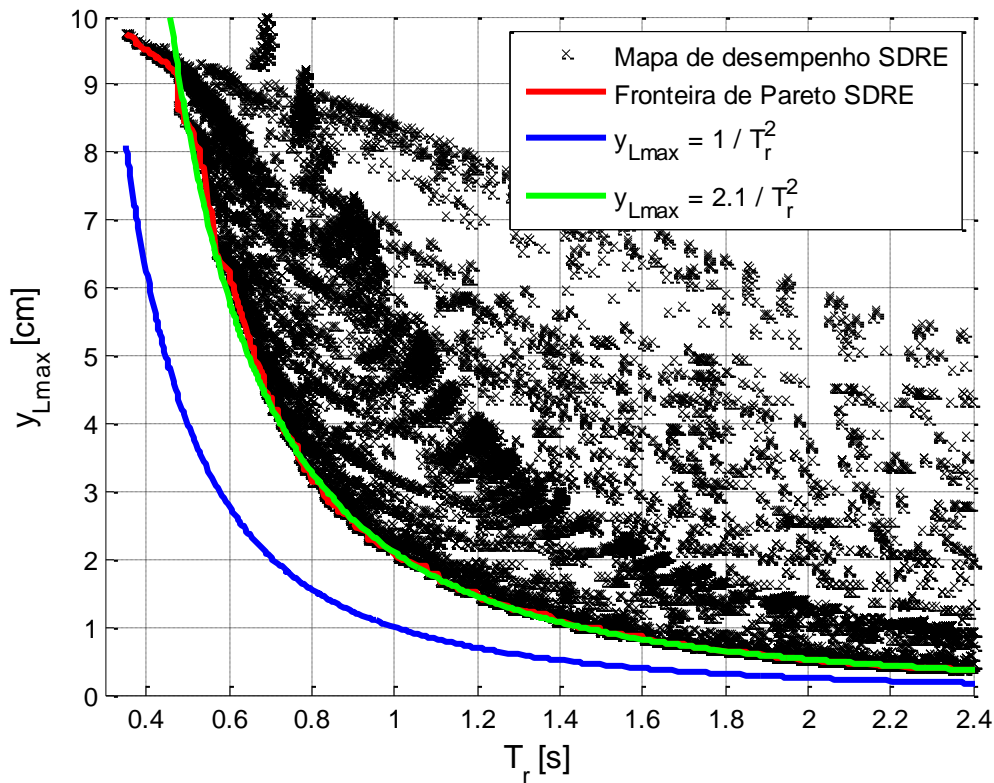


Figura 4.10 – Interpolação da fronteira de Pareto do braço robótico rotativo rígido-flexível controlado via SDRE por funções matemáticas simples.

A faixa de validade desta interpolação é $T_{r5\%} \in [0.5, \infty]$: quando $T_{r5\%} < 0.5$ o deslocamento flexível y_{Lmax} não é tão grande como o valor obtido com a função de interpolação da Equação (4.9). O fato do deslocamento flexível não continuar aumentando de maneira tão rápida após os 8 cm é físico: sendo o tamanho da viga de aproximadamente 40 cm esse deslocamento de 8 cm representa mais de 20% do tamanho da viga: o sistema está atingido a flexibilidade máxima.

4.4.2. Identificação da influência dos pesos no mapa de desempenho

O mapa de desempenho pode ser utilizado para identificar se existem alguns pesos (Equação (4.8)) mais adequados para melhorar um determinado objetivo de desempenho.

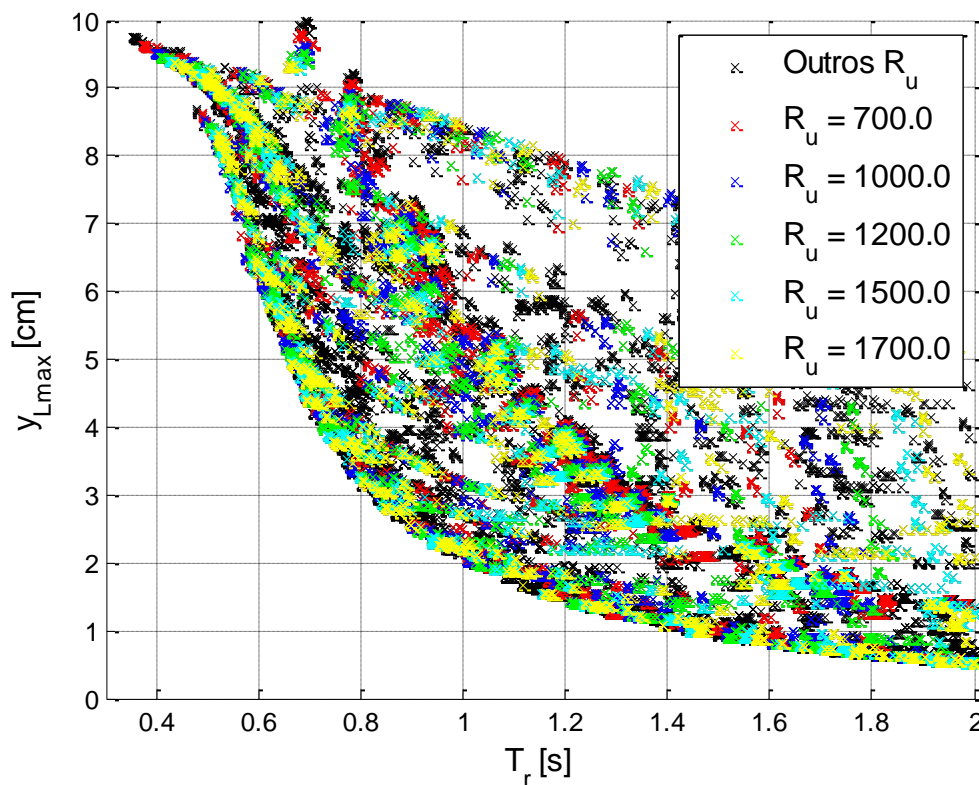


Figura 4.11 – Mapa de desempenho do braço robótico rotativo rígido-flexível destacando os desempenhos obtidos para diferentes valores do peso R_u .

A Figura 4.11 apresenta o mesmo mapa de desempenho que a Figura 4.9 mas identificando com diferentes cores os desempenhos obtidos para valores

específicos do peso R_u . Analisando esta figura percebe-se que independentemente do valor do peso R_u , desempenhos bons e ruins podem ser atingidos.

Da mesma forma, usando essa mesma técnica de representação, é possível mostrar que os pesos $Q_{\dot{\theta}}$ e Q_q também não apresentam regularidades nos valores de desempenho obtidos.

Ao contrário, o peso Q_{θ} influi de maneira mais direta no desempenho atingido. Na Figura 4.12 percebe-se que, com o valor $Q_{\theta} = 2$ (em amarelo), o desempenho atingido nunca é ruim (zona de baixa densidade de pontos onde ambos objetivos $T_{r5\%}$ e y_{Lmax} tem valores altos). É também esse valor que permite obter os menores tempos de estabilização do sistema.

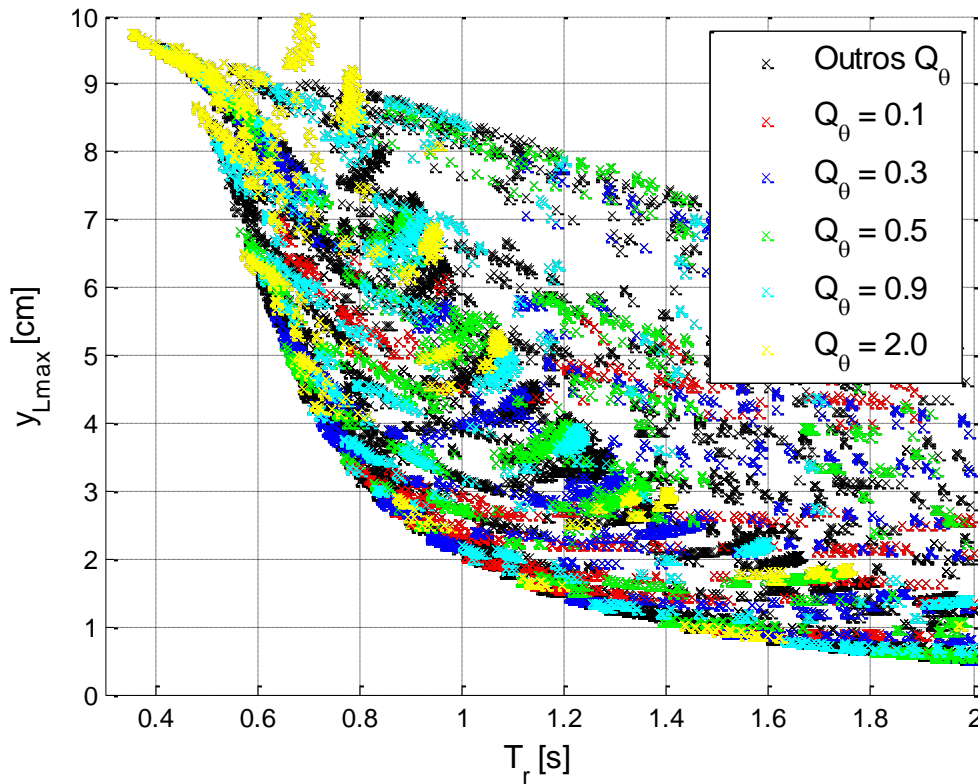


Figura 4.12 - Mapa de desempenho do braço robótico rotativo rígido-flexível destacando os desempenhos obtidos para diferentes valores do peso Q_{θ} .

Mesmo assim, na fronteira de Pareto da Figura 4.12, aparecem pontos de todas as cores, isso significa que desempenhos ótimos podem ser obtidos com

valores de Q_θ diferentes de $Q_\theta = 2$. Nesse caso, obter um desempenho ótimo depende do valor dos outros pesos $\{R_u, Q_q, Q_{\dot{\theta}}, Q_{\dot{q}}\}$.

Por fim, o peso $Q_{\dot{q}}$ é destacado na Figura 4.13. Aparecem diferentes zonas: quando $Q_{\dot{q}}$ é grande (>200) o sistema apresenta um deslocamento flexível máximo y_{Lmax} pequeno; quando $Q_{\dot{q}}$ é pequeno (<2) o sistema é muito rápido. A grande vantagem deste peso é que ele permite uma seleção da zona de desempenho atingida sem influência dos outros pesos: a influência de $Q_{\dot{q}}$ no desempenho bastante independente dos outros pesos.

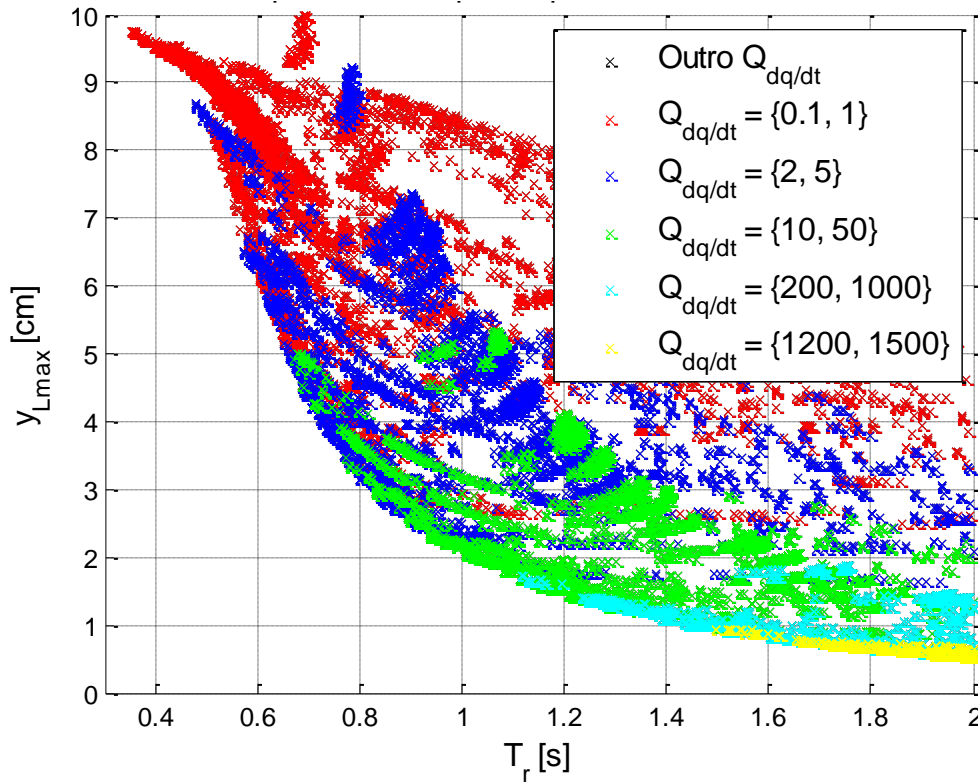


Figura 4.13 – Mapa de desempenho do braço robótico rotativo rígido-flexível destacando os desempenhos obtidos para diferentes valores do peso $Q_{\dot{q}}$.

Para concluir esta seção, percebeu-se que basta ajustar dois pesos, Q_θ e $Q_{\dot{q}}$, para obter um bom desempenho.

4.5. Uma lei para calcular os pesos em função do desempenho

O objetivo desta seção é obter uma lei que permita obter as matrizes peso Q e R em função dos objetivos de desempenho $T_{r5\%}$ e y_{Lmax} . Na seção anterior foi deduzido que usando somente dois pesos: Q_θ e $Q_{\dot{q}}$ é possível alcançar os desempenhos perto da fronteira de Pareto. Assim escolhem-se valores constantes para os outros pesos: $R_u = 10^3$, $Q_{\dot{\theta}} = 1$ e $Q_q = 1$.

4.5.1. Pesos que permitem atingir a fronteira de Pareto

A Figura 4.14 representa os desempenhos obtidos para diferentes faixas de valores do peso Q_θ e com o peso $Q_{\dot{q}}$ variando entre $[0.1 \ 1000]$.

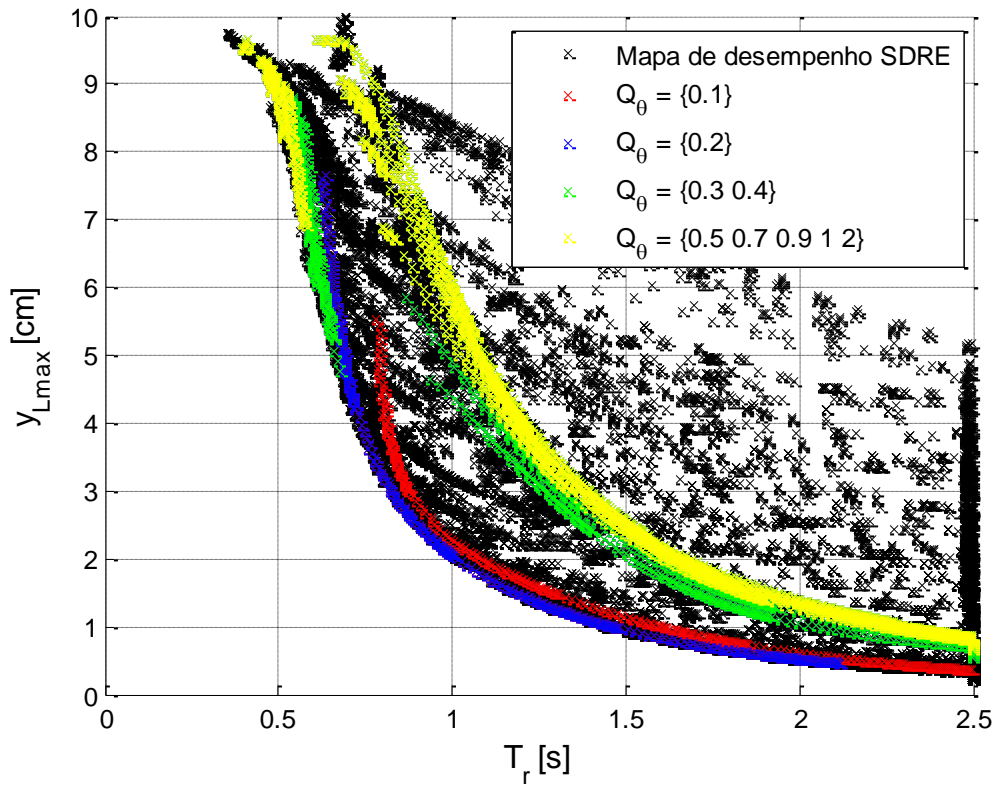


Figura 4.14 – Identificação do desempenho obtido por diferentes valores de Q_θ com $Q_{\dot{q}} \in [0.1 \ 1000]$ e os outros pesos constantes: $R = 1000\bar{R}$, $Q_{\dot{\theta}} = 1$, $Q_q = 1$.

Percebe-se que o valor $Q_\theta = 0.2$ permite obter desempenhos muito bons para qualquer o valor de $Q_{\dot{q}}$. Já, para valores mais altos de Q_θ , a obtenção de um desempenho ótimo depende fortemente do valor de $Q_{\dot{q}}$.

Da mesma forma que foi feito para o peso Q_θ a Figura 4.15 representa os desempenhos obtidos para diferentes faixas de valores do peso $Q_{\dot{q}}$ e com o peso Q_θ variando entre $[0.1 \ 2]$. Percebe-se que o peso $Q_{\dot{q}}$ permite escolher uma zona de desempenho específica.

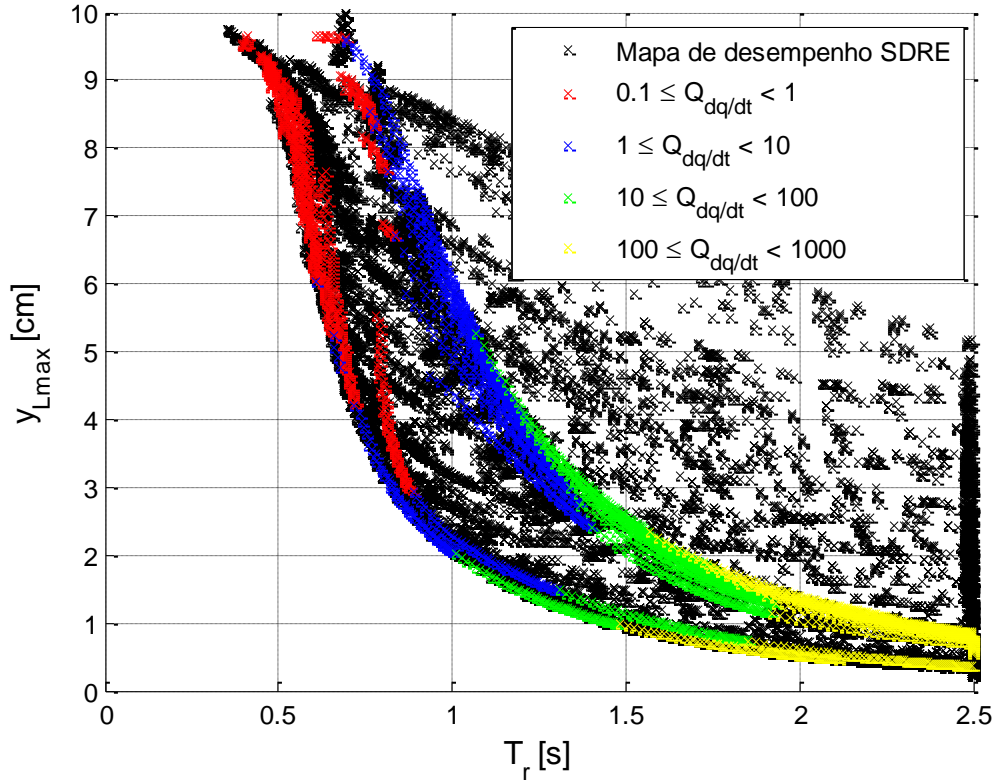


Figura 4.15 – Identificação do desempenho obtido por diferentes valores de Q_q com $Q_\theta \in [0.1 \ 2]$ e os outros pesos constantes: $R = 1000\bar{R}$, $Q_{\dot{\theta}} = 1$, $Q_q = 1$.

Juntando as informações das Figura 4.14 e Figura 4.15 podem ser deduzidas quais são as combinações $(Q_\theta, Q_{\dot{q}})$ que permitem obter os desempenhos da fronteira de Pareto. A Figura 4.16 representa essas combinações. A combinação mais interessante obtida é para $Q_\theta = 0.2$ e $Q_{\dot{q}} \in [0.5 \ 1000]$: com esta combinação é possível escolher entre uma grande faixa de desempenhos ótimos: $T_{r5\%} \in [0.7 \ 2.1]$ e $y_{Lmax} \in [0.5 \ 5]$. Os desempenhos na fronteira de Pareto representados em vermelho não apresentam grande vantagem, pois nesta área o tempo de reposta aumenta muito quando o ganho em deslocamento flexível é quase nulo. Mesma coisa nos desempenhos

identificados em verde, amarelo e rosa: o deslocamento flexível aumenta muito sem ter um ganho considerável no tempo de estabilização do sistema.

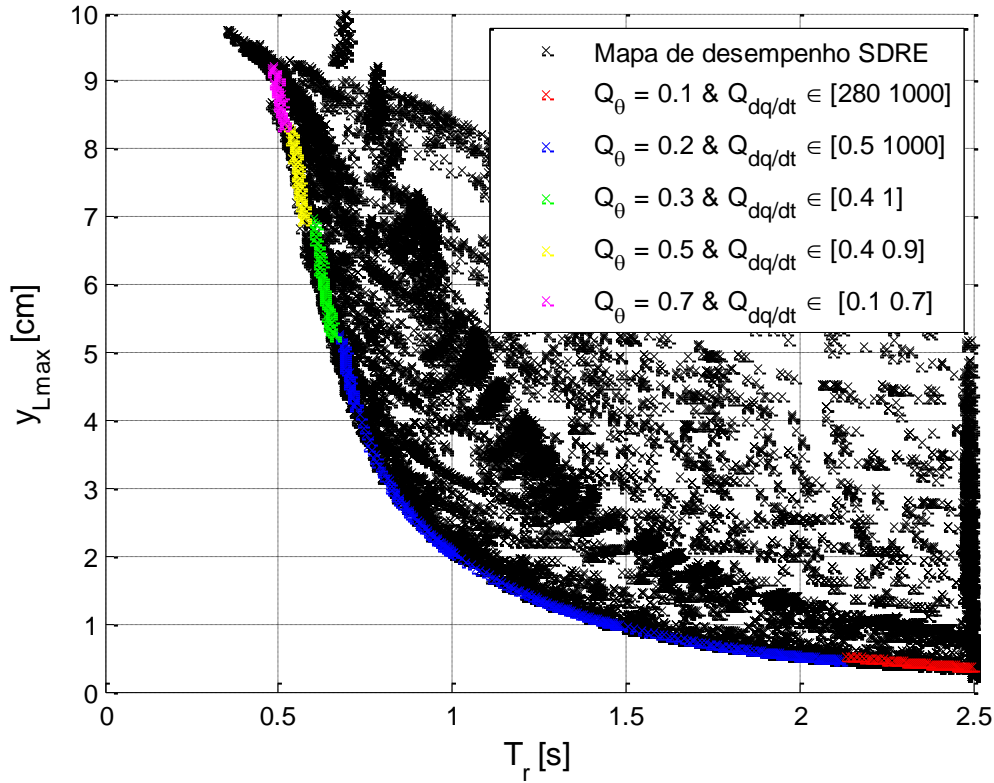


Figura 4.16 – Combinações dos pesos Q_θ e $Q_{\dot{q}}$ que permitem obter desempenhos similares a fronteira de Pareto. Os outros pesos são constantes: $R = 1000\bar{R}$, $Q_{\dot{\theta}} = 1$ e $Q_q = 1$.

4.5.2. Peso $Q_{\dot{q}}$ em função do desempenho desejado

Nesta seção consideram-se os desempenhos da fronteira de Pareto em azul na Figura 4.16. Neste trecho, o único peso que varia é $Q_{\dot{q}}$; os outros já foram determinados:

$$R = 1000\bar{R} \quad Q_\theta = 0.2 \quad Q_q = 1 \quad Q_{\dot{\theta}} = 1 \quad (4.10)$$

Como só tem um peso variando é possível obter diretamente o desempenho em função do valor do peso. A Figura 4.17 representa o tempo de estabilização e o deslocamento flexível em função do valor do peso $Q_{\dot{q}}$.

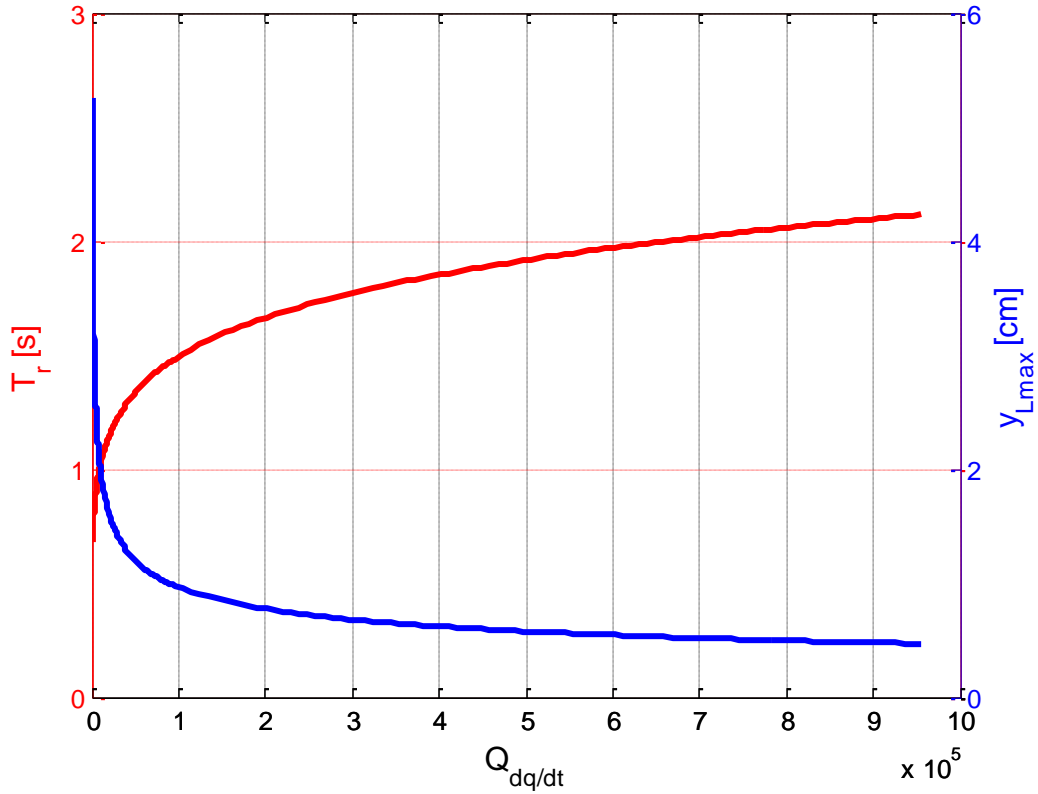


Figura 4.17 – Valores dos objetivos de desempenho em função do peso $Q_{\dot{q}}$ com os outros pesos constantes: $R = 1000\bar{R}$, $Q_{\theta} = 0.2$, $Q_{\dot{\theta}} = 1$ e $Q_q = 1$.

Percebe-se na Figura 4.17 que os dois objetivos de desempenho são conflitantes: quando um deles aumenta ou outro diminui. Além disso, pode ser notado que, conforme a Equação (4.9), a relação entre esses dois critérios segue uma função do tipo inversa.

Para obter a relação matemática direta entre o peso $Q_{\dot{q}}$ e o critério de desempenho $T_{r5\%}$, usa-se uma interpolação polinomial com 5 pontos; assim, o polinômio resultante é de ordem 4:

$$P(X) = 10^6(0.38 - 1.38X + 1.96X^2 - 1.24X^3 + 0.29X^4) \quad (4.11)$$

Por fim, para obter o valor do peso $Q_{\dot{q}}$ em função do tempo de estabilização, basta usar o polinômio da Equação (4.11):

$$Q_{\dot{q}} = P(T_{r5\%}) \quad (4.12)$$

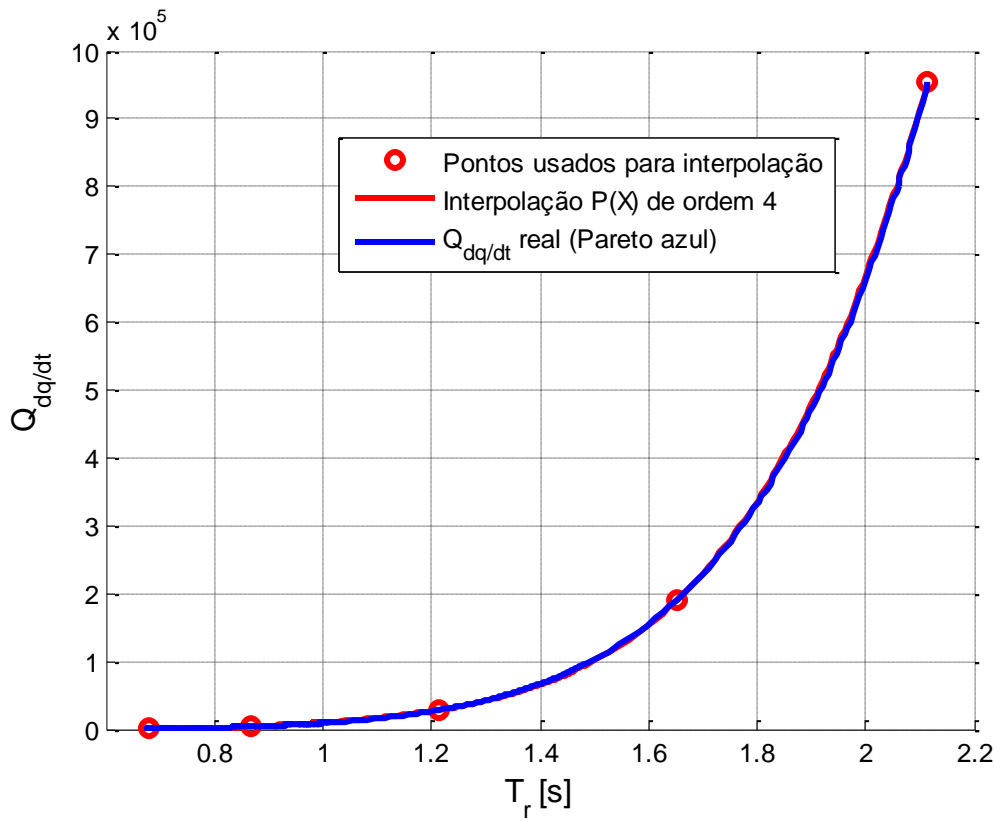


Figura 4.18 – Interpolação da relação entre o tempo de estabilização $T_{r5\%}$ e o peso $Q_{\dot{q}}$ com polinômio de quarto grau.

A Figura 4.18 apresenta a interpolação polinomial da Equação (4.11) comparando-a com os valores reais. A curva vermelha (interpolação) não é visível: a curva azul (real) está quase perfeitamente sobreposta, assim pode ser concluído que a interpolação realizada é boa.

Note-se que, por outro lado, usando a relação entre o tempo de estabilização $T_{r5\%}$ e o deslocamento flexível máximo y_{Lmax} na fronteira de Pareto (Equação (4.9)) é também possível obter o valor do peso $Q_{\dot{q}}$ em função do deslocamento flexível máximo y_{Lmax} :

$$Q_{\dot{q}} = P \left(\sqrt{\frac{2.1}{y_{Lmax}}} \right) \quad (4.13)$$

Para concluir, foi obtida uma lei que permite obter o valor do peso $Q_{\dot{q}}$ fornecendo um desempenho ótimo a partir de um único requisito de

desempenho: Equação (4.12) para um requisito de tempo de estabilização e Equação (4.13) para um requisito de deslocamento flexível máximo y_{Lmax} . É importante notar que os valores dos outros pesos devem ser aqueles definidos na Equação (4.10).

4.5.3. Verificação da lei de cálculo das matrizes peso

Nesta seção vai ser verificada a lei de cálculo das matrizes peso da Equação (4.12). Para isso precisa-se demonstrar que essa permite realmente obter o peso $Q_{\dot{q}}$ que fornece o tempo de estabilização desejado. Para isso são realizadas várias simulações com o peso $Q_{\dot{q}}$ calculado conforme a Equação (4.12) para 20 tempos de estabilização $T_{r5\%}$ diferentes entre 0.5 s e 2 s.

A Figura 4.19 apresenta os desempenhos obtidos durante essas simulações.

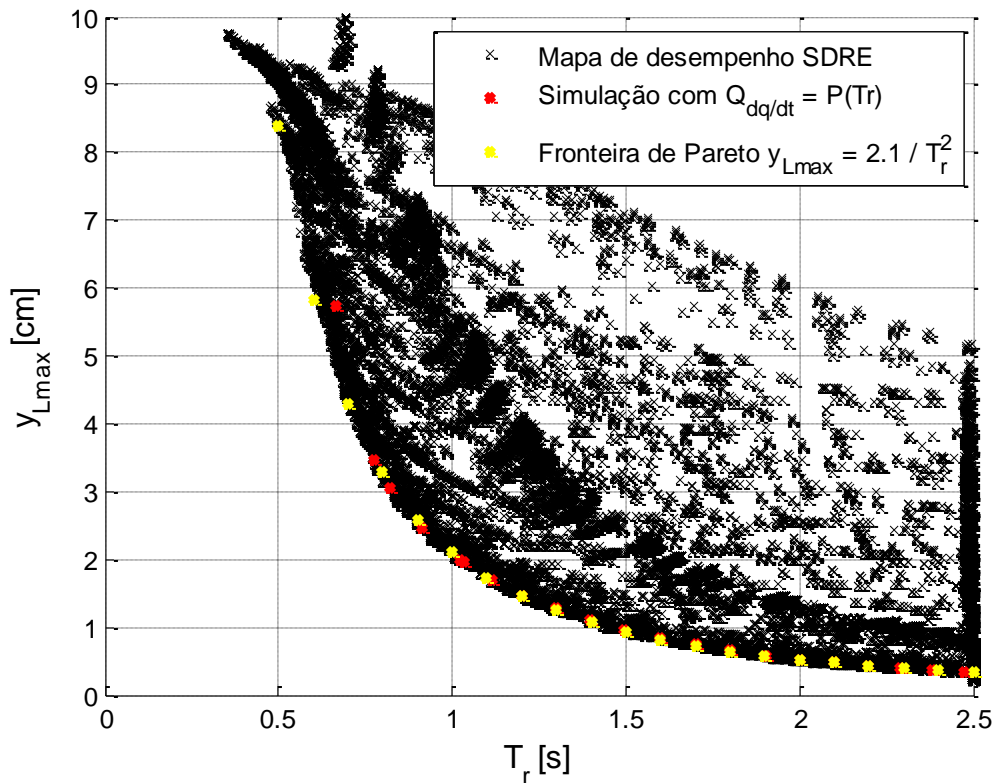


Figura 4.19 – Comparação entre os desempenhos na fronteira de Pareto e os desempenhos obtidos usando a lei $Q_{\dot{q}} = P(T_{r5\%})$.

Em amarelo são representados os desempenhos na fronteira de Pareto para os tempos de resposta desejados, em vermelho os desempenhos obtidos com as

simulações. Os valores exatos são apresentados na Tabela 2-1. Essa tabela também apresenta os erros relativos para os objetivos de desempenho. Nota-se que, na faixa $T_{r5\%} \in [1.1 \ 2.5]$, os desempenhos obtidos são muito próximos de aqueles previstos (erro no $T_{r5\%}$ de menos de 1.2% e erro no y_{Lmax} de menos de 3%). Na faixa $T_{r5\%} \in [0.8 \ 1]$, o erro é maior, mas ainda fica pequeno (menos de 3.1% para $T_{r5\%}$ e menos de 6% para y_{Lmax}).

Tabela 4-2 – Valores dos erros relativos do tempo de estabilização e do deslocamento flexível máximo usando a lei $Q_{\dot{q}} = P(T_{r5\%})$.

$T_{r5\%}$ [s]			y_{Lmax} [cm]		
Objetivo	Simulado	Erro [%]	Pareto	Simulado	Erro [%]
0,5	1,03	51,58	8,40	1,95	-76,76
0,6	0,82	26,90	5,83	3,06	-47,46
0,7	0,66	-5,52	4,29	5,73	33,69
0,8	0,78	-3,03	3,28	3,48	6,04
0,9	0,91	1,33	2,59	2,46	-5,17
1,0	1,02	1,92	2,10	1,99	-5,27
1,1	1,11	1,19	1,74	1,69	-2,52
1,2	1,20	0,26	1,46	1,46	0,32
1,3	1,30	-0,26	1,24	1,27	2,19
1,4	1,39	-0,39	1,07	1,10	2,97
1,5	1,50	-0,21	0,93	0,96	2,92
1,6	1,60	-0,07	0,82	0,84	2,44
1,7	1,70	0,04	0,73	0,74	1,79
1,8	1,80	0,15	0,65	0,66	1,16
1,9	1,90	0,19	0,58	0,59	0,62
2,0	2,00	0,15	0,53	0,53	0,22
2,1	2,10	0,06	0,48	0,48	-0,03
2,2	2,20	-0,15	0,43	0,43	-0,14
2,3	2,29	-0,39	0,40	0,40	-0,12
2,4	2,38	-0,69	0,36	0,36	0,03
2,5	2,47	-1,04	0,34	0,34	0,28

Já quando $T_{r5\%} < 0.8$ os valores de desempenho obtidos apresentam erros relativos de mais de 25%, e até quase 80%, isso significa que o peso $Q_{\dot{q}}$ que foi calculado não é adequado. Esse comportamento é normal, pois a lei $Q_{\dot{q}} = P(T_{r5\%})$ foi criada se baseando na curva azul da Figura 4.16.

Para concluir, obteve-se uma lei que permite calcular o valor das matrizes peso que forneçam um desempenho ótimo (na fronteira de Pareto) do SDRE em função de um único requisito de desempenho. Essa lei é válida para $T_{r5\%} \in [1.1 \quad 2.5]$ ou $y_{Lmax} \in [1.74 \quad 0.34]$ porque ela foi identificada usando somente a trecho azul da fronteira de Pareto da Figura 4.16. Para obter diretamente as matrizes peso permitindo obter desempenhos ótimos nas outras faixas de funcionamento, precisaria elaborar uma lei para cada um dos trechos da Fronteira de Pareto identificados na Figura 4.16.

4.6. Peso Q_θ dependente do estado

O controlador SDRE permite utilizar pesos que dependam do estado do sistema. Essa possibilidade é uma flexibilidade adicional do SDRE que pode permitir melhorar o desempenho do sistema.

No caso de um braço robótico rotativo rígido-flexível, o objetivo é limitar a amplitude máxima das oscilações e obter uma resposta rápida. Como o deslocamento flexível de maior amplitude acontece no início do movimento, o peso Q_θ precisa ser pequeno no início. Uma vez que o movimento é iniciado, o peso Q_θ precisa aumentar para obter uma resposta rápida. Uma lei proporcional permite obter este comportamento:

$$Q_\theta(\theta) = Q_{\theta_0} + \frac{K_\theta |\theta - \theta_0|}{|\theta_c - \theta_0|} \quad (4.14)$$

onde, θ_c é a posição angular desejada e θ_0 é o ângulo do braço a $t = 0$. Nota-se que, dessa forma, se pode escolher o valor do peso Q_θ no início do movimento: $Q_\theta(t = 0) = Q_{\theta_0}$ e também o valor quando o sistema esta estabilizado: $Q_\theta(t = t_\infty) = Q_{\theta_0} + K_\theta$.

Para verificar que este tipo de lei permite melhorar o desempenho do sistema, escolhem-se como matrizes peso de referência:

$$R = 1000\bar{R} \quad Q = \bar{Q} \quad (4.15)$$

Para analisar a influência dos coeficientes Q_{θ_0} e K_{θ} do peso Q_{θ} (Equação (4.14)), é feito um grande número de simulações fazendo variar o valor destes dois coeficientes. No total realizam-se mais de 4000 combinações diferentes: 28 valores para Q_{θ_0} entre 0.01 e 6, e 151 valores para K_{θ} entre 0 e 150. Os desempenhos obtidos são apresentados na Figura 4.20. Em preto aparece o mapa de desempenho do SDRE usando unicamente pesos constantes; em amarelo é apresentado o mapa de desempenho do SDRE usando o peso Q_{θ} dependente do estado θ conforme a Equação (4.14).

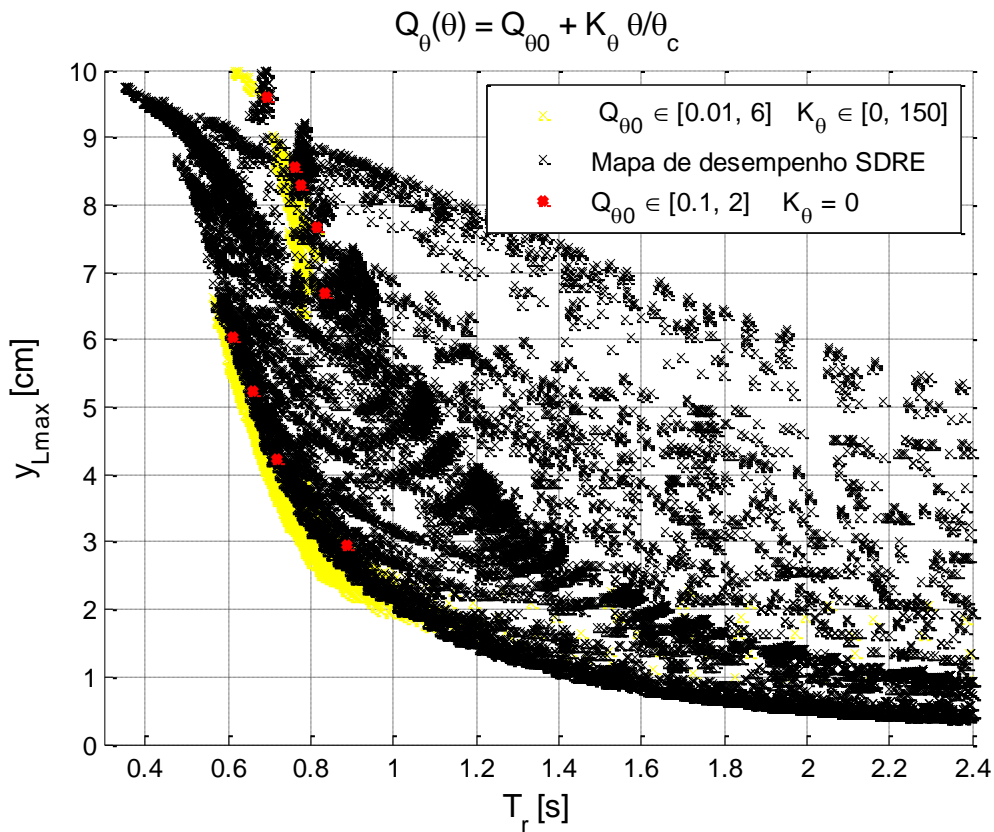


Figura 4.20 – Comparação entre os desempenhos possíveis com o peso Q_{θ} dependente do estado θ ou constante.

Percebe-se que existem muitos pontos em amarelo que ficam do lado esquerdo da fronteira de Pareto do SDRE, isso mostra que a utilização de pesos dependentes do estado pode melhorar o desempenho do sistema de controle.

Nota-se que a melhoria de desempenho é localizada na faixa $T_{r5\%} \in [0.6, 1]$. Isso é normal porque foi usado $Q_{\dot{q}} = 1$; Na seção 4.5.1 foi visto que este peso tem muita influência sobre o desempenho (veja Figura 4.16), assim repetindo este estudo com outros valores de $Q_{\dot{q}}$ poderíamos obter melhoria do desempenho nas outras faixas de desempenho $T_{r5\%} \in [0.4, 0.6]$ e $T_{r5\%} \in [1, 2.4]$.

4.7. Comparação SDRE - LQR

A grande vantagem do controlador SDRE em comparação com o controlador LQR é poder considerar as não linearidades do modelo (veja seção 3). Como o modelo desenvolvido na seção 2 é não linear, espera-se que o uso do controlador do tipo SDRE permita atingir melhores desempenhos do que o controlador LQR.

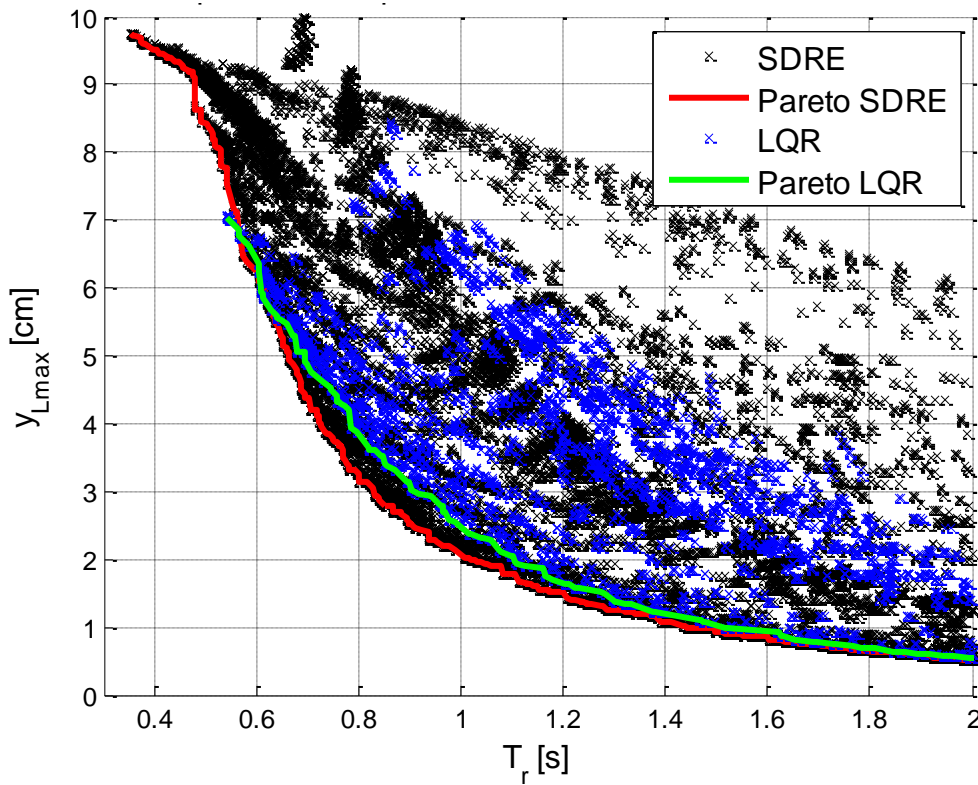


Figura 4.21 – Comparação do mapa de desempenho e da fronteira de Pareto dos controladores SDRE e LQR.

Da mesma maneira que foi obtido o mapa de desempenho do SDRE na seção 4.4, é possível obter o mapa de desempenho do LQR obtendo os valores de desempenho para uma grande combinação de pesos.

O resultado deste estudo comparativo é apresentado na Figura 4.21. As fronteiras de Pareto do SDRE e do LQR são representadas em vermelho e verde respectivamente. Percebe-se que o controlador SDRE permite atingir melhores desempenhos que o controlador LQR porque a curva vermelha fica em baixo da curva verde. O ganho em desempenho não é muito grande, provavelmente porque o sistema modelado não apresenta não linearidades muito “grandes”. Acredita-se que esse ganho seria maior para um sistema com não linearidades mais altas.

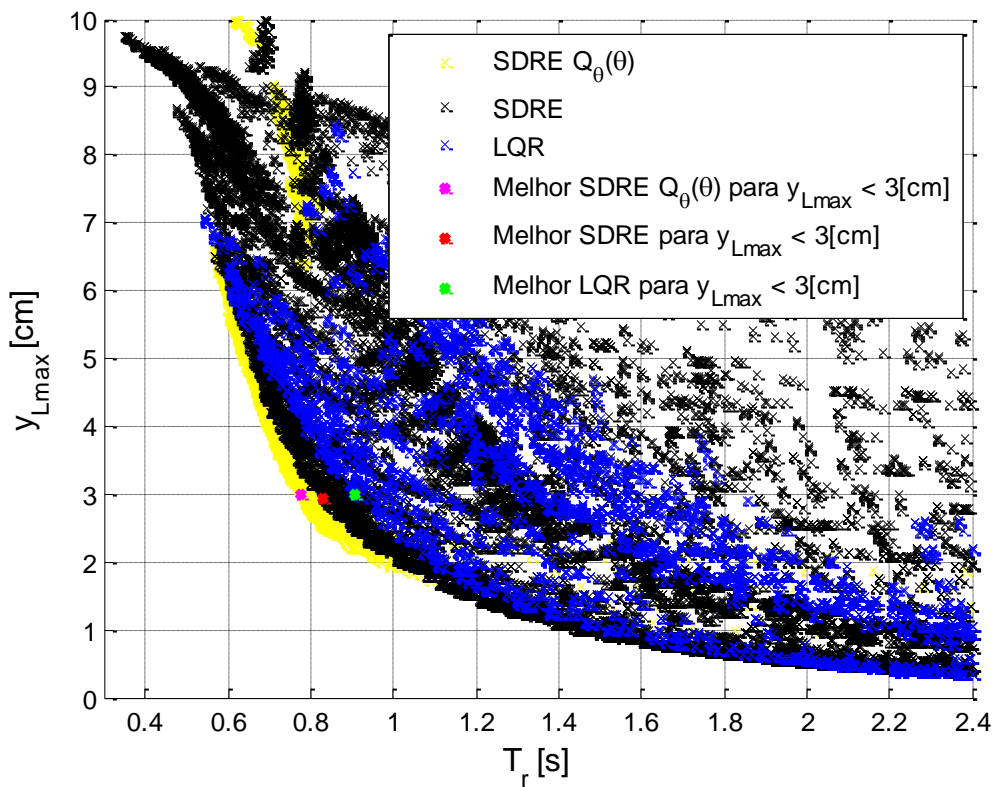


Figura 4.22 - Comparação dos mapas de desempenho obtidos com controladores LQR, SDRE usando pesos constantes e SDRE usando o peso Q_θ dependente do estado θ .

Para concluir este estudo comparativo, juntam-se os resultados de desempenho do controlador LQR, do controlador SDRE usando pesos constantes e do controlador SDRE usando pesos dependentes do estado.

A Figura 4.22 mostra as duas vantagens que o controlador SDRE tem sobre o regular LQR: primeiro, ele permite considerar as não linearidades do sistema a ser controlado e segundo, é possível usar pesos que dependam do estado do sistema. Essas duas vantagens se traduzem em um ganho no desempenho do sistema considerável. Na Figura 4.22, são identificados três pontos ficando cada um na fronteira de Pareto de um mapa de desempenho e respeitando a condição $y_{Lmax} < 3 \text{ cm}$. Olhando esses três pontos, percebe-se que existe um ganho no tempo de estabilização de aproximadamente 0.1 s entre o LQR e o SDRE e entre o SDRE e o SDRE dependente do estado. No total 0.2 s entre o LQR e o SDRE usando pesos dependentes do estado.

A Figura 4.23 apresenta as respostas no domínio do tempo dos três pontos identificados na Figura 4.22. Percebe-se que, além de melhorar o tempo de estabilização do sistema tendo um deslocamento flexível máximo igual ($y_L = 3[\text{cm}]$), o SDRE consome menos de energia para realizar a manobra. Além disso, nota-se que quando se usa o SDRE com matriz peso dependente do estado, o segundo pico do deslocamento flexível é maior e atinge quase o mesmo nível do que o primeiro (3 cm). Esse fenômeno pode ser considerado como positivo, pois ele permite que a deformação da viga durante as manobras seja simétrica dos dois lados e assim diminui a possibilidade da viga apresentar uma deformação residual (devida à histerese do material) em uma direção quando a manobra é realizada sempre na mesma direção.

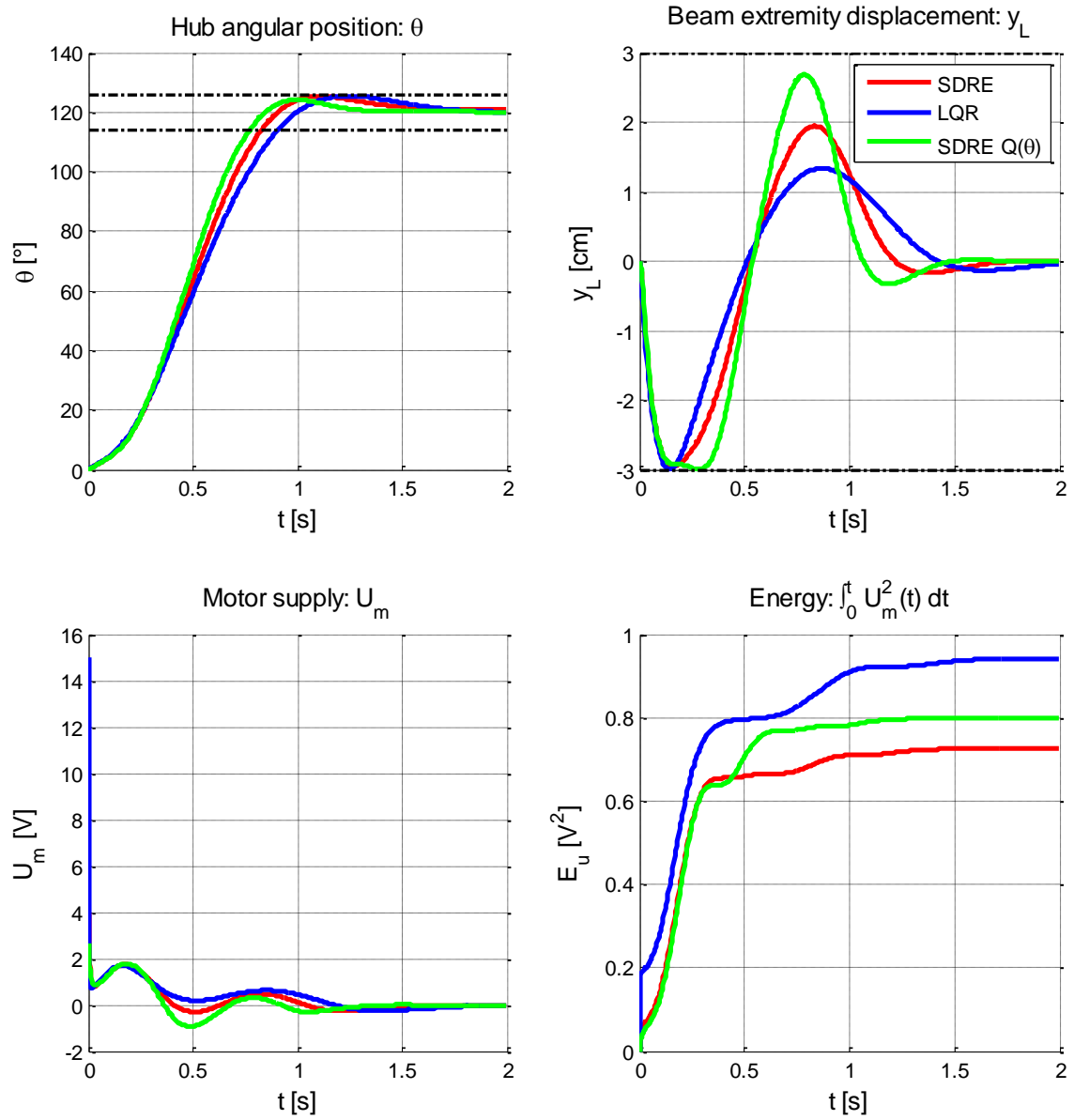


Figura 4.23 - Comparação do melhor desempenho verificando $y_{Lmax} < 3$ [cm] para os controladores LQR, SDRE usando pesos constantes e SDRE usando o peso Q_θ dependente do estado θ .

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho estudou-se o controlador SDRE aplicando-o a um modelo não linear de um braço robótico rotativo rígido-flexível formado por uma haste flexível acoplada a um servomotor (dispositivo FlexGage).

Uma contribuição deste trabalho é a combinação da modelagem matemática e experimental para modelar com precisão o dispositivo FlexGage. Primeiro foi desenvolvido um modelo matemático não linear (viga do tipo Euler-Bernoulli, dois modos de vibração, não linearidades de primeira ordem) com amortecimento estrutural dinâmico (tipo Rayleigh) inerente ao movimento flexível do braço. Depois, este modelo foi ajustado comparando os resultados de simulação com os resultados experimentais. Este modelo pode ser adaptado para permitir a simulação de satélites com apêndices flexíveis como antenas ou painéis solares.

Depois, as equações da dinâmica do modelo foram parametrizadas para chegar à forma SDC própria para implementação do controlador SDRE. O ajuste do controlador SDRE mediante as matrizes peso Q e R foi estudado com detalhe: foi aplicada uma técnica de normalização para poder realizar simulações permitindo medir a influência de cada termo das matrizes peso sobre o desempenho do sistema. Depois, procurou-se obter o melhor desempenho possível em termo de tempo de estabilização do sistema e minimização das vibrações. Para isso foi criado o mapa de desempenho do sistema controlado por SDRE para encontrar a fronteira de Pareto; conjunto de pontos de desempenho ótimo. Baseando-se nos pontos da fronteira de Pareto, foi criada com sucesso uma lei que permite obter os valores das matrizes peso em função do valor de um objetivo de desempenho.

Assim, a contribuição principal deste trabalho é a metodologia sistemática de escolha dos valores das matrizes peso do controlador SDRE que visa otimizar os objetivos de desempenho do sistema a controlar. É importante notar que esta metodologia pode ser aplicada para calcular os ganhos de controle de

qualquer controlador e não somente do SDRE (na seção 4.7, foi aplicada ao LQR).

A última contribuição deste trabalho foi de propor e aplicar uma lei de cálculo de um peso da matriz Q em função do estado associado ao peso. Verificou-se que desta maneira, o desempenho do sistema pode ser melhorado. Apesar de a lei apresentada ser específica a um determinado peso, ela é genérica e pode ser utilizada para qualquer outro sistema para estados que precisam atingir um determinado valor de maneira suave, i.e. devagar no início da manobra e mais rápido depois.

O estudo foi concluído mostrando que o controlador SDRE permite obter um melhor desempenho do que o regulador LQR porque ele considera as não linearidades do modelo e pode usar matrizes peso adaptativas.

5.1. Trabalhos futuros

Nesta seção são apresentados dois tópicos para trabalhos futuros que deem continuidade a este trabalho.

A primeira ideia é a aplicação do controlador SDRE no sistema real do braço robótico. No modelo deste trabalho os estados do sistema são conhecidos e realimentados diretamente. Na prática precisa-se adicionar um módulo ao controlador que permita estimar o valor dos estados do sistema em função dos dados dos sensores: posição angular, taxa de rotação e deslocamento flexível na ponta da haste. Os resultados da simulação experimental poderiam ser comparados com os resultados da simulação apresentados neste trabalho. A Figura 5.1 mostra o sistema no formato de diagrama de blocos com os três blocos principais: o controlador SDRE, o braço robótico experimental e o estimador.

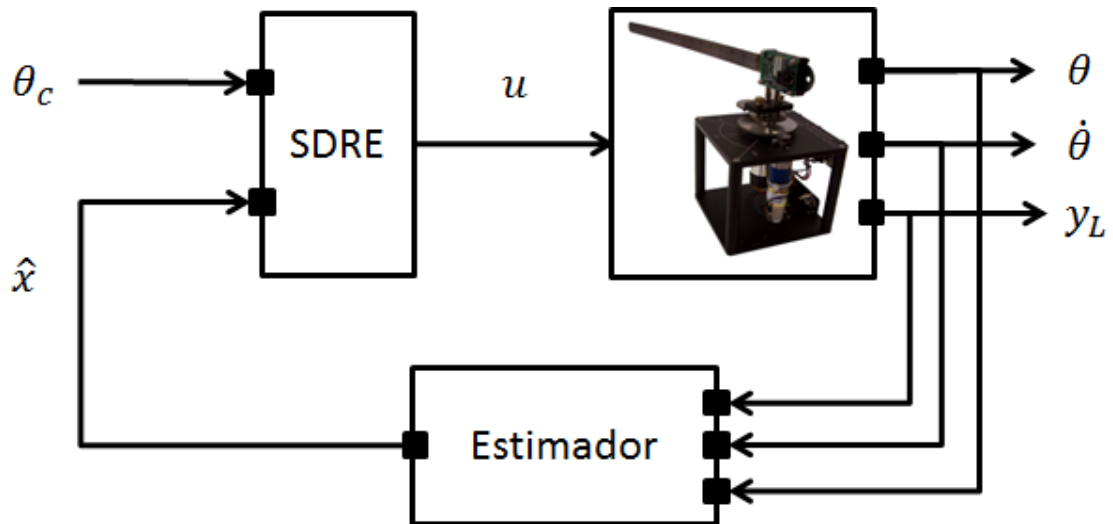


Figura 5.1 – Controle SDRE do braço robótico FlexGage com estimador de estados.

Outro trabalho possível seria o estudo do comportamento do controlador SDRE quando for sujeito a incertezas de modelagem. Parâmetros como o módulo de Young da viga E , a inércia do hub central do servomotor J_{eq} ou ainda os coeficientes de Rayleigh a e b não são conhecidos de maneira exata. Essas incertezas paramétricas poderiam ser adicionadas ao modelo para verificar a robustez do controlador. A Figura 5.2 apresenta o modelo do braço robótico no formato de planta generalizada G que permite considerar variações do modelo via a matriz Δ .

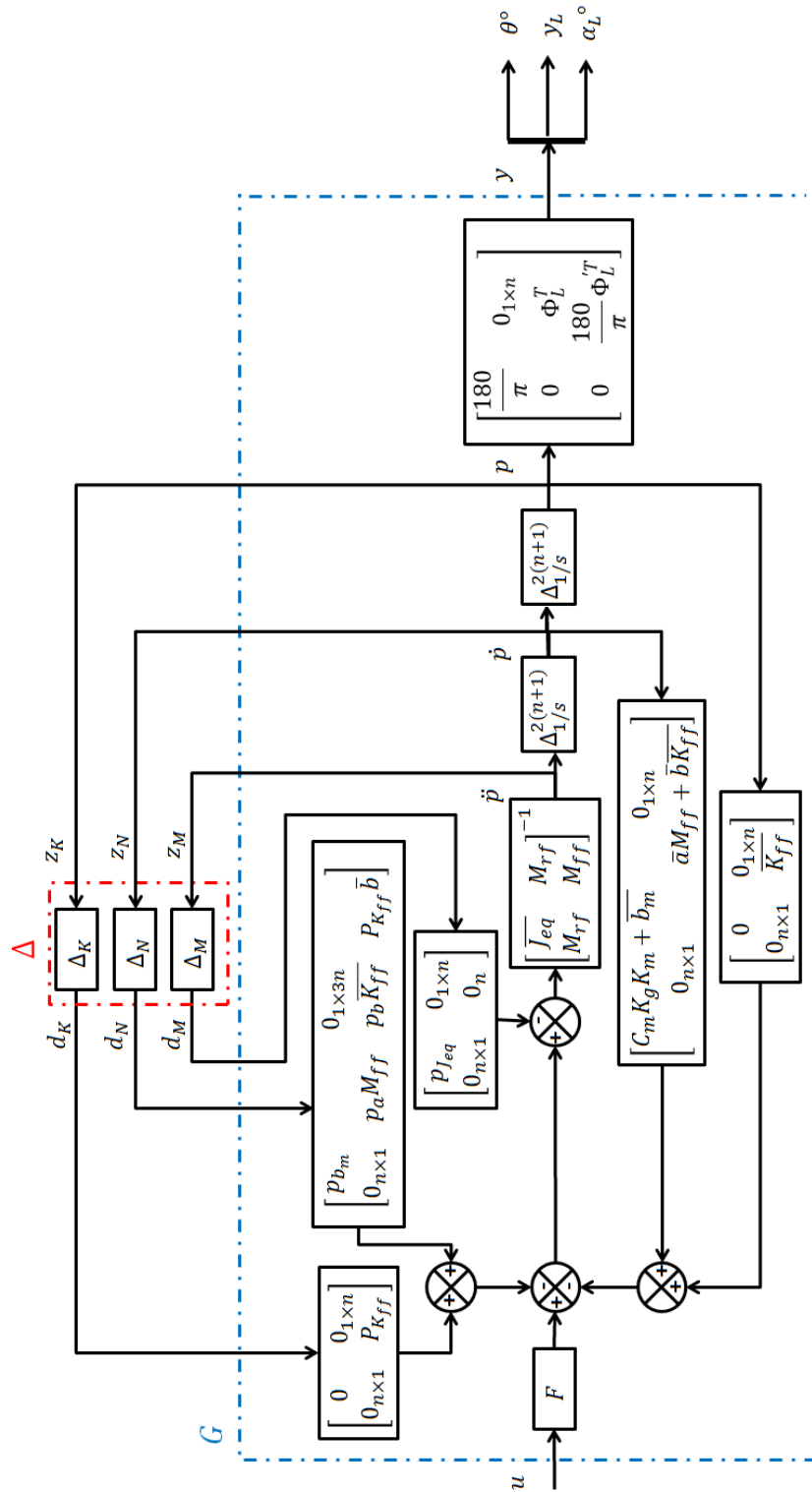


Figura 5.2 – Planta generalizada do braço robótico com incertezas paramétricas nas matrizes de massa, amortecimento e rigidez.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGRAWAL, G.; LEWIS, K.; CHUGH, K. Intuitive visualization of Pareto frontier for multi-objective optimization in n-dimensional performance space. In AIAA/ISSMO MULTIDISCIPLINARY ANALYSIS AND OPTIMIZATION CONFERENCE, 10, 2004, Albany, New York. **Proceedings...** Albany: AIAA/ISSMO. Disponível em: <<http://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/6.2004-4434>>. Acesso em: 16 maio. 2014
- BOYD, S. P.; BARRATT, C. H. **Linear controller design: limits of performance**. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1991.
- BRYSON, A. E.; HO, Y.-C. **Applied optimal control: optimization, estimation and control**. [s.l.] Hemisphere Publishing Corporation, 1975.
- CAMPA, G. **Algebraic Riccati Equation solution in Simulink via C++ Fortran** Matlab Central File Exchange, , 2009. Disponível em: <<http://mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/2651-lqrsim>>
- CASTRO, J. C. V. DE. **Estudo experimental da dinâmica e do sistema de controle de um satélite rígido -flexível**. São José dos Campos, INPE, 2005.
- CHOWDHURY, I.; DASGUPTA, S. Computation of Rayleigh damping coefficients for large systems. **The Electronic Journal of Geotechnical ...**, v. 8, n. C, p. 11, 2003.
- ÇİMEN, T. State-dependent Riccati equation (SDRE) control: a survey. In: IFAC WORLD CONGRESS, 17, 2008, Seoul, South Korea. **Proceedings...** Seoul: International Federation of Automatic Control, 2008. p. 3761–3775. Disponível em: <[http://www.researchgate.net/publication/228563472_State-dependent_Riccati_equation_\(SDRE\)_control_a_survey/file/d912f50b0a9592e278.pdf](http://www.researchgate.net/publication/228563472_State-dependent_Riccati_equation_(SDRE)_control_a_survey/file/d912f50b0a9592e278.pdf)>. Acesso em: 16 maio. 2014.
- ÇİMEN, T. Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependent Riccati equation (SDRE) method. **Annual Reviews in Control**, v. 34, n. 1, p. 32–51, abr. 2010.
- ÇİMEN, T. Survey of State-Dependent Riccati Equation in Nonlinear Optimal Feedback Control Synthesis. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 35, n. 4, p. 1025–1047, jul. 2012.
- GONZALES, R. G. **Utilização dos métodos SDRE e filtro de Kalman para o controle de atitude de simuladores de satélites**. São José dos Campos, INPE, 2009.

HAN, S.; BENAROYA, H.; WEI, T. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. **Journal of Sound and Vibration**, v. 225, n. 5, p. 935–988, 1999.

HESPANHA, J. **Lecture notes on lqr/lqg controller design**, 2005. Disponível em: <<http://www.uz.zgora.pl/~wpaszke/materialy/kss/lqrnotes.pdf>>

JUNKINS, J. L.; KIM, Y. **Introduction to dynamics and control of flexible structures**. Washington, DC: AIAA, 1993.

KATSEV, S. **Streamlining of the state-dependent Riccati equation controller algorithm for an embedded implementation**. Rochester, NY: Rochester Institute of Technology, 2006.

KWAKERNAAK, H.; SIVAN, R. **Linear optimal control systems**. New York: Wiley-interscience, 1972. v. 1

MAINENTI-LOPES, I. L. M. **Controle de atitude de satélites rígido-flexíveis usando a otimização extrema generalizada com abordagem multi-objetivo**. São José dos Campos, INPE, 2008.

MCCORMACK, A. S.; GODFREY, K. R. Rule-based autotuning based on frequency domain identification. **Control Systems Technology, IEEE Transactions on**, v. 6, n. 1, p. 43–61, 1998.

MRACEK, C.; CLOUTIER, J. Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent Riccati equation method. **International Journal of robust and nonlinear control**, v. 8, n. 4-5, p. 401–433, 1998.

PARETO, V. **Manual of Political Economy**. New York: A. M. Kelley, 1971.

PARRISH, D.; RIDGELY, D. Attitude control of a satellite using the SDRE method. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1997, Albuquerque, New México. **Proceedings...** Albuquerque: IFAC, 1997. p. 942–946. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=609665>. Acesso em: 16 maio. 2014.

PEARSON, J. D. Approximation Methods in Optimal Control I. Sub-optimal Control. **Journal of Electronics and Control**, v. 13, n. 5, p. 453–469, 1962.

POLITYKO, E. **Calculation of Pareto points**. Matlab Central File Exchange, , 2008. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/22507-calculation-of-pareto-points>>

PONTRYAGIN, L. S. **Mathematical theory of optimal processes**. [s.l.] CRC Press, 1987.

SAAD, M.; AKHRIF, O.; SAYDY, L. Analytical model of one flexible link system with nonlinear kinematics. **Journal of Vibration and Control**, v. 19, n. 12, p. 1795–1806, 13 jun. 2012.

SAWARAGI, Y.; NAKAYAM, H.; TANINO, T. **Theory of multiobjective optimization**. Orlando, Florida: Harcourt, 1985.

SHAWKY, A et al. Position control of flexible manipulator using non-linear H^∞ with state-dependent Riccati equation. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering**, v. 221, n. 3, p. 475–486, 1 jan. 2007.

SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. **Applied nonlinear control**. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1991.

WILSON, E. Linear Viscous Damping. In: **WILSON, E. (Ed.)**. Three Dimensional Static and Dynamic Analysis Of Structures. Berkeley, California: Computers and Structures, 1996.

ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. Optimum settings for automatic controllers. **trans. ASME**, v. 64, n. 11, 1942.

APÊNDICE A - DOCUMENTAÇÃO TÉCNICA DO SRV02

A.1 Cálculo do momento de inércia equivalente

O momento de inércia equivalente do conjunto motor redutor no eixo de saída, $J_{m,eq}$, é a soma das diferentes inércias do motor colocadas no eixo de saída. Deve-se considerar a inércia própria do rotor do motor $J_{m,mot}$, a inércia do redutor, J_g , e a inércia do dispositivo que permite segurar o braço flexível $J_{l,ext}$. Detalhando a Equação (2.89), chega-se a

$$J_{m,eq} = J_{m,mot} K_g^2 \eta_g + J_g + J_{l,ext} \quad (A-1)$$

A inércia $J_{m,mot}$ é um parâmetro do motor, a inércia $J_{l,ext}$ é dada pelo construtor do experimento FlexCage. Falta calcular a inércia do redutor J_g que é devida à rotação dos pinhões

$$J_g = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \quad (A-2)$$

Para calcular a inércia de cada pinhão, usa-se a relação que relaciona a inércia de um disco com a sua massa e raio:

$$J_{disco} = \frac{m_{disco} r_{disco}^2}{2} \quad (A-3)$$

A.2 Valores dos parâmetros do moto-redutor DC

Parâmetros	Descrição	Valor	Variável Matlab	Unidade
Motor: Parte elétrica				
K_m	Força contra eletromotriz (back EMF)	0,00768	Km	[V][rad ⁻¹][s]
R_m	Resistência da armadura	2,6	Rm	[Ω]
Motor: Parte mecânica				
b_{eq}	Coeficiente de fricção equivalente do motor	0,015	beq	[N][m][rad ⁻¹][s]
η_m	Eficiência do motor	69	etam	[%]

K_t	Constante de torque	0,00768	Kt	[N][m][A ⁻¹]
$J_{m,mot}$	Inércia do rotor do motor	$3,90 \cdot 10^{-7}$	Jm_mot	[kg][m ²]
r	Raio do hub do motor	5	r	[cm]
Redutor				
K_{gi}	Redução da engrenagem interna	14	Kgi	-
N_1 r_1 m_1 J_1	Disco 1: número de dentes, raio, massa e inércia: $J_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2}$	24 6,35 5 $1,01 \cdot 10^{-7}$	N1 r1 m1 J1	- [cm] [g] [kg][m ²]
N_2, N_3 r_2, r_3 m_2, m_3 J_2, J_3	Disco 2 e disco 3: número de dentes, raio, massa e inércia: $J_i = \frac{m_i r_i^2}{2}$	72 19 30 $5,41 \cdot 10^{-6}$	N23 R23 m23 J23	- [cm] [g] [kg][m ²]
N_4 r_4 m_4 J_4	Disco 4: número de dentes, raio, massa e inércia $J_1 = \frac{m_4 r_4^2}{2}$	120 32 83 $4,25 \cdot 10^{-5}$	N4 R4 m4 J4	- [cm] [g] [kg][m ²]
K_g	Coeficiente redutor da engrenagem $K_g = K_{gi} \frac{N_2 N_4}{N_1 N_3}$	70	Kg	-
η_g	Eficiência da engrenagem	90	etag	[%]
J_g	Inércia total dos pinhões do redutor $J_g = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$	$5,34 \cdot 10^{-5}$	Jg	[kg][m ²]
Outros				
$J_{l,ext}$	Inércia do dispositivo que permite segurar o braço flexível no eixo de carga do moto-redutor.	$2 \cdot 10^{-4}$	Jl_ext	[kg][m ²]
$J_{m,eq}$	$J_{m,eq} = J_{m,mot} K_g^2 \eta_g + J_g + J_{l,ext}$	$1,97 \cdot 10^{-3}$	Jm_eq	[kg][m ²]
C_m	$\frac{\eta_m \eta_g K_t K_g}{R_m}$	0.1284	Cm	[N][m][Ω ⁻¹]
B_{eq}	$C_m K_g K_m + b_{eq}$	0,084	Beq	[SI]
Limitações				
f_{max}	Frequência máxima a ser aplicada no motor para não danificar a engrenagem e o motor	50	-	[s ⁻¹]
U_{max}	Tensão máxima a ser aplicada no motor	±15	-	[V]
I_{max}	Intensidade máxima em regime contínuo para o motor	1	-	[A]
I_{peak}	Intensidade máxima de pico	3	-	[A]

Referência motor: Faulhaber Coreless DC Motor Model 2338S00

APÊNDICE B - MODELAGEM SIMULINK

As simulações computacionais foram realizadas usando o Simulink® do Matlab® (Matlab 2012b (8.0.0.783), 32-bit). As figuras a seguir representam os blocos principais usados nas simulações.

A Figura B.1 apresenta o modelo geral da simulação SDRE. Primeiro, na esquerda, o sinal de comanda θ_c : um degrau indicando a posição angular a atingir. Depois, vem o bloco do controlador SDRE: em entrada o sinal de comanda θ_c , os estados x , e as matrizes do modelo M^{-1} , N e K ; ele fornece o sinal de controle $u = U_m$. Em seguida, o modelo não linear do sistema: atuado via o sinal de controle u , o sistema fornece os estados x . Como o sistema é não linear as matrizes do modelo M^{-1} , N e K não são constantes e elas são realimentadas na entrada do controlador SDRE para que ele seja capaz a cada iteração de calcular o novo ganho de controle K . Finalmente, um bloco observador que permite calcular as variáveis θ e y_L em função dos estados x .

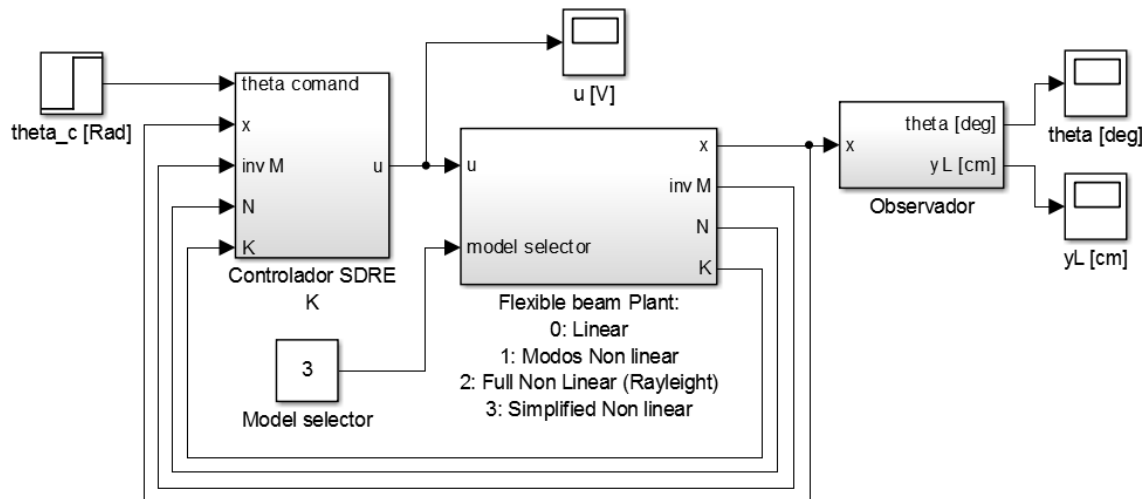


Figura B.1 - Modelo Simulink do sistema controlado completo: planta do braço robótico rotativo e controlador SDRE.

Nota-se que existe um bloco que permite realizar a simulação com diferentes modelos do braço robótico rotativo rígido-flexível: o modelo linearizado, o modelo não linear considerando apenas os modos assumidos (Equação

(2.98)), o modelo não linear com amortecimento de Rayleigh (Equação (2.125)) e o modelo não linear simplificado (Equação (2.127)).

A Figura B.2 representa o interior do bloco controlador SDRE apresentado na Figura B.1. Tem 3 blocos importantes na Figura B.2. Primeiro, o bloco que calcula as matrizes do espaço de estados A, B, C e D em função das matrizes massa, mola e amortecimento M^{-1}, N e K conforme a Equação (3.29). Depois, o bloco que calcula o valor da matriz peso Q dependente do estado x conforme a Equação (4.14). Por último, o bloco que resolve a equação de Riccati da Equação (3.15). Esse bloco faz uso de uma s-function desenvolvida por Campa (2009) que permite a resolução da Equação de Riccati diretamente no Simulink sem ter que chamar o interpretador de Matlab.

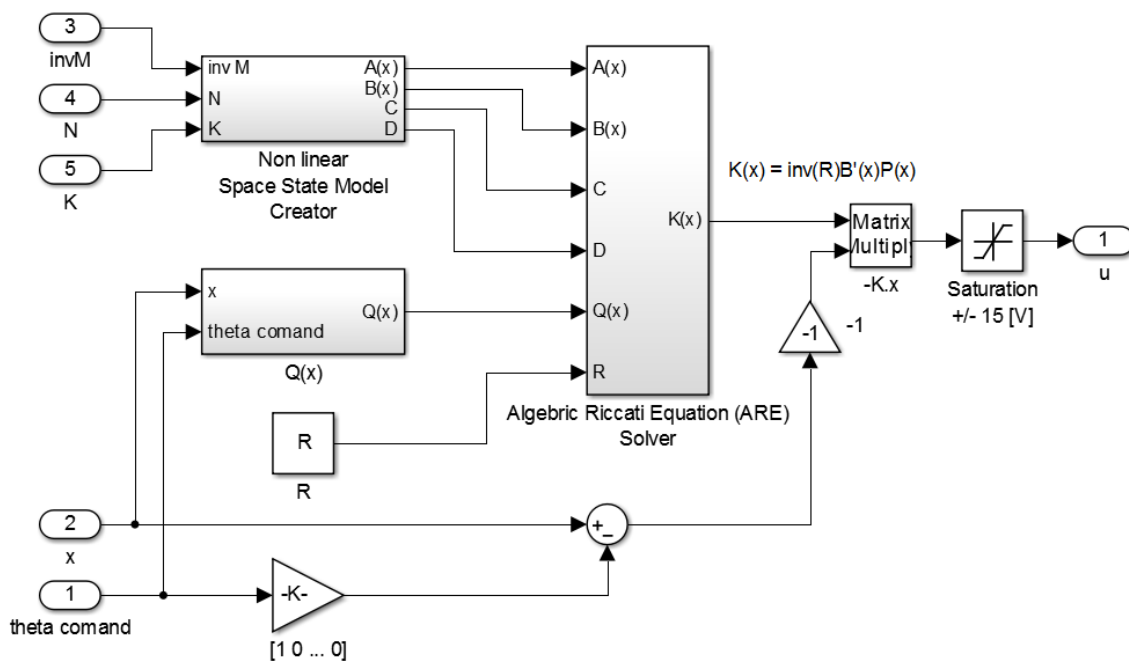


Figura B.2 – Modelo Simulink do controlador SDRE.

A Figura B.2 representa o interior do modelo não linear apresentado na Figura B.1. Matematicamente ele este bloco calcula a solução da dinâmica massa-mola-amortecedor da Equação (2.100).

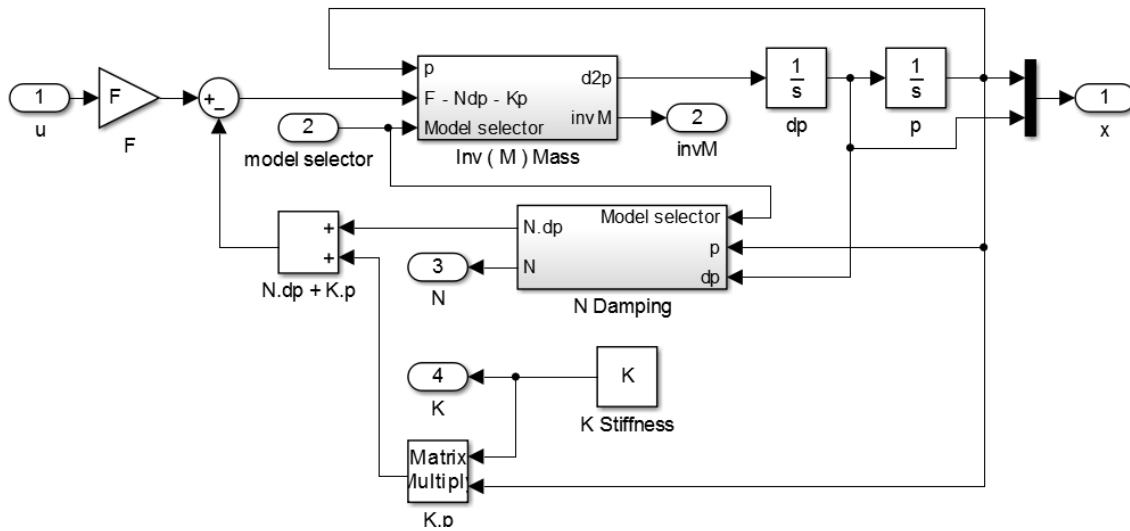


Figura.B.3 - Modelo Simulink da planta: braço robótico rotativo rígido-flexível.

A Figura B.4 representa o interior do bloco M^{-1} apresentado na Figura B.2. Nota-se que em função da seleção do modelo, a inversa da matriz M é constante ou função dos estados do sistema.

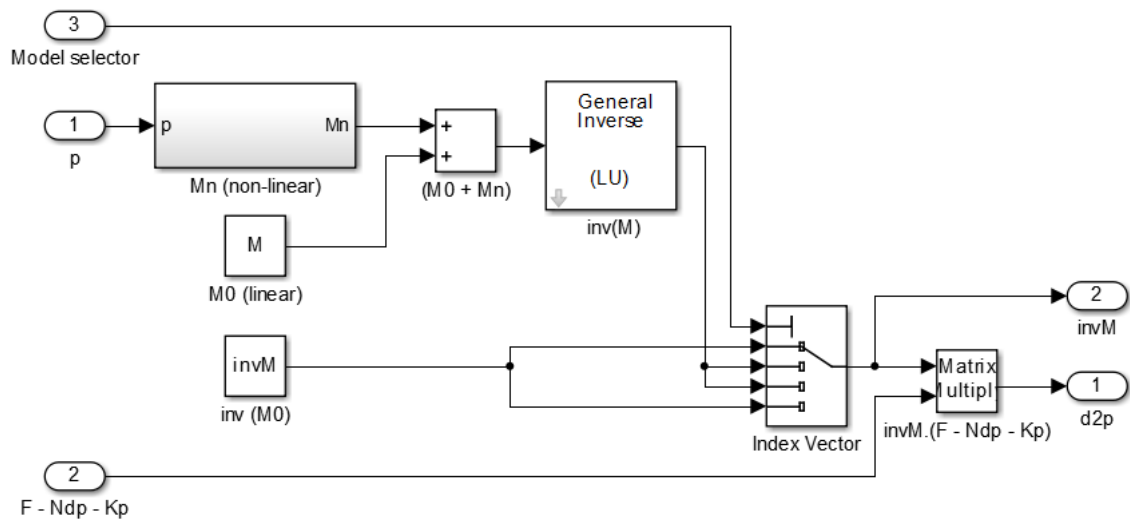


Figura B.4 - Bloco calculado o inverso da matriz massa M^{-1} e a segunda derivada de $[\theta \ q]^T$.

Por fim, a Figura B.5 representa uns dos blocos dentro do bloco N apresentado na Figura B.2 para o modelo não linear com amortecimento de Rayleigh (Equação (2.125)).

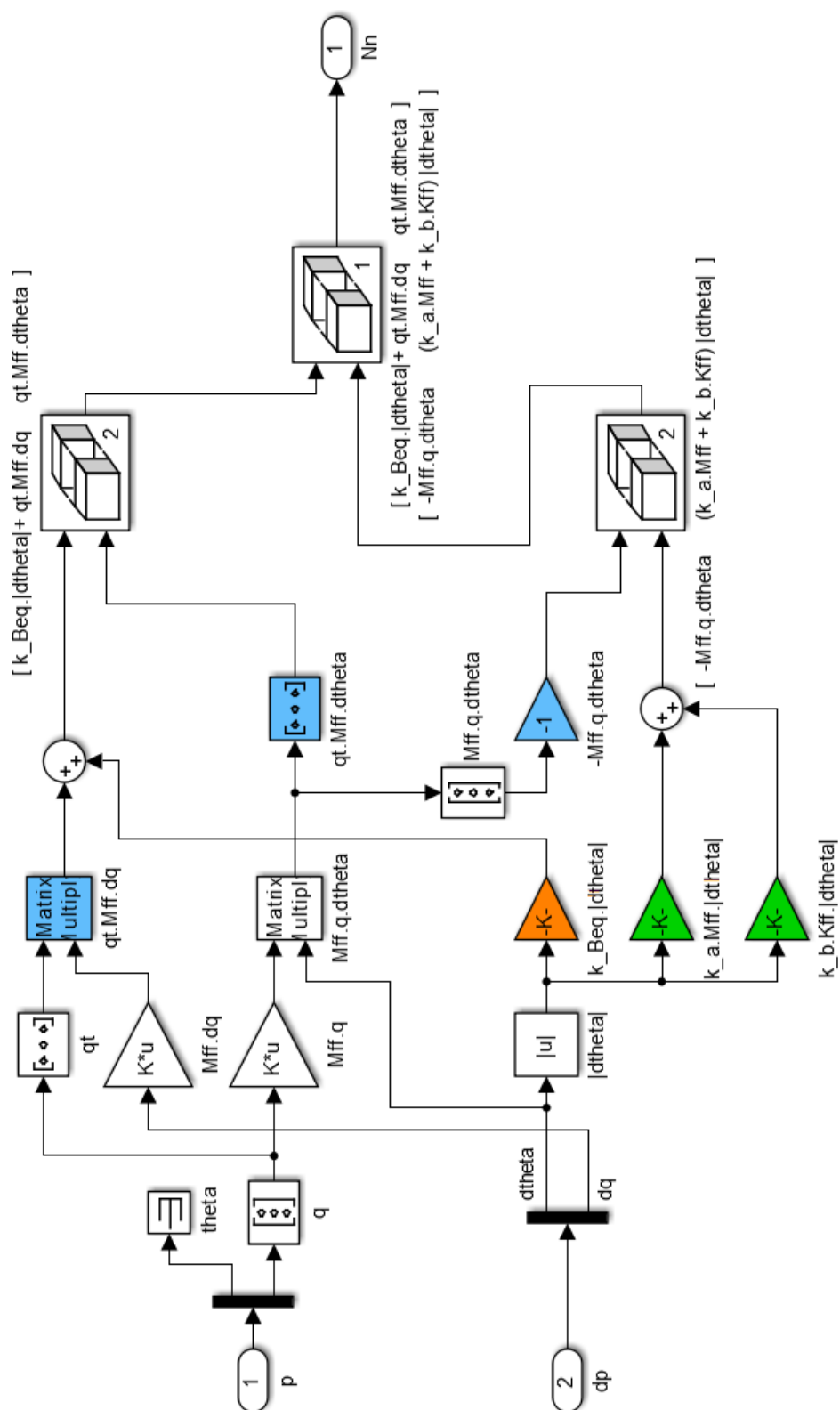


Figura B.5 - Bloco permitindo calcular a parte não linear N_n da matriz de amortecimento N em função dos valores dos estados do sistema x .