



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

sid.inpe.br/mtc-m21b/2016/03.02.14.14-TDI

## **ESTRATÉGIAS DE CONTROLE BIOINSPIRADAS E BASEADAS EM SINCRONIZAÇÃO PARA VEÍCULOS ARTIFICIAIS**

Vander Luís de Souza Freitas

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada, orientada pelo Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau, aprovada em 03 de março de 2016.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3L9FQ2P>>

INPE  
São José dos Campos  
2016

## **PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@inpe.br

## **COMISSÃO DO CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (DE/DIR-544):**

### **Presidente:**

Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação (CPG)

### **Membros:**

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

Dr. André de Castro Milone - Coordenação de Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dra. Carina de Barros Melo - Coordenação de Laboratórios Associados (CTE)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação de Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Dr. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SID)

### **BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SID)

### **REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Simone Angélica Del Duca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

### **EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Marcelo de Castro Pazos - Serviço de Informação e Documentação (SID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

sid.inpe.br/mtc-m21b/2016/03.02.14.14-TDI

## **ESTRATÉGIAS DE CONTROLE BIOINSPIRADAS E BASEADAS EM SINCRONIZAÇÃO PARA VEÍCULOS ARTIFICIAIS**

Vander Luís de Souza Freitas

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada, orientada pelo Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau, aprovada em 03 de março de 2016.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3L9FQ2P>>

INPE  
São José dos Campos  
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Freitas, Vander Luís de Souza.

F884e Estratégias de controle bioinspiradas e baseadas em sincronização para veículos artificiais / Vander Luís de Souza Freitas. – São José dos Campos : INPE, 2016.  
xxx + 123 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21b/2016/03.02.14.14-TDI)

Dissertação (Mestrado em Computação Aplicada) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2016.  
Orientador : Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau.

1. Sistemas dinâmicos. 2. Movimento coletivo. 3. Sistemas multiagente. 4. Osciladores de fase acoplados. I.Título.

CDU 517.938

---



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aluno (a): **Vander Luís de Souza Freitas**

Título: " ESTRATÉGIAS DE CONTROLE BIOINSPIRADAS E BASEADAS EM  
SINCRONIZAÇÃO PARA VEÍCULOS ARTIFICIAIS".

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de **Mestre** em  
**Computação Aplicada**

Dr. Marcos Gonçalves Quiles

  
Presidente / UNIFESP / São José dos Campos - SP

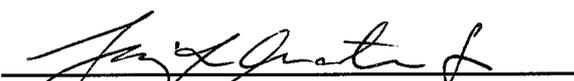
Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau

  
Orientador(a) / INPE / São José dos Campos - SP

Dr. Lamartine Nogueira Frutuoso  
Guimarães

  
Membro da Banca / IEAV/CTA / SJCampos - SP

Dr. Luiz de Siqueira Martins Filho

  
Convocado(a) / UFABC / Santo André - SP

**Este trabalho foi aprovado por:**

maioria simples

unanimidade

São José dos Campos, 03 de Março de 2016



*“Viver e não ter a vergonha de ser feliz. Cantar e cantar e cantar a  
beleza de ser um eterno aprendiz. Ah meu Deus! Eu sei, eu sei que a  
vida devia ser bem melhor, e será. Mas isso não impede que eu  
repita: é bonita, é bonita e é bonita!”*

GONZAGUINHA  
em “O que é, o que é?”, 1982



*A Deus, por ser comigo. A meus pais Sérgio e Sueli, a  
minhas irmãs Tamires e Laura e a minha esposa Natália,  
pelo apoio e paciência.*



## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado forças e condições para concluir este trabalho.

A meus pais e a toda minha família, incluindo os amigos próximos, mas em especial a minha mãe por todo o incentivo e sacrifícios (que não foram poucos) realizados em prol da minha educação e felicidade. Gratidão eterna.

Agradeço profundamente a minha esposa, pelo carinho e paciência, em todas as grandes novidades desta nova fase de nossas vidas. Sou grato por cada pequeno gesto, principalmente por sempre acreditar em mim, e me impulsionar a alçar voos mais altos ao seu lado. Te amo!

Aos meus novos amigos de fé, de São José dos Campos, Elias Sampa, Felipe Peixoto, Cíntia Regina, e aos amigos do Coral Libercanto, por todos os momentos de reflexão, descontração e musicalidade.

Ao meu orientador, Dr. Elbert E. N. Macau, pela oportunidade, ensinamentos, incentivo e toda confiança depositada.

A todos os professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada do INPE, obrigado pelos ensinamentos e pela colaboração em meus trabalhos acadêmicos.

À amizade e parceria de meus companheiros da pós-graduação do INPE: Barbara Reis, Gabriel Fornari, Matheus Maquiné, Reynier Hernández, Diego Benincasa, Wანnessa Silva, Daniel Santos, Paulo Zeferino, Paulo Alarcón, Tiago Gomes, Sandy Porto, Celso Freitas, Antonio Mário, Marcos Daniel e Jéssica Cristina.

Agradeço também aos amigos da Computação e do Departamento de Cartografia da Unesp de Presidente Prudente, pelo incentivo à carreira de pesquisador, principalmente ao professor Dr. Antonio Tommaselli, grande mestre.

Todo o trabalho foi realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq. Agradeço pelo apoio financeiro e pelo interesse nos estudos realizados.

Ao INPE, pela oportunidade.



## RESUMO

Com o advento das tecnologias atuais de processamento, controle e miniaturização, são cada vez mais frequentes os estudos com conglomerados de satélites, veículos aéreos não tripulados, veículos autônomos subaquáticos e robôs móveis. Esses sistemas consistem de unidades (agentes ativos) que podem interagir entre si, formando conglomerados coletivos. Surge então a importância de se estabelecer estratégias de controle para que os agentes realizem suas atividades de forma inteligente, trabalhando em grupo, colaborativamente. Neste trabalho, elaborou-se um modelo reativo visando levar grupos de agentes móveis autônomos a formações em movimento de deslocamento, partindo de posições aleatórias. Nessa abordagem, os agentes interagem via regras de repulsão, alinhamento e atração, e não guardam memória de interações anteriores. Adicionalmente, explorou-se um modelo de osciladores de fase acoplados, em que cada oscilador representa um agente móvel. Nos dois modelos, a comunicação entre os agentes é realizada apenas entre indivíduos vizinhos em redes de interligação criadas dinamicamente, de acordo com a distância espacial entre eles. Por fim, os modelos foram unidos de forma que os agentes pudessem iniciar seu movimento a partir de posições aleatórias, convergir para uma formação paralela, se movendo em uma direção pré-definida, e então interagirem segundo a dinâmica de osciladores acoplados, resultando em formações paralelas e circulares simétricas.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos. Movimento coletivo. Sistemas multiagente. Osciladores de fase acoplados.



# BIOINSPIRED AND SYNCHRONIZATION-BASED CONTROL STRATEGIES FOR ARTIFICIAL VEHICLES

## ABSTRACT

The advent of the current technologies of processing, control and miniaturization, led the studies with satellite conglomerates, unmanned aerial vehicles, underwater autonomous vehicles and mobile robots to become increasingly frequent. These systems consist of units (agents) that may interact with each other, forming collective conglomerates. Then comes the importance of establishing control strategies for agents to carry out their activities in an intelligent manner, working together, collaboratively. In this work, we elaborated a reactive model, to lead groups of autonomous mobile agents to moving formations, starting from random positions. In this approach, the agents interact via repulsion, alignment and attraction rules, and do not keep memory of previous interactions. Additionally, we explored a model of phase-coupled oscillators, wherein each oscillator is a mobile agent. In both models, the communication between the agents is performed only among neighboring individuals in dynamically generated networks, in accordance with the spatial distance between them. Finally, these two models were gathered so that the agents could start their movement from random positions, converged to a parallel formation moving in a predefined direction, and then interacting according to the dynamics of phase-coupled oscillators, resulting in parallel and symmetric circular formations.

Keywords: Dynamical systems. Collective motion. Multiagent systems. Phase-coupled oscillators.



## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
3.1 Séries temporais do mapa Logístico. . . . .	15
3.2 Espaço de fase do sistema de Lorenz, para $\sigma = 10$ , $b = 8/3$ e $r = 28$ . . . . .	16
3.3 Diagrama de bifurcação e expoentes de Lyapunov do mapa Logístico . . . . .	18
3.4 Ciclo limite estável. Trajetórias próximas ao ciclo são atraídas para ele. . . . .	18
3.5 Representação gráfica da fase de dois osciladores. . . . .	21
3.6 Redes direcionada e não-direcionada. . . . .	25
3.7 Redes conectada e desconectada. . . . .	25
3.8 Topologias de redes. . . . .	28
4.1 Regras de interação entre boids. . . . .	35
4.2 Software de simulação NetLogo, com o modelo Flocking. . . . .	36
4.3 Simulação de interação entre 150 boids utilizando o software de simulação NetLogo. . . . .	37
5.1 Orientação dos agentes 1 e 2 em relação ao agente virtual $a$ . A região com fundo escuro representa a RIAV. . . . .	41
5.2 Ajuste do ângulo de navegação. O ângulo atual é ajustado em direção a um ângulo objetivo via adição (a esquerda) ou subtração (a direita) de uma quantidade a cada instante de tempo, até que o objetivo seja atingido. . . . .	43
5.3 Forças do sistema. As circunferências representam a área de interação do agente com fundo preto (não confundir com o raio de interação com o agente virtual). Em (d) e (e), o agente branco é o agente virtual. . . . .	45
5.4 Formação inicial em posições e ângulos de navegação aleatórios, dentro de uma região retangular atrás do agente virtual. Agentes são os círculos em vermelho, o agente virtual é o círculo azul, o raio de interação do agente virtual (RIAV) é o grande círculo em verde, e as setas em preto representam as direções de navegação. . . . .	47

5.5	Abordagens para cálculo das forças de interação: E-1) Cálculo das forças baseado no raio de visão dos agentes, e E-2) Cálculo das forças baseado em zonas de percepção: Zona de separação (ZS), Zona de Alinhamento (ZA), Zona de coesão (ZC). Quando os vizinhos do agente estão posicionados dentro da ZS, o agente é submetido à força de separação $F_s$ , que o faz desviar deles. No caso de estarem dentro da ZA, o agente ajusta seu ângulo de navegação para coincidir com a média dos ângulos de navegação dos vizinhos. No terceiro caso, se os vizinhos estiverem na ZC, então o agente ajusta seu ângulo de navegação para se deslocar em direção ao centro de massa dos vizinhos. O agente em preto é um agente comum do modelo, e a região pontilhada corresponde à sua área de visão (região sensorial). Os agentes em vermelho são seus vizinhos. . . . .	48
5.6	Análise do coeficiente $\alpha_a$ , para as estratégias E-1. Resultados obtidos para $\alpha_a = \{1, \dots, 10\}$ e $\alpha_c = \alpha_{av} = \alpha_{cv} = 1$ . <i>Sucesso</i> representa a porcentagem dos casos em que os agentes chegaram a uma FDV. . . . .	51
5.7	Análise do coeficiente $\alpha_{av}$ , para as estratégias E-1. Resultados obtidos para $\alpha_{av} = \{1, \dots, 10\}$ e $\alpha_a = \alpha_c = \alpha_{cv} = 1$ . <i>Sucesso</i> representa a porcentagem dos casos em que os agentes chegaram a uma FDV. . . . .	52
5.8	Análise do coeficiente $\alpha_{cv}$ , para as estratégias E-1. Resultados obtidos para $\alpha_{cv} = \{1, \dots, 10\}$ e $\alpha_a = \alpha_c = \alpha_{av} = 1$ . <i>Sucesso</i> representa a porcentagem dos casos em que os agentes chegaram a uma FDV. . . . .	53
5.9	Análise do coeficiente $\alpha_c$ , para as estratégias E-1. Resultados obtidos para $\alpha_c = \{1, \dots, 10\}$ e $\alpha_a = \alpha_{av} = \alpha_{cv} = 1$ . <i>Sucesso</i> representa a porcentagem dos casos em que os agentes chegaram a uma FDV. . . . .	54
5.10	Estratégia E-1.1: Análise dos coeficientes $\alpha_a$ e $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Os resultados são melhores quando $\alpha_{cv} > \alpha_a$ . . . . .	55
5.11	Estratégia E-1.1: Análise dos coeficientes de controle $\alpha_{av}$ e $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. . . . .	56
5.12	Estratégia E-1.1: ocorrências para cada resultado das simulações que obtiveram FDVs em 100% dos casos, de acordo com os índices quantitativos. . . . .	57
5.13	Estratégia E-1.2: Análise dos coeficientes $\alpha_a$ e $\alpha_{av}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Em geral os agentes só chegam a formações definitivas nos casos em que $\alpha_{av} \geq \alpha_a$ . . . . .	58

5.14	Estratégia E-1.2: Análise dos coeficientes $\alpha_a$ e $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Formações definitivas viáveis são atingidas com alta taxa de sucesso apenas para $\alpha_a = 1$ . . . . .	59
5.15	Estratégia E-1.2: Análise dos coeficientes $\alpha_{av}$ e $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices. Tudo indica que não existe dependência entre estes dois coeficientes, para esta estratégia. . . . .	60
5.16	Estratégia E-1.2: ocorrências para cada resultado das simulações que obtiveram FDVs em 100% dos casos, de acordo com os índices quantitativos. . . . .	60
5.17	Estratégia E-1.3: Análise dos coeficientes $\alpha_a$ e $\alpha_c$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. FDVs são atingidas para $\alpha_a < 2$ e $\alpha_c < 3$ . . . . .	61
5.18	Estratégia E-1.3: Análise dos coeficientes $\alpha_a$ e $\alpha_{av}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. FDVs são atingidas para $\alpha_{av} \geq \alpha_a$ . . . . .	62
5.19	Estratégia E-1.3: Análise dos coeficientes $\alpha_a$ e $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. FDVs são atingidas para $\alpha_a = 1$ . . . . .	63
5.20	Estratégia E-1.3: Análise dos coeficientes $\alpha_c$ e $\alpha_{av}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. FDVs são atingidas para $\alpha_c < 4$ . . . . .	64
5.21	Estratégia E-1.3: Análise dos coeficientes $\alpha_c$ e $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. FDVs não são atingidas para alguns casos em que $\alpha_c > \alpha_{cv}$ . . . . .	65
5.22	Estratégia E-1.3: Análise dos coeficientes $\alpha_{av}$ e $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices. Quanto maior o valor de $\alpha_{cv}$ , menor é o Índice Temporal. . . . .	66
5.23	Estratégia E-1.3: ocorrências para cada resultado das simulações que obtiveram FDVs em 100% dos casos, de acordo com os índices quantitativos. . . . .	66
5.24	Estratégia E-1.4: Análise dos coeficientes $\alpha_c$ e $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. FDVs são atingidas para $\alpha_a = 1$ e $\alpha_{cv} > 1$ . . . . .	67
5.25	Estratégia E-1.4: Análise dos coeficientes $\alpha_c$ e $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. FDVs são atingidas para $\alpha_{cv} \neq 1$ . . . . .	68
5.26	Estratégia E-1.4: Análise dos coeficientes $\alpha_{av}$ e $\alpha_{cv}$ . . . . .	69

5.27	Estratégia E-1.4: ocorrências para cada resultado das simulações que obtiveram FDVs em 100% dos casos, de acordo com os índices quantitativos.	69
5.28	Análise do coeficiente $\alpha_{av}$ . Resultados obtidos para $\alpha_{av} = \{1, \dots, 10\}$ e $\alpha_a = \alpha_{av} = \alpha_{cv} = 1$ . <i>Sucesso</i> representa a porcentagem dos casos em que os agentes chegaram a uma FDV. . . . .	71
5.29	Análise do coeficiente $\alpha_{cv}$ . Resultados obtidos para $\alpha_{cv} = \{1, \dots, 10\}$ e $\alpha_a = \alpha_c = \alpha_{av} = 1$ . <i>Sucesso</i> representa a porcentagem dos casos em que os agentes chegaram a uma FDV. . . . .	72
5.30	Análise do coeficiente $\alpha_c$ . Resultados obtidos para $\alpha_c = \{1, \dots, 10\}$ e $\alpha_a = \alpha_{av} = \alpha_{cv} = 1$ . <i>Sucesso</i> representa a porcentagem dos casos em que os agentes chegaram a uma FDV. . . . .	73
5.31	Estratégia E-2.1: Análise dos coeficientes $\alpha_a$ e $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Os agentes só chegam ao objetivo quando $\alpha_{cv} \neq 1$ .	74
5.32	Estratégia E-2.1: Análise dos coeficientes $\alpha_{av}$ e $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Os agentes só chegam ao objetivo para $\alpha_{cv} > \alpha_{av}$ e $\alpha_{cv} \neq 1$ . . . . .	75
5.33	Estratégia E-2.1: ocorrências para cada resultado das simulações que obtiveram FDVs em 100% dos casos, de acordo com os índices quantitativos.	75
5.34	Estratégia E-2.2: Análise dos coeficientes $\alpha_a$ e $\alpha_{av}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Os agentes só chegam ao objetivo quando $\alpha_{av} \geq \alpha_a$ . . . . .	76
5.35	Estratégia E-2.2: Análise dos coeficientes $\alpha_a$ e $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Os agentes só chegam ao objetivo quando $\alpha_a = 1$ .	77
5.36	Estratégia E-2.2: Análise dos coeficientes $\alpha_{av}$ e $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Estes dois parâmetros aparentemente não possuem dependências entre si. . . . .	78
5.37	Estratégia E-2.2: ocorrências para cada resultado das simulações que obtiveram FDVs em 100% dos casos, de acordo com os índices quantitativos.	78
5.38	Estratégia E-2.3: Análise dos coeficientes $\alpha_a$ e $\alpha_c$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Os agentes só chegam ao objetivo quando $\alpha_a = 1$ e $\alpha_c < 3$ . . . . .	79

5.39	Estratégia E-2.3: Análise dos coeficientes $\alpha_a$ e $\alpha_{av}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Os agentes só chegam ao objetivo quando $\alpha_{av} \geq \alpha_a$ . . . . .	80
5.40	Estratégia E-2.3: Análise dos coeficientes $\alpha_a$ e $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Os agentes só chegam ao objetivo quando $\alpha_a = 1$ . . . . .	81
5.41	Estratégia E-2.3: Análise dos coeficientes $\alpha_c$ e $\alpha_{av}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Os agentes só chegam ao objetivo, com mais de 50% sucesso, quando $\alpha_c < 4$ . . . . .	82
5.42	Estratégia E-2.3: Análise dos coeficientes $\alpha_c$ e $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Os agentes chegam ao objetivo para a maior parte dos casos, com exceção de algumas configurações, para $\alpha_{cv} < 3$ . . . . .	83
5.43	Estratégia E-2.3: Análise dos coeficientes $\alpha_{av}$ e $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices. Quanto maior o valor de $\alpha_{cv}$ , menor o índice temporal. . . . .	84
5.44	Estratégia E-2.3: ocorrências para cada resultado das simulações que obtiveram FDVs em 100% dos casos, de acordo com os índices quantitativos. . . . .	84
5.45	Estratégia E-2.4: Análise dos coeficientes $\alpha_a$ e $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Observa-se que, em geral, $\alpha_{cv}$ deve ser maior que 1, e $\alpha_a$ tem que ser igual a 1. . . . .	85
5.46	Estratégia E-2.4: Análise dos coeficientes $\alpha_c$ e $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Aparentemente não existe relação de dependência entre $\alpha_c$ e $\alpha_{cv}$ , com baixas taxas de sucesso para a grande maioria das configurações, e não foram obtidas FDVs para $\alpha_{cv} < 2$ . . . . .	86
5.47	Estratégia E-2.4: Análise dos coeficientes $\alpha_{av}$ e $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Os agentes só chegam ao objetivo para $\alpha_{cv} > \alpha_{av}$ . . . . .	87
5.48	Estratégia E-2.4: ocorrências para cada resultado das simulações que obtiveram FDVs em 100% dos casos, de acordo com os índices quantitativos. . . . .	87
6.1	Fases sincronizadas e balanceadas para $N = 2$ . . . . .	93

6.2	Quatro tipos de movimento coletivo obtidos pelo controle de orientação 6.10 e $N = 12$ . A posição $r_k$ da partícula, com $k \in \{1, \dots, 12\}$ é um círculo vermelho, e a velocidade $e^{i\theta_k}$ é uma flecha preta. O centro de massa $R$ é o círculo azul, e a velocidade do centro de massa $\dot{R} = p_\theta$ é a flecha azul que sai dele. Animações disponíveis no link: <a href="http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3LEC74S">http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3LEC74S</a> . . . . .	96
6.3	Estabilizando a formação circular com e sem controle de orientação (Eq. 6.21). As redes espacial e de orientação são idênticas. Configuração: $N = 12$ , $\omega_0 = 0.1$ , e $K_0 = 0.1$ . Animações disponíveis no link: <a href="http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3LEC74S">http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3LEC74S</a> . . . . .	100
6.4	Padrões de fase simétricos correspondentes a $N = 12$ . Os seis padrões dizem respeito aos seis divisores de $N$ , que são $M = 1, 2, 3, 4, 6$ e $12$ . Cada padrão contém um número $M$ de “clusters” ilustrados no círculo unitário (linha pontilhada). . . . .	101
6.5	Formações circulares simétricas, com controle 6.26. Configuração: $N = 12$ e $\omega_0 = 0, 1$ . Animações disponíveis no link: <a href="http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3LEC74S">http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3LEC74S</a> . . . . .	103
6.6	Formações circulares simétricas, com controle 6.26, para diferentes topologias. Configuração: $N = 12$ , $M = 3$ e $\omega_0 = 0, 1$ . . . . .	104
6.7	Formações circulares simétricas, com controle 6.26, utilizando redes geradas dinamicamente, considerando vizinhanças de raio 5, 5 bl. Configuração: $N = 12$ , $M = 3$ e $\omega_0 = 0, 1$ . . . . .	105
7.1	Abordagem híbrida, combinando o modelo de convergência do Capítulo 5 e o controle 6.26. O controle só é acionado após os agentes convergirem para uma FDV. Animação disponível no link: <a href="http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3LEC74S">http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3LEC74S</a> . . . . .	108
7.2	Abordagem híbrida, combinando o modelo de convergência do Capítulo 5 e o controle 6.26 para os agentes que estiverem na RIAV. Animação disponível no link: <a href="http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3LEC74S">http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3LEC74S</a> . . . . .	109
7.3	Parâmetro de ordem 6.6 para as simulações, utilizando o modelo do Capítulo 5 e controle 6.26. No Caso 1, aciona-se o controle 6.26 apenas após os agentes convergirem para uma FDV, enquanto que no Caso 2 ele é acionado para os agentes que estiverem dentro do RIAV, conforme eles vão entrando. . . . .	109

7.4	Média do Parâmetro de ordem 6.6 para as simulações, no intervalo $2000 < t < 10000$ , com diferentes raios de visão dos agentes, utilizando o modelo do Capítulo 5 e controle 6.29. No Caso 3, o chaveamento para o controle 6.29 se dá após os agentes convergirem para uma FDV, enquanto o Caso 4 o aciona para os agentes que estiverem dentro do RIAV, conforme eles vão entrando, sem a necessidade de esperar pela FDV. . . . .	111
-----	---	-----



## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
5.1 Estratégias de interação entre agentes. . . . .	50
5.2 Configurações que resultaram nos menores tempos ( $\tau$ ) para as estratégias estudadas. O menor tempo foi obtido pela estratégia E-2.2. . . . .	88
5.3 Configurações que resultaram nos maiores tempos ( $\tau$ ) para as estratégias estudadas. O maior tempo foi obtido pela estratégia E-1.3. . . . .	88
5.4 Configurações que resultaram nos menores valores de $\phi$ para as estratégias estudadas. O menor $\phi$ foi obtido pela estratégia E-2.3. . . . .	89
5.5 Configurações que resultaram nos maiores valores de $\phi$ para as estratégias estudadas. O maior $\phi$ foi obtido pela estratégia E-1.4. . . . .	89
5.6 Configurações que resultaram nos menores valores de $\rho$ para as estratégias estudadas. O menor $\rho$ foi obtido pela estratégia E-1.1. . . . .	90
5.7 Configurações que resultaram nos maiores valores de $\rho$ para as estratégias estudadas. O maior $\rho$ foi obtido pela estratégia E-2.4. . . . .	90



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AN	–	Ângulo de navegação
bl	–	<i>body-length</i> - Comprimento do corpo de um agente
DF	–	Deslocamento de Formação
FD	–	Formação definitiva
FDV	–	Formação definitiva viável
F	–	Força resultante
IAD	–	Inteligência Artificial Distribuída
IT	–	Índice Temporal
it	–	Instante de tempo
IUA	–	Índice de Uniformidade Angular
IUR	–	Índice de Uniformidade Radial
MBI	–	Modelos Baseados em Indivíduos
PAP	–	Partículas autopropulsoras
PDOA	–	Partículas com dinâmica de osciladores acoplados
RDP	–	Resolução Distribuída de Problemas
RIAV	–	Raio de interação do agente virtual
SMA	–	Sistema Multiagente
VANT	–	Veículos Aéreos Não Tripulados
VAS	–	Veículos Autônomos Subaquáticos
ZA	–	Zona de atração
ZO	–	Zona de orientação
ZR	–	Zona de repulsão



## LISTA DE SÍMBOLOS

$r$	– Parâmetro Logístico e parâmetro do sistema de Lorenz
$b$	– Parâmetro do sistema de Lorenz
$\sigma$	– Parâmetro do sistema de Lorenz
$\lambda$	– Expoente de Lyapunov
$\omega$	– Frequência natural
$T$	– Período de oscilação
$\Gamma_{ij}$	– Função de interação entre osciladores
$N$	– Tamanho da população e número de vértices de uma rede
$L$	– Matriz Laplaciana
$D$	– Matriz dos graus de uma rede
$A$	– Matriz de adjacência de uma rede
$k_i$	– Grau do vértice $i$ da rede, ou força de acoplamento para o oscilador $i$
$P$	– Matriz de projeção
$B$	– Matriz de incidência
$E$	– Conjunto de arestas de uma rede
$\mathcal{N}_k$	– Conjunto de vizinhos do vértice $k$
$b_i$	– Agente $i$
$a$	– Agente virtual
$d_{b_i,a}$	– Distância euclidiana entre o agente $b_i$ e o agente virtual $a$
$\alpha_{lim}$	– Distância euclidiana máxima entre $b_i$ e $a$ , para deslocamento de formação
$\beta_{lim}$	– Diferença máxima entre o $\theta_i$ e $\theta_a$ , para deslocamento de formação
$p_\theta$	– Parâmetro de ordem
$ v_a $	– Módulo da velocidade do agente virtual
$ v_{fora} $	– Módulo da velocidade máximo fora do RIAV
$v_i$	– Velocidade do agente $b_i$
$t$	– Tempo
$t_f$	– Tempo final
$\bar{t}$	– Tempo de deslocamento aproximado entre a fronteira do RIAV e o agente virtual
$F_a$	– Força de alinhamento
$F_c$	– Força de coesão (atração)
$F_{av}$	– Força de alinhamento com o agente virtual
$F_{cv}$	– Força de coesão com o agente virtual
$F_s$	– Força de separação (repulsão)
$\phi$	– Índice de uniformidade angular
$\rho$	– Índice de uniformidade radial
$\tau$	– Índice temporal
$\alpha$	– Coeficiente de controle
$F$	– Força resultante
$\theta$	– Valor de fase, ou ângulo de navegação
$u_k$	– Controle de direção da partícula $k$

$u_k^{spac}$	– Controle espacial de direção da partícula $k$
$u_k^{ori}$	– Controle de direção da partícula $k$ , considerando apenas as fases dos vizinhos
$p_\theta$	– Parâmetro de ordem
$K$	– Ganho e força de acoplamento
$c_k$	– Centro de rotação da partícula $k$
$R$	– Centro de massa das partículas
$U_1$	– Potencial de fase
$Q_L$	– Forma Quadrática Laplaciana
$W_L$	– Potencial de Fase Laplaciano
$S$	– Forma Quadrática Laplaciana para formações circulares
$V$	– Potencial composto, utilizando $S$ e $W_L$
$M$	– Número de clusters em uma formação circular simétrica
$U^{M,N}$	– Potencial de Fase para formações circulares simétricas
$W_L^{M,N}$	– Potencial de Fase Laplaciano para formações circulares simétricas

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Objetivos . . . . .	3
1.2 Organização do trabalho . . . . .	4
<b>2 MOVIMENTO COLETIVO</b> . . . . .	<b>7</b>
2.1 Movimento coletivo na natureza . . . . .	7
2.2 Veículos artificiais em deslocamento de formação . . . . .	10
2.3 Conclusões . . . . .	11
<b>3 SISTEMAS DINÂMICOS, OSCILADORES E SINCRONIZAÇÃO</b> <b>13</b>	
3.1 Osciladores de fase . . . . .	18
3.2 Sincronização de osciladores . . . . .	19
3.3 Modelo de Kuramoto . . . . .	23
3.4 Topologia de Interação entre Osciladores e Redes Complexas . . . . .	24
3.5 Conclusões . . . . .	28
<b>4 MODELOS DE PARTÍCULAS AUTO-PROPULSORAS</b> . . . . .	<b>31</b>
4.1 Experimentos com um modelo baseado em regras de interação para descrição do movimento de pássaros . . . . .	34
4.2 Conclusões . . . . .	38
<b>5 MODELO REATIVO PARA A CONVERGÊNCIA DE VEÍCULOS EM FORMAÇÃO</b> . . . . .	<b>39</b>
5.1 Índices quantitativos de formações . . . . .	40
5.2 Modelo fenomenológico e estratégia de controle . . . . .	42
5.3 Forças de controle do sistema . . . . .	43
5.4 Análise das configurações do simulador . . . . .	46
5.4.1 Cálculo das forças baseado no raio de visão dos agentes . . . . .	50
5.4.1.1 Estratégia E-1.1 - $F_{av}$ dentro do RIAV, e $F_a$ , $F_{av}$ e $F_{cv}$ fora . . . . .	55
5.4.1.2 Estratégia E-1.2 - $F_a$ e $F_{av}$ dentro do RIAV, e $F_{cv}$ fora . . . . .	58
5.4.1.3 Estratégia E-1.3 - $F_a$ e $F_{av}$ dentro do RIAV, e $F_c$ e $F_{cv}$ fora . . . . .	61
5.4.1.4 Estratégia E-1.4 - $F_a$ e $F_{av}$ dentro do RIAV, e $F_a$ , $F_c$ , $F_{av}$ e $F_{cv}$ fora . . . . .	67
5.4.2 Cálculo das forças baseado em zonas de percepção . . . . .	70

5.4.2.1	Estratégia E-2.1 - $F_{av}$ dentro do RIAV, e $F_a$ , $F_{av}$ e $F_{cv}$ fora . . . . .	74
5.4.2.2	Estratégia E-2.2 - $F_a$ e $F_{av}$ dentro do RIAV, e $F_{cv}$ fora . . . . .	76
5.4.2.3	Estratégia E-2.3 - $F_a$ e $F_{av}$ dentro do RIAV, e $F_c$ e $F_{cv}$ fora . . . . .	79
5.4.2.4	Estratégia E-2.4 - $F_a$ e $F_{av}$ dentro do RIAV, e $F_a$ , $F_c$ , $F_{av}$ e $F_{cv}$ fora .	85
5.4.3	Resultados das estratégias . . . . .	88
5.5	Conclusões . . . . .	90
<b>6</b>	<b>MODELO DE PARTÍCULAS COM DINÂMICA DE OSCILADORES ACOPLADOS . . . . .</b>	<b>91</b>
6.1	Modelo de fase todos-com-todos . . . . .	92
6.2	Interações limitadas por uma rede . . . . .	96
6.3	Formações circulares . . . . .	98
6.3.1	Interação todos com todos . . . . .	98
6.4	Formações circulares simétricas . . . . .	100
6.4.1	Interação todos com todos . . . . .	101
6.4.2	Interação limitada e não-direcionada . . . . .	103
6.5	Conclusões . . . . .	105
<b>7</b>	<b>MODELO COMBINADO . . . . .</b>	<b>107</b>
7.1	Conclusões . . . . .	111
<b>8</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>113</b>
8.1	Trabalhos futuros . . . . .	115
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>117</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Com o advento das tecnologias atuais de processamento, controle e miniaturização, são cada vez mais frequentes os lançamentos de satélites para realizar tarefas de observação, navegação, telecomunicações, pesquisa, etc. (SCHETTER et al., 2003). Da mesma forma, progredem de forma rápida as pesquisas com veículos aéreos não tripulados (KLEIN, 2005; WANG et al., 2007; PARK et al., 2015), veículos autônomos subaquáticos (VAS) (LEONARD et al., 2007; MIRZA et al., 2015; ZHU et al., 2015; CAO; ZHU, 2015) e robôs móveis (CAI et al., 2007; ABBASPOUR et al., 2015). Esses tipos de pesquisas envolvem inclusive, e em especial, unidades autônomas (agentes ativos) que podem interagir entre si, formando conglomerados coletivos, tais como grupos colaborativos de satélites e robôs em formação. Nesse sentido, faz-se necessário estabelecer estratégias de controle para que os agentes realizem suas atividades de forma inteligente, trabalhando em grupo colaborativamente.

*Movimento coletivo* é um fenômeno que ocorre em coleções de agentes, similares ou não, que interagem entre si, e movem-se com aproximadamente a mesma velocidade. Essas interações podem ser simples, baseadas em atração e repulsão, ou mais complexas, consistindo em combinações dessas, e se dando entre vizinhos no espaço ou em uma rede subjacente (VICSEK; ZAFEIRIS, 2012).

Existem grupos de indivíduos territoriais com pouca necessidade em transferência de informação ou estrutura de grupo, que são bem representados por modelos que levam em consideração a proximidade espacial. Entretanto, há também aqueles que cultivam um alto nível de integração de longo período, os quais podem ter grandes taxas de troca de informação direta ou indireta (VICSEK; ZAFEIRIS, 2012). Um exemplo são os enxames de abelhas, as quais tem um ponto em comum que é a colméia. Outro exemplo são os seres humanos cujo ponto comum seria sua casa e também seu parentesco com outros humanos. Esses indivíduos, apesar de estarem em locais muito distantes uns dos outros, acabam por ter nos seus locais comuns a oportunidade de trocar informações de tempos em tempos (PARRISH et al., 2002), caracterizando um relacionamento por rede de interligações, e não apenas por vizinhança espacial.

São basicamente dois os tipos de sistemas de comportamento coletivo: aqueles em que os agentes são autopropulsores (VICSEK et al., 1995; CZIRÓK et al., 1999; COUZIN et al., 2002; CUCKER; SMALE, 2007), que é o caso de sistemas biológicos, e os sistemas em equilíbrio (NARAYAN et al., 2007), caracterizados por grandes quantidades de partículas e bem descritos pela física estatística tradicional. No primeiro caso, ao considerar um sistema consistindo exclusivamente de partículas autopropulsores,

sem incluir as mudanças no ambiente, toda vez que uma partícula interage com outra, seu momento linear é alterado. Em contrapartida, no caso dos sistemas em equilíbrio, a distribuição de velocidades é preservada. Esses dois tipos de sistemas, apesar de suas diferenças, apresentam características similares em relação às mudanças de estado coletivo/macrosscópico (VICSEK; ZAFEIRIS, 2012). Análises destes movimentos são potencialmente úteis em pelo menos duas direções: primeiro, na resolução de problemas de engenharia inversa de algoritmos a partir de trajetórias observadas; e segundo, no estabelecimento de um link explícito entre teoria do controle e as regras de atração, repulsão e alinhamento mediadas pela distância entre os indivíduos e seus vizinhos, as quais são a base da maioria das simulações de agrupamentos (PALEY et al., 2007).

Sumpter (2006) aponta que existem alguns mecanismos para interação entre animais, como:

- Retroalimentação positiva (*feedback* positivo), que é o compartilhamento de alguma informação positiva para os objetivos do todo;
- Retroalimentação negativa (contrário da positiva);
- Limiares de resposta: quando um determinado estímulo chega a um número crítico e então leva ao surgimento de algum comportamento coletivo;
- Liderança: um indivíduo possui alguma informação privilegiada, levando-o à posição de líder do grupo;
- Inibição: em que membros de um grupo tentam inibir o comportamento dos demais a partir de algum tipo de comportamento;
- Redundância: quando uma classe de trabalhadores de uma sociedade de abelhas é removida (por exemplo os caçadores de alimentos), outras são colocadas em seu lugar imediatamente, mostrando que existem sempre peças de reposição;
- Sincronização: o caso em que os agentes alinham seus comportamentos;
- Egoísmo: esperar sempre por algum tipo de lucro individual ao executar uma atividade em prol do grupo.

Há razões e argumentos para pensar que os mesmos padrões de movimento coletivo se aplicam, desde coleções de moléculas a grupos de seres humanos (VICSEK; ZAFEIRIS,

2012). Sumpter (2006) acredita em uma abordagem mais pragmática, em que a pesquisa em sistemas de comportamento coletivo deveria ser conduzida de uma forma caso-a-caso, levando em conta as diferenças entre os sistemas. Isso quer dizer que é essencial que os sistemas sejam classificados em termos de suas similaridades e diferenças lógicas e matemáticas. Ainda, segundo Sumpter (2006), existe apenas uma teoria de sistemas biológicos que tem um apelo para a universalidade, que é a da seleção natural.

Alguns exemplos de sistemas em que o comportamento coletivo é observado, compostos por seres vivos, são: macromoléculas, colônias de bactérias, ameba, células, insetos, peixes, pássaros, mamíferos, seres humanos. Além destes, existem também os sistemas com agentes artificiais: fluidos nemáticos, hastes metálicas excitadas, robôs simples, embarcações, etc. (VICSEK; ZAFEIRIS, 2012).

## 1.1 Objetivos

O objetivo deste trabalho é explorar estratégias de controle para agrupamentos de agentes artificiais, com foco em veículos móveis (robôs, VANTs, satélites). Vislumbra-se a obtenção de estratégias gerais, embasadas na fenomenologia e no comportamento síncrono de sistemas dinâmicos, que possam ser explorados para se obter estruturas de comportamento coletivo no contexto de agentes móveis. Para tanto, serão exploradas estratégias baseadas em regras fenomenológicas de atração, repulsão e alinhamento (REYNOLDS, 1987) e também pautadas em dinâmica de osciladores acoplados (PALEY, 2007; SEPULCHRE et al., 2008).

O trabalho está dividido em três partes principais: A primeira, contempla a construção de um modelo fenomenológico para a convergência de agentes em formação, partindo de posições aleatórias, de forma que eles se agrupem e sigam em uma determinada direção; a segunda, consiste no estudo de um modelo de partículas com dinâmica de osciladores acoplados (PALEY, 2007), em que diversas formações são obtidas via sincronização, como formações paralelas, circulares e até mesmo “clusters”<sup>1</sup>; e por fim as duas abordagens são combinadas a fim de se estabelecer uma formação com os agentes, e em seguida controlá-la por meio do modelo de osciladores acoplados.

O modelo de osciladores de Paley (2007) foi escolhido por apresentar diversas características realistas para o movimento coletivo de agentes biológicos, e por já ter

---

<sup>1</sup>Um “cluster” é um conglomerado, mas iremos utilizar a palavra “cluster” no decorrer do texto por ser um termo consagrado na literatura.

sido utilizado em experimentos com veículos artificiais (LEONARD et al., 2007).

Vale ressaltar que o modelo reativo que será descrito posteriormente, no Capítulo 5, é uma contribuição deste trabalho, bem como a criação de um elemento batizado de agente virtual, o qual define a direção do deslocamento das formações de agentes. Este modelo é importante, pois ele tem a característica de agrupar agentes dispersos em formações paralelas. Assim, ele pode ser utilizado como um passo preliminar, antes do acionamento de outros tipos de controle, como foi feito na terceira parte do trabalho, nos experimentos com um modelo combinado.

Analisar as regras que levam os agentes a uma formação, partindo de condições iniciais aleatórias é relevante, pois representa a situação real em que cada agente é autônomo e deve chegar a um consenso com os demais. Além disso, os resultados obtidos podem ser aplicadas a uma grande quantidade de sistemas, como grupamentos colaborativos de satélites, grupos de robôs móveis ou veículos aéreos não tripulados, em tarefas de observação e exploração, por exemplo. Assim, evita-se a criação de um controle centralizado, segundo o qual todas as regras de interação e transmissão de informação se dariam a partir de um único ponto. O objetivo principal é fazer com que cada indivíduo tome suas decisões baseadas nas interações com os indivíduos vizinhos, e que o comportamento desejado emergja destas interações. Desse modo, aumenta-se o poder de escalabilidade do sistema, visto que o processamento é feito pelos agentes de forma independente e autônoma.

## 1.2 Organização do trabalho

Este documento se subdivide da forma subsequentemente descrita. O Capítulo 2 trata do tema movimento coletivo com exemplos encontrados na natureza e também com considerações sobre veículos artificiais em movimento de formação. Em seguida são apresentados alguns capítulos teóricos a respeito de Sistemas Dinâmicos, osciladores e sincronização (Capítulo 3) e modelos de partículas autopropulsoras (Capítulo 4).

O Capítulo 5 aborda um modelo fenomenológico para convergência de veículos em formação, juntamente com resultados de experimentos para determinar as configurações que levam os agentes a tipos desejados de formações. Em seguida, o Capítulo 6 apresenta o modelo estudado por Paley (2007), assim como alguns experimentos com formações paralelas e circulares. No Capítulo 7 são realizados experimentos com um modelo combinado, de forma que os agentes iniciem em posições aleatórias, converjam para uma formação paralela e sejam posteriormente controlados via dinâmica

de osciladores de fase acoplados. Por fim, o Capítulo 8 apresenta as considerações finais do trabalho.

Muitas das simulações desta dissertação serão apresentadas em forma de imagens, no decorrer dos Capítulos. Para elucidar o seu real significado, também foram gerados vídeos, os quais podem ser acessados por meio do link: <http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3LEC74S>. Assim, o leitor visualizará os resultados de forma dinâmica, e será capaz de entender como se dão as interações entre os agentes, utilizando diferentes estratégias e controles.



## 2 MOVIMENTO COLETIVO

Este capítulo apresenta exemplos de movimento coletivo, tanto do ponto de vista biológico, com relação ao que é visto na natureza, quanto de veículos criados artificialmente.

### 2.1 Movimento coletivo na natureza

Para biólogos, o movimento coletivo está presente em toda parte, desde tomadas de decisão em colônias de bactérias, até cardumes de peixes (PALEY et al., 2007).

Colônias de bactérias são consideradas os sistemas mais simples, consistindo de muitos organismos interagindo (CZIRÓK et al., 1996). Em um dos trabalhos pioneiros no estudo de movimento coletivo desses microorganismos, Czirók et al. (1996) analisaram formações como espirais e migração de “clusters”, e com base em suas observações criaram um modelo de partículas autopropulsoras.

Outras considerações sobre movimento coletivo a nível celular podem ser feitas em relação à regeneração de tecidos e movimento de células cancerígenas, por exemplo. Existem diferentes estratégias relacionadas a esses fenômenos, como migração celular individual e o movimento coordenado de grupos de células (RORTH, 2007).

Segundo Chapman et al. (2009), existem aproximadamente 1 milhão de espécies de insetos conhecidos em todo o mundo. Eles podem se mover caminhando, voando ou mesmo nadando. Apesar de a maioria deles viver solitariamente, muitas espécies são famosas por suas colônias bem organizadas, como certas abelhas e formigas (VICSEK; ZAFEIRIS, 2012).

Em pequenas colônias de formigas, o todo é meramente a soma de suas partes, sendo o total de comida coletada igual ao encontrado por formigas de forma independente. Entretanto, quando juntas, em grande número, a retroalimentação positiva (RP) da comunicação via trilhas de feromônio significa um salto em eficiência, fazendo com que a colônia seja mais do que a soma de formigas trabalhando independentemente. Enquanto a integridade individual gera soluções novas para o grupo - pois cada indivíduo age à sua maneira -, as informações são espalhadas mais rapidamente (SUMPTER, 2006). Todavia, vale ressaltar que esse tipo de espalhamento de informação, ao menos no caso das formigas, gera resultados fortemente dependentes das condições iniciais. Formigas que encontram um caminho entre seu ninho e uma fonte de alimento irão formar uma trilha de feromônios que será reforçada cada vez que uma formiga passar por ela. No caso de um atalho ser inserido posteriormente neste

sistema, entre o ninho e a fonte de alimento, pode ser que ele não seja encontrado, visto que na configuração inicial, a trilha feita pelas formigas era o caminho ótimo (SUMPTER, 2006).

Potts (1984) analisou grupos de pássaros por meio de vídeos gravados em Washington, EUA. Foram analisados os indivíduos que iniciavam os movimentos coletivos, os “líderes”. Observou-se que qualquer pássaro poderia realizar este papel e que seus movimentos eram propagados para os demais em uma forma de onda. Foram também realizados muitos outros estudos com pássaros, verificando como o tamanho do grupo, densidade, posição dos membros, mecanismos de aterrissagem, tipos de formação, etc., influem em seu comportamento (VICSEK; ZAFEIRIS, 2012). Em estudo recente, conduzido por Ballerini et al. (2008), foram analisadas posições 3D de pássaros da espécie *Estorninho-comum* (*Starling*) em *flockings*<sup>1</sup> com mais de 2600 indivíduos, utilizando técnicas de visão computacional. Observaram que cada indivíduo em geral interage com seus 6 ou 7 vizinhos mais próximos quando em voo livre, ao invés de o fazer com todos os pássaros mais próximos. Isso revela que eles utilizam uma abordagem de comunicação mediada por redes de interligações, e não meramente entre os indivíduos mais próximos espacialmente, como sugerem alguns modelos que serão explorados posteriormente.

Os maiores grupos de vertebrados exibindo um rico conjunto de comportamentos coletivos são os de peixes (VICSEK; ZAFEIRIS, 2012). Alguns autores apontam que a densidade dos cardumes de peixes é o parâmetro que define os diferentes comportamentos observados (BECCO et al., 2006; MAKRIS et al., 2009). No modelo que será descrito posteriormente, na seção 6, Paley et al. (2007) utilizam como *parâmetro de ordem*<sup>2</sup> um quantificador do nível de sincronismo entre os osciladores que representam os peixes.

Herbert-Read et al. (2011) extraíram trajetórias 2D de peixes da espécie peixe-mosquito (*Gambusia affinis*) em um ambiente controlado, e observaram regras de atração e repulsão, por meio da análise das coordenadas, velocidades e mudanças de direção. Observaram que em geral os peixes apenas reagiam a interações com um vizinho mais próximo, apesar da alta correlação das posições e direções de todos os membros do cardume.

---

<sup>1</sup>Flocking é sinônimo de qualquer tipo de movimento coerente de unidades de indivíduos, considerando movimento coerente como o antônimo de movimento desordenado ou aleatório (VICSEK; ZAFEIRIS, 2012)

<sup>2</sup>Este termo será definido na seção 5.1, mas se presta a medir o grau de sincronização entre os agentes.

Segundo [Katz et al. \(2011\)](#), as tentativas de modelar o comportamento de conglomerados de animais são limitadas, pois a maioria dos modelos assumem que decisões de movimento individual se baseiam na média das interações com os vizinhos. Com isso, informações muito relevantes são suavizadas, e a resposta dinâmica observada na natureza, por exemplo, em casos de fuga de predadores, não é replicada da mesma maneira nos modelos. Por meio de experimentos com dados de trajetórias de peixes da espécie *golden-shiners*, [Katz et al. \(2011\)](#) observaram que os peixes mudam de direção por influência direta dos peixes que estão à sua frente, mas não dos que estão atrás; regras de atração e repulsão dependem da distância métrica, e o alinhamento emerge dessas regras; mudança de velocidade em resposta à posição e velocidade dos vizinhos é uma componente dominante no movimento dos peixes (em geral, modelos da literatura consideram velocidade constante, e se concentram mais nas regras de alinhamento); quando 3 ou mais peixes interagem, a força resultante exercida em um peixe não pode ser calculada via média aritmética das forças exercidas por seus vizinhos (aqui a palavra força tem um significado mais abstrato e se refere à intensidade com que um indivíduo interfere na mudança do movimento de outro). Quando os autores calcularam a aceleração dos peixes em relação a cada vizinho e depois tomaram a média, a força resultante no movimento do peixe foi diferente do observado experimentalmente. Em alguns casos, a reação dos peixes é mais enérgica do que seria se fosse tomada a média, como citado anteriormente. Quando um vizinho está posicionado logo atrás de um peixe, na zona de repulsão, o peixe à frente aumenta sua velocidade para evitar o choque. No caso de mais vizinhos estarem nesta zona, então o peixe da frente aumenta sua velocidade com maior intensidade. Foi observado que este aumento não corresponde nem à média, e nem ao dobro das forças exercidas pelos vizinhos, mostrando, portanto, uma interação não-linear.

Levando em consideração regras de interação entre peixes ou pássaros, [Vicsek e Zafeiris \(2012\)](#) apontaram quatro possíveis movimentos coletivos emergentes: Enxame (unidades se movendo irregularmente dentro de um “cluster” persistente<sup>3</sup>), Torus/Moinho (indivíduos rodeiam um núcleo vazio em uma direção aleatoriamente escolhida), Grupo paralelo dinâmico (agentes indo para uma direção quase-paralela), e Grupo altamente paralelo (unidades se movendo de maneira estritamente paralela). Alguns destes movimentos serão reproduzidos no Capítulo 6, a partir de um modelo de partículas com dinâmica de osciladores de fase acoplados.

Seres humanos também apresentam padrões de movimento coletivo, como, por exemplo, o bater de palmas sincronizado em espetáculos de ópera ou mesmo na tentativa

---

<sup>3</sup>Um “cluster” persistente é um conglomerado que se mantém completo ao longo do tempo.

de encontrar caminhos para sair de um ambiente fechado (SUMIDA, 2005; SUMPTER, 2006; KING et al., 2015).

Uma vantagem imediata do agrupamento de animais é a diminuição do gasto de energia. Em contraposição, duas desvantagens são a facilidade de uma doença se espalhar entre os integrantes do grupo e o aumento da competitividade pelas fontes de alimento, visto que a população é grande e nem sempre a oferta de comida é suficiente (YATES et al., 2011).

Em suma, a natureza está repleta de fenômenos coletivos, acontecendo a todo o tempo, desde aglomerados de microorganismos em movimento de formação, até grupos de seres humanos interagindo entre si. Observar e entender essas agregações pode ser a chave para o desenvolvimento de tecnologias inteligentes para agrupamentos de indivíduos artificiais, como os que serão descritos na próxima seção.

## 2.2 Veículos artificiais em deslocamento de formação

É cada vez mais comum a elaboração de estratégias de controle para veículos em deslocamento de formação, como veículos aéreos não tripulados (VANTs), veículos autônomos subaquáticos (VAS), satélites, robôs móveis, etc. Com a criação de um controle descentralizado, aumenta-se a escalabilidade e a robustez do sistema, e diminui-se a demanda de processamento, visto que cada indivíduo tem contato apenas com sua vizinhança de interação.

Satélites em formação de voo, por exemplo, apresentam maior performance, menor custo, melhor tolerância a falhas, reconfigurabilidade e capacidade de atualização (SCHETTER et al., 2003). Grandes missões realizadas no passado, utilizavam satélites comuns, com grandes aparatos tecnológicos envolvidos, mas a um custo muito alto. Nos últimos anos, tornou-se comum o uso de satélites de pequeno porte e de custo reduzido, se comparado com os satélites tradicionais, até então usados. A vantagem é que ao serem agrupados, estes pequenos satélites são capazes de emular o funcionamento de um grande satélite, desfrutando dos benefícios citados acima, a respeito das formações de voo (SCHETTER et al., 2003). Como exemplo, Salazar (2012) trabalhou com um modelo para movimento da formação de uma constelação de satélites ao redor de pontos específicos do sistema Terra-Lua, objetivando um gasto mínimo de energia.

Em sua dissertação de mestrado, Klein (2005) realizou simulações computacionais, considerando grupos de VANTs em movimento de formação, perseguindo um veículo

terrestre. Como será visto a seguir, no Capítulo 6, quando as partículas estão em uma formação paralela, o centro de massa atinge velocidade máxima, ao contrário da formação circular, quando esta velocidade é mínima. No trabalho de Klein (2005), foram feitas adaptações para que o centro de massa dos VANTs acompanhassem o veículo a ser rastreado.

Outra aplicação na área de VANTs é a desenvolvida por Park et al. (2015), em que foram realizados experimentos com 3 VANTs de asa fixa, chegando a formações circulares e triangulares. A comunicação entre eles foi feita via placas *onboard* sem-fio, de forma que cada indivíduo enviava seu sinal para os demais seguindo uma sequência, e os receptores levavam em conta os atrasos de transmissão.

Leonard et al. (2007) utilizaram veículos autônomos subaquáticos para exploração da baía de Monterey, na Califórnia. O modelo utilizado por eles é o mesmo que será estudado no Capítulo 6.

Existem também os casos em que a interação se dá entre agentes artificiais não similares, como apresentado por Zhou et al. (2015), em que existe uma subrede para interação entre VANTs auxiliando uma segunda subrede de interação entre veículos terrestres. Este tipo de configuração pode ser útil em missões de resgate, por exemplo, visto que os VANTs podem rapidamente apontar para os veículos terrestres qual a localização dos desastres.

### 2.3 Conclusões

O fenômeno do movimento coletivo é ubíquo, presente em várias escalas, desde conglomerados de bactérias até agrupamentos de mamíferos. Além disto, muito deste conhecimento pode ser aplicado a veículos móveis, de modo que os agentes artificiais trabalhem colaborativamente em grupo.



### 3 SISTEMAS DINÂMICOS, OSCILADORES E SINCRONIZAÇÃO

Um sistema dinâmico é constituído de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto, e algumas de suas grandezas variam no tempo (MONTEIRO, 2011). Para (OTT, 1994), um sistema dinâmico é um modelo matemático determinístico para a evolução do estado de um sistema no tempo. Exemplos de sistemas dinâmicos são: um pêndulo, um motor de um carro e o sistema terra-lua.

Quando um sistema é dinâmico, em geral pode-se modelá-lo utilizando-se equações diferenciais, no caso de sistemas de tempo contínuo, ou equações de diferenças para sistemas discretos no tempo (MONTEIRO, 2011). Uma abordagem comumente utilizada é a redução de sistemas de tempo contínuo (fluxos) para mapas (cuja dinâmica é discreta no tempo), utilizando uma técnica chamada de superfície de Poincaré (OTT, 1994).

O estudo teórico de sistemas dinâmicos é muito importante, pois permitem que se chegue a modelos de sistemas reais cujos comportamentos dinâmicos sejam qualitativamente explorados, tornando factível o adequado entendimento do comportamento do sistema real no contexto dos objetivos que se deseja analisar com o modelo proposto. Se não fossem feitas simulações empregando modelos da dinâmica das aeronaves, antes que as mesmas fossem de fato construídas, com certeza aconteceriam muitos acidentes, por exemplo.

É importante destacar que cada modelo é desenvolvido conforme sua finalidade, e em geral não se pode afirmar que existe apenas um modelo correto para representar um objeto ou fenômeno. Monteiro (2011) dá como exemplo a foto de um homem, um manequim de plástico e um macaco, e pergunta qual dos três modelos melhor representa um homem real. Para um pintor, a foto seria a melhor opção, por apresentar os detalhes finos da estética. No caso de um alfaiate, a melhor alternativa seria o manequim de plástico. Por outro lado, um médico consideraria o macaco como o melhor modelo, pois possui um sistema fisiológico, o qual é parecido com o de um homem.

Em um sistema dinâmico, em geral a única variável independente é o tempo, enquanto os parâmetros são as grandezas que não se alteram com a mesma escala de tempo da variável independente, e captura a configuração do sistema. A variável dependente é aquela que é função da variável independente. Modelar um sistema é

definir formalmente como se dará a variação da variável dependente em relação às variáveis independentes.

Um sistema pode ser linear ou não-linear, dependendo de sua natureza. No caso de sistemas lineares, as equações são compostas por combinações lineares da variável dependente, e cada termo está elevado à potência 1. Para estes casos, vale o princípio da superposição de efeitos, isto é: caso  $F_1(t) = x_1(t)$  e  $F_2(t) = x_2(t)$ , então  $k_1F_1(t) + k_2F_2(t) = k_1x_1(t) + k_2x_2(t)$ , sendo  $k_1$  e  $k_2$  constantes. Em contrapartida, para a grande maioria dos sistemas não-lineares, este princípio não tem validade (MONTEIRO, 2011).

Os parâmetros utilizados em um sistema podem ser fixos ou variáveis no tempo. Em geral, em sistemas físicos reais não existem parâmetros fixos, pois os materiais se desgastam com o tempo, e eventualmente ocorrem ações externas ao modelo, que podem alterar estes valores. Todavia, na maioria das vezes, estes parâmetros são considerados fixos pelo fato de a escala de sua variação ser ínfima em relação às grandezas que caracterizam o fenômeno modelado.

São chamados de sistemas com parâmetros concentrados aqueles que dependem apenas de uma variável independente (o tempo). Por outro lado, são chamados de sistemas com parâmetros distribuídos aqueles em que os parâmetros dependem de coordenadas espaciais. No primeiro caso, quando o sistema é de tempo contínuo e possui apenas uma variável independente, ele pode ser modelado via equações diferenciais ordinárias. Já no caso de possuir uma ou mais variáveis independentes - além do tempo -, ele é descrito via derivadas parciais.

Ainda que as equações que descrevem um determinado sistema sejam conhecidas explicitamente, muitas vezes é muito complicado entender seu comportamento. Para este objetivo, é utilizado o chamado espaço de fase, que é um espaço abstrato cujas coordenadas descrevem o estado do sistema (STROGATZ; STEWART, 1993).

Um modelo simples de mapa não-linear de primeira ordem é o mapa Logístico (Eq. 3.1) para crescimento populacional

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \tag{3.1}$$

em que  $r \in [0, 4]$  é o parâmetro logístico, e  $x_n \in [0, 1]$  é o número (normalizado) de indivíduos da população no instante de tempo  $n$ .

Esse mapa enfoca a situação na qual indivíduos convivem em um ambiente e se reproduzem pelo tempo em que existirem recursos para sua manutenção. No momento em que estes recursos se esgotam, a população se extingue e volta a se desenvolver do início. Segundo Robert May (MAY, 1976), este é um exemplo de modelo matemático que, apesar de simples, possui uma dinâmica complicada, exibindo diversos comportamentos. A Figura 3.1 mostra séries temporais de um caso cujo comportamento é periódico, e de um caso caótico.

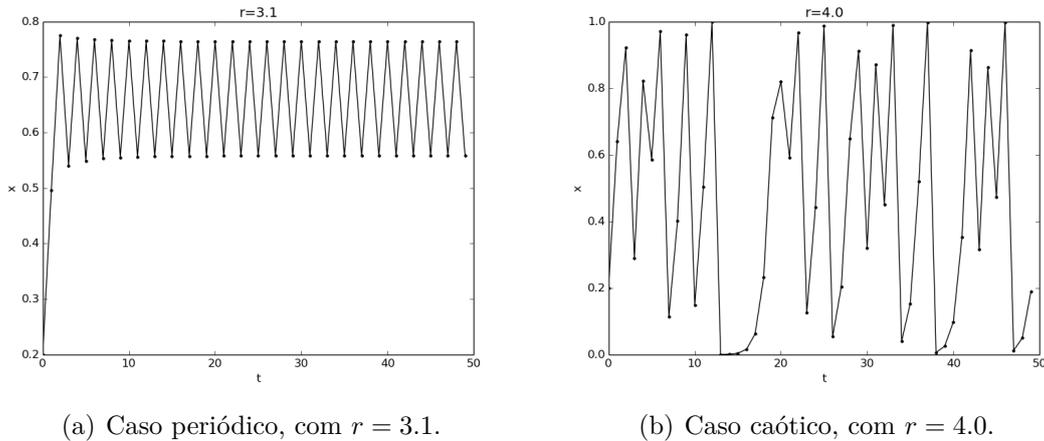


Figura 3.1 - Séries temporais do mapa Logístico.

Outro exemplo, desta vez se tratando de um sistema de tempo contínuo de dimensão 3, é o sistema de Lorenz (Eq 3.2).

$$\frac{dX}{dt} = f_1(X, Y, Z) = -\sigma X + \sigma Y \quad (3.2)$$

$$\frac{dY}{dt} = f_2(X, Y, Z) = rX - Y - XZ \quad (3.3)$$

$$\frac{dZ}{dt} = f_3(X, Y, Z) = XY - bZ \quad (3.4)$$

A criação desse sistema foi motivada pela tentativa de se criar um modelo de previsão meteorológica, por Lorenz, na década de 1950. Naquela época, as previsões climáticas eram realizadas por meio de um modelo linear, e Lorenz decidiu investigar maneiras de se prever o clima a longo prazo, por meio de simulação numérica, utilizando um computador. Após efetuar várias simulações, percebeu que soluções

para condições iniciais muito próximas divergiam sobremaneira, com o passar do tempo. Foi então que no início da década de 1960 decidiu estudar um modelo criado por B. Saltzman, e desenvolveu uma simplificação para 3 dimensões, que é o conhecido sistema de Lorenz (MONTEIRO, 2011). Nesse sistema, é possível observar comportamentos variados, e inclusive estudar os estados caóticos (Figura 3.2).

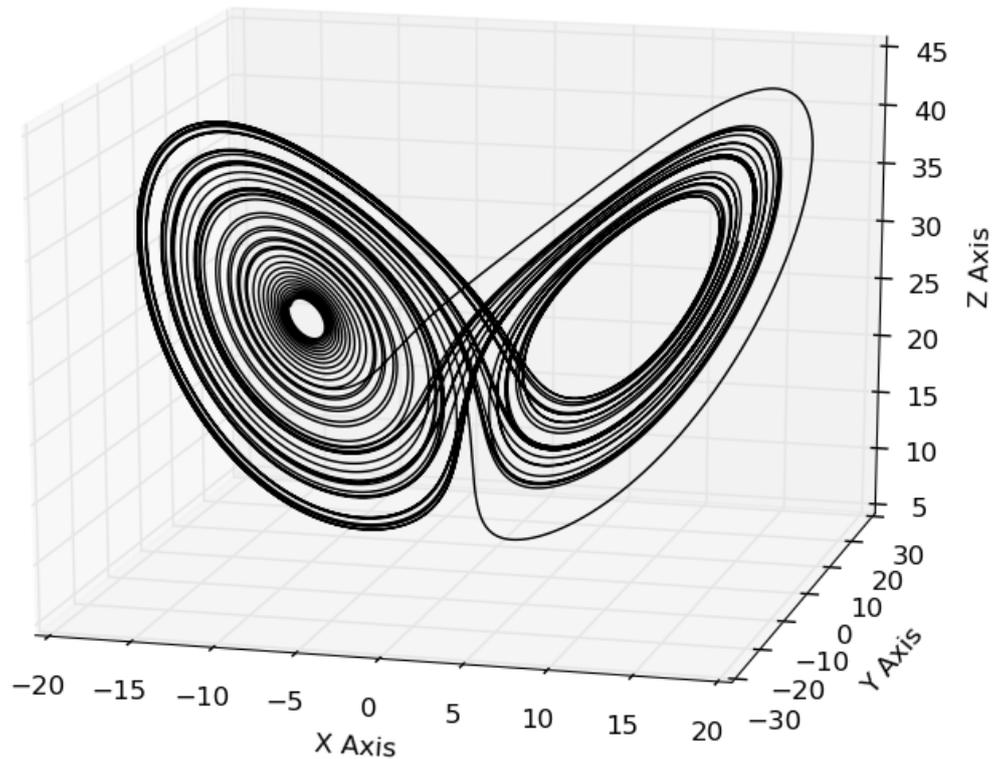


Figura 3.2 - Espaço de fase do sistema de Lorenz, para  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  e  $r = 28$ .

Em sistemas dinâmicos são observados alguns comportamentos, a depender dos valores de seus parâmetros: periódico, quasiperiódico e caótico. Quando o sistema é dito periódico, significa que as trajetórias no espaço de fase coincidem a cada  $T$  instantes de tempo, formando um ciclo. No caso de um sistema quasiperiódico, o período é irregular. Sistemas caóticos possuem as seguintes propriedades:

- Dependência sensível às condições iniciais, o que significa que não importa quão próximas duas condições iniciais estejam, em um número pequeno de iterações (para sistemas discretos), ou pequeno espaço de tempo (para sistemas contínuos), suas trajetórias irão divergir significativamente.
- Pontos periódicos do sistema são densos no intervalo  $I$  em que ele é defi-

nido.

- O sistema é transitivo em  $I$ : dados quaisquer dois subintervalos  $U_1$  e  $U_2$  dentro de  $I$ , existe uma trajetória que sai de  $U_1$  e chega até  $U_2$  em um número finito de interações, no caso de sistemas discretos, ou em um tempo finito, no caso de sistemas contínuos.

Órbitas cujas condições iniciais são tão próximas quanto se queira, se afastam uma da outra em média exponencialmente, como na Eq. 3.5, em que  $f^n$  representa, por exemplo, um mapa iterado  $n$  vezes.

$$\epsilon e^{n\lambda(x_0)} = |f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)| \quad (3.5)$$

O fator de separação entre as condições iniciais do sistema é determinado pelo expoente de Lyapunov (Eq. 3.6)

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \log|f'(x_i)|. \quad (3.6)$$

Este expoente é positivo quando o sistema apresenta caos, o que significa que existe dependência sensível às condições iniciais, isto é, as trajetórias divergem sobremaneira com o passar do tempo. Quando o expoente de Lyapunov é negativo, diz-se que o sistema é periódico.

Como exemplo, considere o diagrama de bifurcação do mapa Logístico, seguido pelos seus expoentes de Lyapunov, na Figura 3.3. É possível ver que para valores do parâmetro  $r$  que o sistema tem comportamento periódico, o expoente é negativo, e no caso de caos, ele é positivo.

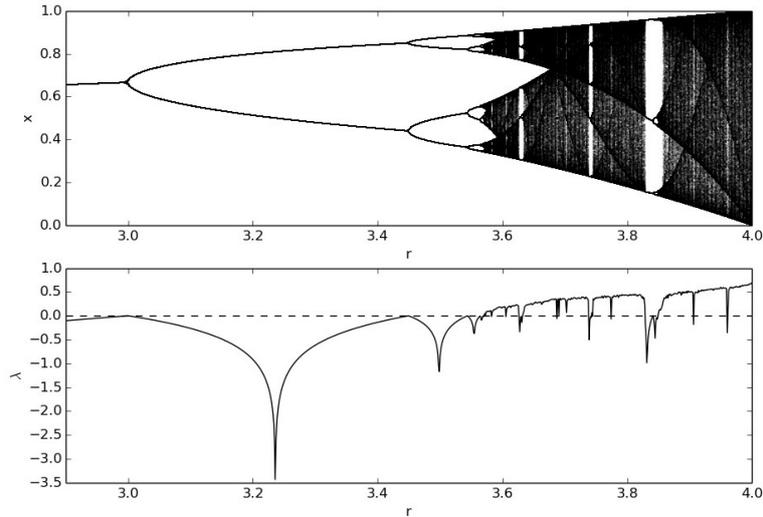


Figura 3.3 - Diagrama de bifurcação e expoentes de Lyapunov do mapa Logístico

### 3.1 Osciladores de fase

Considere o sistema autônomo de equações diferenciais ordinárias de dimensão 2:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (3.7)$$

com  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ . Levando-se em conta que a solução estável desse sistema é periódica, e tem período  $T$ , então  $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0(t + T)$ . Caso os pontos sejam atraídos para uma trajetória isolada, formando um ciclo, então tem-se o chamado ciclo limite (Figura 3.4), e os pontos do espaço de fase se movendo pelo ciclo constituem as *oscilações auto-sustentáveis* (PIKOVSKY et al., 2001).

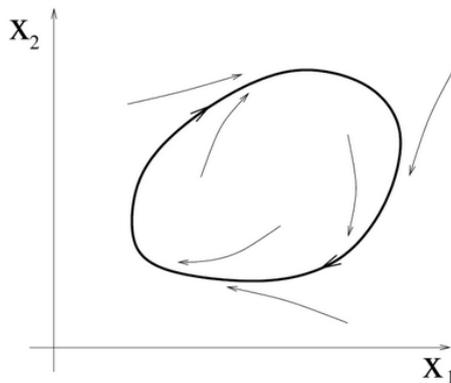


Figura 3.4 - Ciclo limite estável. Trajetórias próximas ao ciclo são atraídas para ele.

Fonte: (PIKOVSKY et al., 2001)

Todos os pontos no ciclo-limite são fixos, e todos os pontos na vizinhança são atraídos para ele. A representação das equações de movimento do oscilador pode ser feita da seguinte maneira:

$$\dot{\theta} = f(\theta)$$

em que  $\theta$  é a fase do oscilador, e pode ser representado como um ponto no círculo unitário. Espaços vetoriais no círculo são o modelo mais básico de sistemas que podem oscilar (STROGATZ; STEWART, 1993).

Um exemplo de oscilador uniforme é dado pela equação

$$\dot{\theta} = \omega, \tag{3.8}$$

cujas soluções são

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0, \tag{3.9}$$

e seu período de oscilação é escrito na forma

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{3.10}$$

Um exemplo de oscilador não-uniforme é o seguinte:

$$\dot{\theta} = \omega - a \sin \theta. \tag{3.11}$$

Neste exemplo, a não-uniformidade é inserida pelo parâmetro  $a$ , cujo valor, ao ser variado, pode levar o sistema a diversos comportamentos (STROGATZ, 2000).

### 3.2 Sincronização de osciladores

No ano de 1665, ao observar dois pêndulos pendurados na parede, o cientista holandês, físico e inventor do relógio com pêndulo, Christiaan Huygens (1629-1695), percebeu que eles se sincronizavam após algum tempo. Mesmo após receber leves perturbações, com o passar do tempo eles voltavam ao estado de sincronismo (ambos executando o mesmo movimento). Foi então que Huygens começou a executar uma série de experimentos que culminaram no início de uma sub-área da matemática: a teoria de osciladores acoplados (STROGATZ; STEWART, 1993; PIKOVSKY et al., 2001; BALANOV et al., 2009).

Segundo Ermentrout e Rinzel (1984), o fenômeno da sincronização está presente em

muitos elementos da natureza, como nas sinapses cerebrais, em grupos de vagalumes machos na tentativa de atrair fêmeas, ao bater palmas em uma platéia, entre outros.

Entender esse fenômeno é de grande importância, pois a partir dele torna-se possível criar estratégias para interferir no nível de sincronização de alguns sistemas. No contexto de doenças neurológicas, o Mal de Parkinson é um exemplo de doença em que se estuda maneiras de intervir na sincronia de células cerebrais específicas de modo a diminuir ou eliminar os tremores dos pacientes (MARTYNETZ, 2015). Outra aplicação é na criação de dispositivos artificiais como marcapassos (DENOTH; DONATO, 1967), robôs móveis (CAI et al., 2007; ABBASPOUR et al., 2015), alguns tipos de circuitos elétricos (CARROLL; PECORA, 1993; DORFLER et al., 2014), e outros.

Ao modelar cada indivíduo de um grupo como sendo um oscilador, é possível aplicar estratégias para atingir a sincronização, via estudo de suas frequências naturais, topologias de ligação e forças de acoplamento. O propósito desse enfoque é chegar a trajetórias de referência no espaço de estado que os agentes devem seguir para chegar ao comportamento síncrono.

Diversos sistemas podem atingir sincronização, ainda que possuam comportamento caótico. Em 1990, Pecora e Carroll (1990) realizaram experimentos com sistemas caóticos e mostraram que sob certas condições eles podem sincronizar.

Em geral, existem três tipos de sincronização para osciladores de fase acoplados:

- Travamento de fase (*phase-locking*): os osciladores mantêm em valor constante as diferenças de fase entre eles, dois a dois;
- Sincronização completa (*In-phase*): quando os osciladores possuem igual valor de fase, isto é, executam o mesmo padrão de forma idêntica;
- *Anti-phase*: quando a diferença de fase é de exatamente meio período. Considerando o exemplo dos pêndulos de Huygens, isto equivale a um pêndulo executar o comportamento inverso do outro.

Quando dois osciladores idênticos são acoplados, se o atraso de propagação entre as interações for zero, apenas dois tipos de sincronização são possíveis, a *in-phase* e a *anti-phase*. Contudo, se a rede possui mais de dois osciladores, as possibilidades aumentam (STROGATZ; STEWART, 1993).

Considere dois osciladores acoplados, segundo as equações

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 + k_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad (3.12a)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 + k_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (3.12b)$$

sendo  $\omega_1$  e  $\omega_2$  as frequências naturais dos osciladores, e  $k_1$  e  $k_2$  as constantes de acoplamento.

Uma maneira de representar estes dois valores de fase graficamente, é utilizar o círculo trigonométrico, de modo que cada ponto seja posicionado em seu local correspondente, como mostra a Figura 3.5a. Outra representação é o quadrado de lado  $2\pi$ , em que cada eixo representa um oscilador (Figura 3.5b).

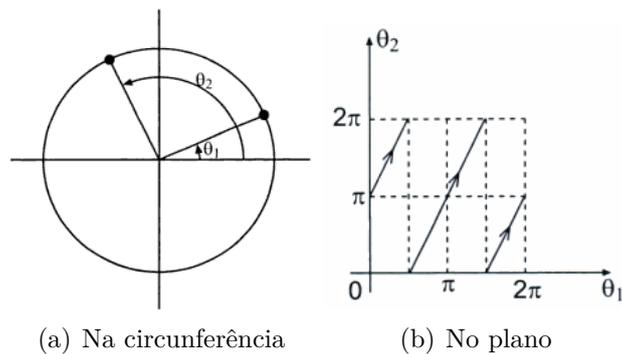


Figura 3.5 - Representação gráfica da fase de dois osciladores.

**Fonte:** Adaptado de Monteiro (2011).

Agora considere dois osciladores sem acoplamento entre eles. Para isto, basta fazer  $k_1 = k_2 = 0$ , na Eq 3.12, o que resulta na Eq 3.13, a seguir.

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 \quad (3.13a)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 \quad (3.13b)$$

Ao integrar  $d\theta_2/d\theta_1 = \omega_2/\omega_1$ , tem-se

$$\theta_2(t) - \theta_2(t_0) = \frac{\omega_2}{\omega_1}(\theta_1(t) - \theta_1(t_0))$$

sendo  $\theta_1(t_0)$  e  $\theta_2(t_0)$  as condições iniciais dos dois osciladores. Fazendo  $\Delta\theta(t)$  a variação entre a posição final e inicial, resulta na eq 3.14.

$$\Delta\theta_2(t) = \frac{\omega_2}{\omega_1}\Delta\theta_1 \quad (3.14)$$

Existem dois possíveis comportamentos para este sistema, que dependem de o número  $\omega_2/\omega_1$  ser racional ou não. Fazendo  $\omega_2 = m$  e  $\omega_1 = n$ , com  $m$  e  $n$  sendo números inteiros, temos o primeiro caso, que é o caso racional. Neste caso,  $\theta_1(t)$  completa  $n$  voltas no toro quando  $\theta_2(t)$  completa  $m$  voltas, dada a igualdade

$$\frac{\Delta\theta_2(t)}{m} = \frac{\Delta\theta_1(t)}{n} \quad (3.15)$$

No caso irracional, tem-se o fluxo *quase periódico*, em que as trajetórias não se cruzam e não se fecham no toro (MONTEIRO, 2011).

Em suma, para que haja periodicidade no caso de osciladores acoplados, a razão  $\omega_2/\omega_1$  deve ser um número racional (SMALE et al., 2004).

Em algumas partes do sudeste asiático, milhares de vagalumes se unem para exibir um show de luzes, na busca por fêmeas. Eles iniciam piscando fora de sincronia, e conforme o tempo passa o fenômeno da sincronização emerge, visto que um influencia o outro (STROGATZ; STEWART, 1993).

Ermentrout e Rinzel (1984) propuseram um modelo para descrever este fenômeno. Suponha que  $\theta = 0$  representa o momento da emissão do flash pelo vagalume. Quando um vagalume está sozinho, ele altera sua fase de acordo com  $\dot{\theta} = \omega$ , sendo  $\omega$  sua frequência natural.

A Eq 3.16 descreve um possível modelo para o comportamento do acoplamento entre os vagalumes.

$$\dot{\theta} = \omega + A \sin(\Theta - \theta) \quad (3.16)$$

com  $A > 0$  a força de acoplamento,  $\Theta$  o estímulo externo recebido pelo vagalume, que pode ser em função de um campo médio, e  $\theta$  a sua fase.

Este modelo é muito similar ao famoso modelo de Kuramoto para osciladores acoplados (Seção 3.3) e com o modelo da Seção 6, para simulação de movimento coletivo.

### 3.3 Modelo de Kuramoto

O modelo de Kuramoto foi motivado pelo fenômeno da sincronização, presente em muitos sistemas naturais. Ele consiste em  $N$  osciladores acoplados de acordo com alguma topologia de rede (completa, regular, pequeno mundo, livre de escala, aleatória - mais detalhes na Seção 3.4), e cada um com uma frequência natural  $\omega$ .

Inicialmente, Kuramoto (1984) se utilizou da afirmação de que para qualquer sistema de osciladores de ciclo-limite quase idênticos e de acoplamento fraco, a dinâmica é dada pelas equações de fase seguindo a seguinte forma universal (STROGATZ, 2000):

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i), i = 1, \dots, N, \quad (3.17)$$

com  $\omega_i$  sendo a frequência natural do  $i$ -ésimo oscilador,  $\theta_i$  e  $\theta_j$  as fases dos osciladores  $i$  e  $j$ , e  $\Gamma_{ij}$  a função de interação entre eles.

Nesse sentido, o Modelo de Kuramoto utiliza o caso mais simples possível, com um acoplamento sinusoidal, todos-com-todos e com pesos iguais, em que

$$\Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i) = \frac{K}{N} \sin(\theta_j - \theta_i),$$

com  $K \geq 0$  sendo a força de acoplamento.

As frequências naturais são geradas de acordo com uma função densidade de probabilidade  $g(\omega)$ . Por simplicidade, foi adotado que  $g(\omega)$  é unimodal e simétrico em relação à sua frequência média  $\Omega$ , de modo que  $g(\Omega + \omega) = g(\Omega - \omega)$  para todo  $\omega$ , como uma distribuição gaussiana.

Logo, as equações do modelo de Kuramoto são:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), i = 1, \dots, N. \quad (3.18)$$

No caso de a força de acoplamento  $K$  ser nula, cada oscilador irá se comportar de acordo com sua própria frequência natural. No entanto, sob a força de um acoplamento não nulo, a partir de um certo valor limite de intensidade, eles tendem a sincronizar (ACEBRÓN *et al.*, 2005). Em geral, utiliza-se um valor de  $K$  proporcional a  $N^{-1}$ , pois assim é possível estimar comportamentos que podem ser estendidos ao limite termodinâmico, que é quando  $N \rightarrow \infty$  (PIKOVSKY *et al.*, 2001).

Pelo fato de o modelo de Kuramoto ser simples, é possível realizar uma análise matemática rigorosa, de modo que o entendimento do fenômeno da sincronização se dê com mais profundidade. Desse modo, facultam-se adaptações do modelo para problemas específicos, inclusive considerando atrasos de comunicação, e diferentes topologias. Algumas possíveis aplicações do modelo são redes de neurônios, arranjos de lasers, reações químicas, entre outras (ACEBRÓN *et al.*, 2005). Além dessa forma descrita na Eq. 3.18, existem algumas variações do modelo, por exemplo, no caso de se considerar a presença de ruído, ou força externa (exemplos em Pikovsky *et al.* (2001)). No capítulo 6 abordaremos um modelo que deriva das propriedades do modelo de Kuramoto.

### 3.4 Topologia de Interação entre Osciladores e Redes Complexas

Redes complexas são grafos cujos vértices possuem algum tipo de dinâmica, e cujas ligações correspondem a interações entre eles. É uma área interdisciplinar, que abrange várias áreas do conhecimento, como Ciência da Computação, Matemática, Física, Biologia, Sociologia e Engenharias.

A origem da teoria dos grafos se deu com o problema das pontes de Königsberg, proposto por Euler em 1735. Neste problema, existem quatro ilhas ligadas por sete pontes. A questão levantada na época era saber se havia possibilidade de atravessar as sete pontes em uma caminhada contínua, sem que alguma ponte fosse visitada mais de uma vez. Euler tratou o problema de forma que cada ilha fosse um vértice em um grafo, e cada ponte fosse uma aresta ligando-as entre si. Ele chegou à conclusão de que não era possível realizar este percurso nas pontes de Königsberg, e descobriu que isto só é possível em grafos cujos vértices tem grau (número de conexões) par (WILSON, 1996).

As redes são do tipo direcionadas quando cada vértice é ligado a seus vizinhos como na Figura 3.6a, e é não-direcionada quando possui a representação da Figura 3.6b, em que os vértices se comunicam mutuamente pelo mesmo link.

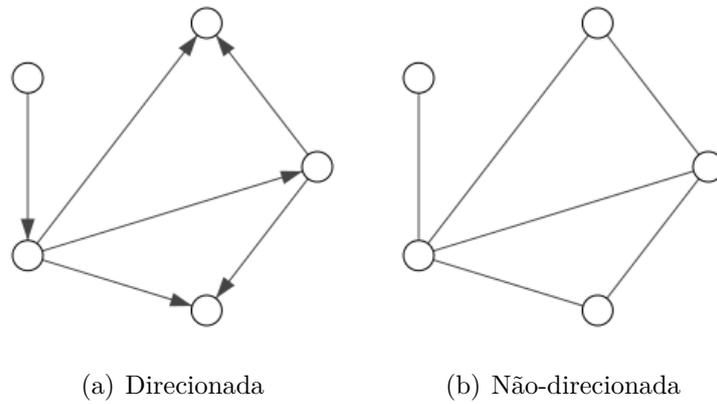


Figura 3.6 - Redes direcionada e não-direcionada.

Uma rede é dita conectada quando todos seus vértices estão ligados na mesma estrutura, de modo que não existam vértices isolados ou grupos de vértices desconexos (Figura 3.7).

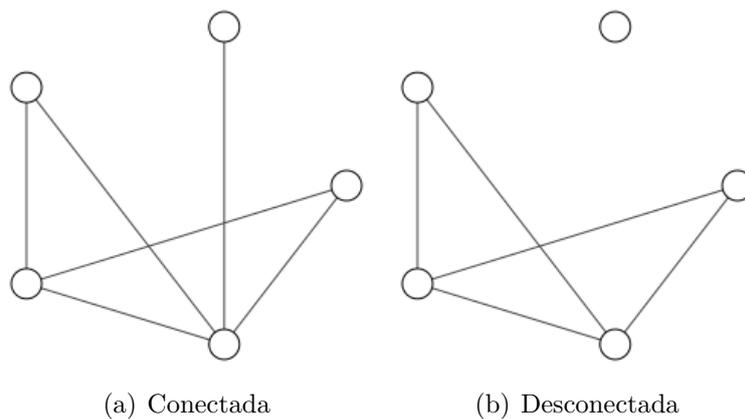


Figura 3.7 - Redes conectada e desconectada.

Em muitos casos, a estrutura da rede por si só não é capaz de representar toda a complexidade existente nos sistemas, portanto faz-se necessário considerar cada nó da rede como sendo um sistema complexo ligado a outros via arestas (LEHNERT, 2015).

Exemplos de sistemas deste tipo são: os modelos SIR (suscetível, infectado, recuperado) para propagação de doenças, em que os nós são os indivíduos em algum dos três estados, e os links são os contatos entre eles; Interação entre os neurônios em uma rede neuronal (LEHNERT, 2015); movimento coletivo na natureza, em que cada nó da rede é um agente (pássaro, peixe, formiga, etc.) e as conexões são as interações entre eles; e muitos outros.

No modelo que será abordado no Capítulo 6, para partículas com dinâmica de osciladores acoplados, a comunicação se dá via redes complexas, com cada vértice representando um oscilador. Serão apresentados resultados utilizando redes não-direcionadas, e variando com o tempo, de acordo com a posição das partículas em relação às vizinhas.

Uma rede consiste em  $N$  vértices (nós) e  $E$  arestas, em que  $E \subset N \times N$  é um conjunto de pares ordenados, e a maneira mais comum de se representá-la é por meio de sua matriz de adjacências  $A$  de dimensão  $N \times N$ , a qual é dada pela seguinte equação:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existe uma aresta do nó } i \text{ para o nó } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.19)$$

Esta representação é suficiente no caso de redes sem peso entre as arestas. Entretanto, algumas redes demandam uma representação em que as arestas possuam quantidades, como por exemplo redes que representem rodovias. Neste caso, os pesos podem ser as distâncias entre os vértices. Para este tipo de representação, é utilizada a matriz de pesos  $W$ , de ordem  $N \times N$ , em que cada entrada  $W_{ij}$  representa o peso entre os nós  $i$  e  $j$ , e  $W_{ij} = 0$ , caso eles não estejam conectados.

A matriz Laplaciana de um grafo é representada por

$$L \doteq D - A \quad (3.20)$$

em que  $D$  é uma matriz diagonal, com os graus dos vértices  $D \doteq \text{diag}(\mathbf{k})$ , de modo que  $\mathbf{k} \doteq (k_1, \dots, k_N)^T$ , e  $A$  é a matriz de adjacência.

Outra matriz importante, que será utilizada no capítulo 6, é a matriz de projeção  $P$ , que consiste na matriz Laplaciana normalizada pelo número de nós do grafo (Eq 3.21), tal que  $L = NP$ .

$$P \doteq \frac{1}{N}L \quad (3.21)$$

A matriz de incidência  $B$  relaciona vértices a arestas, de forma que suas linhas representam os vértices, e as colunas as arestas. No caso de um grafo direcionado, quando o vértice  $i$  da origem a uma aresta  $j$ , então a posição  $b_{ij}$  da matriz possui valor  $b_{ij} = -1$ . No caso de a aresta ter como destino o vértice  $i$ , então  $b_{ij} = 1$ , e  $b_{ij} = 0$  se não existir aresta  $j$  no vértice  $i$ .

Para redes não-direcionadas, esta matriz possui triangular superior com valores positivos, e inferior com valores negativos. Sendo assim, se a rede for conectada e não-direcionada,  $L = BB^T$ .

O grau  $k$  de um vértice  $i$  é o número de conexões que ele tem, isto é, o número de vizinhos em que ele está conectado. O grau médio de uma rede  $\langle k \rangle$  é a média aritmética dos graus de todos os vértices.

$$k_i = \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{ij} \quad (3.22)$$

No caso de redes direcionadas, este conceito pode ser dividido entre grau de entrada  $k_i^{in}$ , que é o número de vértices que estão se ligando ao vértice  $i$ , e grau de saída  $k_i^{out}$ , que corresponde à quantidade de vértices que o vértice  $i$  está se conectando. Neste caso,  $k = k_i^{in} + k_i^{out}$  é o grau total.

Com relação às possíveis topologias de redes, algumas são clássicas na literatura: pequeno mundo (WATTS; STROGATZ, 1998), livre-de-escala (BARABASI; ALBERT, 1999) e aleatória (NEWMAN et al., 2001).

**Rede completa:** Quando a rede é completa (Figura 3.8a), todos os nós estão conectados entre si.

**Rede regular:** Todos os vértices possuem mesmo grau (Figura 3.8b).

**Redes de Pequeno-mundo:** Nessas redes (Figura 3.8c), a vizinhança se assemelha às redes regulares, porém realizam-se algumas poucas ligações entre nós distantes, parecidos com atalhos. Estas ligações extras diminuem sobremaneira o valor dos caminhos mínimos da rede.

**Redes Livres de escala:** Nessa configuração (Figura 3.8d) existem poucos nós com muitas conexões (os chamados *hubs*), e o restante com poucas ligações. Neste caso, os *hubs* possuem grande importância, uma vez que ao serem removidos da rede, muitas conexões são quebradas. Tendo como exemplo uma rede social, considere os *hubs* como sendo os perfis de pessoas famosas, os quais possuem muitas conexões e servem como um canal de comunicação entre perfis com poucos links.

Em redes reais, a topologia livre-de-escala é a mais comum de ser vista. Exemplos são: torres de transmissão de energia, redes sociais e a internet.

**Redes aleatórias:** Essas redes são geradas de forma totalmente aleatória (Figura 3.8e), sem as características das outras redes de forma predominante. Em redes reais, esta configuração não é comum.

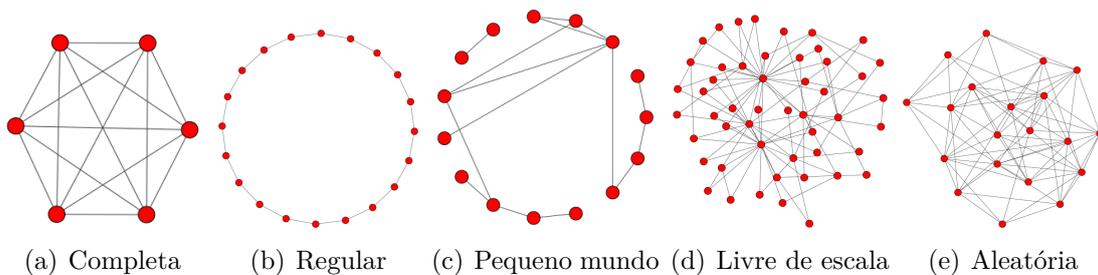


Figura 3.8 - Topologias de redes.

### 3.5 Conclusões

Sistemas dinâmicos são sistemas que se alteram com o passar do tempo, como mostrado a partir dos exemplos do mapa Logístico e do sistema de Lorenz. Em geral, a análise destes sistemas é realizada via observação de seu espaço de fase, e seus comportamentos são avaliados por meio do cálculo dos expoentes de Lyapunov.

Osciladores de fase são sistemas cujas trajetórias no espaço de fase são atraídas para um ciclo limite, caracterizando suas oscilações, as quais possuem uma frequência natural e um período. Por meio do acoplamento de osciladores é possível observar variados comportamentos, inclusive o fenômeno da sincronização. Neste caso, após um período transiente, um conjunto de osciladores acoplados pode apresentar quatro comportamentos: sincronização completa, travamento de fase, *anti-phase* ou mesmo não sincronizarem. Este acoplamento pode ser feito segundo várias topologias de

rede de interligações, como por uma rede completa, livre-de-escala, rede de pequeno-mundo, etc.



## 4 MODELOS DE PARTÍCULAS AUTO-PROPULSORAS

Este capítulo irá explicar o que são partículas autopropulsoras e apresentará alguns modelos famosos na literatura. Além disso, contemplará o conceito de agentes e suas arquiteturas.

Duas sub-áreas de Inteligência artificial distribuída (IAD) são Resolução Distribuída de Problemas (RDP) e Sistemas Multiagentes (SMA). Na RDP, o foco está no problema e o sistema é fechado, isto é, não é possível inserir ou remover agentes ou propriedades depois que o sistema começa a execução. No caso de SMAs, as unidades são autônomas, interagem via uma estruturação específica, e o sistema é aberto, o que significa que agentes podem entrar ou sair a qualquer momento do sistema (SUMIDA, 2005).

Segundo Wooldridge e Jennings (1995), não existe um consenso sobre a definição do termo *agente*, assim como no caso da definição do termo *inteligência* na comunidade de Inteligência Artificial. Nesse sentido, os autores apontam dois usos gerais para esta terminologia, sendo um mais comumente usado, dito fraco, e um mais forte. Neste trabalho, utilizaremos o conceito correspondente ao uso mais fraco, que afirma que agentes são sistemas baseados em software ou hardware com as seguintes propriedades:

- Autonomia: operam sem a intervenção direta de humanos e são capazes de tomar decisões.
- Habilidade social: interagem com outros agentes.
- Reatividade: percebem o ambiente e respondem aos estímulos externos.
- Proatividade: Além de responder ao ambiente, também possui iniciativas próprias a fim de chegar ao objetivo.

No segundo caso, o uso mais forte do termo *agente* é diretamente ligado à disciplina de Inteligência Artificial, com um significado mais específico. Eles afirmam que agentes são sistemas de computação com todas as noções citadas anteriormente, mas com conceitos mais usualmente aplicados a humanos. Em outras palavras, agentes possuem atributos humanos, como conhecimento, crença, intenção, obrigação, etc.

Uma definição dada por Russell e Norvig (2004) é a de que “[...] um agente é tudo o que pode ser considerado capaz de perceber seu ambiente por meio de sensores

e de agir sobre esse ambiente por intermédio de atuadores [...]”. Neste sentido, se consideramos um humano como um agente, poderia ser dito que seus olhos, ouvidos, e outros órgãos são os sensores, e tuas mãos, pernas, boca, e outras partes do corpo, como atuadores.

O agente é capaz de atuar por meio de regras, escolhidas a depender do que foi sentido da interação com os outros agentes (MACAL; NORTH, 2010; RUSSELL; NORVIG, 2004).

As arquiteturas de agentes são baseadas no modelo de seu raciocínio:

- Agentes cognitivos (deliberativos): possuem uma representação do mundo e desempenham raciocínio simbólico sobre ela. Possuem memória de ações passadas. Algumas habilidades de agentes cognitivos: planejamento de rota, comunicação e controle de rastreamento. Um exemplo de sistema cognitivo para controlar aeronaves com passageiros é o sistema de piloto automático, que mantém o veículo na rota (VERES et al., 2011).
- Agentes reativos: Não possuem modelos sobre o ambiente. Apenas reagem a estímulos externos, vindos do ambiente ou de outros agentes.
- Agentes híbridos: Dois ou mais tipos de agentes combinados em um só. Exemplo: Futebol de robôs.

A conexão entre a palavra inteligência e os veículos autônomos é a necessidade de se criar sistemas que possam se manter sozinhos em ambientes não constantes e complexos, como ambientes urbanos, dentro de uma residência, ou na superfície de outro planeta, ou mesmo pelo espaço (VERES et al., 2011).

Os modelos de partículas autopropulsoras (PAP) pertencem a uma classe específica de modelos baseados em indivíduos (MBI). Modelos de PAP em geral representam características de sistemas biológicos, como bandos de pássaros, cardumes de peixes, etc. (VICSEK et al., 1995).

Czirók et al. (1999) propuseram um modelo unidimensional, que consiste em  $N$  agentes posicionados em uma linha de comprimento  $L$  e com condições de contorno periódicas. Apesar de simples, este modelo apresenta diversos comportamentos e transições de fase entre estados desordenados para ordenados.

Talvez o modelo de PAP mais conhecido seja o Modelo de Vicsek (VICSEK et al.,

1995), para o caso bidimensional. O modelo consiste em partículas se movendo em uma célula quadrada, de lado  $L$ , e com condições de contorno periódicas. As partículas se deslocam com velocidade constante e assumem a direção média de movimento das partículas presentes em sua vizinhança de raio  $r$ , com a adição de algum ruído. Um dos resultados obtidos por Vicsek et al. (1995) foi que quando a densidade de partículas é alta e o ruído é pequeno o suficiente, ocorre uma transição de fase de um estado desordenado para um estado em que as partículas começam a se mover todas para a mesma direção.

Outro modelo bidimensional é o proposto por Cucker e Smale (2007), no qual o ajuste de velocidades se dá pela adição da média ponderada entre as diferenças das velocidades do indivíduo analisado e dos outros agentes. Tanto o modelo de Vicsek quanto o Cucker-Smale, podem ser aplicados a sistemas biológicos, com variados comportamentos, incluindo migração e agrupamentos em “clusters”.

Caso os modelos de PAP utilizassem um domínio sem condições de contorno periódicas, os indivíduos teriam a possibilidade de se mover em direções diferentes, de modo a se distanciarem infinitamente. Para evitar esta situação, é comum o uso de regras de atração e repulsão entre agentes, de forma que o grupo se torna mais coeso. Em geral, estas regras são aplicadas em função da distância entre as partículas (YATES et al., 2011).

Outra abordagem é utilizar zonas de percepção, em que cada agente reage aos estímulos externos (via repulsão, alinhamento e atração) de acordo com a posição dos seus vizinhos em relação a ele, como apresentado no modelo de Couzin et al. (2002) para três dimensões. Neste caso, espera-se que indivíduos muito próximos de um agente exerçam nele uma força de repulsão, enquanto a distâncias intermediárias as forças exercidas são as de alinhamento e atração.

Existe também a possibilidade de se inserir líderes em modelos de PAP, utilizando duas abordagens, a hierárquica e a passiva. Na abordagem hierárquica, cada agente responde apenas aos seus superiores, e essa hierarquia é conhecida por todos os indivíduos do grupo. Por outro lado, na abordagem passiva (também conhecida por transiente), ao receber alguma informação importante para o grupo, o agente inicia algum comportamento e é seguido pelos demais membros (YATES et al., 2011).

Wood e Ackland (2007) criaram o primeiro algoritmo para modelo de PAP multi-parâmetro e evolucionário. Esse modelo é uma adaptação do modelo de Couzin et al. (2002), utilizando características da teoria da seleção natural, para desenvolvi-

mento de gerações de indivíduos via reprodução assexuada e com mutações. Foram introduzidos dois elementos no modelo: fonte de alimento e predador. A resposta dos agentes a esses estímulos seleciona quais características serão levadas à próxima geração.

Modelos mais realistas consideram que os indivíduos tem uma região sensorial limitada, e portanto não pode considerar interações todos-com-todos, mas sim limitadas por redes de interação (YATES et al., 2011).

No Capítulo 6 exploramos o modelo de partículas com dinâmica de osciladores acoplados proposto por Paley (2007), Paley et al. (2007), Sepulchre et al. (2007), Sepulchre et al. (2008), o qual pertence à categoria de modelos de PAP.

#### **4.1 Experimentos com um modelo baseado em regras de interação para descrição do movimento de pássaros**

Nesta seção apresentamos um modelo para simulação de comportamento coletivo de bandos de pássaros, baseado em regras simples de interação.

As estratégias para controle de sistemas de movimento coletivo podem ser baseadas em sincronização ou via regras simples de interação. A comunicação (acoplamento) entre os indivíduos se dá via rede de interligação, de modo que os elementos estejam ou não próximos espacialmente.

Na seção 3.3 apresentou-se o modelo de Kuramoto, o qual descreve a dinâmica de osciladores de fase acoplados. Esses osciladores representam agentes em movimento, suas fases são suas direções de navegação, e suas interações ocorrem via ajustes de fase. Uma maneira de mapear esse modelo para um caso real de veículos em movimento seria fazer com que as redes de ligação se atualizassem a cada instante de tempo e fossem criadas de acordo com vizinhanças espaciais entre os indivíduos, onde cada agente enxerga apenas aqueles que estiverem mais próximos de sua posição. Nesse caso, as trocas de sinais se dariam de forma limitada, e dinâmica, visto que as redes não são fixas.

Reynolds (1987) apresentou um modelo ainda mais simples, em que cada agente é descrito pela direção de seu movimento e suas coordenadas espaciais, e viajam à velocidade constante. Nesse modelo, os agentes (batizados de “boids”) tentam mimetizar o movimento de grupos de pássaros, os quais interagem segundo três regras:

- Separação: evitar colisões entre unidades (Figura 4.1a).
- Alinhamento: o indivíduo ajusta seu ângulo de navegação (AN) para a mesma direção em que os vizinhos estão indo (Figura 4.1b).
- Coesão: o indivíduo tenta se manter próximo ao centro de massa do grupo (Figura 4.1c).

A aplicação dessas três regras se dá via ajuste do ângulo de navegação dos indivíduos. A cada instante de tempo, os efeitos das regras são combinados, com a restrição de que a regra de separação tem maior precedência sobre as outras duas, visto que na iminência de um choque entre os agentes ela é acionada individualmente.

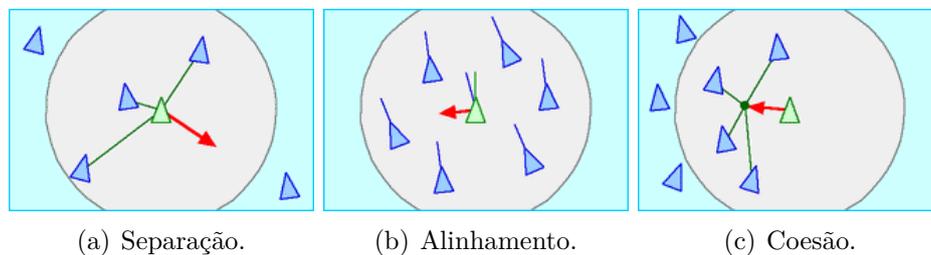


Figura 4.1 - Regras de interação entre boids.

**Fonte:** Adaptado de Reynolds (2001)

A fim de se compreender as interações destas regras, realizamos experimentos com o modelo do Reynolds (1987), utilizando o software de simulação NetLogo (WILENSKY, 1998), segundo mostra a Figura 4.2.

Os parâmetros desse modelo são:

- Visão: raio de visão, ao redor de cada boid. Unidade: *Patches* (1 *patch* corresponde à área do espaço equivalente ao tamanho de um boid);
- Mínima separação: distância mínima dos outros boids. Unidade: *Patches*;
- Ângulo de alinhamento máximo: ângulo máximo que um boid pode ajustar seu ângulo de voo para a mesma direção que seus vizinhos estão indo. Unidade: graus;
- Ângulo máximo de coesão: ângulo máximo que um boid pode ajustar seu ângulo de voo em direção ao centro de massa de seus vizinhos. Unidade: graus;

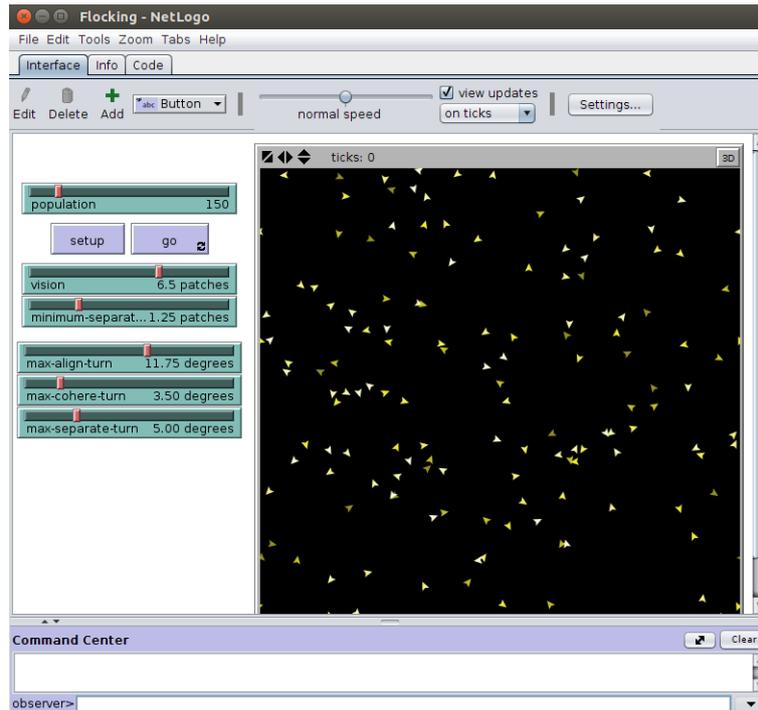


Figura 4.2 - Software de simulação NetLogo, com o modelo Flocking.

- Ângulo máximo de separação: ângulo máximo que um boid pode ajustar seu ângulo de voo para evitar colisão. Unidade: grau.

Nos experimentos executados, foram utilizados 150 boids, em 246924 configurações dos parâmetros mencionados, com condições de contorno periódicas, de forma que os boids não se afastassem infinitamente. No instante inicial de cada configuração, os boids foram posicionados em locais aleatórios e nos próximos 900 instantes de tempo eles interagiram segundo as três regras previamente descritas. O objetivo era encontrar combinações de parâmetros para as quais os boids viajariam aproximadamente na mesma direção (*flocking*). Desse modo, considerou-se que quando o desvio-padrão de suas direções de voo era suficientemente pequeno, então o objetivo tinha sido alcançado.

Os dados foram analisados com auxílio do software Weka (HALL et al., 2009), e observou-se que os dados são dificilmente separáveis, com relação aos estados de *flocking* ou desordenado. Nesse sentido, optou-se por analisá-los de acordo com os melhores resultados obtidos, os quais mostraram que em geral obtêm-se *flocking* quando:

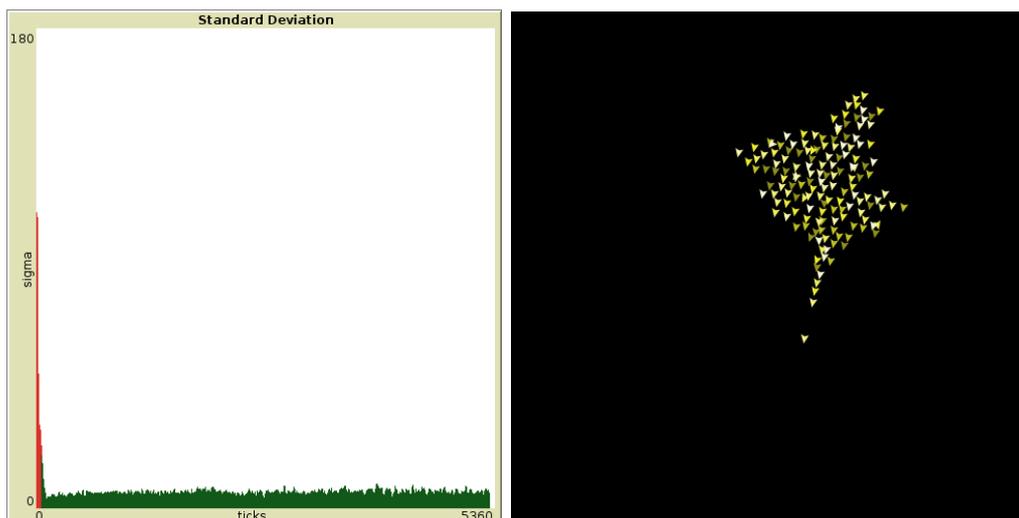
- O parâmetro de visão era maior ou igual a 2 *patches*, para garantir um

mínimo de visão para o boid;

- Mínima separação era menor que 3;
- Ângulo de máximo de alinhamento maior ou igual a 1, pois caso contrário os boids não seriam capazes de se alinhar;
- Ângulo máximo de coesão era menor do que o ângulo máximo de alinhamento, pois os boids devem tentar alinhar sua direção de voo a de seus vizinhos com mais intensidade do que tentar voar em direção a eles.

Em suma, os resultados foram satisfatórios quando os boids podiam se alinhar aos vizinhos com mais intensidade do que tentar ir em direção ao centro de massa deles. Além disso, não é interessante que os boids sejam muito restritivos com relação a evitar choques com os vizinhos, pois isto atrapalha diretamente na tentativa de alinhamento. Seguindo estes resultados, são grandes as possibilidades de se obter *flocking*.

A Figura 4.3 apresenta os valores dos desvios-padrão e a representação gráfica de 150 boids, interagindo por 5300 instantes de tempo, utilizando os parâmetros: visão = 10, mínima separação = 1, ângulo máximo de alinhamento = 20, ângulo máximo de coesão = 1 e ângulo máximo de separação = 1.



(a) Desvios-padrão dos ângulos de voo dos boids em relação ao tempo (*tick*). (b) Representação gráfica dos boids interagindo entre si, gerada pelo software NetLogo.

Figura 4.3 - Simulação de interação entre 150 boids utilizando o software de simulação NetLogo.

Estes experimentos simulados nos permitem extrair regras bioinspiradas que podem ser aplicadas às estratégias de controle de veículos em formação. Pode-se, a partir deles, ser determinado o número mínimo de agentes que devem interagir no contexto do controle da formação, como também depreender mecanismos para a mudança e separação da formação em subformações, etc. Para que tais informações possam ser obtidas, é preciso entender as regras de interação entre os agentes presentes no conglomerado, podendo ser obtidas a partir das séries temporais.

## 4.2 Conclusões

Este capítulo tratou dos modelos de partículas autopropulsoras (PAP), comumente utilizados para representar sistemas biológicos, como bandos de pássaros, cardumes de peixes, etc. A fim de exemplificar, foram citados modelos para os casos unidimensional (CZIRÓK et al., 1999), bidimensional (VICSEK et al., 1995; CUCKER; SMALE, 2007) e tridimensional (COUZIN et al., 2002). Além disto, observou-se experimentalmente o modelo de Reynolds (1987), para interação de agentes via regras simples de repulsão, alinhamento e atração. O estudo destas regras serviu como base para criação do modelo que será apresentado posteriormente, no Capítulo 5.

## 5 MODELO REATIVO PARA A CONVERGÊNCIA DE VEÍCULOS EM FORMAÇÃO

Este capítulo irá tratar de um modelo fenomenológico para interação entre agentes semelhantes, em que o objetivo é fazer com que eles se agrupem dentro de uma área e sigam em uma direção pré-estabelecida, seguindo regras de interação como as definidas na seção anterior (4.1). Em síntese, busca-se definir as melhores regras de interação para que os agentes convirjam para uma formação e se desloquem em uma direção desejada.

O modelo é composto dos seguintes elementos:

- **Agente virtual:** Representa a posição ao longo do tempo em que se deseja que a formação siga. Em outras palavras, é este agente que define a direção do deslocamento da formação.
- **Raio de interação com o agente virtual (RIAV):** Circunferência centrada no agente virtual. Espera-se que os agentes entrem nesta área e prossigam na mesma direção do agente virtual.
- **Agentes:** Os agentes são veículos móveis que se deslocam a uma dada velocidade, enxergam seus vizinhos segundo uma estratégia de visão, e reagem aos estímulos externos por meio das forças exercidas sobre eles.
- **Forças do sistema:** As forças do sistema representam as regras de separação, alinhamento e coesão, aplicadas a cada agente de acordo com sua proximidade em relação aos vizinhos e ao agente virtual. Assim, neste contexto, “força” tem um significado abstrato, indicando como a presença de vizinhos de um agente impõe mudanças em seu ângulo de direção.

**Definição 1.** *Dados  $N$  agentes  $i = \{1, \dots, N\}$  e um agente virtual  $a$ , é dito que os agentes estão em deslocamento de formação (DF) quando:*

- *A distância  $d_{i,a}$  é menor do que  $\alpha_{lim}$  para todo agente  $i$ .*
- *A diferença entre os ângulos de navegação entre cada agente  $i$  e o agente virtual for menor que  $\beta_{lim}$ . Isto é:  $|\theta_{i,a}| < \beta_{lim} = |\theta_i - \theta_a| < \beta_{lim}$ , para todo  $i$ .  $\beta_{lim}$  representa o valor máximo admitido para a diferença entre o ângulo de navegação de cada agente e o ângulo de navegação do agente virtual.*

Cada agente se move para uma direção e sentido, representados por um ângulo  $\theta_i$ , chamado de ângulo de navegação (AN) do agente  $i$ .

O valor de  $\beta_{lim}$  utilizado a seguir nas simulações foi definido empiricamente, de modo que quando os agentes estão se movendo na simulação é possível observar visualmente que eles estão seguindo uma mesma direção de deslocamento.

O Capítulo está dividido da seguinte maneira: Seção 5.1 discorre sobre os índices utilizados para caracterizar as melhores configurações do modelo; Seção 5.2 descreve como se dá o ajuste dos módulos das velocidades dos agentes; Seção 5.3 fala das forças do sistema; e por fim, na Seção 5.4 são descritos e apresentados experimentos para identificar as melhores estratégias e configurações para se chegar às melhores formações de agentes.

## 5.1 Índices quantitativos de formações

A seguir, serão apresentados experimentos com algumas estratégias de interação entre agentes, em que serão testadas diversas configurações. A fim de se estabelecer as melhores estratégias e configurações, as formações de agentes são avaliadas segundo três índices quantificadores:

- a) *Índice temporal (IT)*  $\tau$ : Número de instantes de tempo ( $it$ ) que o sistema leva até chegar à estabilidade, que é quando todos os agentes estão em velocidade constante e em deslocamento de formação (DF).
- b) *Índice de Uniformidade angular (IUA)*  $\phi$ : Distribuição ao redor do agente virtual. É calculado o *parâmetro de ordem* (Eq. 5.1) com os ângulos formados entre a posição de cada agente e a posição do agente virtual (Figura 5.1). O valor ótimo do parâmetro de ordem para este caso é  $p_\theta = 0$ , que é quando os agentes estão posicionados uniformemente distribuídos ao redor do agente virtual. Nesse contexto,  $\phi = |p_\theta|$ .
- c) *Índice de Uniformidade radial (IUR)*  $\rho$ : Distâncias entre os agentes e o agente virtual. São calculadas as distâncias entre cada agente e o agente virtual, e  $\rho$  corresponde à média destes valores. O valor ótimo de  $\rho$  depende do objetivo do sistema. Caso se deseje uma formação em que os agentes fiquem tão próximos quanto possível, então esse valor deve ser mínimo. No caso de se optar por obter formações em que os agentes fiquem espalhados por todo o *raio de interação do agente virtual* (RIAV), então o valor ótimo será igual a metade do RIAV. Esse raio (RIAV) corresponde à

região circular centrada no agente virtual (Figura 5.1), cujos limites delimitam comportamentos que os agentes desempenham a grandes distâncias do agente virtual (fora do RIAV) e próximos a ele (dentro do RIAV). Esses comportamentos serão descritos na seção 5.4, a partir das regras estudadas. Uma terceira possibilidade de formação seria manter os agentes o mais longe possível uns dos outros, o que neste caso significaria um valor alto de  $\rho$ .

O parâmetro de ordem  $p_\theta$  (STROGATZ, 2000), é uma medida do nível de sincronização, e é definido por

$$p_\theta \doteq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \quad (5.1)$$

A norma  $|p_\theta| \in [0, 1]$  assume valor zero quando os ângulos  $\theta_j$  estão uniformemente distribuídos no círculo unitário (arranjo balanceado), e  $|p_\theta| = 1$  quando os valores são iguais, isto é,  $\theta_1 = \dots = \theta_N$ .

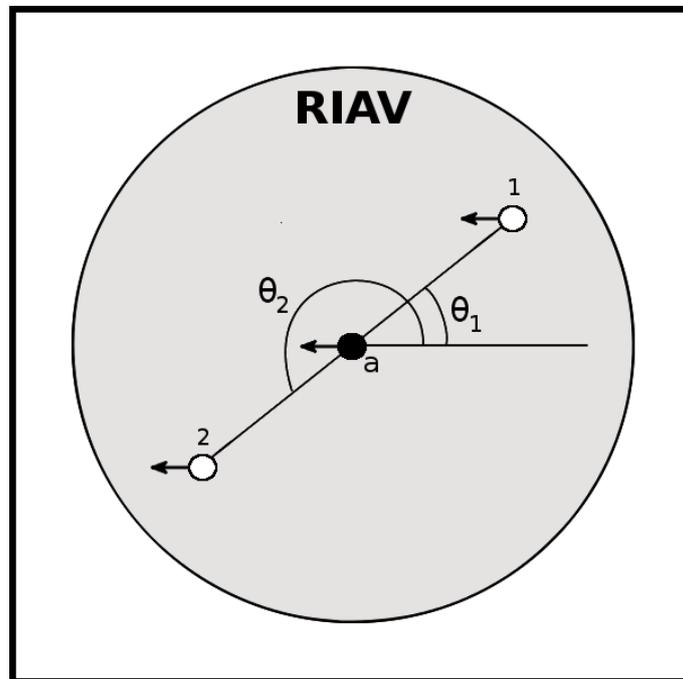


Figura 5.1 - Orientação dos agentes 1 e 2 em relação ao agente virtual  $a$ . A região com fundo escuro representa a RIAV.

## 5.2 Modelo fenomenológico e estratégia de controle

O modelo construído baseia-se na arquitetura de agentes reativos, sem memória das interações anteriores. Ou seja, todas as interações acontecem a partir do que é percebido por cada indivíduo em forma de reação ao estado atual do sistema, sem considerar o passado. Nesse contexto, o agente é capaz de atuar por meio de regras, as quais são escolhidas a depender do que ele percebe ao seu redor (RUSSELL; NORVIG, 2004). Além disso, o modelo é fenomenológico, ou seja, construído a partir dos dados que se observou de comportamento. A maioria dos modelos da literatura (vide Capítulo 4) segue este padrão, mas aqui será introduzido mais um elemento, que é o ajuste nos módulos das velocidades dos agentes.

Quando os agentes estão dentro do RIAV, os módulos das velocidades tendem a se igualar ao módulo da velocidade do agente virtual  $|v_a|$ . Isso significa que eles vão se manter em formação. Quando estão posicionados fora do raio, as velocidades possuem módulo  $|v_{fora}|$ . Vale destacar que  $|v_{fora}| > |v_a|$ , pois espera-se que os agentes se movam mais rapidamente fora do raio de interação, e no momento em que eles chegam na formação desejada sua velocidade deve diminuir até chegar na velocidade de regime  $|v_a|$ .

Em outras palavras:

- $|d_{i,a}| > r \Rightarrow |v_i| = |v_{fora}|$ , sendo  $v_i$  a velocidade do agente  $i$ ,  $d_{i,a}$  a distância entre o agente  $i$  e o agente virtual  $a$ , e  $r$  o raio de interação com o agente virtual.
- $|d_{i,a}| < r \Rightarrow |v_i| = |v_a|$ .
- $|v_{ini}| = |v_i|$  no instante de tempo em que o agente inicia a entrada ou saída do raio de interação.
- Quando o agente  $i$  está entrando no raio de interação:

$$|v_i| = |v_a| - \frac{(|v_{ini}| - |v_a|)(t - t_f)}{\Delta t_i}$$

.

- Quando o agente  $i$  está saindo da região:

$$|v_i| = |v_{fora}| - \frac{(|v_{fora}| - |v_{ini}|)(t - t_f)}{\Delta t_i}$$

- $\Delta t_i = \bar{t} + rnd$ , sendo  $\bar{t}$  o tempo médio para o agente chegar próximo ao centro da região, quando ele está entrando, e  $rnd \in (-\gamma, \gamma)$  é um número aleatório neste intervalo.
- $t_f = t_i + \Delta t$

Esses ajustes garantem que os agentes entrem no RIAV e desacelerem até ficarem com o módulo da velocidade de regime interna  $|v_a|$ . O papel da variável aleatória  $rnd$  é fazer com que alguns agentes ultrapassem o agente virtual e outros não, de modo que haja uma distribuição uniforme dentro do raio de interação.

Ao entrarem no raio de interação do agente virtual, espera-se que os agentes sigam na mesma direção que ele. A figura do agente virtual, que não é um agente real, foi introduzida no modelo para representar a trajetória de referência que a formação deve seguir. É uma das contribuições deste nosso trabalho.

### 5.3 Forças de controle do sistema

Cada agente móvel sofre a ação de forças provenientes do meio ambiente e de suas interações com outros agentes. Em nosso modelo fenomenológico, consideramos cinco forças, descritas a seguir, que faz com que o agente reaja a elas via alteração de seu ângulo de navegação. Isto é, ao ser submetido a alguma dessas forças, ele altera sua direção de deslocamento a partir de ajustes em seu ângulo de navegação (Figura 5.2).

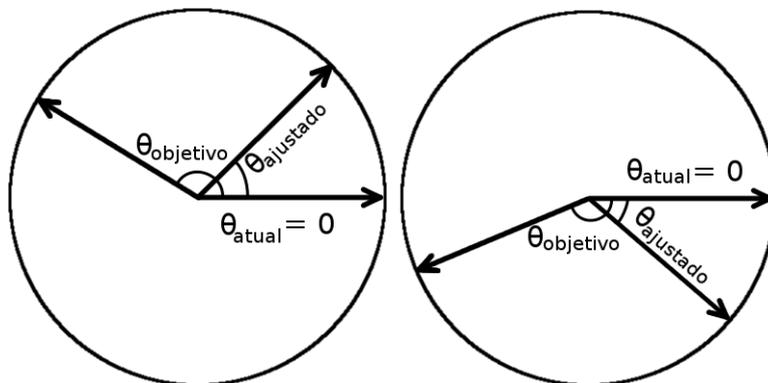


Figura 5.2 - Ajuste do ângulo de navegação. O ângulo atual é ajustado em direção a um ângulo objetivo via adição (a esquerda) ou subtração (a direita) de uma quantidade a cada instante de tempo, até que o objetivo seja atingido.

As “forças” que serão apresentadas a seguir (Figura 5.3) tem como objetivo impor ao agente em questão uma determinada direção a ser seguida. Elas surgem a partir das informações que o indivíduo vai obtendo do seu meio ambiente e da posição de seus vizinhos próximos e do agente virtual. São elas que irão dar o caráter reativo do agente, e a composição delas, segundo alguma regra, dará a ação a ser empreendida por ele.

- $F_a$  (Força de alinhamento): Faz com que o agente se alinhe aos vizinhos. Calcula-se a média dos ângulos de navegação dos agentes vizinhos, e o agente em questão tenta se alinhar a este ângulo resultante.
- $F_c$  (Força de coesão): Impõe-se ao agente a direção do centro de massa da posição dos agentes vizinhos.
- $F_{av}$  (Força de alinhamento com o agente virtual): Impõe-se ao agente seu alinhamento com o ângulo de navegação do agente virtual.
- $F_{cv}$  (Força de coesão com o agente virtual): Impõe ao agente um deslocamento na direção do agente virtual.
- $F_s$  (Força de separação): Faz com que o agente vá em uma direção que o faça se afastar de seu vizinho mais próximo.

A força de separação  $F_s$  é sempre exercida de forma isolada, nos casos em que a distância euclidiana entre os vizinhos mais próximos for abaixo de um valor pré-definido (parâmetro de mínima separação), e com maior precedência. Isso significa que quando a condição de mínima separação for violada, a única força que irá atuar será a  $F_s$ .

Todas as forças, aplicadas isoladamente, produzem os efeitos descritos anteriormente, representando a reação do agente ao seu meio ambiente e às informações que ele percebe dos seus vizinhos. O caráter reativo do sistema se constrói a partir da regra que se define para a composição dessas forças, gerando uma “força resultante” ( $F$ ). Assim, é esta  $F$  que vai levar cada agente e, por conseguinte, todo o conjunto, a diferentes comportamentos de grupo, como mostra a Eq. 5.2. Cada valor do parâmetro  $\alpha$  que entra na composição da força resultante é um parâmetro de controle, tendo por função ponderar o efeito de cada força de ação.

$$F = \frac{\alpha_a F_a + \alpha_c F_c + \alpha_{av} F_{av} + \alpha_{cv} F_{cv}}{\alpha_a + \alpha_c + \alpha_{av} + \alpha_{cv}} \quad (5.2)$$

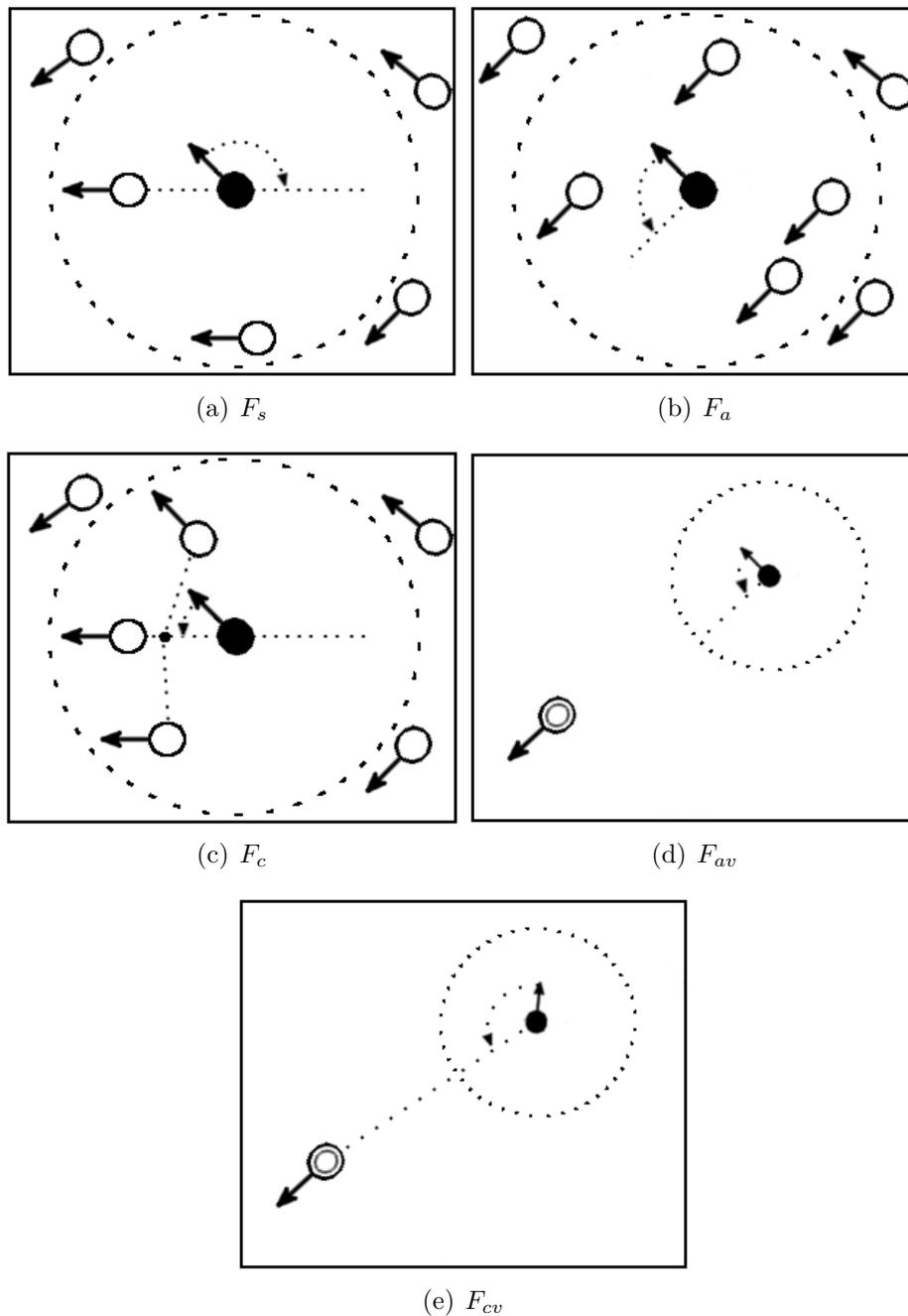


Figura 5.3 - Forças do sistema. As circunferências representam a área de interação do agente com fundo preto (não confundir com o raio de interação com o agente virtual). Em (d) e (e), o agente branco é o agente virtual.

A cada iteração do sistema, o valor da força resultante é somado ao ângulo de navegação  $\theta_i$  do  $i$ -ésimo agente. Vale ressaltar que  $0 \leq F \leq 1$ .

A questão fundamental em nosso modelo é a de como se dá o efeito de uma possível composição de valores dos parâmetros de controle sobre o comportamento coletivo

do sistema.

#### 5.4 Análise das configurações do simulador

Foram estudadas algumas estratégias, que serão apresentadas na sequência desta seção. Seus coeficientes de controle  $\alpha_a$ ,  $\alpha_c$ ,  $\alpha_{av}$  e  $\alpha_{cv}$  foram variados a fim de se obter os casos ótimos. Como a equação de ajuste de velocidades possui uma componente estocástica, e as posições iniciais dos agentes são aleatórias, os experimentos foram executados 10 vezes cada, e tomou-se a média dos resultados. Os índices foram calculados toda vez que o sistema chegava a uma formação definitiva viável.

**Definição 2.** *Os agentes estão em uma **Formação definitiva** (FD) se todos os agentes estão em deslocamento de formação e os módulos de suas velocidades são constantes.*

**Definição 3.** *Uma Formação definitiva atingida em menos de 3000 instantes de tempo é chamada de **Formação definitiva viável** (FDV).*

Cada instante de tempo ( $it$ ) corresponde ao deslocamento de 1  $bl$  (*body length* - comprimento do corpo de um agente) do agente virtual, ou seja,  $|v_a| = 1 \text{ bl}/it$ .

O valor fixo de 3000  $it$  foi definido após observar-se experimentalmente que em geral os agentes chegam a formações definitivas em até 2000  $it$ . As formações são ditas definitivas, pois uma vez que este estado é atingido, caso o sistema não sofra nenhuma perturbação externa, ele irá permanecer neste estado indefinidamente.

Condições iniciais das simulações:

- População de 20 agentes, posicionados de forma aleatória dentro de uma área retangular de dimensão 36 x 76  $bl$ , como na Figura 5.4.
- Raio de visão de cada agente: 5,5  $bl$ .
- Mínima separação: 2,5  $bl$ .
- Máxima separação ( $F_s$ ): 2 graus decimais.
- Ângulo máximo de alinhamento ( $F_a$ ): 1 grau decimal.
- Ângulo máximo de coesão ( $F_c$ ): 1 grau decimal.

- Ângulo de navegação: Aleatório.
- $|v_a| = 1 \text{ bl/it}$  e  $|v_{fora}| = 1,4 \text{ bl/it}$
- Raio de interação do agente virtual (RIAV):  $25 \text{ bl}$ .
- Ângulo de navegação do agente virtual: 180 graus decimais.
- Ângulo máximo de alinhamento com o agente virtual ( $F_{av}$ ): 1 grau decimal.
- Máxima coesão com o agente virtual ( $F_{cv}$ ): 1 grau decimal (este parâmetro representa quantos graus um agente pode ajustar sua direção de navegação para ir até a posição do agente virtual).
- $\alpha_{lim}$ :  $25 \text{ bl}$ .
- $\beta_{lim}$ : 5 graus decimais.

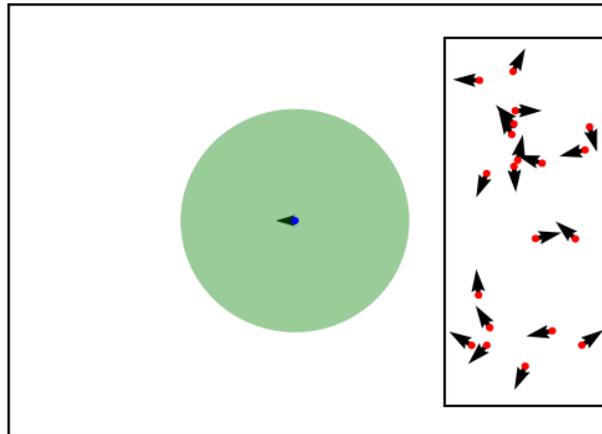


Figura 5.4 - Formação inicial em posições e ângulos de navegação aleatórios, dentro de uma região retangular atrás do agente virtual. Agentes são os círculos em vermelho, o agente virtual é o círculo azul, o raio de interação do agente virtual (RIAV) é o grande círculo em verde, e as setas em preto representam as direções de navegação.

Vale ressaltar que as intensidades das forças do sistema são unitárias, com exceção da força de separação  $F_s$  que tem intensidade 2. Além disto, na iminência de uma colisão,  $F_s$  é exercida de forma isolada das outras forças, pois possui maior prioridade, como já mencionado anteriormente.

Para execução das simulações, utilizou-se a linguagem de programação *Python*, com auxílio de bibliotecas científicas como *numpy* (NUMPY, 2013), *matplotlib* (MATPLO-

TLIB, 2012) e *igraph* (IGRAPH, 2015). Foram executados experimentos utilizando duas abordagens para cálculo das forças do sistema, baseadas na vizinhança de cada agente (Figura 5.5):

- E-1) *Cálculo das forças baseado no raio de visão dos agentes*: As forças de interação utilizadas levam em consideração todos os indivíduos que estão no raio de visão de cada agente;
- E-2) *Cálculo das forças baseado em zonas de percepção*: As forças de interação utilizadas são calculadas de acordo com a posição relativa entre o agente e seu vizinho. São considerados raios (zonas) específicos dentro do raio de visão de cada agente (zonas de repulsão, orientação e atração).

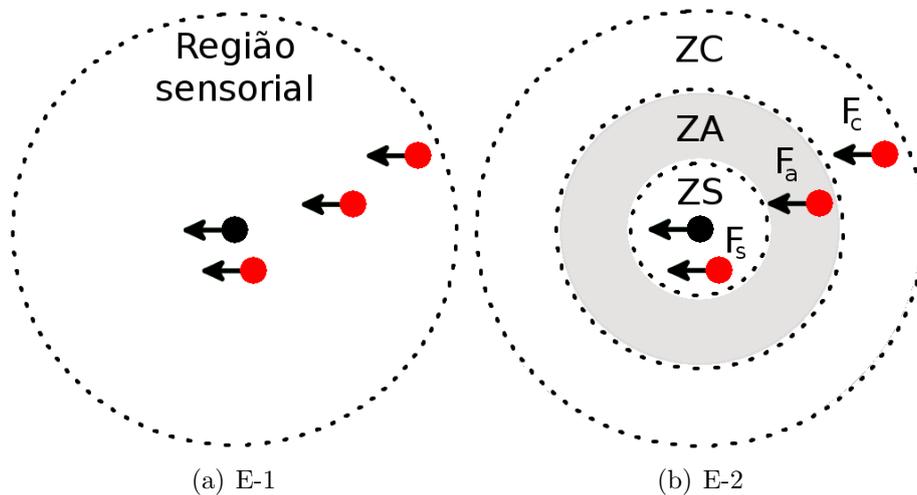


Figura 5.5 - Abordagens para cálculo das forças de interação: E-1) Cálculo das forças baseado no raio de visão dos agentes, e E-2) Cálculo das forças baseado em zonas de percepção: Zona de separação (ZS), Zona de Alinhamento (ZA), Zona de coesão (ZC). Quando os vizinhos do agente estão posicionados dentro da ZS, o agente é submetido à força de separação  $F_s$ , que o faz desviar deles. No caso de estarem dentro da ZA, o agente ajusta seu ângulo de navegação para coincidir com a média dos ângulos de navegação dos vizinhos. No terceiro caso, se os vizinhos estiverem na ZC, então o agente ajusta seu ângulo de navegação para se deslocar em direção ao centro de massa dos vizinhos. O agente em preto é um agente comum do modelo, e a região pontilhada corresponde à sua área de visão (região sensorial). Os agentes em vermelho são seus vizinhos.

Observa-se na Figura 5.5a que todos os vizinhos influenciam na mudança de direção do agente da mesma forma. Isto é, o cálculo de cada força do sistema é feito levando em conta todos os indivíduos. Entretanto, ao observar a Figura 5.5b, vê-se que

a força  $F_s$  será calculada levando em conta apenas o indivíduo que está no raio mais interno. Seguindo o mesmo raciocínio, a força  $F_a$  será calculada considerando apenas os vizinhos posicionados no raio mais intermediário, e, por fim, a força  $F_c$  é calculada levando em conta os vizinhos localizados no raio mais externo. Esta última abordagem (E-2) retrata alguns comportamentos observados na natureza, como citado no Capítulo 2, em que algumas espécies de peixes tendem a ser atraídas por vizinhos mais distantes e repelidas por vizinhos mais próximos.

Foram estudadas 4 estratégias para interação entre agentes, utilizando as duas abordagens: raio de visão e zonas de percepção, e os experimentos foram conduzidos da seguinte forma:

- a) Inicialmente os coeficientes de controle  $\alpha_a$ ,  $\alpha_c$ ,  $\alpha_{av}$  e  $\alpha_{cv}$  são fixados com o valor 1, e cada um deles é variado individualmente, para cada estratégia, a fim de se estabelecer quais coeficientes possuem maior influência no resultado final.
- b) Os coeficientes são analisados dois a dois, enquanto os outros são fixados em 1, a fim de se estabelecer relações de dependência entre eles.
- c) Em seguida, é calculado um histograma em um espaço tridimensional, em que os eixos são representados pelos índices Temporal ( $\tau$ ), Uniformidade Angular ( $\phi$ ) e Uniformidade Radial ( $\rho$  - ver seção 5.1 para definição destas grandezas). Nesse histograma são computadas as ocorrências de formações definitivas viáveis (FDV), isto é, que obtiveram 100% de sucesso, em menos de 3000 *it*, levando em consideração que algumas configurações não resultam em formações definitivas em todos os casos.
- d) Por fim, são apresentadas as configurações que obtiveram os maiores e menores índices.

A Tabela 5.1 mostra as estratégias utilizadas, sendo que cada estratégia define quais forças serão utilizadas no sistema (definidas na Seção 5.3), e em qual momento da simulação. Pelo fato de as 4 estratégias terem sido analisadas por duas abordagens de vizinhanças, optou-se por nomear seus índices de identificação da seguinte maneira: As estratégias com prefixo *E-1* representam os experimentos com vizinhanças baseadas no raio de visão, em que os agentes são submetidos às forças externas vindas de todos os agentes em seu raio de visão. As estratégias com prefixo *E-2* utilizam a

abordagem de percepção espacial que considera zonas de percepção, em que os tipos de forças que os agentes exercem em seus vizinhos dependem da distância entre eles.

Segundo a Tabela 5.1, as Estratégias E-1.1 e E-2.1 definem que quando o agente está fora do RIAV, ele deve ir em direção ao agente virtual, se alinhar com ele, e também se alinhar aos seus vizinhos. E quando está dentro do RIAV, ele deve se alinhar apenas ao agente virtual.

Tabela 5.1 - Estratégias de interação entre agentes.

<b>Estratégia</b>	<b>Fora do RIAV</b>	<b>Dentro do RIAV</b>
<b>E-1.1 (E-2.1)</b>	Vai em direção ao agente virtual $F_{cv}$ Se alinha ao agente virtual $F_{av}$ Se alinha aos vizinhos $F_a$	Se alinha ao agente virtual $F_{av}$
<b>E-1.2 (E-2.2)</b>	Vai em direção ao agente virtual $F_{cv}$	Se alinha ao agente virtual $F_{av}$ Se alinha aos vizinhos $F_a$
<b>E-1.3 (E-2.3)</b>	Vai em direção ao agente virtual $F_{cv}$ Vai em direção aos vizinhos $F_c$	Se alinha ao agente virtual $F_{av}$ Se alinha aos vizinhos $F_a$
<b>E-1.4 (E-2.4)</b>	Vai em direção ao agente virtual $F_{cv}$ Vai em direção aos vizinhos $F_c$ Se alinha ao agente virtual $F_{av}$ Se alinha aos vizinhos $F_a$	Se alinha ao agente virtual $F_{av}$ Se alinha aos vizinhos $F_a$

No link <http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3LEC74S> é possível visualizar um exemplo de simulação com a estratégia E-2.2.

#### 5.4.1 Cálculo das forças baseado no raio de visão dos agentes

Cada agente interage com os vizinhos dentro de seu raio de visão. Essas interações incluem separação, alinhamento e coesão, segundo mostra a Figura 5.3.

O primeiro passo é identificar os valores de  $\alpha$  (parâmetros de controle) que tem maior influência na ponderação das forças, para cada uma das estratégias apresentadas na Tabela 5.1. Para tanto, todos os coeficientes  $\alpha$  foram fixados em 1, e cada um deles foi variado individualmente.

O primeiro coeficiente analisado foi o  $\alpha_a$ , que corresponde à força de alinhamento com os vizinhos  $F_a$ . A Figura 5.6 mostra os resultados das simulações e explicita que quanto maior o valor de  $\alpha_a$ , menores são as chances de se chegar a uma formação definitiva viável (FDV). Nesta imagem, “Sucesso” representa a taxa em que uma FDV é atingida para cada configuração. As Estratégias E-1.1 e E-1.4 não obtiveram

êxito para nenhum valor analisado, mostrando que  $\alpha_a$  não pode ser maior que os demais. Nestes dois casos, a força  $F_{cv}$ , responsável por levar os agentes para dentro do RIAV, concorre com outras forças quando os agentes estão fora do RIAV. Sendo assim, espera-se que nenhuma força tenha maior parcela do que essa no cálculo da força resultante. Já no caso das Estratégias E-1.1 e E-1.3, os agentes só chegaram a formações finais para alguns valores de  $\alpha_a$ , enquanto a Estratégia E-1.2 obteve ao menos 10% de sucesso para os valores analisados.

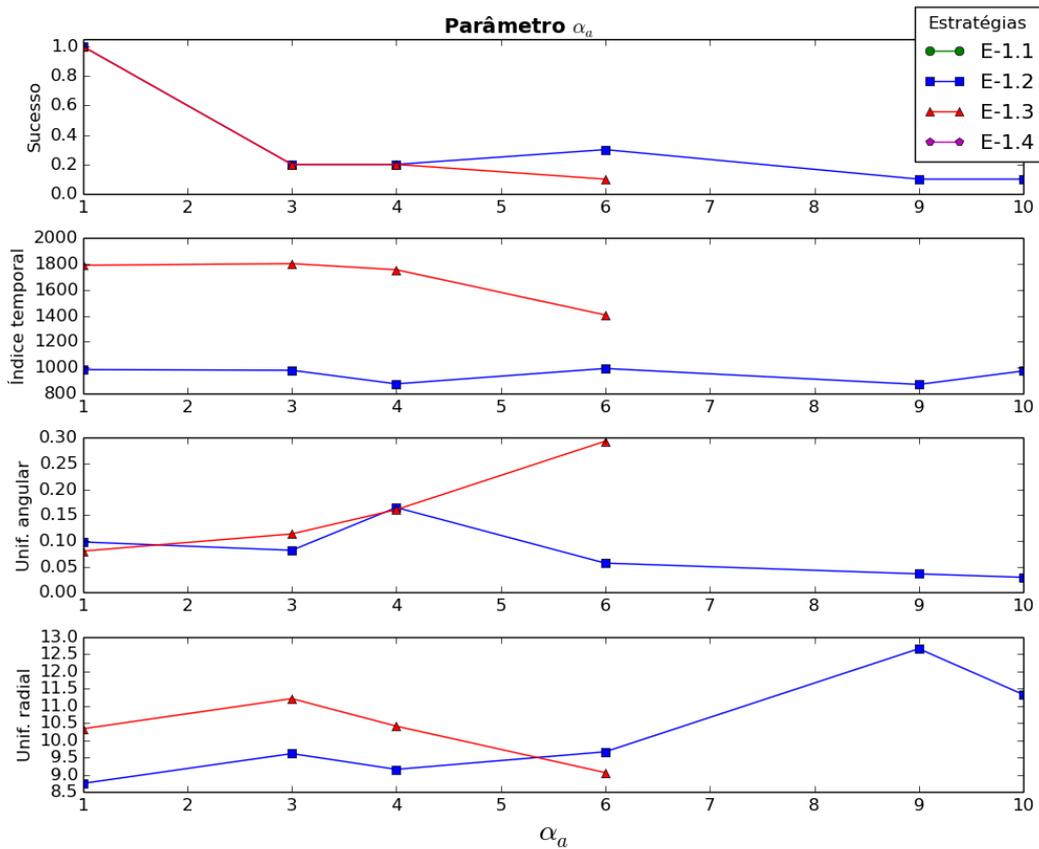


Figura 5.6 - Análise do coeficiente  $\alpha_a$ , para as estratégias E-1. Resultados obtidos para  $\alpha_a = \{1, \dots, 10\}$  e  $\alpha_c = \alpha_{av} = \alpha_{cv} = 1$ . *Sucesso* representa a porcentagem dos casos em que os agentes chegaram a uma FDV.

Ao analisar o coeficiente  $\alpha_{av}$  (Figura 5.7), observou-se que a Estratégia mais bem sucedida foi a E-1.2, com o menores ITs e aproximadamente na média em relação ao IUA. Mais uma vez, as Estratégias E-1.1 e E-1.4 não obtiveram êxito, pelo mesmo motivo do estudo do coeficiente  $\alpha_a$  (nenhuma força pode ter maior peso do que a  $F_{cv}$ , quando os agentes estão fora do RIAV).

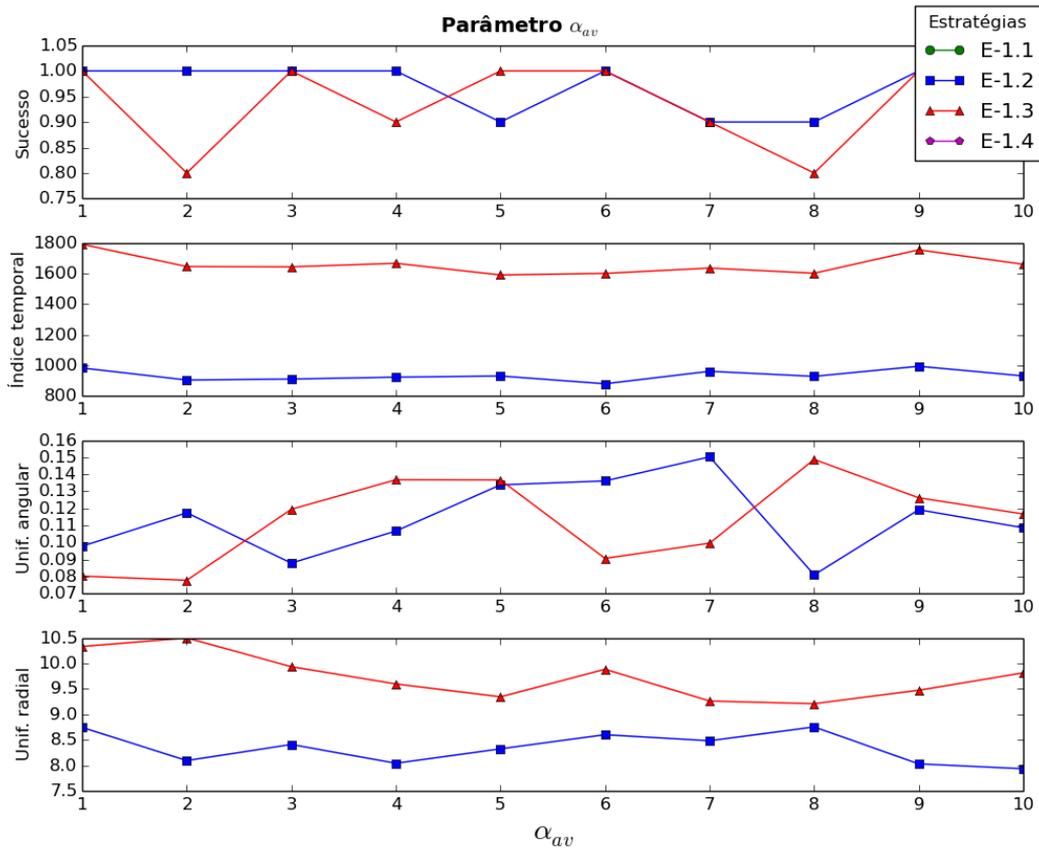


Figura 5.7 - Análise do coeficiente  $\alpha_{av}$ , para as estratégias E-1. Resultados obtidos para  $\alpha_{av} = \{1, \dots, 10\}$  e  $\alpha_a = \alpha_c = \alpha_{cv} = 1$ . *Successo* representa a porcentagem dos casos em que os agentes chegaram a uma FDV.

As estratégias se mostraram pouco sensíveis a alterações do coeficiente  $\alpha_{cv}$  (Figura 5.8). As Estratégias E-1.1 e E-1.4 não produziram resultados para  $\alpha_{cv} < 2$ , como esperado, pois a força de coesão com o agente virtual deve ser maior do que as outras forças, ou os agentes não entrariam no RIAV.

As duas únicas estratégias que implementam a força de coesão com os vizinhos  $F_c$  são E-1.3 e E-1.4. Vê-se que o IT ( $\tau$ ) aumenta quase que linearmente com ele (Figura 5.9), para a Estratégia E-1.3. Além disto, a E-1.3 só obteve resultados para  $\alpha_c < 4$ . Isto ocorre, pois o fato de os agentes tentarem se aproximar dos vizinhos com mais intensidade faz com que eles percam o foco que é seguir na direção de navegação do agente virtual. A Estratégia E-1.4 não obteve sucesso para nenhum valor de  $\alpha_c$ .

Resumidamente, observa-se que em geral os coeficientes  $\alpha_a$ ,  $\alpha_c$  e  $\alpha_{av}$  devem ser menores que os demais, enquanto o coeficiente  $\alpha_{cv}$  pode variar livremente. Sob essas condições, a maior parte das estratégias funciona. As estratégias mais restritivas são

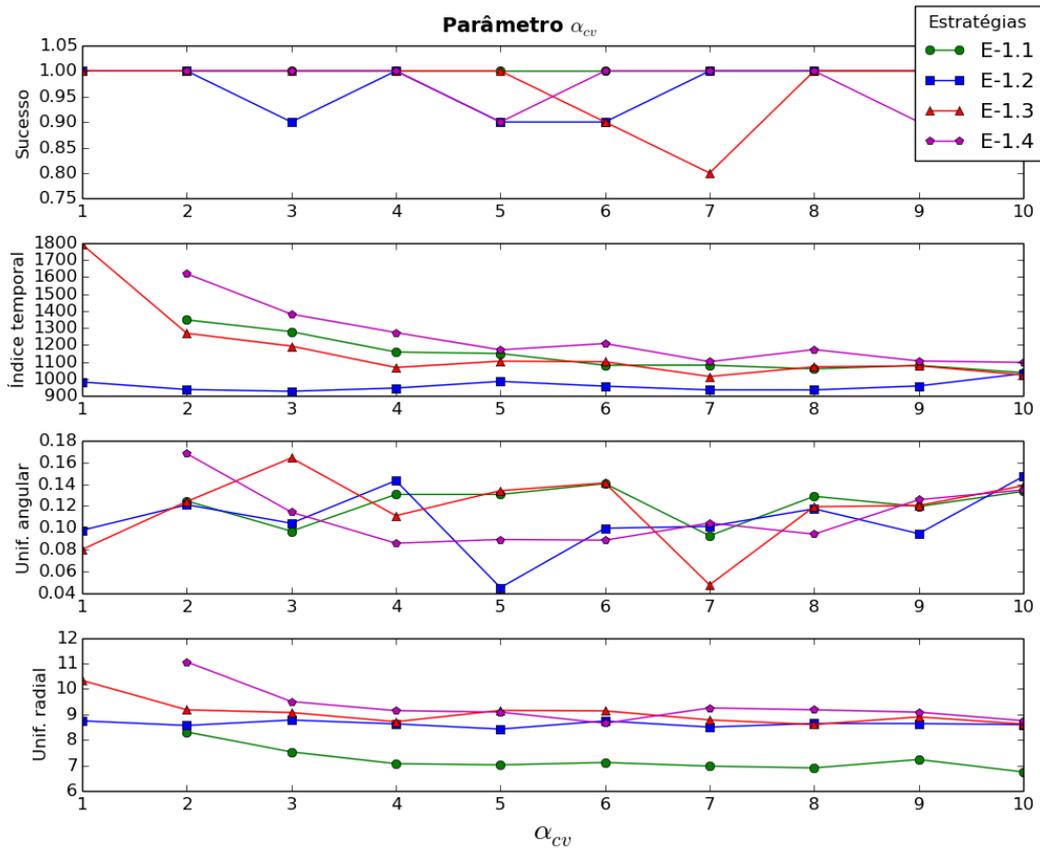


Figura 5.8 - Análise do coeficiente  $\alpha_{cv}$ , para as estratégias E-1. Resultados obtidos para  $\alpha_{cv} = \{1, \dots, 10\}$  e  $\alpha_a = \alpha_c = \alpha_{av} = 1$ . *Sucesso* representa a porcentagem dos casos em que os agentes chegaram a uma FDV.

as de número E-1.1 e E-1.4, pois elas tem outras forças concorrentes com  $\alpha_{cv}$  quando os agentes estão fora do RIAV. Neste caso, como visto na Figura 5.8, apenas para  $\alpha_{cv}$  maior que todos os outros coeficientes o sistema chega a formações definitivas, pois este coeficiente é relacionado à força de coesão, que faz com que os agentes entrem no RIAV. Nesta mesma Figura é possível observar que o IT e o coeficiente  $\alpha_{cv}$  são inversamente proporcionais para as estratégias E-1.1, E-1.3 e E-1.4, mostrando que esse é um parâmetro chave para se chegar a formações definitivas, principalmente se o objetivo é fazê-lo o mais rapidamente possível. Pode-se dizer que no geral, a estratégia E-1.2 obteve os melhores resultados.

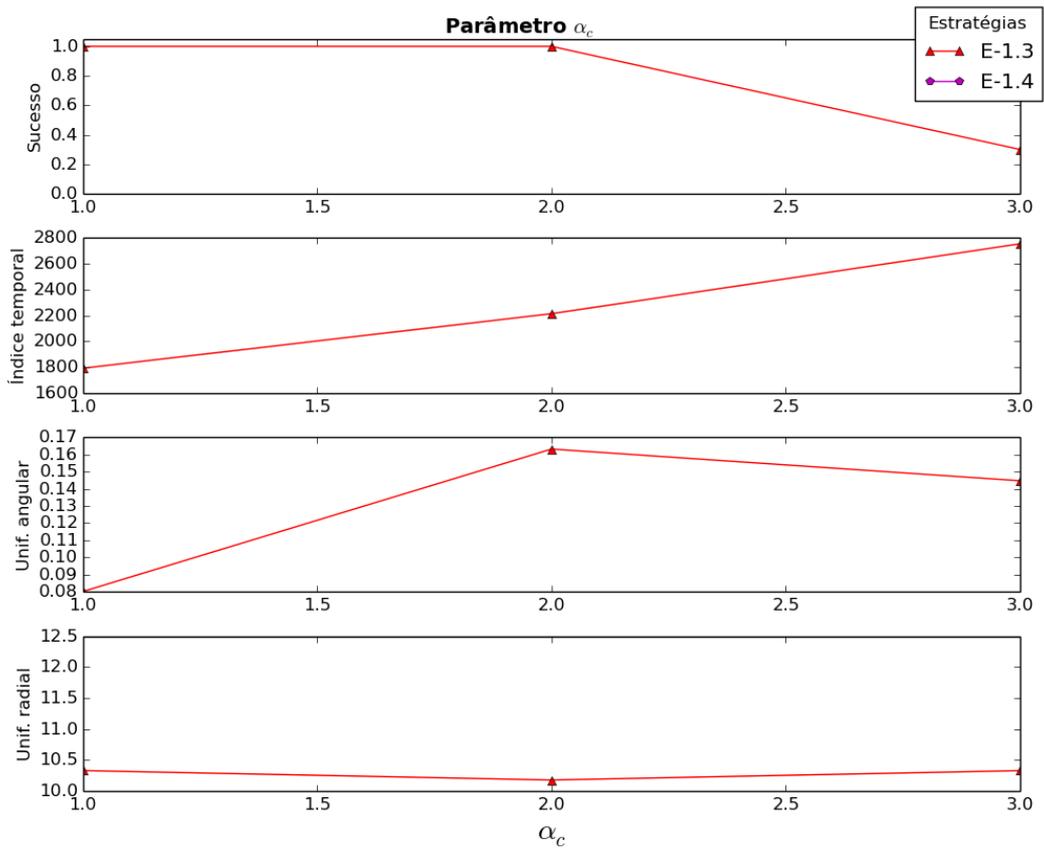


Figura 5.9 - Análise do coeficiente  $\alpha_c$ , para as estratégias E-1. Resultados obtidos para  $\alpha_c = \{1, \dots, 10\}$  e  $\alpha_a = \alpha_{av} = \alpha_{cv} = 1$ . *Sucesso* representa a porcentagem dos casos em que os agentes chegaram a uma FDV.

### 5.4.1.1 Estratégia E-1.1 - $F_{av}$ dentro do RIAV, e $F_a$ , $F_{av}$ e $F_{cv}$ fora

Nesta segunda parte dos experimentos, são apresentados os resultados a partir da comparação dos coeficientes dois a dois, para visualizar os casos em que um tem maior influência no outro, mantendo os outros coeficientes com valor 1:

- $\alpha_a$  x  $\alpha_{av}$ : Não existem FDVs para  $\alpha_a$  e  $\alpha_{av}$  maiores ou iguais aos outros coeficientes.
- $\alpha_a$  x  $\alpha_{cv}$ : Quando  $\alpha_{cv} > \alpha_a$ , a taxa de sucesso nas FDVs tende a 1 (em uma escala de 0 a 1), e  $\tau$  é menor do que nos outros casos (Figura 5.10). Esse comportamento é esperado, pois a intensidade da força  $F_{cv}$ , de coesão com o agente virtual, deve ser maior quando os agentes estão fora do RIAV.

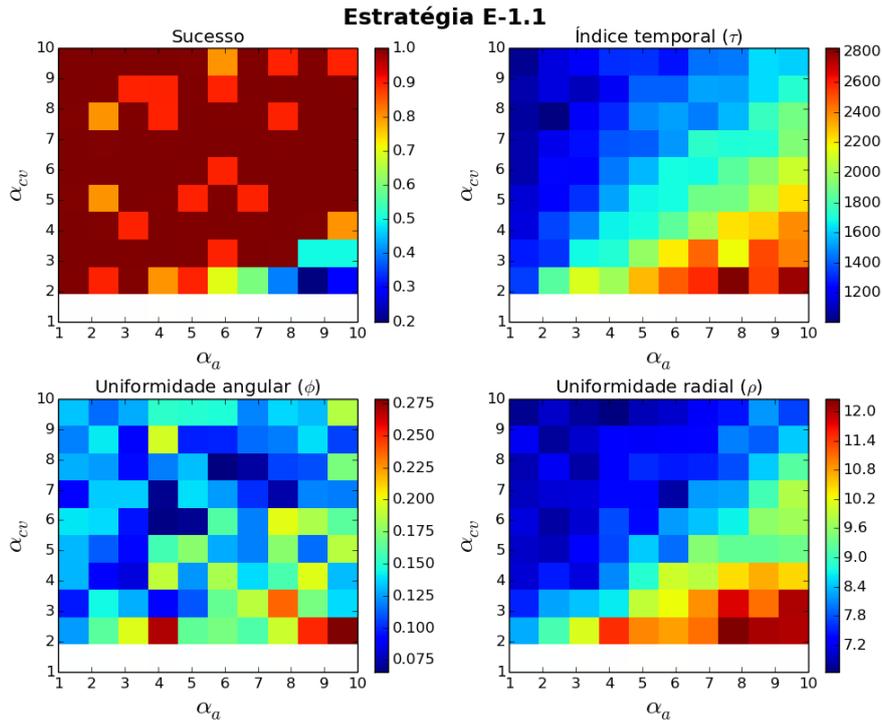


Figura 5.10 - Estratégia E-1.1: Análise dos coeficientes  $\alpha_a$  e  $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Os resultados são melhores quando  $\alpha_{cv} > \alpha_a$ .

- $\alpha_{av}$  x  $\alpha_{cv}$ : A Figura 5.11 mostra que só existem FDVs para  $\alpha_{av} < \alpha_{cv}$  e  $\alpha_{cv} > 1$ . Este resultado é esperado, pelo mesmo motivo da Figura 5.10.

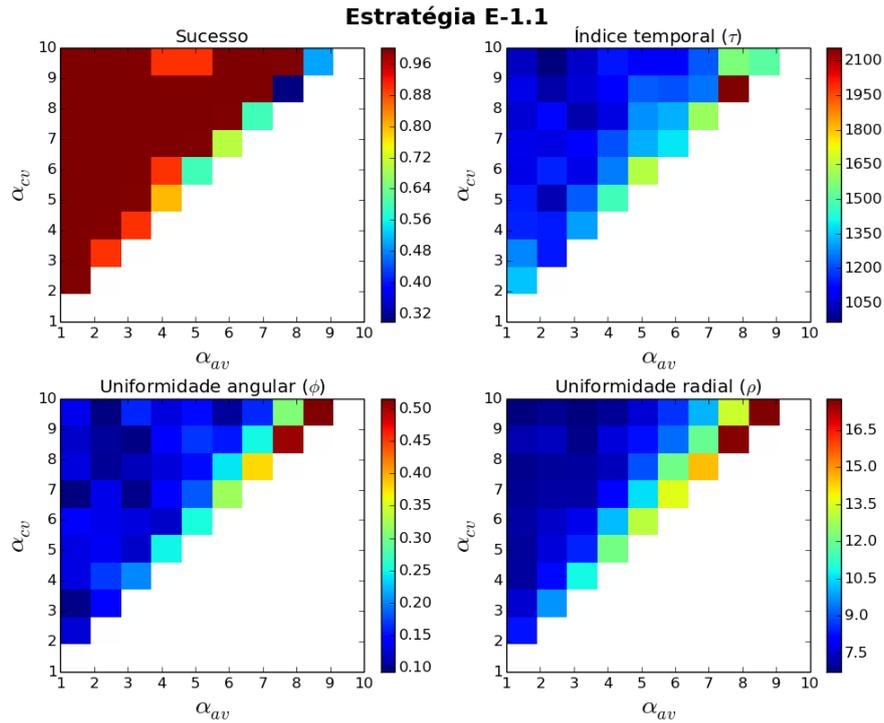


Figura 5.11 - Estratégia E-1.1: Análise dos coeficientes de controle  $\alpha_{av}$  e  $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis.

Em seguida foram analisadas as configurações em que FDVs foram alcançadas em 100% dos casos. Para tanto, as ocorrências das combinações dos três índices estudados foram plotadas na Figura 5.12. Os eixos representados pelos índices temporal ( $\tau$ ), uniformidade angular ( $\phi$ ) e uniformidade radial ( $\rho$ ) foram discretizados em 10 bins para melhor visualização.

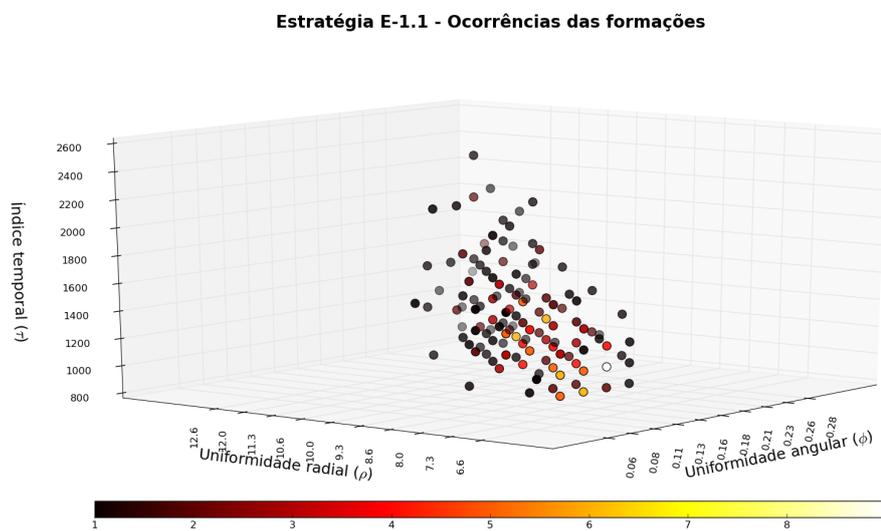


Figura 5.12 - Estratégia E-1.1: ocorrências para cada resultado das simulações que obtiveram FDVs em 100% dos casos, de acordo com os índices quantitativos.

### 5.4.1.2 Estratégia E-1.2 - $F_a$ e $F_{av}$ dentro do RIAV, e $F_{cv}$ fora

- $\alpha_a \times \alpha_{av}$ : Existe uma forte dependência entre  $\alpha_a$  e  $\alpha_{av}$ , segundo a Figura 5.13, mostrando que o sistema em geral só chega a formações definitivas nos casos em que  $\alpha_{av} \geq \alpha_a$ . Na Estratégia E-1.2, quando os agentes estão dentro do RIAV eles se alinham tanto com o agente virtual quanto com os vizinhos. Sendo assim, eles devem ter maior sinergia com o agente virtual do que com os vizinhos.

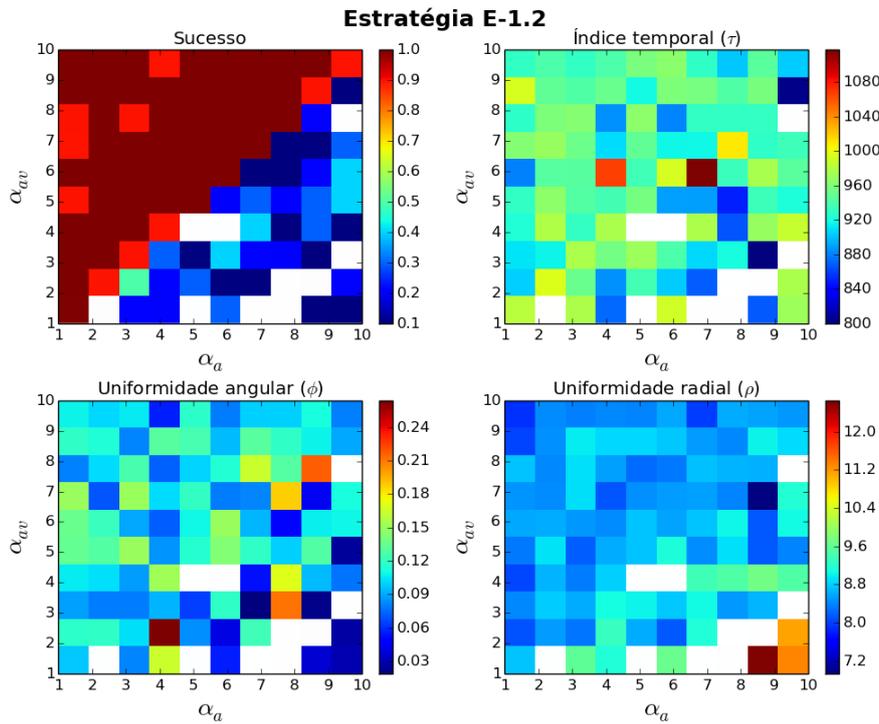


Figura 5.13 - Estratégia E-1.2: Análise dos coeficientes  $\alpha_a$  e  $\alpha_{av}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Em geral os agentes só chegam a formações definitivas nos casos em que  $\alpha_{av} \geq \alpha_a$ .

- $\alpha_a \times \alpha_{cv}$ : Formações definitivas viáveis são atingidas com alta taxa de sucesso apenas para  $\alpha_a = 1$  (Figura 5.14), independente do valor de  $\alpha_{cv}$ . A explicação se deve ao fato de as forças atuantes dentro do raio de interação serem  $F_a$  e  $F_{av}$ , mostrando que  $\alpha_a$  e  $\alpha_{av}$  devem ser ao menos iguais, para que o alinhamento para a direção do movimento da formação seja bem sucedido.

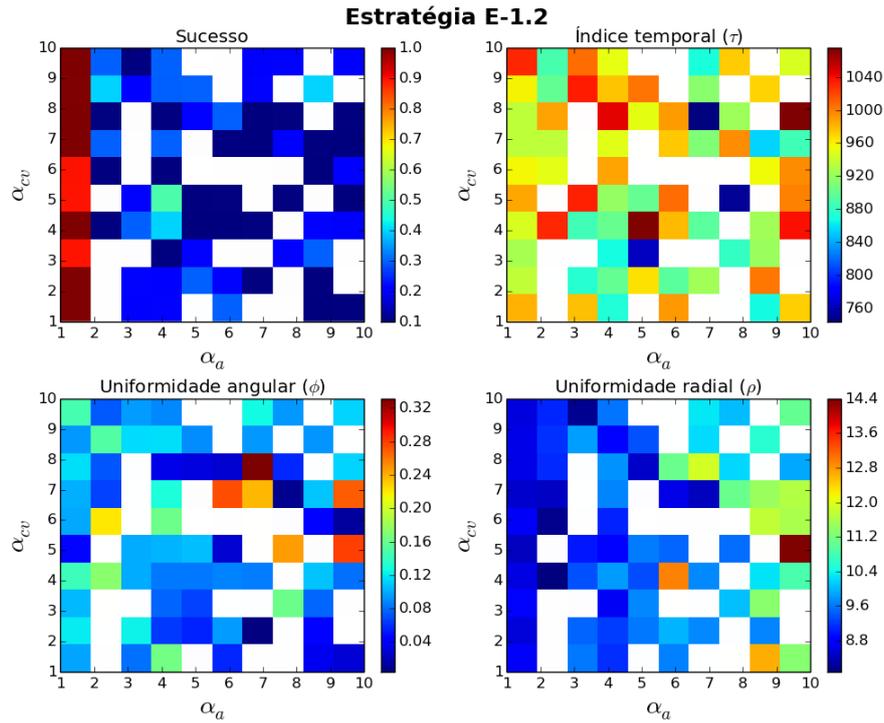


Figura 5.14 - Estratégia E-1.2: Análise dos coeficientes  $\alpha_a$  e  $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Formações definitivas viáveis são atingidas com alta taxa de sucesso apenas para  $\alpha_a = 1$

- $\alpha_{av}$  x  $\alpha_{cv}$ : A Figura 5.15 indica que os coeficientes  $\alpha_{av}$  e  $\alpha_{cv}$  não dependem um do outro na Estratégia E-1.2.

Para a análise das ocorrências que chegaram ao objetivo em 100% das simulações, foi gerada a Figura 5.16, e é possível observar que os casos com maior número de ocorrências estão na região central do gráfico.

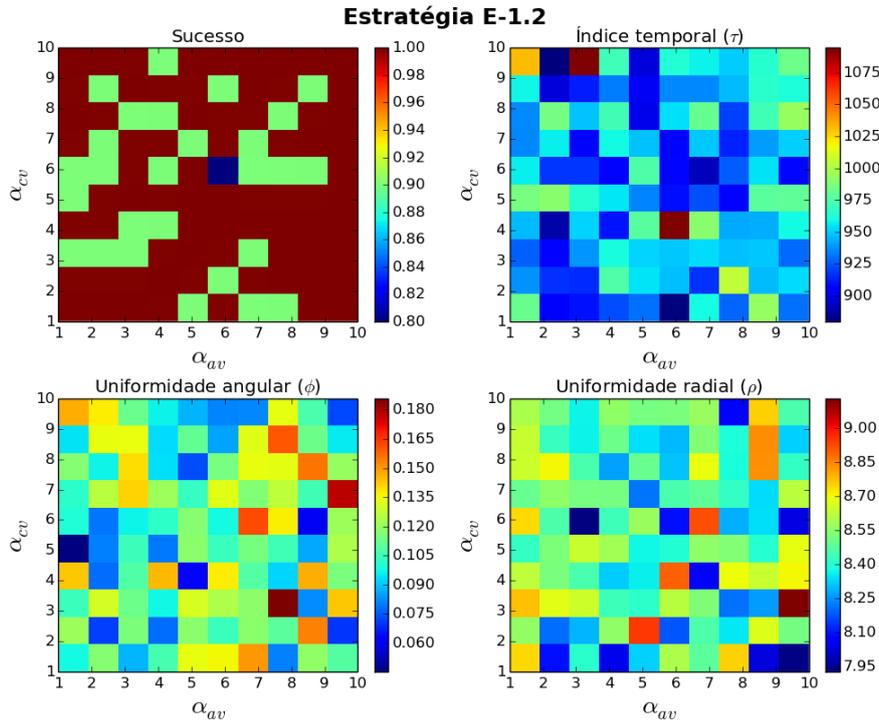


Figura 5.15 - Estratégia E-1.2: Análise dos coeficientes  $\alpha_{av}$  e  $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices. Tudo indica que não existe dependência entre estes dois coeficientes, para esta estratégia.

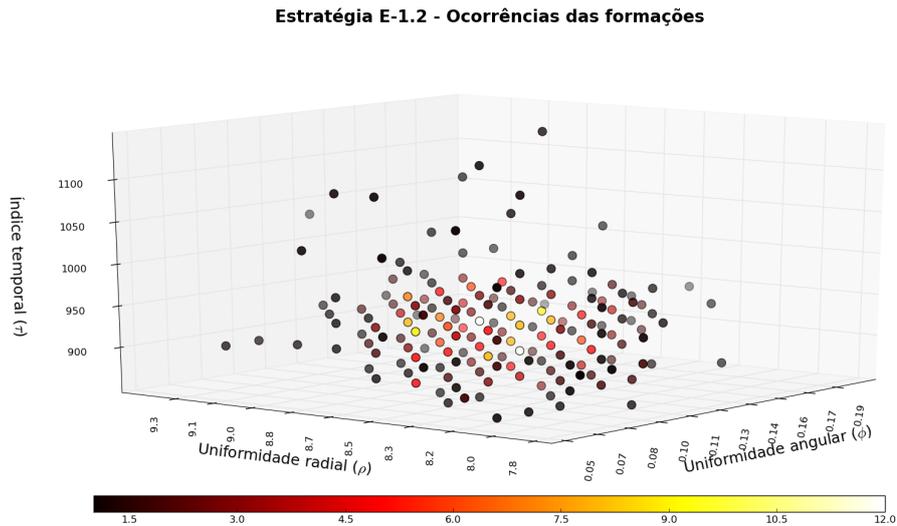


Figura 5.16 - Estratégia E-1.2: ocorrências para cada resultado das simulações que obtiveram FDVs em 100% dos casos, de acordo com os índices quantitativos.

### 5.4.1.3 Estratégia E-1.3 - $F_a$ e $F_{av}$ dentro do RIAV, e $F_c$ e $F_{cv}$ fora

- $\alpha_a \times \alpha_c$ : Verificou-se que só existem formações definitivas viáveis em mais de 30% dos casos quando  $\alpha_a < 2$  e  $\alpha_c < 3$  (Figura 5.17), e o índice temporal é diretamente proporcional ao valor de  $\alpha_c$ . Em geral, para essa estratégia,  $\alpha_a$  deveria ser menor que  $\alpha_{av}$ , e  $\alpha_c$  menor que  $\alpha_{cv}$ , para se chegar ao objetivo, pois quando os agentes estão fora do RIAV as forças atuantes são  $F_c$  e  $F_{cv}$ , e, quando dentro,  $F_a$  e  $F_{av}$  são as forças exercidas. Isso significa que em alguns casos o comportamento desejado emerge, mesmo quando a força dominante para que ele aconteça seja mais fraca do que as demais. Em outras palavras, quando os agentes estão fora do RIAV, espera-se que  $\alpha_{cv}$  tenha mais intensidade do que  $\alpha_c$ , pois é a força de coesão com o agente virtual que deve agir mais fortemente, de modo que os agentes sejam atraídos para dentro do RIAV.

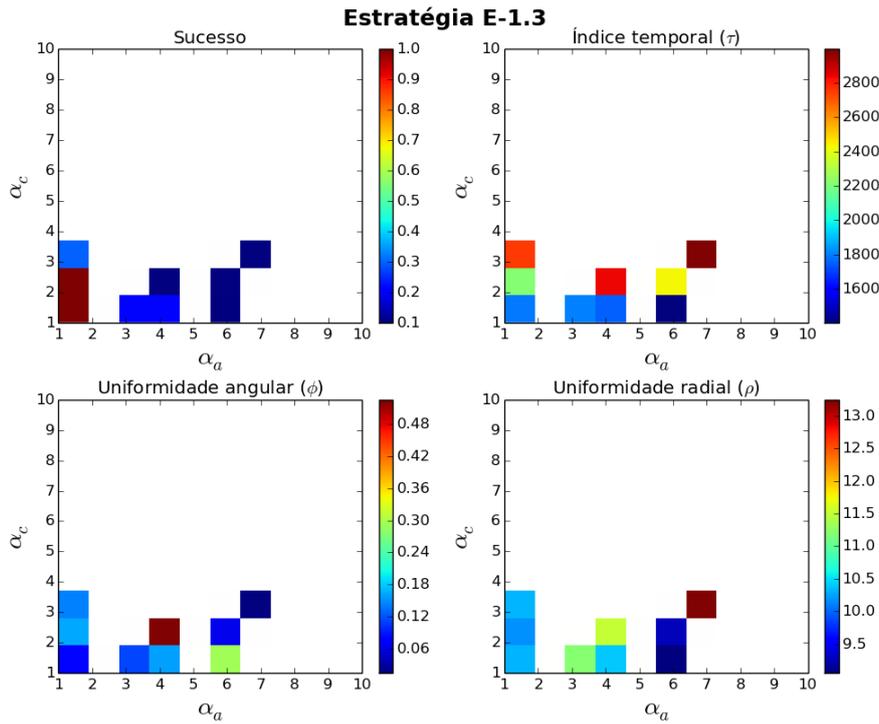


Figura 5.17 - Estratégia E-1.3: Análise dos coeficientes  $\alpha_a$  e  $\alpha_c$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. FDVs são atingidas para  $\alpha_a < 2$  e  $\alpha_c < 3$ .

- $\alpha_a \times \alpha_{av}$ : existe uma forte dependência entre  $\alpha_a$  e  $\alpha_{av}$  (Figura 5.18), com

formações definitivas apenas para  $\alpha_{av} \geq \alpha_a$ . Isso decorre da afirmação feita anteriormente sobre as forças que são exercidas mutuamente. Espera-se que o agente se alinhe com o agente virtual com mais intensidade do que com seus vizinhos, para que a direção do deslocamento da formação seja definido.

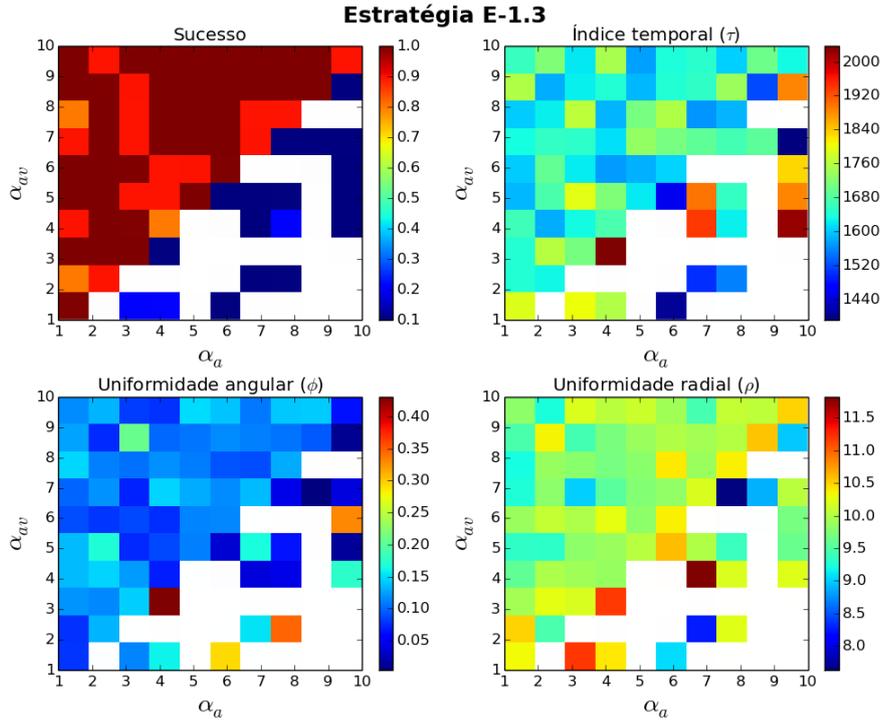


Figura 5.18 - Estratégia E-1.3: Análise dos coeficientes  $\alpha_a$  e  $\alpha_{av}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. FDVs são atingidas para  $\alpha_{av} \geq \alpha_a$ .

- $\alpha_a \times \alpha_{cv}$ : Formações definitivas viáveis são alcançadas com mais de 50% de sucesso apenas para  $\alpha_a = 1$ , independente do valor de  $\alpha_{cv}$ , e com valores de  $\tau$  proporcionais a  $\alpha_{cv}$  (Figura 5.19).
- $\alpha_c \times \alpha_{av}$ : Os casos bem sucedidos de formações definitivas viáveis acontecem para valores de  $\alpha_c < 4$ , para qualquer valor de  $\alpha_{av}$  (Figura 5.20).
- $\alpha_c \times \alpha_{cv}$ : para alguns casos em que  $\alpha_c > \alpha_{cv}$  não existem formações definitivas (Figura 5.21), e quando existem o IT é acima da média observada para a Estratégia E-1.3. Mas quando  $\alpha_{cv} > \alpha_c$ , os tempos são abaixo da média.

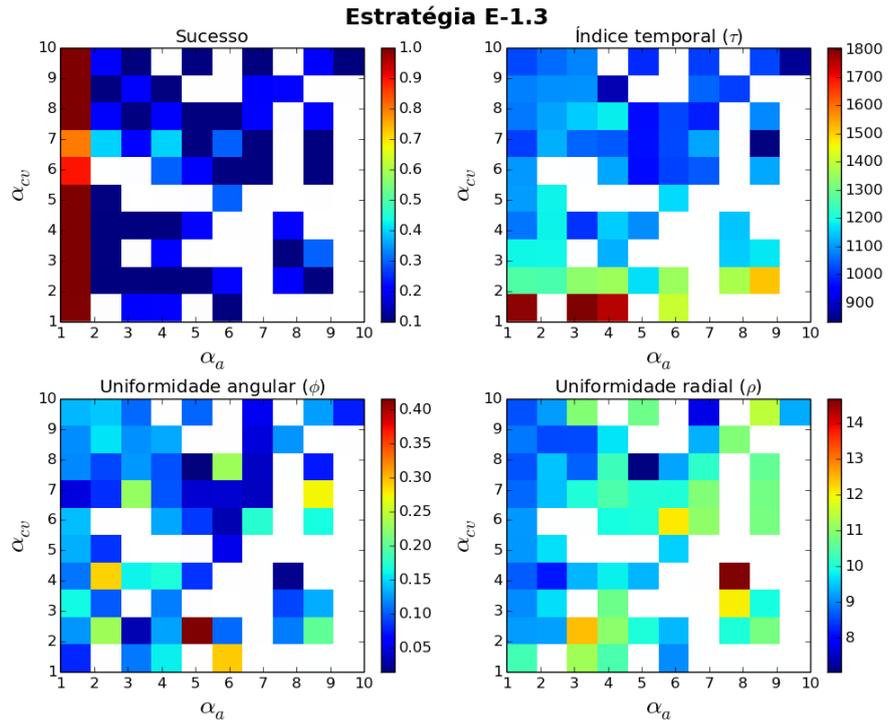


Figura 5.19 - Estratégia E-1.3: Análise dos coeficientes  $\alpha_a$  e  $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. FDVs são atingidas para  $\alpha_a = 1$ .

- $\alpha_{av}$  x  $\alpha_{cv}$ : A Figura 5.22 indica que os coeficientes  $\alpha_{av}$  e  $\alpha_{cv}$  não dependem um do outro na Estratégia E-1.3, mas é visível que quanto maior o valor de  $\alpha_{cv}$ , menor é o IT.

Para a análise das ocorrências que chegaram ao objetivo em 100% das simulações, foi gerada a Figura 5.23, com as ocorrências das formações.

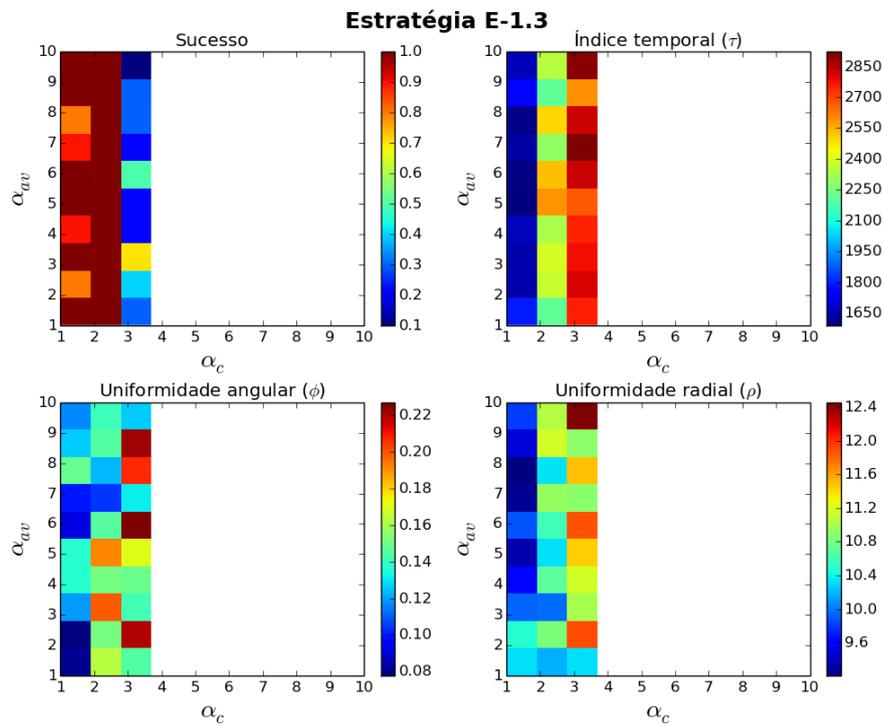


Figura 5.20 - Estratégia E-1.3: Análise dos coeficientes  $\alpha_c$  e  $\alpha_{av}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. FDVs são atingidas para  $\alpha_c < 4$ .

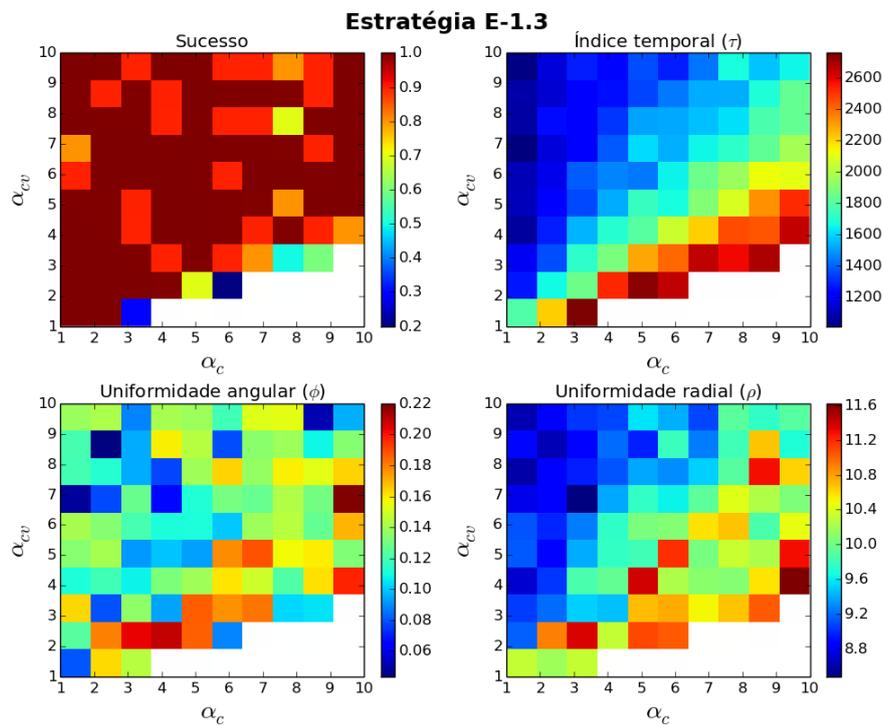


Figura 5.21 - Estratégia E-1.3: Análise dos coeficientes  $\alpha_c$  e  $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. FDVs não são atingidas para alguns casos em que  $\alpha_c > \alpha_{cv}$ .

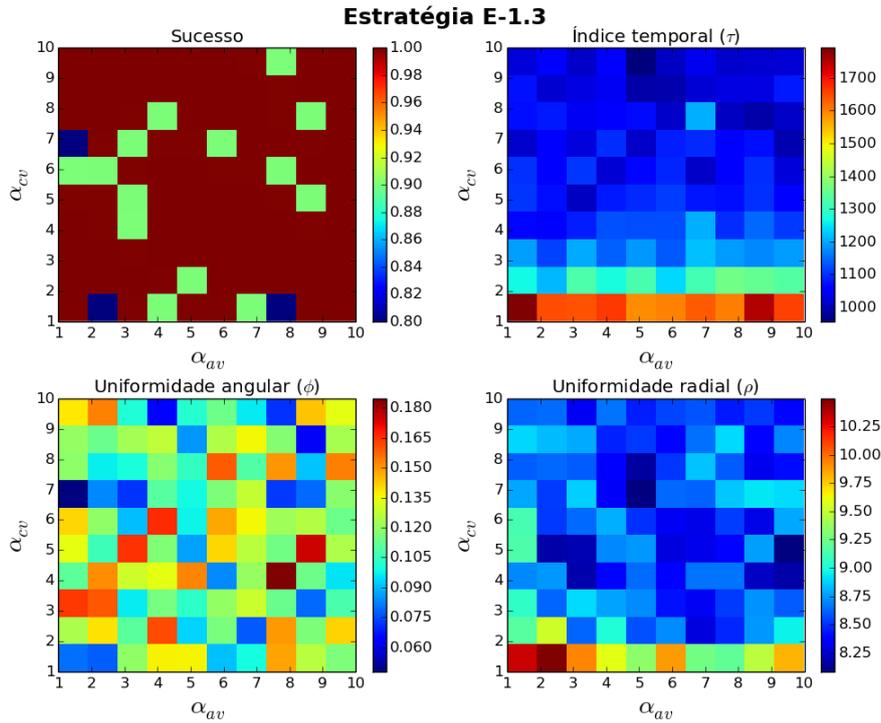


Figura 5.22 - Estratégia E-1.3: Análise dos coeficientes  $\alpha_{av}$  e  $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices. Quanto maior o valor de  $\alpha_{cv}$ , menor é o Índice Temporal.

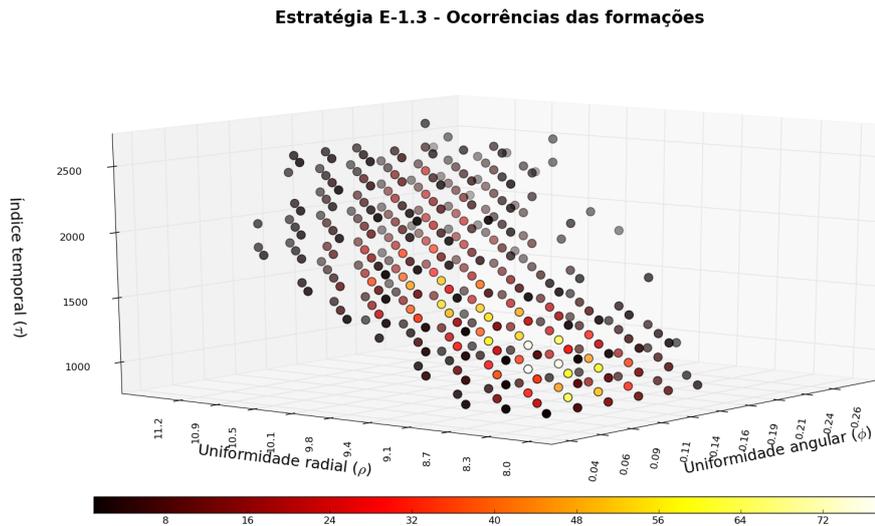


Figura 5.23 - Estratégia E-1.3: ocorrências para cada resultado das simulações que obtiveram FDVs em 100% dos casos, de acordo com os índices quantitativos.

#### 5.4.1.4 Estratégia E-1.4 - $F_a$ e $F_{av}$ dentro do RIAV, e $F_a$ , $F_c$ , $F_{av}$ e $F_{cv}$ fora

- $\alpha_a$  x  $\alpha_c$ : Não existem FDVs para  $\alpha_a$  e  $\alpha_c$  maiores ou iguais aos outros coeficientes.
- $\alpha_a$  x  $\alpha_{av}$ : Da mesma forma, não existem FDVs para  $\alpha_a$  e  $\alpha_{av}$  maiores ou iguais aos outros coeficientes, pois não é possível que os agentes entrem na região de interação quando a força  $F_{cv}$  está sendo empregada com menos intensidade do que as outras que concorrem com ela.
- $\alpha_a$  x  $\alpha_{cv}$ : Só existem FDVs com mais de 30% de sucesso quando  $\alpha_a = 1$  e  $\alpha_{cv} > 1$  (Figura 5.24). Quando os agentes estão fora do RIAV, todas as forças atuam, e espera-se que  $F_{cv}$  predomine, uma vez que ela é responsável por levar os agentes para dentro do RIAV.

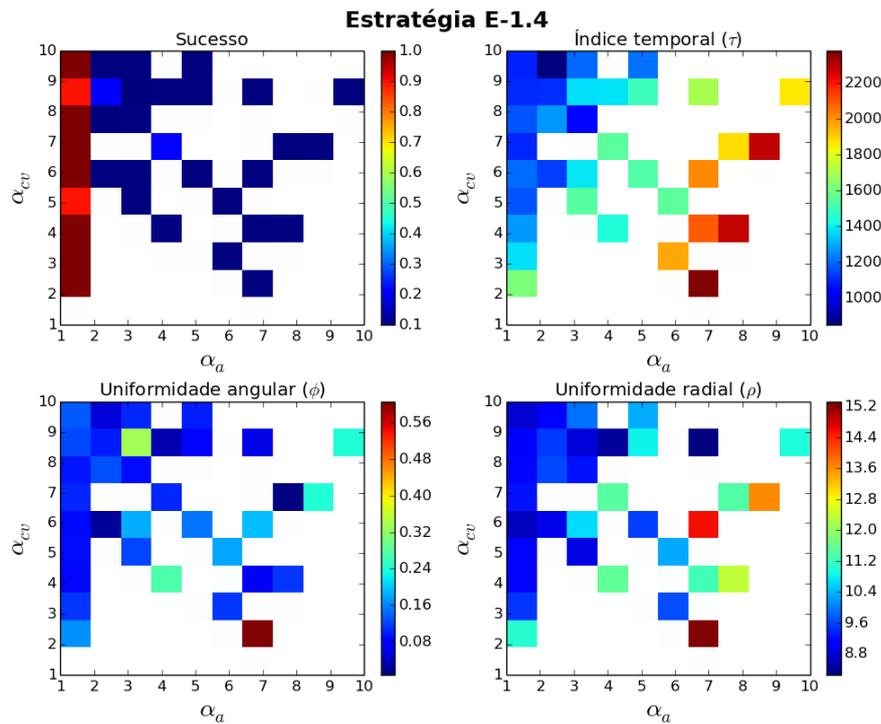


Figura 5.24 - Estratégia E-1.4: Análise dos coeficientes  $\alpha_c$  e  $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. FDVs são atingidas para  $\alpha_a = 1$  e  $\alpha_{cv} > 1$ .

- $\alpha_c$  x  $\alpha_{av}$ : Não existem FDVs para  $\alpha_c$  e  $\alpha_{av}$  maiores ou iguais aos outros

coeficientes.

- $\alpha_c \times \alpha_{cv}$ : Não existem FDVs quando  $\alpha_{cv} = 1$ , e os melhores casos são observados quando  $\alpha_{cv} > \alpha_c$  (Figura 5.25).

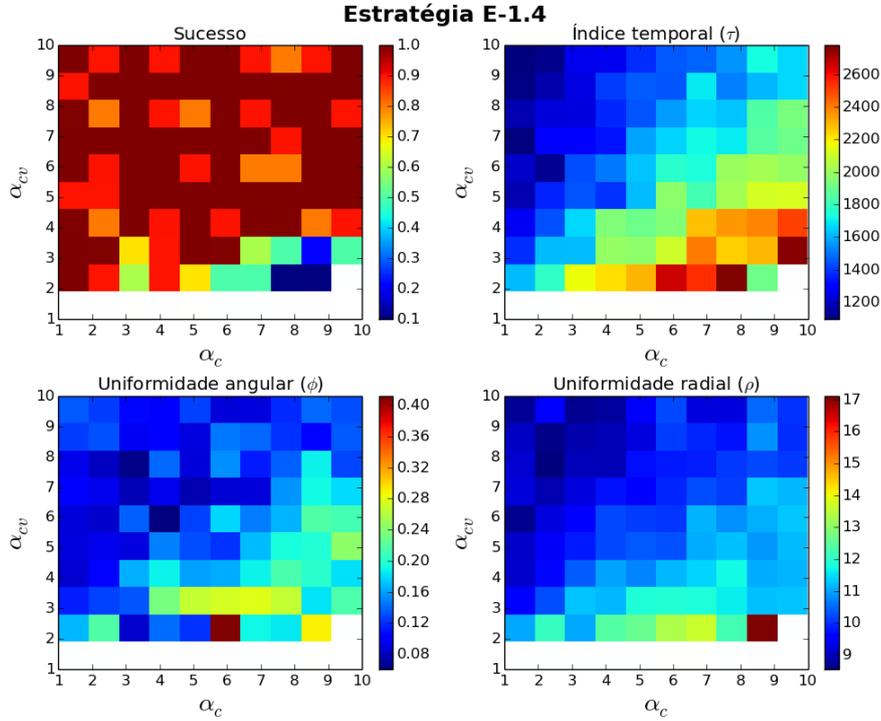


Figura 5.25 - Estratégia E-1.4: Análise dos coeficientes  $\alpha_c$  e  $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. FDVs são atingidas para  $\alpha_{cv} \neq 1$ .

- $\alpha_{av} \times \alpha_{cv}$ : FDVs emergem para  $\alpha_{cv} > \alpha_{av}$  (Figura 5.26).

Para a análise das ocorrências que chegaram ao objetivo em 100% das simulações, foi gerada a Figura 5.27, com as ocorrências das formações.

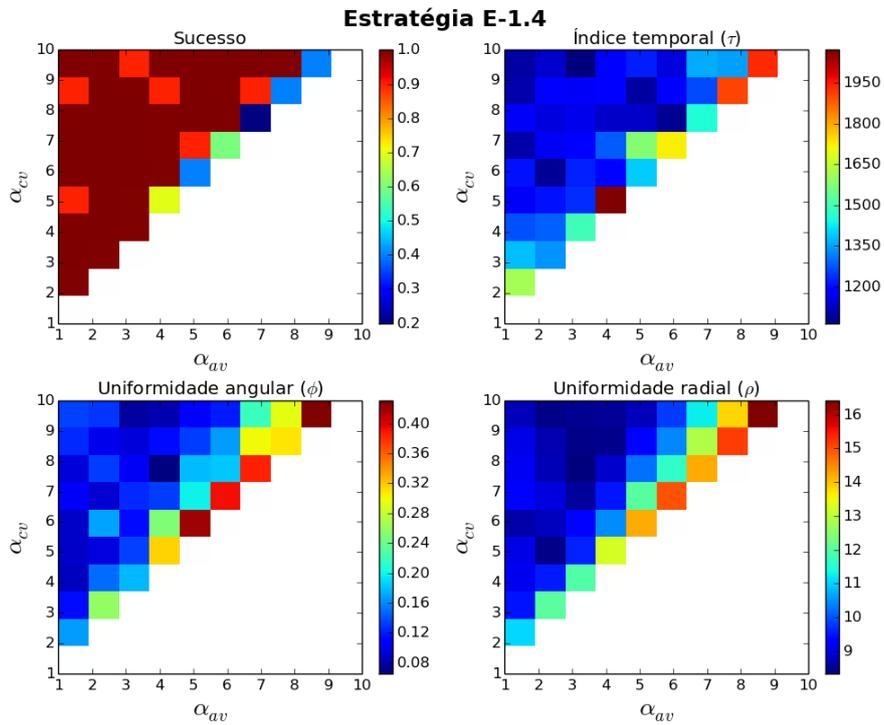


Figura 5.26 - Estratégia E-1.4: Análise dos coeficientes  $\alpha_{av}$  e  $\alpha_{cv}$

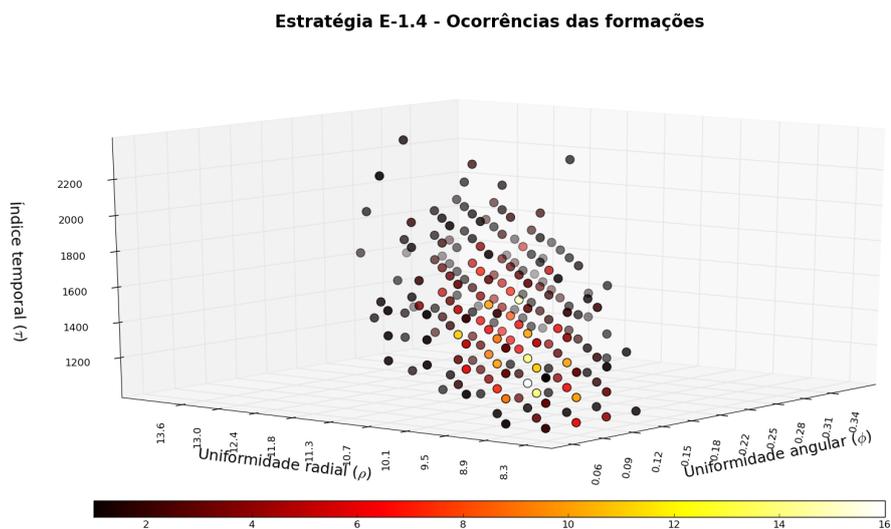


Figura 5.27 - Estratégia E-1.4: ocorrências para cada resultado das simulações que obtiveram FDVs em 100% dos casos, de acordo com os índices quantitativos.

### 5.4.2 Cálculo das forças baseado em zonas de percepção

Nesta seção serão apresentados os resultados de experimentos com a abordagem de cálculo das forças baseado em zonas de percepção, como mostrado anteriormente na Figura 5.5. O círculo concêntrico mais interno representa a zona de separação (ZS), o círculo intermediário é o da zona de alinhamento (ZA), e a zona mais externa é a de coesão (ZC). Diferentemente das estratégias descritas na seção anterior, as ações de separação, alinhamento e coesão serão tomadas dependendo da posição do vizinho em relação ao agente. Quando um vizinho está posicionado na zona de separação de um agente, então o agente será submetido à ação da força de  $F_s$ . Se o vizinho estiver na zona de alinhamento, o agente irá se alinhar a ele, por meio da força  $F_a$ . Por fim, no caso de o vizinho estar na zona de coesão, o agente irá se submeter à força de coesão (atração), via  $F_c$ . Essas forças só serão acionadas no caso de estarem definidas para as estratégias. Além disto, as forças de interação com o agente virtual ( $F_{av}$  e  $F_{cv}$ ) são acionadas sem levar em conta estas zonas.

Para a condução dos experimentos, foram utilizados os seguintes raios para as zonas de percepção:  $ZS = 2,5$  bl,  $ZA = 4,0$  bl,  $ZC = 5,5$  bl.

Seguindo a sequência de experimentos definida anteriormente, assim como realizado para as estratégias E-1, os coeficientes de controle serão analisados individualmente nesta primeira fase, enquanto os outros são fixados com o valor 1.

Ao fixar  $\alpha_c = \alpha_{av} = \alpha_{cv} = 1$  e variar  $\alpha_a$ , constatou-se que só existem resultados para as estratégias E-2.2 e E-2.3, com  $\alpha_a = 1$ . Para as outras estratégias, não existem FDVs quando  $\alpha_a$  é maior ou igual aos outros coeficientes.

Da mesma forma, apenas as estratégias E-2.2 e E-2.3 obtiveram resultados ao analisar o parâmetro  $\alpha_{av}$ , com todos os outros coeficientes fixados em 1 (Figura 5.28), e os melhores resultados foram obtidos pela E-2.2.

Os resultados obtidos ao explorar o parâmetro  $\alpha_{cv}$  individualmente (Figura 5.29) foram muito similares aos obtidos para as estratégias E-1, com a estratégia E-2.2 obtendo os melhores resultados.

Ao analisar o coeficiente de controle  $\alpha_c$ , referente à força de coesão com os vizinhos, observa-se que só existem resultados para a estratégia E-2.3, apesar de a estratégia E-2.4 também fazer uso da força de coesão  $F_c$ . Além disso, os resultados obtidos só são definidos para  $\alpha_c \leq 3$ , e percebe-se que a taxa de sucesso diminui conforme  $\alpha_c$  aumenta. Este é um resultado previsto, já que o objetivo inicial do sistema é fazer

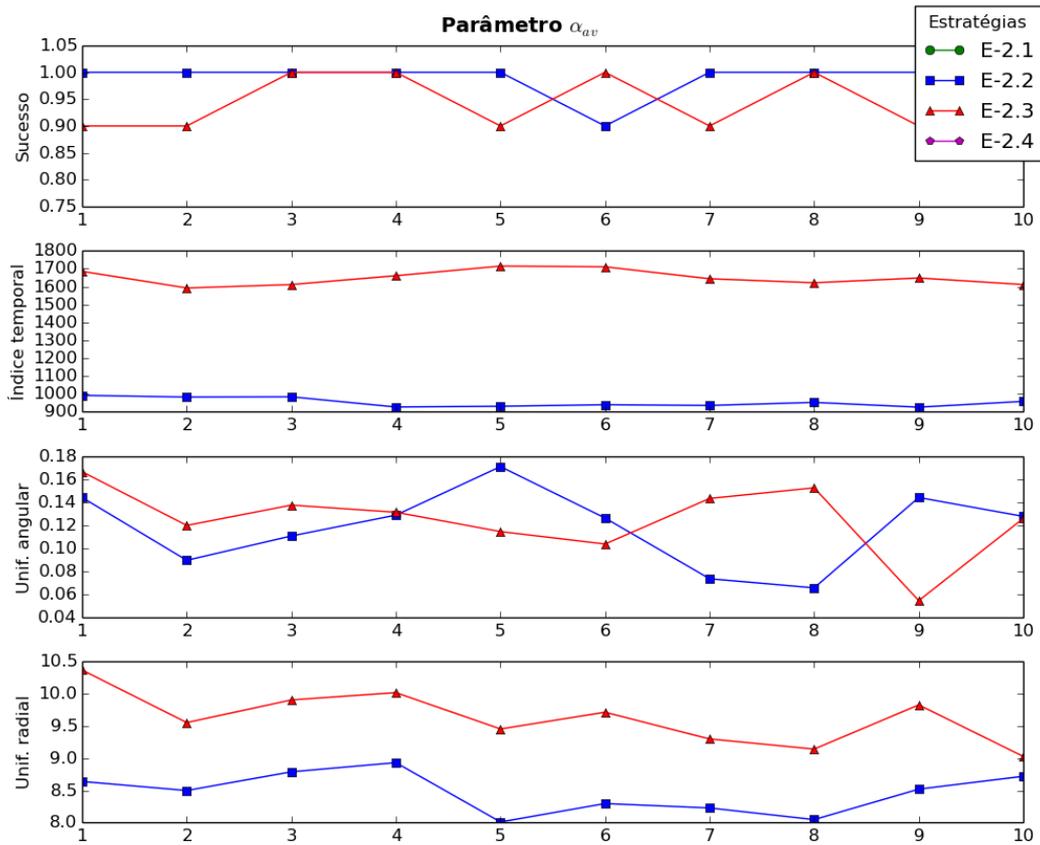


Figura 5.28 - Análise do coeficiente  $\alpha_{av}$ . Resultados obtidos para  $\alpha_{av} = \{1, \dots, 10\}$  e  $\alpha_a = \alpha_{av} = \alpha_{cv} = 1$ . *Sucesso* representa a porcentagem dos casos em que os agentes chegaram a uma FDV.

com que os agentes entrem no RIAV. Quando a força responsável por isto ( $F_{cv}$ ) é menor que as demais, o tempo para que a FDV seja atingida aumenta, e em alguns casos, aqui para  $F_c > 3$ , a formação não é sequer atingida.

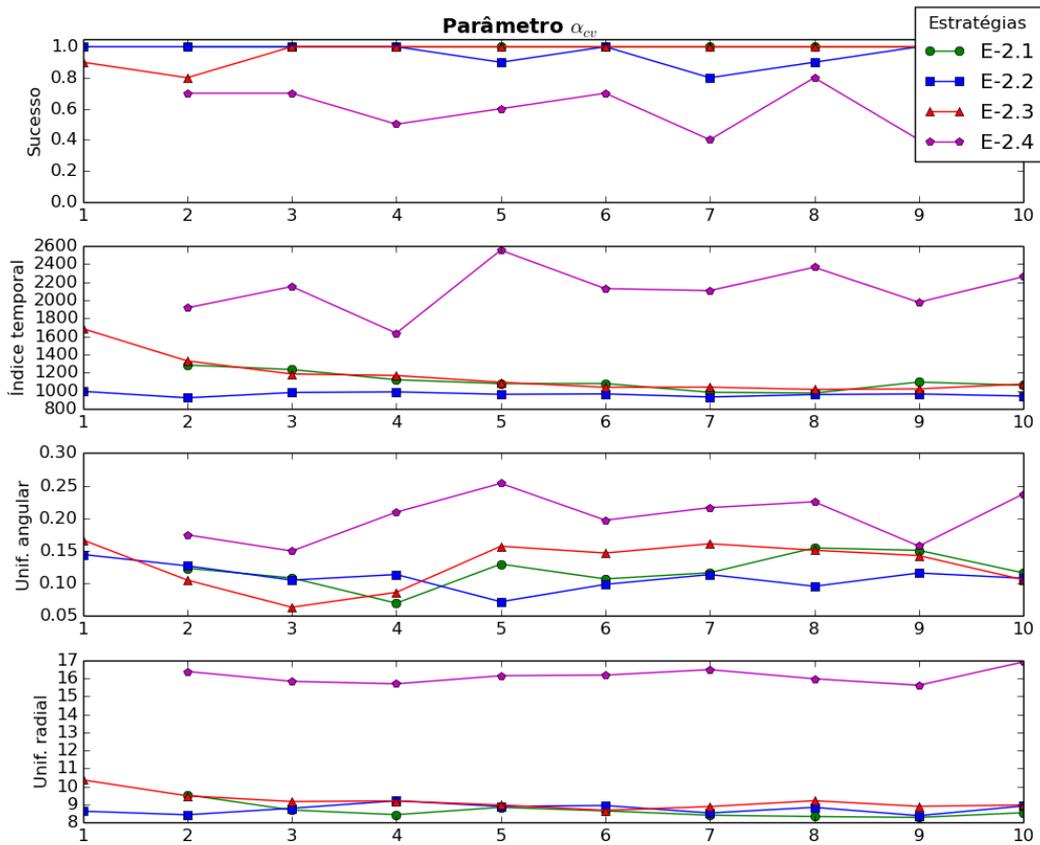


Figura 5.29 - Análise do coeficiente  $\alpha_{cv}$ . Resultados obtidos para  $\alpha_{cv} = \{1, \dots, 10\}$  e  $\alpha_a = \alpha_c = \alpha_{av} = 1$ . *Successo* representa a porcentagem dos casos em que os agentes chegaram a uma FDV.

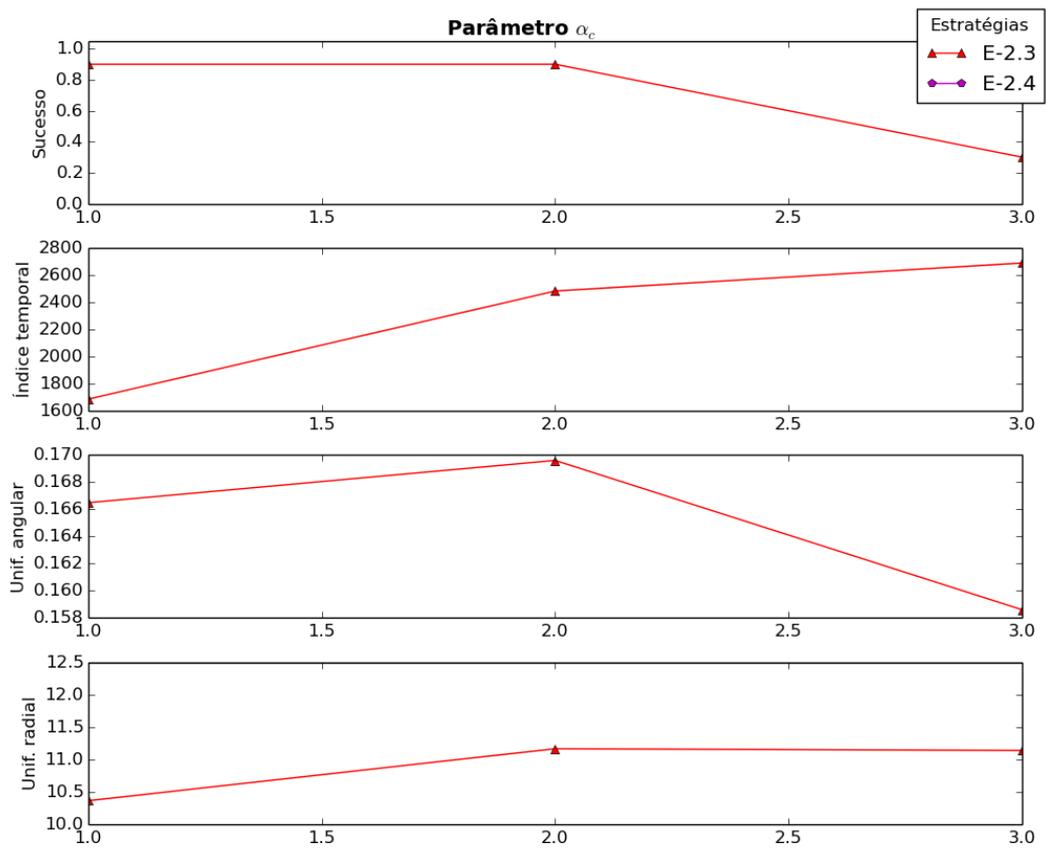


Figura 5.30 - Análise do coeficiente  $\alpha_c$ . Resultados obtidos para  $\alpha_c = \{1, \dots, 10\}$  e  $\alpha_a = \alpha_{av} = \alpha_{cv} = 1$ . *Sucesso* representa a porcentagem dos casos em que os agentes chegaram a uma FDV.

### 5.4.2.1 Estratégia E-2.1 - $F_{av}$ dentro do RIAV, e $F_a$ , $F_{av}$ e $F_{cv}$ fora

- $\alpha_a$  x  $\alpha_{av}$ : Não existem FDVs quando  $\alpha_a$  e  $\alpha_{av}$  são maiores que os demais coeficientes.
- $\alpha_a$  x  $\alpha_{cv}$ : FDVs não são atingidas quando  $\alpha_{cv} = 1$ , e quanto maior o valor de  $\alpha_{cv}$  em relação a  $\alpha_a$ , melhores os resultados para  $\tau$  e  $\phi$  (Figura 5.31).

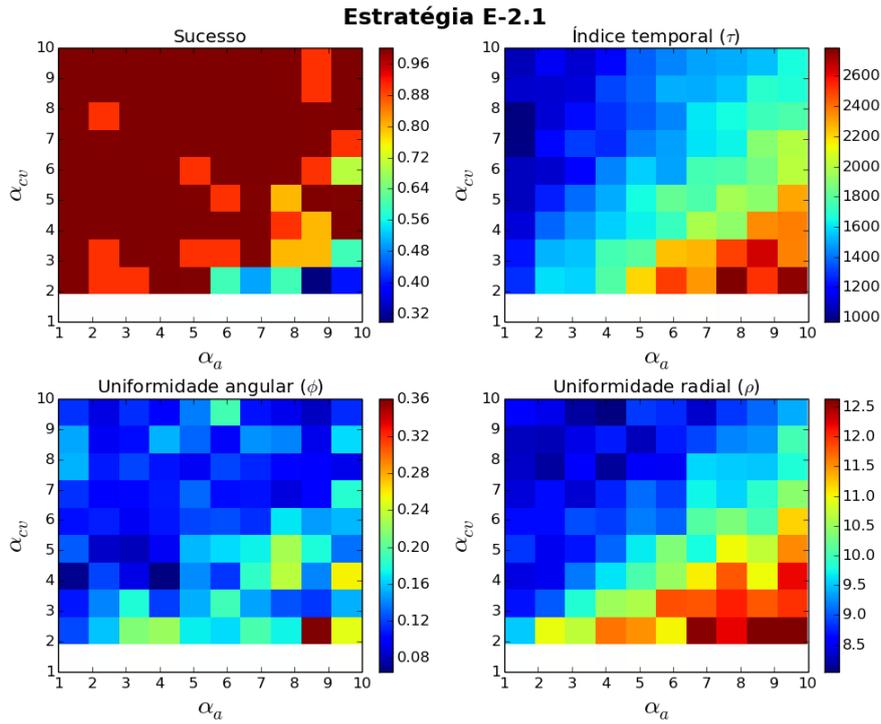


Figura 5.31 - Estratégia E-2.1: Análise dos coeficientes  $\alpha_a$  e  $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Os agentes só chegam ao objetivo quando  $\alpha_{cv} \neq 1$ .

- $\alpha_{av}$  x  $\alpha_{cv}$ : Os agentes só chegam ao objetivo quando  $\alpha_{cv} > \alpha_{av}$ , como visto na Figura 5.32. Não existem casos de sucesso onde  $\alpha_{cv} = 1$  para a estratégia E-2.1. Por este motivo, não foi gerada uma imagem para análise do fator  $\alpha_{av}$  em função de  $\alpha_a$ .

Para a análise das ocorrências que chegaram ao objetivo em 100% das simulações, foi gerada a Figura 5.33, com as ocorrências das formações.

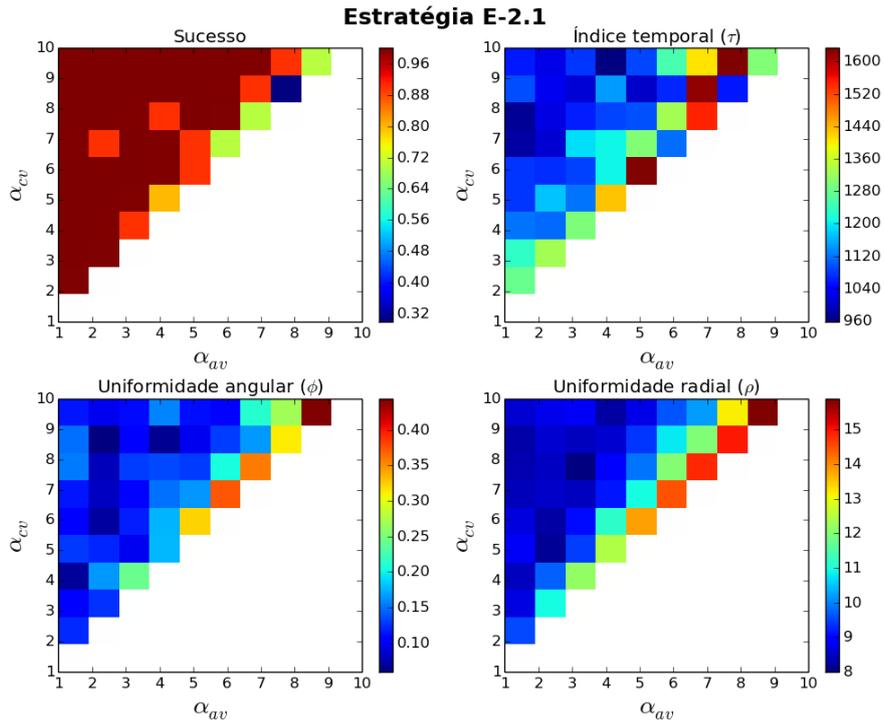


Figura 5.32 - Estratégia E-2.1: Análise dos coeficientes  $\alpha_{av}$  e  $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Os agentes só chegam ao objetivo para  $\alpha_{cv} > \alpha_{av}$  e  $\alpha_{cv} \neq 1$ .

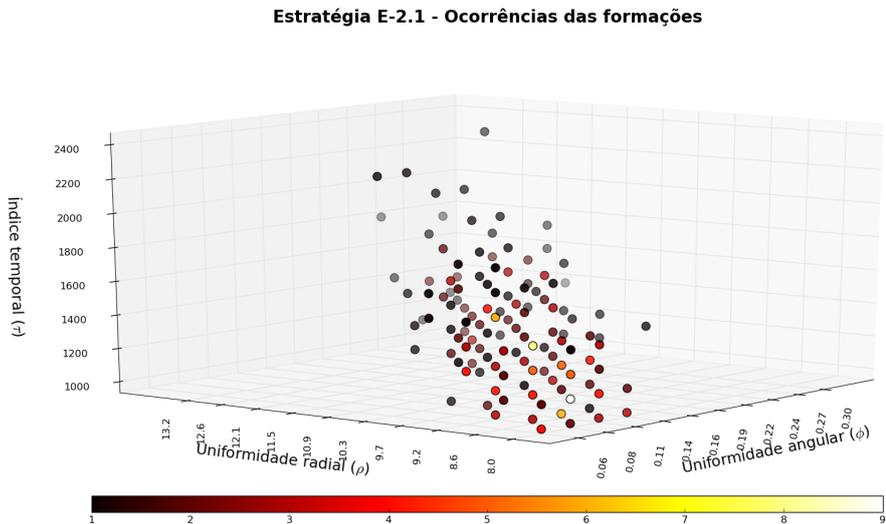


Figura 5.33 - Estratégia E-2.1: ocorrências para cada resultado das simulações que obtiveram FDVs em 100% dos casos, de acordo com os índices quantitativos.

### 5.4.2.2 Estratégia E-2.2 - $F_a$ e $F_{av}$ dentro do RIAV, e $F_{cv}$ fora

- $\alpha_a$  x  $\alpha_{av}$ : Ao verificar o parâmetro  $\alpha_{av}$  em função de  $\alpha_a$ , verifica-se que só existem FDVs quando  $\alpha_{av} \geq \alpha_a$ , e que nestes casos os valores dos índices  $\tau$ ,  $\phi$  e  $\rho$  são parecidos em todas as configurações (Figura 5.34).

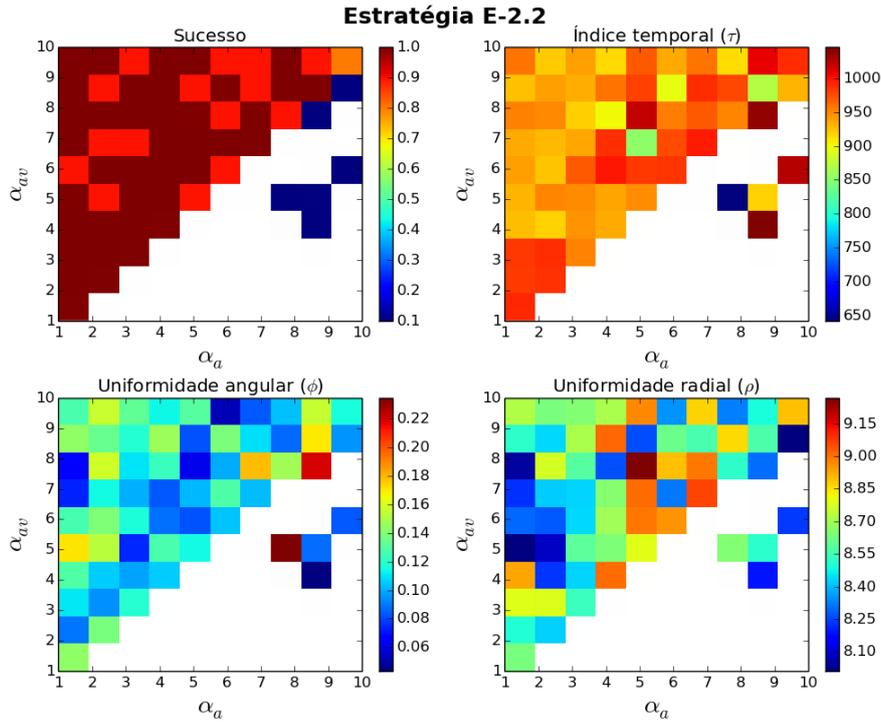


Figura 5.34 - Estratégia E-2.2: Análise dos coeficientes  $\alpha_a$  e  $\alpha_{av}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Os agentes só chegam ao objetivo quando  $\alpha_{av} \geq \alpha_a$ .

- $\alpha_a$  x  $\alpha_{cv}$ : No caso dos coeficientes  $\alpha_a$  e  $\alpha_{cv}$ , só existem resultados quando  $\alpha_a = 1$  (Figura 5.35), pois no caso da estratégia E-2.2 apenas as forças  $F_a$  e  $F_{av}$  atuam quando o agente está dentro do RIAV, e quando a intensidade de  $F_a$  é maior que  $F_{av}$ , as possibilidades de uma FDV diminuem sobremaneira.
- $\alpha_{av}$  x  $\alpha_{cv}$ : A Figura 5.36 explicita que estes dois parâmetros não possuem dependência, apresentando basicamente os mesmos resultados para as configurações estudadas.

Para a análise das ocorrências que chegaram ao objetivo em 100% das simulações, foi gerada a Figura 5.37, com as ocorrências das formações.

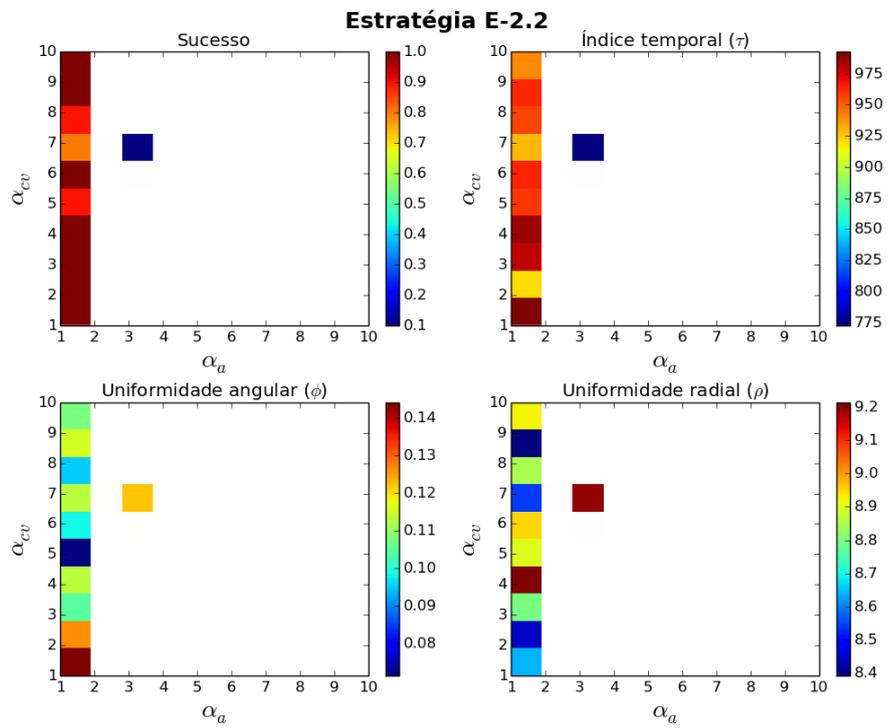


Figura 5.35 - Estratégia E-2.2: Análise dos coeficientes  $\alpha_a$  e  $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Os agentes só chegam ao objetivo quando  $\alpha_a = 1$ .

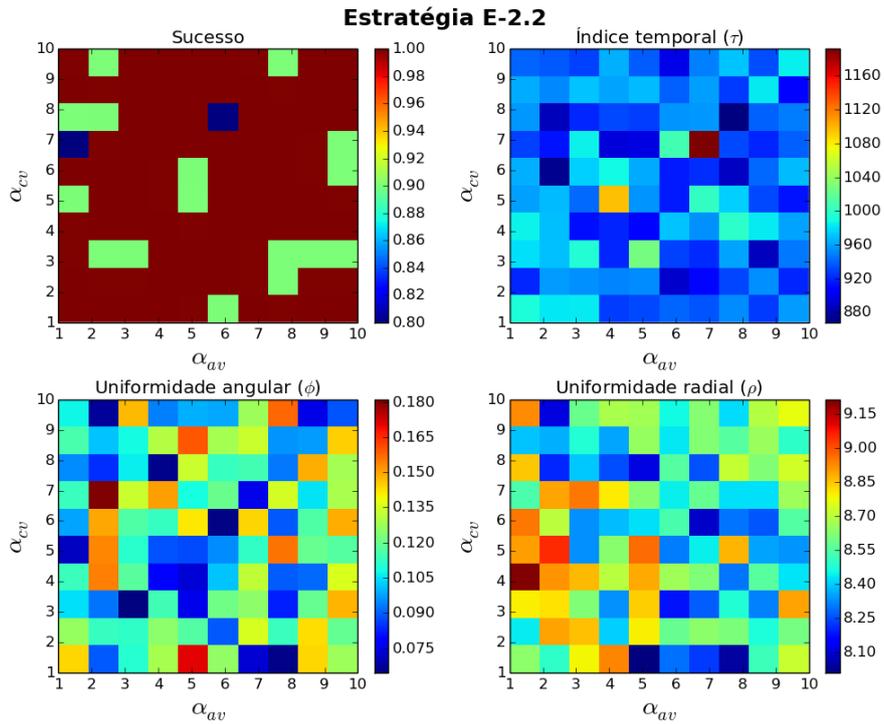


Figura 5.36 - Estratégia E-2.2: Análise dos coeficientes  $\alpha_{av}$  e  $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Estes dois parâmetros aparentemente não possuem dependências entre si.

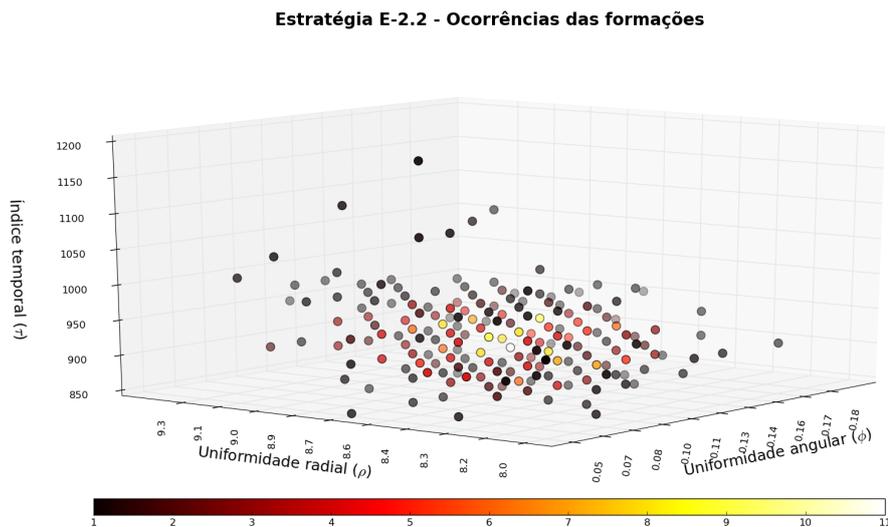


Figura 5.37 - Estratégia E-2.2: ocorrências para cada resultado das simulações que obtiveram FDVs em 100% dos casos, de acordo com os índices quantitativos.

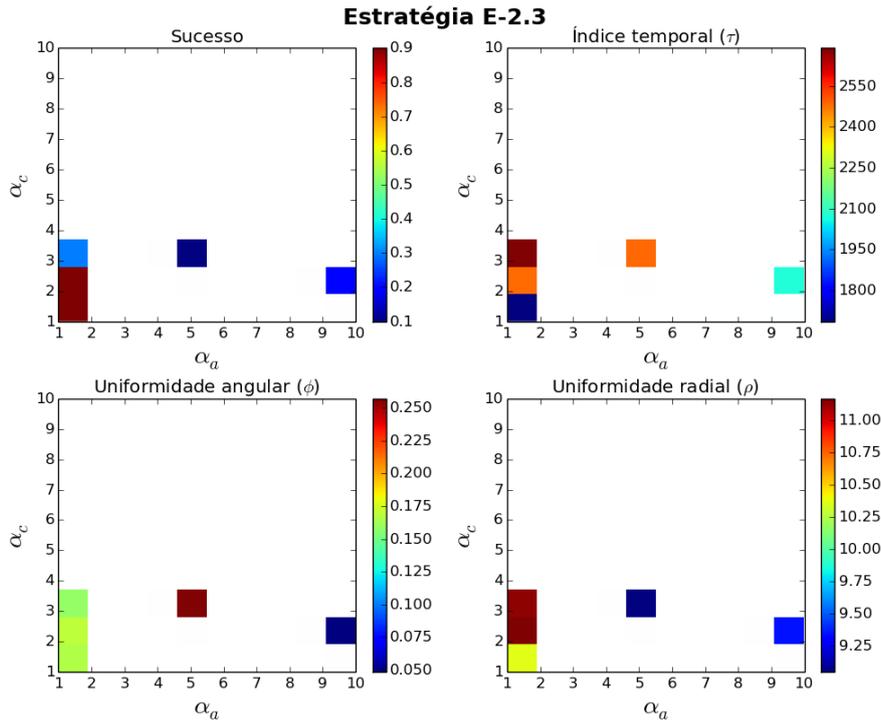


Figura 5.38 - Estratégia E-2.3: Análise dos coeficientes  $\alpha_a$  e  $\alpha_c$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Os agentes só chegam ao objetivo quando  $\alpha_a = 1$  e  $\alpha_c < 3$ .

#### 5.4.2.3 Estratégia E-2.3 - $F_a$ e $F_{av}$ dentro do RIAV, e $F_c$ e $F_{cv}$ fora

- $\alpha_a$  x  $\alpha_c$ : É esperado que o sistema não convirja quando  $\alpha_a > \alpha_{av}$  e/ou  $\alpha_c > \alpha_{cv}$ , para esta estratégia. Entretanto, ainda que de forma limitada, existem FDV, com mais de 50% de sucesso, para  $\alpha_a = 1$  e  $\alpha_c < 3$  (Figura 5.38).
- $\alpha_a$  x  $\alpha_{av}$ : Foram obtidos resultados satisfatórios apenas para  $\alpha_{av} \geq \alpha_a$  (Figura 5.39), justamente porque só existem estas duas forças atuando dentro do RIAV, e espera-se que  $F_{av}$  seja mais intensa que  $F_a$  para que haja uma FDV.
- $\alpha_a$  x  $\alpha_{cv}$ : Só existem formações definitivas para  $\alpha_a = 1$  (Figura 5.40), pois a intensidade de  $F_a$  deve ser no máximo igual a  $F_{av}$ , para que haja alinhamento com a direção do deslocamento da formação.
- $\alpha_c$  x  $\alpha_{av}$ : Os únicos casos em que FDVs foram obtidas com mais de 50% de sucesso aconteceram quando  $\alpha_c < 4$ , e quanto menor o valor de  $\alpha_c$ , menor

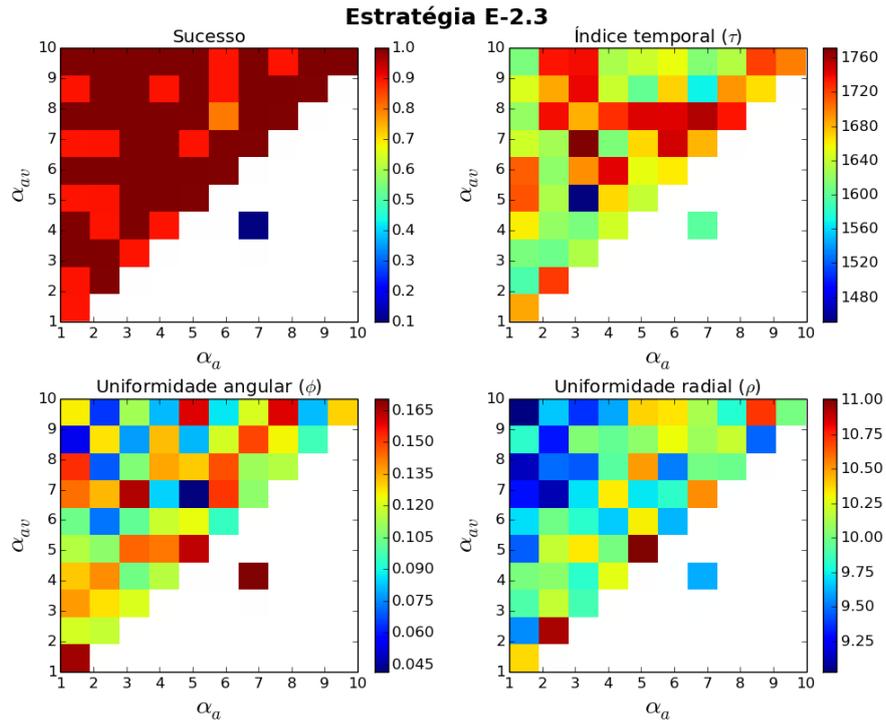


Figura 5.39 - Estratégia E-2.3: Análise dos coeficientes  $\alpha_a$  e  $\alpha_{av}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Os agentes só chegam ao objetivo quando  $\alpha_{av} \geq \alpha_a$ .

o valor do IT ( $\tau$ ).

- $\alpha_c \times \alpha_{cv}$ : Para alguns casos, em que  $\alpha_{cv} < 3$ , não foram obtidas FDVs (Figura 5.42). Entretanto, para os outros casos, as formações foram obtidas, com alta taxa de sucesso, e quanto maior o valor de  $\alpha_{cv}$ , em relação a  $\alpha_c$ , menor o IT.
- $\alpha_{av} \times \alpha_{cv}$ : Ao analisar os parâmetros  $\alpha_{av}$  e  $\alpha_{cv}$  (Figura 5.43), observou-se que os agentes chegam a formações definitivas em praticamente todas as combinações, com mais de 80% de sucesso, e quanto maior o valor de  $\alpha_{cv}$ , menor o índice temporal.

Para a análise das ocorrências que chegaram ao objetivo em 100% das simulações, foi gerada a Figura 5.44, com as ocorrências das formações.

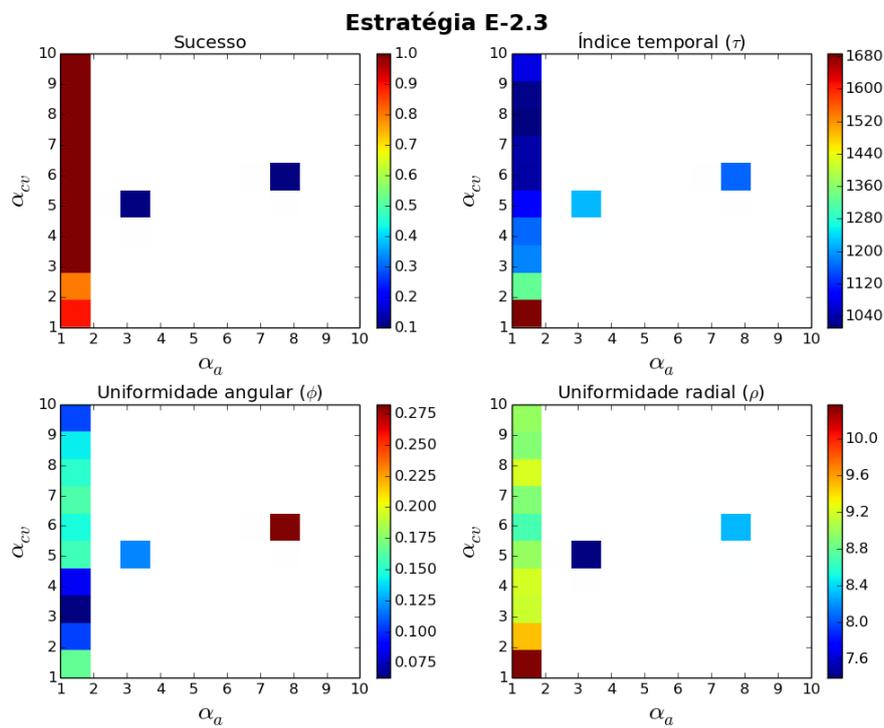


Figura 5.40 - Estratégia E-2.3: Análise dos coeficientes  $\alpha_a$  e  $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Os agentes só chegam ao objetivo quando  $\alpha_a = 1$ .

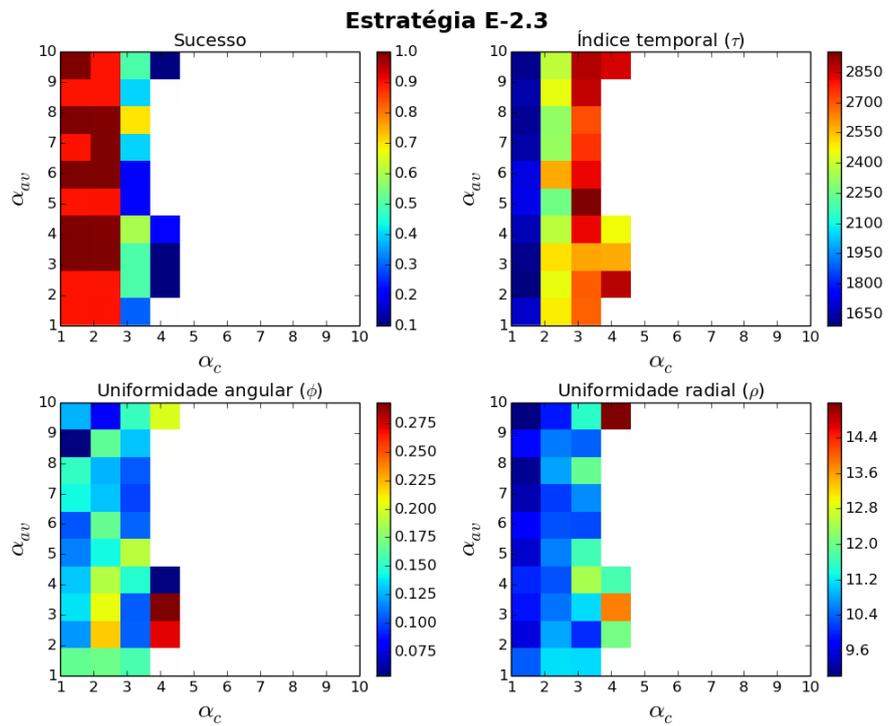


Figura 5.41 - Estratégia E-2.3: Análise dos coeficientes  $\alpha_c$  e  $\alpha_{av}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Os agentes só chegam ao objetivo, com mais de 50% sucesso, quando  $\alpha_c < 4$ .

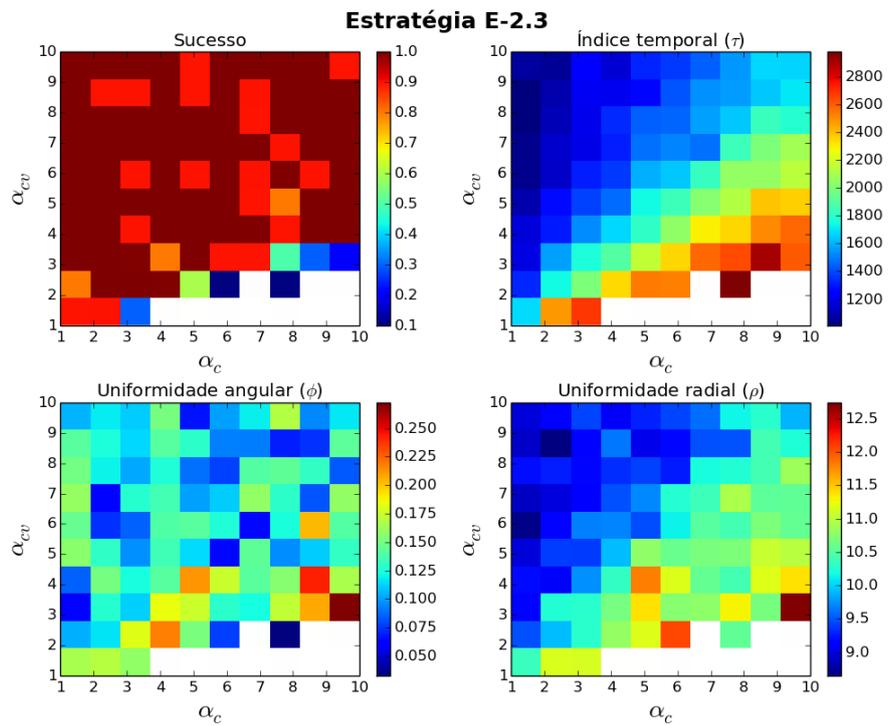


Figura 5.42 - Estratégia E-2.3: Análise dos coeficientes  $\alpha_c$  e  $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Os agentes chegam ao objetivo para a maior parte dos casos, com exceção de algumas configurações, para  $\alpha_{cv} < 3$ .

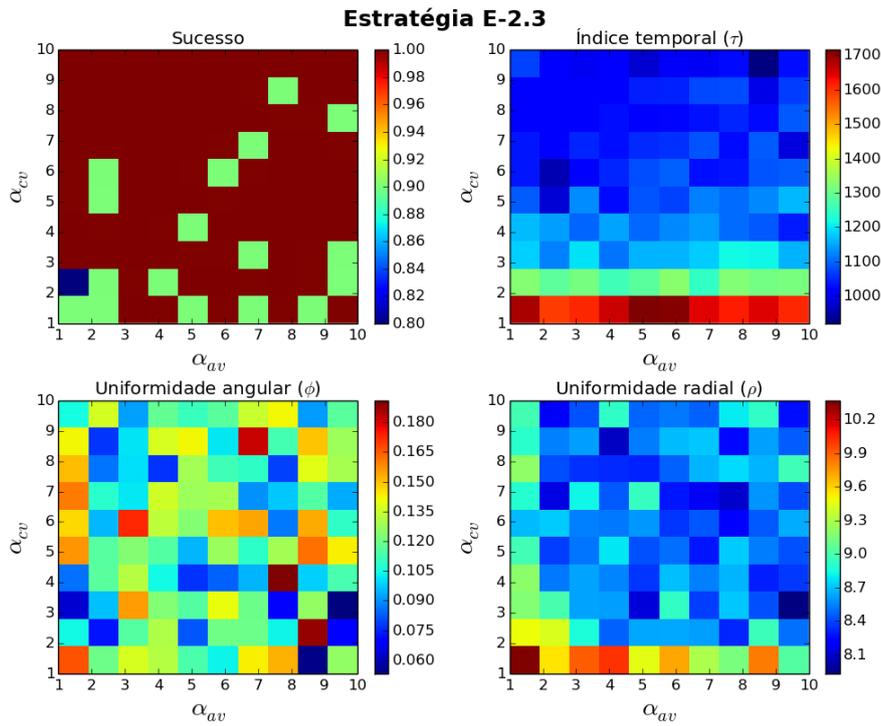


Figura 5.43 - Estratégia E-2.3: Análise dos coeficientes  $\alpha_{av}$  e  $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices. Quanto maior o valor de  $\alpha_{cv}$ , menor o índice temporal.

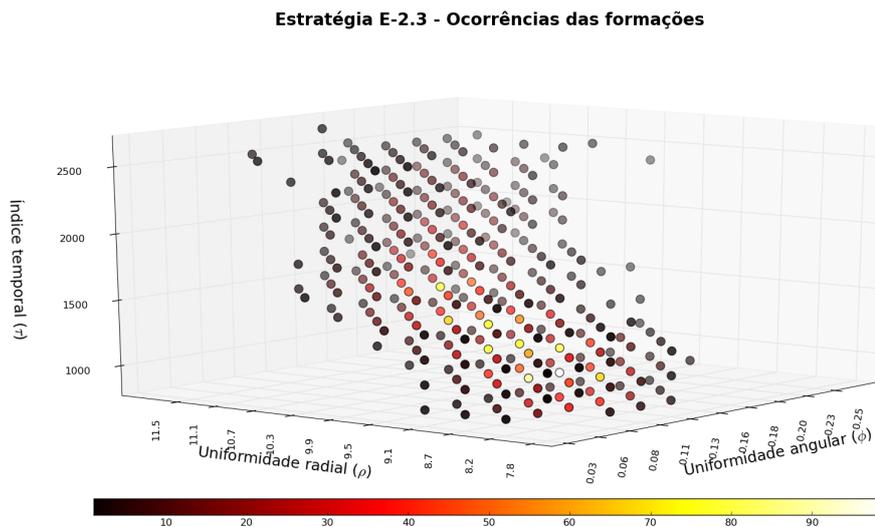


Figura 5.44 - Estratégia E-2.3: ocorrências para cada resultado das simulações que obtiveram FDVs em 100% dos casos, de acordo com os índices quantitativos.

#### 5.4.2.4 Estratégia E-2.4 - $F_a$ e $F_{av}$ dentro do RIAV, e $F_a$ , $F_c$ , $F_{av}$ e $F_{cv}$ fora

- $\alpha_a$  x  $\alpha_c$ : Não existem FDVs para  $\alpha_a$  e  $\alpha_c$  maiores ou iguais aos outros coeficientes, assim como no caso das estratégias E-1.
- $\alpha_a$  x  $\alpha_{av}$ : Também não existem FDVs para  $\alpha_a$  e  $\alpha_{av}$  maiores ou iguais aos outros coeficientes.
- $\alpha_a$  x  $\alpha_{cv}$ : Não existem FDVs para muitos casos, ao observar  $\alpha_{cv}$  em função de  $\alpha_a$  (Figura 5.45), e nos casos em que elas existem a taxa de sucesso é baixa. Em geral, observa-se que  $\alpha_{cv}$  deve ser maior que 1, e  $\alpha_a$  tem que ser igual a 1, que é o valor máximo possível para que os agentes sejam capazes de se alinharem ao agente virtual.

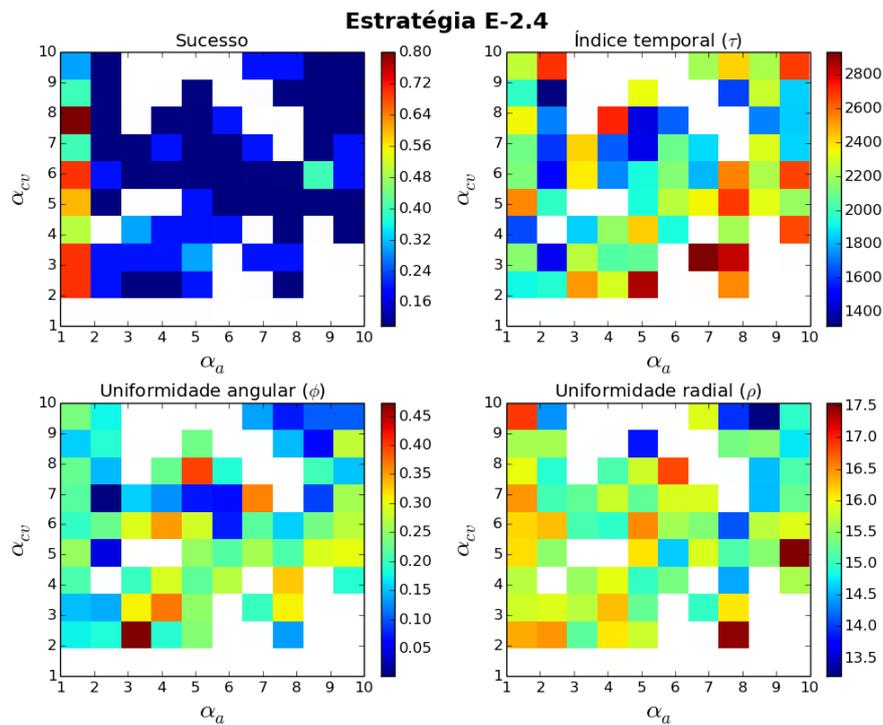


Figura 5.45 - Estratégia E-2.4: Análise dos coeficientes  $\alpha_a$  e  $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Observa-se que, em geral,  $\alpha_{cv}$  deve ser maior que 1, e  $\alpha_a$  tem que ser igual a 1.

- $\alpha_c$  x  $\alpha_{av}$ : Não existem FDVs para  $\alpha_c$  e  $\alpha_{av}$  maiores ou iguais aos outros coeficientes.

- $\alpha_c$  x  $\alpha_{cv}$ : Aparentemente não existe nenhum padrão de dependência entre os parâmetros  $\alpha_c$  e  $\alpha_{cv}$ , e não foram encontradas FDVs para algumas configurações, principalmente para  $\alpha_{cv} \leq 2$  (Figura 5.46).

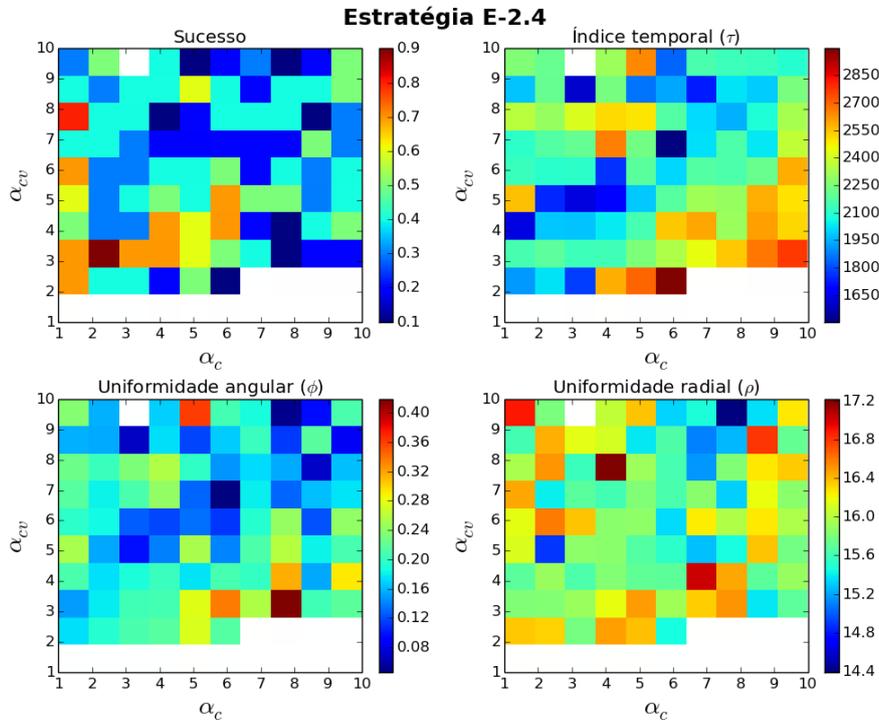


Figura 5.46 - Estratégia E-2.4: Análise dos coeficientes  $\alpha_c$  e  $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Aparentemente não existe relação de dependência entre  $\alpha_c$  e  $\alpha_{cv}$ , com baixas taxas de sucesso para a grande maioria das configurações, e não foram obtidas FDVs para  $\alpha_{cv} < 2$ .

- $\alpha_{av}$  x  $\alpha_{cv}$ : Observou-se que só foram obtidas FDVs para  $\alpha_{cv} > \alpha_{av}$  (Figura 5.47), e em nenhuma das configurações a taxa de sucesso foi de 100%.

Apenas 7 configurações tiveram êxito em 100% das simulações, segundo mostra a Figura 5.48, com as ocorrências das formações.

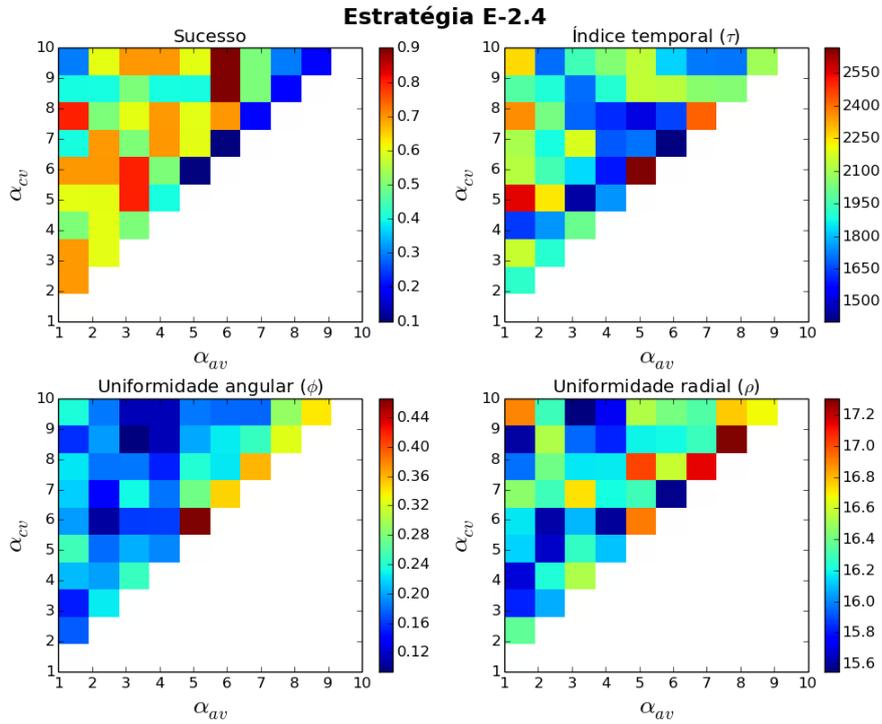


Figura 5.47 - Estratégia E-2.4: Análise dos coeficientes  $\alpha_{av}$  e  $\alpha_{cv}$ . As cores dizem respeito aos valores dos índices, e as regiões em branco representam formações definitivas não viáveis. Os agentes só chegam ao objetivo para  $\alpha_{cv} > \alpha_{av}$ .

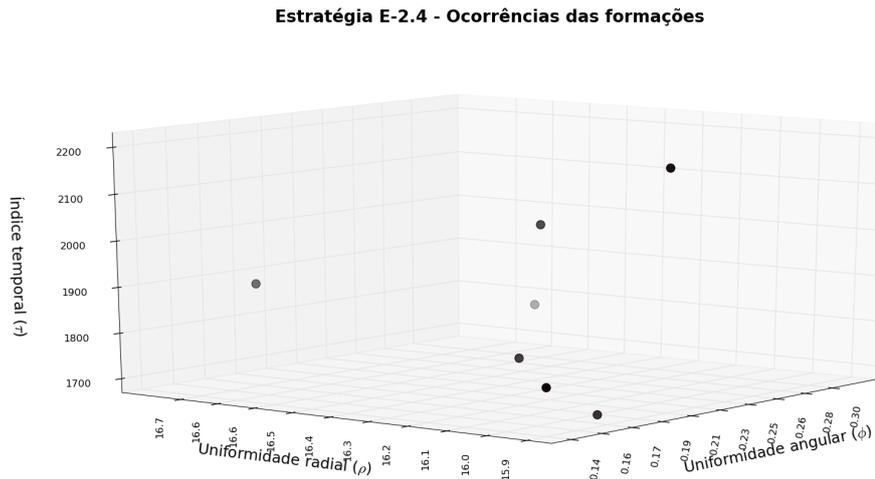


Figura 5.48 - Estratégia E-2.4: ocorrências para cada resultado das simulações que obtiveram FDVs em 100% dos casos, de acordo com os índices quantitativos.

### 5.4.3 Resultados das estratégias

Todas as configurações das estratégias foram categorizadas, segundo os melhores resultados. Os menores e maiores tempos obtidos foram elencados nas Tabelas 5.2 e 5.3. Caso se deseje obter formações rapidamente, sem se preocupar com a forma, mas apenas com o tempo, então a estratégia E-2.2 é a melhor opção, com a configuração  $\alpha_a = 8$ ,  $\alpha_{av} = 9$  e  $\alpha_{cv} = 4$ . Ao observar os maiores tempos, na Tabela 5.3, vê-se que as estratégias E-1.2 e E-2.2 apresentam tempos muito inferiores às demais, mostrando que o intervalo entre o menor e o maior  $\tau$  é pequeno para todas as configurações analisadas. Em outras palavras, a convergência para formações definitivas é rápida para todos os casos.

Tabela 5.2 - Configurações que resultaram nos menores tempos ( $\tau$ ) para as estratégias estudadas. O menor tempo foi obtido pela estratégia E-2.2.

Estratégia	$\alpha_a$	$\alpha_c$	$\alpha_{av}$	$\alpha_{cv}$	<b>IT</b>	IUA	IUR
E-1.1	1	-	2	10	<b>970</b>	0,09	6,94
E-1.2	4	-	10	6	<b>851</b>	0,12	8,14
E-1.3	5	1	9	10	<b>936</b>	0,09	8,47
E-1.4	2	1	6	9	<b>1040</b>	0,16	10,81
E-2.1	1	-	4	10	<b>959</b>	0,16	8,25
E-2.2	8	-	9	4	<b>846</b>	0,05	8,71
E-2.3	2	1	4	10	<b>894</b>	0,15	8,85
E-2.4	1	7	5	9	<b>1668</b>	0,20	16,09

Tabela 5.3 - Configurações que resultaram nos maiores tempos ( $\tau$ ) para as estratégias estudadas. O maior tempo foi obtido pela estratégia E-1.3.

Estratégia	$\alpha_a$	$\alpha_c$	$\alpha_{av}$	$\alpha_{cv}$	<b>IT</b>	IUA	IUR
E-1.1	7	-	1	3	<b>2467</b>	0,19	10,89
E-1.2	2	-	5	9	<b>1155</b>	0,14	8,56
E-1.3	3	7	10	3	<b>2747</b>	0,16	10,76
E-1.4	1	10	2	4	<b>2417</b>	0,15	12,18
E-2.1	10	-	1	4	<b>2378</b>	0,26	12,20
E-2.2	1	-	7	7	<b>1192</b>	0,08	8,58
E-2.3	6	5	9	2	<b>2739</b>	0,12	11,12
E-2.4	5	2	5	10	<b>2187</b>	0,21	16,00

A seguir são apresentadas as configurações que resultaram nos menores e maiores valores de  $\phi$ , nas Tabelas 5.4 e 5.5, respectivamente. O menor  $\phi$  foi obtido pela

estratégia E-2.3, apesar de não ser um resultado muito melhor que as demais estratégias, as quais obtiveram valores próximos. A única disparidade foi encontrada pela estratégia E-2.4, que obteve um valor de  $\phi$  muito maior que os demais. Com relação às configurações com os maiores valores de  $\phi$ , da Tabela 5.5, o maior valor encontrado foi o da estratégia E-2.4, novamente.

Tabela 5.4 - Configurações que resultaram nos menores valores de  $\phi$  para as estratégias estudadas. O menor  $\phi$  foi obtido pela estratégia E-2.3.

Estratégia	$\alpha_a$	$\alpha_c$	$\alpha_{av}$	$\alpha_{cv}$	IT	IUA	IUR
E-1.1	5	-	3	7	1432	<b>0,06</b>	8,26
E-1.2	5	-	8	4	907	<b>0,05</b>	8,26
E-1.3	5	2	8	9	1064	<b>0,04</b>	8,45
E-1.4	2	6	3	10	1429	<b>0,06</b>	9,24
E-2.1	3	-	2	7	1231	<b>0,06</b>	8,83
E-2.2	8	-	9	4	846	<b>0,05</b>	8,71
E-2.3	1	4	4	9	1234	<b>0,03</b>	8,64
E-2.4	2	4	3	9	1818	<b>0,14</b>	15,93

Tabela 5.5 - Configurações que resultaram nos maiores valores de  $\phi$  para as estratégias estudadas. O maior  $\phi$  foi obtido pela estratégia E-1.4.

Estratégia	$\alpha_a$	$\alpha_c$	$\alpha_{av}$	$\alpha_{cv}$	IT	IUA	IUR
E-1.1	1	-	8	10	1564	<b>0,31</b>	13,30
E-1.2	7	-	8	9	965	<b>0,20</b>	8,59
E-1.3	6	4	6	2	2357	<b>0,29</b>	11,09
E-1.4	3	5	7	9	1485	<b>0,38</b>	13,08
E-2.1	5	-	6	9	1475	<b>0,33</b>	12,07
E-2.2	5	-	8	6	960	<b>0,20</b>	8,83
E-2.3	2	8	10	4	2461	<b>0,28</b>	10,13
E-2.4	1	3	6	8	1783	<b>0,32</b>	16,66

As Tabelas 5.6 e 5.6 apresentam as configurações que resultaram nos menores e maiores valores do  $\rho$ . Nestes casos, estas configurações são as mais indicadas quando o objetivo é levar o sistema a formações em que os agentes fiquem muito próximos uns dos outros ( $\rho$  pequeno), ou distantes ( $\rho$  grande), sem levar em conta o tempo ( $\tau$ ) necessário, ou o espalhamento ao redor do agente virtual ( $\phi$ ).

Tabela 5.6 - Configurações que resultaram nos menores valores de  $\rho$  para as estratégias estudadas. O menor  $\rho$  foi obtido pela estratégia E-1.1.

Estratégia	$\alpha_a$	$\alpha_c$	$\alpha_{av}$	$\alpha_{cv}$	IT	IUA	<b>IUR</b>
E-1.1	4	-	1	10	1314	0,15	<b>6,65</b>
E-1.2	3	-	10	10	920	0,07	<b>7,83</b>
E-1.3	4	1	7	4	1118	0,07	<b>7,98</b>
E-1.4	1	1	3	8	1162	0,11	<b>8,34</b>
E-2.1	1	-	3	8	1062	0,13	<b>8,00</b>
E-2.2	1	-	5	1	932	0,17	<b>8,01</b>
E-2.3	2	2	7	7	1182	0,05	<b>7,84</b>
E-2.4	2	4	3	9	1818	0,14	<b>15,93</b>

Tabela 5.7 - Configurações que resultaram nos maiores valores de  $\rho$  para as estratégias estudadas. O maior  $\rho$  foi obtido pela estratégia E-2.4.

Estratégia	$\alpha_a$	$\alpha_c$	$\alpha_{av}$	$\alpha_{cv}$	IT	IUA	<b>IUR</b>
E-1.1	1	-	8	10	1564	0,31	<b>13,30</b>
E-1.2	8	-	9	6	1044	0,13	<b>9,47</b>
E-1.3	5	10	8	5	2421	0,26	<b>11,58</b>
E-1.4	1	4	8	10	1710	0,32	<b>14,18</b>
E-2.1	7	-	3	4	1899	0,26	<b>13,81</b>
E-2.2	5	-	10	4	951	0,11	<b>9,41</b>
E-2.3	2	7	8	3	2540	0,20	<b>11,89</b>
E-2.4	2	3	6	9	1910	0,20	<b>16,82</b>

## 5.5 Conclusões

Neste capítulo apresentou-se um modelo fenomenológico para convergência de agentes em movimento de deslocamento de formação em direções pré-estabelecidas. Para tanto, os agentes foram submetidos a ajustes no módulo de suas velocidades, e o cálculo da força resultante das interações com outros agentes foi feito via ponderação das forças individuais (repulsão, alinhamento, atração), utilizando coeficientes de controle. Oito estratégias foram analisadas experimentalmente, cada uma fazendo uso de diferentes forças de interação entre agentes. Para cada estratégia foram avaliadas dez mil configurações dos coeficientes de controle, por meio do cálculo de índices quantitativos das formações obtidas. Por fim, foram elencadas as configurações de cada estratégia que obtiveram os menores e maiores índices.

## 6 MODELO DE PARTÍCULAS COM DINÂMICA DE OSCILADORES ACOPLADOS

Neste capítulo será descrito um modelo de partículas com dinâmica de osciladores acoplados (PDOA), se movendo no plano e com velocidade unitária. Com esse modelo, espera-se explorar estratégias para estabilizar formações de grupos de agentes, de forma a se obter formações paralelas ou circulares. Esse modelo foi desenvolvido por Sepulchre et al. (2007), Paley et al. (2007) e Paley (2007), e será utilizado como base para alguns experimentos.

As partículas representam  $N$  indivíduos idênticos, definidos por suas posições e direções de movimento. Todas possuem massa unitária, se deslocam à velocidade unitária, e podem manobrar segundo algumas leis de interação, sem alterar o módulo de sua velocidade. A posição de cada partícula é dada por  $r_k = x_k + iy_k \in \mathbb{C}$ , e a direção do vetor de velocidade por  $e^{i\theta_k} = \cos \theta_k + i \sin \theta_k$ , sendo  $\theta_k \in \mathbb{R}$  a fase da partícula  $k$ , para  $k = 1, \dots, N$ . Esse valor de fase representa um ponto na circunferência unitária  $S^1$ , que é o espaço de ângulos, e a coleção de todas as fases resulta no N-torus  $\mathbb{T}^N$ , que é igual a  $S_1 \times \dots \times S_1$  ( $N$  vezes).

Seja  $\mathbf{r} \doteq (r_1, \dots, r_N)^T \in \mathbb{C}^N$  o vetor de posições das partículas,  $\boldsymbol{\theta} \doteq (\theta_1, \dots, \theta_N)^T \in \mathbb{T}^N$  o vetor de velocidades, e  $u_k(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta})$  o controle de manobras, que é uma lei de controle por retroalimentação, definida em termos de  $\mathbf{r}$  e  $\boldsymbol{\theta}$ .

Sendo assim, o modelo de partículas é

$$\dot{r}_k = e^{i\theta_k} \tag{6.1a}$$

$$\dot{\theta}_k = u_k(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}) \tag{6.1b}$$

Neste modelo, assume-se um controle idêntico para todas as partículas, o que não seria possível no caso de serem introduzidos, por exemplo, partículas com comportamento de líder (SEPULCHRE et al., 2007). O controle  $u_k$  é dividido em três componentes

$$u_k = \omega_0 + u_k^{spac}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}) + u_k^{ori}(\boldsymbol{\theta}) \tag{6.2}$$

com  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  sendo uma constante,  $u_k^{spac}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta})$  o controle espacial, o qual governa as regras de proximidade entre partículas, e  $u_k^{ori}(\boldsymbol{\theta})$  o controle de orientação, que define a direção do movimento.

Quando  $u_k = 0$  para todas as partículas, então cada uma delas irá se mover em linha reta, seguindo sua orientação inicial  $\theta_k(0)$ .

A constante  $\omega_0$  é também chamada de frequência natural, pois no caso em que  $\omega_0 \neq 0$  e  $u_k^{spac} = u_k^{ori} = 0$ , as partículas descrevem um movimento circular com frequência angular  $\omega_0$  e raio  $|\omega_0|^{-1}$ . Neste caso, a rotação ocorre em sentido anti-horário para  $\omega_0 > 0$ , e horário para  $\omega_0 < 0$ .

O centro de rotação da  $k$ -ésima partícula é

$$c_k \doteq r_k + \omega_0^{-1} i e^{i\theta_k} \quad (6.3)$$

O centro de massa do grupo é dado pela equação 6.4 a seguir

$$R \doteq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_j \quad (6.4)$$

Seja  $r_{kj} \doteq r_k - r_j$  e  $\theta_{kj} \doteq \theta_k - \theta_j$  respectivamente a posição e a fase da partícula  $k$  em relação à partícula  $j$ .

- Se  $\dot{\theta}_k = 0$  e  $\theta_k = \theta_j$  para todos os pares  $j$  e  $k$ , as partículas apresentam uma formação em paralelo, com direções constantes e idênticas.
- Se  $\dot{\theta}_{kj} = 0$  e  $c_k = c_j$  para todos os pares  $j$  e  $k$ , elas descrevem uma formação circular, se movendo ao redor do mesmo círculo, na mesma direção.

O controle  $u_k$  é  $2\pi$ -periódico, o que significa que  $u_k(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta} + 2\pi\mathbf{1}) = u_k(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta})$ , sendo  $\mathbf{1} \doteq (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^N$ .

## 6.1 Modelo de fase todos-com-todos

Ao ignorar o controle espacial  $u_k^{spac}$ , atribuindo  $u_k^{spac} = 0$  para  $k = 1, \dots, N$ , tem-se o modelo de fase a seguir

$$\dot{\theta} = \omega_0 + u_k^{ori}(\boldsymbol{\theta}), k = 1, \dots, N, \quad (6.5)$$

que é um sistema de osciladores de fase acoplados, com frequência natural  $\omega_0$  idêntica. Há travamento de fase (*phase-lock*) quando  $\dot{\theta}_{kj} = 0$ , para todos os pares de fases  $\theta_k$  e  $\theta_j$ .

O parâmetro de ordem  $p_\theta$ , também chamado de parâmetro de ordem complexa (STROGATZ, 2000), é uma medida do nível de sincronização, e é definido por

$$p_\theta \doteq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \quad (6.6)$$

A norma  $|p_\theta| \in [0, 1]$  assume valor zero quando as fases das partículas estão uniformemente distribuídas no círculo (arranjo de fases balanceado), e  $|p_\theta| = 1$  quando as partículas viajam em formação paralela ( $\theta_1 = \dots = \theta_N$ ), como nos exemplos da Figura 6.1.

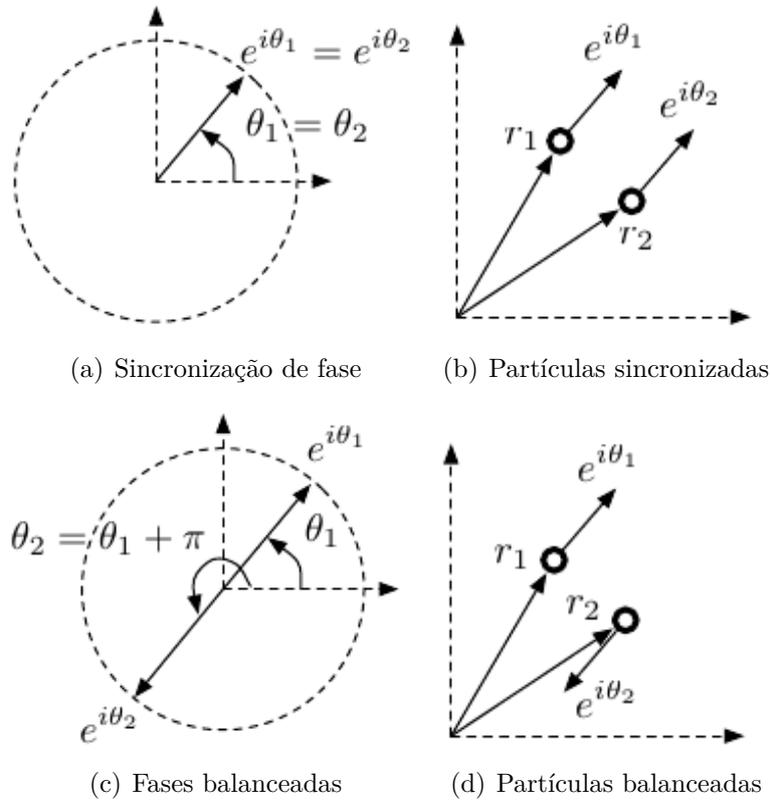


Figura 6.1 - Fases sincronizadas e balanceadas para  $N = 2$ .

Observa-se que a média das amplitudes das velocidades das partículas corresponde ao parâmetro de ordem (SEPULCHRE et al., 2007), isto é,

$$\dot{R} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \dot{r}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \doteq p_\theta.$$

Para criar um controle para o modelo, o ponto chave é controlar a magnitude do parâmetro de ordem (SEPULCHRE et al., 2007). Neste sentido, considere o potencial de fase

$$\mathcal{U}_1(\boldsymbol{\theta}) = \frac{N}{2} |p_\theta|^2 \quad (6.7)$$

o qual é maximizado por arranjos de fase sincronizados, e minimizado por arranjos de fase balanceados. O gradiente de  $\mathcal{U}_1(\boldsymbol{\theta})$  é dado por

$$\frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial \theta_k} = \langle i e^{i\theta_k}, p_\theta \rangle, k = 1, \dots, N. \quad (6.8)$$

Este produto interno é definido por  $\langle z_1, z_2 \rangle = \text{Re}\{z_1^* z_2\} = \text{Re}\{z_2^* z_1\}$ , para  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , e  $*$  representa o complexo conjugado. Este produto é equivalente ao produto interno no  $\mathbb{R}^2$ . Exemplo: considere  $\langle z_1, z_2 \rangle$  com  $z_k = x_k + iy_k$ ,  $k = 1, 2$ , então  $\text{Re}\{(x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)\} = x_1 x_2 + y_1 y_2$  (PALEY, 2007).

Os maximizadores e minimizadores globais do potencial  $\mathcal{U}_1(\boldsymbol{\theta})$  representam configurações sincronizadas e balanceadas, respectivamente. Um controle  $u_k^{ori}$  que leva o modelo definido em 6.5 até suas extremidades é o gradiente de  $\mathcal{U}_1(\boldsymbol{\theta})$  multiplicado pelo ganho não nulo  $-K$ ,

$$u_k^{ori} = -K \langle i e^{i\theta_k}, p_\theta \rangle, k = 1, \dots, N \quad (6.9)$$

Sendo assim,

$$\langle i e^{i\theta_k}, p_\theta \rangle = \langle i(\cos \theta_k + i \sin \theta_k), p_\theta \rangle = \langle -\sin \theta_k + i \cos \theta_k, p_\theta \rangle$$

Multiplicando os dois termos,

$$\begin{aligned}
& (-\sin \theta_k - i \cos \theta_k) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\cos \theta_j + i \sin \theta_j) = \\
& \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (-\sin \theta_k \cos \theta_j - i \sin \theta_k \sin \theta_j - i \cos \theta_k \cos \theta_j + \cos \theta_k \sin \theta_j)
\end{aligned}$$

Considerando apenas a parte real,

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\sin \theta_j \cos \theta_k - \cos \theta_j \sin \theta_k)$$

Substituindo este resultado na eq. 6.9,

$$\begin{aligned}
u_k^{ori} &= -K \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\sin \theta_j \cos \theta_k - \cos \theta_j \sin \theta_k) = \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N (\cos \theta_j \sin \theta_k - \cos \theta_k \sin \theta_j) = \\
& \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_k - \theta_j)
\end{aligned}$$

Logo, o modelo 6.5 com o controle 6.9 é equivalente a

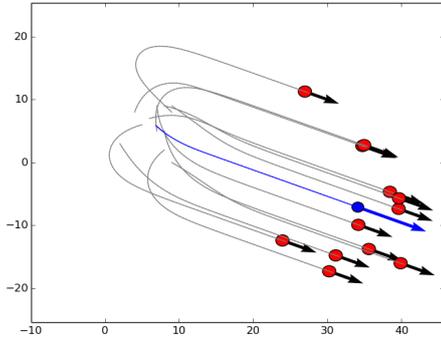
$$\dot{\theta}_k = \omega_0 + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin \theta_{kj} \tag{6.10}$$

Para  $K < 0$ , o sistema 6.10 é uma versão simplificada do modelo de Kuramoto (KURAMOTO, 1984), abordado na Seção 3.3. A diferença é que aqui considera-se que todos os osciladores possuem mesma frequência natural  $\omega_0$ , e no caso do modelo de Kuramoto cada oscilador possui uma frequência própria.

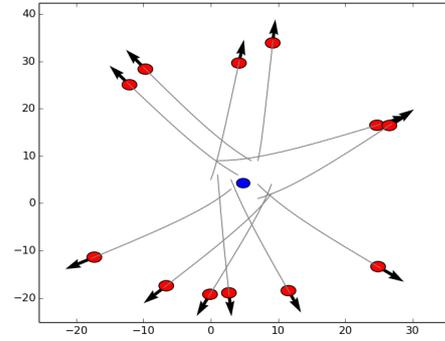
Paley et al. (2007) mostraram que se  $K < 0$ , então todos os arranjos de fase sincronizados ( $|p_\theta| = 1$ ) são assintoticamente estáveis, e os demais pontos de equilíbrio são instáveis. Da mesma maneira, quando  $K > 0$ , apenas os arranjos de fase balanceados ( $p_\theta = 0$ ) são assintoticamente estáveis, enquanto que os demais pontos de equilíbrio são instáveis. Os pontos de equilíbrio do sistema 6.10 satisfazem  $\sin \theta_{kj} = 0$  para todos  $j, k \in \{1, \dots, N\}$ .

Na Figura 6.2, são apresentados alguns resultados do modelo de partículas 6.1 com

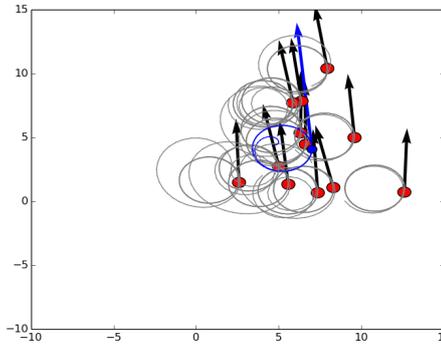
controle 6.10.



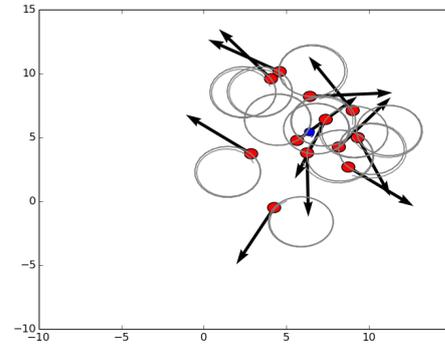
(a)  $\omega_0 = 0$  e  $K < 0$ . Fases sincronizadas.



(b)  $\omega_0 = 0$  e  $K > 0$ . Fases balanceadas.



(c)  $\omega_0 \neq 0$  e  $K < 0$ . Fases sincronizadas.



(d)  $\omega_0 \neq 0$  e  $K > 0$ . Fases balanceadas.

Figura 6.2 - Quatro tipos de movimento coletivo obtidos pelo controle de orientação 6.10 e  $N = 12$ . A posição  $r_k$  da partícula, com  $k \in \{1, \dots, 12\}$  é um círculo vermelho, e a velocidade  $e^{i\theta_k}$  é uma flecha preta. O centro de massa  $R$  é o círculo azul, e a velocidade do centro de massa  $\dot{R} = p_\theta$  é a flecha azul que sai dele. Animações disponíveis no link: <http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3LEC74S>.

## 6.2 Interações limitadas por uma rede

Apresentamos nesta seção um controle que leva em conta interações limitadas a um grafo conectado e não-direcionado  $G$ , em que cada partícula enxerga apenas um grupo seletivo de vizinhos. Para tanto será utilizado o controle espacial  $u_k^{spac}$ .

A ideia é generalizar o Potencial de fase 6.7 por meio da Forma Quadrática Laplaciana a seguir:

$$Q_L(\mathbf{x}) \doteq \langle \mathbf{x}, L\mathbf{x} \rangle \quad (6.11)$$

Seja  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \doteq \sum_{j=1}^N \langle x_j, y_j \rangle$ , com  $\mathbf{x} \doteq (x_1, \dots, x_N)^T \in \mathbb{C}^N$  e  $\mathbf{y} \doteq (y_1, \dots, y_N)^T \in \mathbb{C}^N$ , e a matriz Laplaciana de  $G$  representada por  $L$ .

Como  $G$  é não-direcionado e conectado, então  $L = BB^T$  (vide Seção 3.4), logo a forma quadrática 6.11 é proporcional ao comprimento total das arestas do grafo, ou seja

$$Q_L(\mathbf{x}) \doteq \langle B^T \mathbf{x}, B^T \mathbf{x} \rangle = \sum_{(j,k) \in E} |x_j - x_k|^2 \quad (6.12)$$

sendo  $E$  o conjunto de arestas do grafo  $G$ . Quando  $G$  é não-direcionado e conectado, então  $Q_L(\mathbf{x}) = 0$  se e somente se  $\mathbf{x}$  é gerado pela base  $\mathbf{1}$ , e  $Q_L(\mathbf{x}) > 0$  caso contrário.

Substituindo  $\mathbf{x}$  pelo vetor de velocidades  $e^{i\boldsymbol{\theta}} \doteq (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N})^T$ , tem-se o Potencial de Fase Laplaciano definido na equação 6.13, o qual generaliza o potencial de fase 6.7 para interação de partículas todos-com-todos. Fazendo

$$U_1(\boldsymbol{\theta}) = \frac{N}{2} \langle p_\theta, p_\theta \rangle = \frac{1}{2N} \langle \mathbf{1}^T e^{i\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{1}^T e^{i\boldsymbol{\theta}} \rangle = \frac{1}{2} \left\langle e^{i\boldsymbol{\theta}}, \frac{1}{N} \mathbf{1}\mathbf{1}^T e^{i\boldsymbol{\theta}} \right\rangle$$

é possível substituir o termo  $(\mathbf{1}\mathbf{1}^T)/N = \text{diag}\{\mathbf{1}\} - P$  por  $L$ , em que  $P$  é a matrix de projeção e  $L$  é a matriz Laplaciana.

$$W_L(\boldsymbol{\theta}) \doteq \frac{1}{2} Q_L(e^{i\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2} \langle e^{i\boldsymbol{\theta}}, L e^{i\boldsymbol{\theta}} \rangle \quad (6.13)$$

A matriz Laplaciana de um grafo completo é  $L = NP$ , logo

$$W_{NP}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{N}{2} \sum_{j=1}^N \langle e^{i\theta_j}, P_j e^{i\boldsymbol{\theta}} \rangle = \frac{N}{2} \sum_{j=1}^N \langle e^{i\theta_j}, e^{i\theta_j} - p_\theta \rangle = \frac{N}{2} (N - N|p_\theta|^2) = N \left( \frac{N}{2} - U_1(\boldsymbol{\theta}) \right)$$

com  $P_j$  representando a  $j$ -ésima linha da matriz de projeção.

Se  $G$  é completo, o mínimo de  $U_1(\boldsymbol{\theta})$  (arranjo balanceado) corresponde ao máximo de  $W_L(\boldsymbol{\theta})$ . Assumindo  $G$  como sendo conectado e não-direcionado, chega-se a um controle com iterações definidas pela matriz Laplaciana  $L$ , do tipo

$$u_k^{ori} = K \langle i e^{i\theta_k}, L_k e^{i\theta} \rangle, k = 1, \dots, N \quad (6.14)$$

O modelo de fase 6.5 com o controle de gradiente 6.14 é equivalente a

$$\dot{\theta}_k = u_k = \omega_0 + K \langle i e^{i\theta_k}, L_k e^{i\theta} \rangle = \omega_0 - K \sum_{j \in \mathcal{N}_k} \sin \theta_{jk}, \quad (6.15)$$

em que  $\mathcal{N}_k$  representa o conjunto de vizinhos da partícula  $k$ .

Comparado ao modelo de fase 6.10, o modelo 6.15 apresenta uma abordagem com interação limitada entre os osciladores.

### 6.3 Formações circulares

Uma formação circular é um regime de equilíbrio relativo, no qual todas as partículas viajam ao redor do mesmo círculo. Considera-se, aqui, um grafo conectado e não-direcionado.

#### 6.3.1 Interação todos com todos

Seja  $\mathbf{c} \doteq (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{C}^N$ , os centros de rotação das partículas, segundo definido em 6.3, com  $\omega_0 \neq 0$ . Quando  $\mathbf{c} = c_0 \mathbf{1}$ , então as partículas estão em uma formação circular. Assuma  $L$  como sendo a matriz Laplaciana de um grafo conectado e não-direcionado  $G$ . Sua Forma Quadrática Laplaciana será

$$S(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}) \doteq Q_L(\mathbf{c}) = \frac{1}{2N} \langle \mathbf{c}, L\mathbf{c} \rangle \quad (6.16)$$

a qual define um potencial espacial, cujo valor é zero quando existe formação circular, ou um valor positivo, caso contrário. Sendo assim,  $S(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta})$  é positivo definido. Diferenciando 6.3 com relação ao tempo ao longo das soluções de 6.1, resulta em

$$\dot{c}_k = e^{i\theta_k} (1 - \omega_0^{-1} u_k), k = 1, \dots, N. \quad (6.17)$$

Com o uso de 6.17, o potencial 6.16 evolui ao longo das soluções do modelo de partículas 6.1 de acordo com

$$\dot{S}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle e^{i\theta_k}, L_k \mathbf{c} \rangle (1 - \omega_0^{-1} u_k). \quad (6.18)$$

Considere o seguinte controle espacial

$$u_k^{spac} = \omega_0 \frac{K_0}{N} \langle e^{i\theta_k}, L_k \mathbf{c} \rangle, k = 1, \dots, N. \quad (6.19)$$

Em teorema descrito por [Paley et al. \(2007\)](#), quando  $u_k^{ori} = 0$ , e  $u_k^{spac}$  é dado por [6.19](#), todas as soluções do modelo de partículas [6.1](#) convergem para o conjunto de formações circulares com raio  $|\omega_0|^{-1}$  e direção de rotação determinado pelo sinal de  $\omega_0 \neq 0$ . A posição estável do centro da formação circular é fixa, e depende apenas do estado inicial das partículas. Por outro lado, o centro de massa das partículas não é necessariamente fixo.

Para estabilizar a formação circular, é necessário controlar tanto a velocidade quanto o centro de massa das partículas. Considere o potencial composto, formado pela combinação linear do potencial espacial  $S(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta})$  e potencial de fase  $W_1(\boldsymbol{\theta})$ , dado por

$$V(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}) \doteq K_0 S(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}) + K \omega_0^{-1} W_1(\boldsymbol{\theta}) \quad (6.20)$$

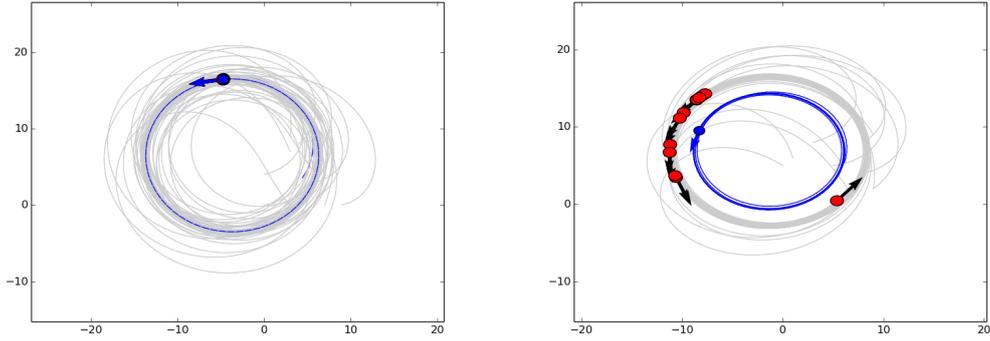
em que  $K_0 > 0$ ,  $K \neq 0$  e  $\omega \neq 0$ . Usando o controle [6.2](#), com  $u_k^{ori}$  dado por [6.14](#) e  $u_k^{spac}$  por [6.19](#), tem-se

$$u_k = \omega_0 + \frac{K - K_0}{N} \langle i e^{i\theta_k}, L_k e^{i\boldsymbol{\theta}} \rangle + \omega_0 \frac{K_0}{N} \langle e^{i\theta_k}, L_k \mathbf{r} \rangle \quad (6.21)$$

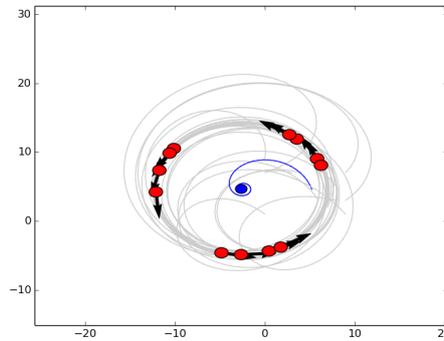
Derivando [6.20](#) em relação ao tempo, ao longo das soluções de [6.1](#), e usando [6.13](#), [6.16](#) e [6.21](#), é obtido

$$\dot{V}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \left( K_0 \langle e^{i\theta_k}, L_k \mathbf{c} \rangle + K \omega_0^{-1} \langle i e^{i\theta_k}, L_k e^{i\boldsymbol{\theta}} \rangle \right)^2 \leq 0 \quad (6.22)$$

A [Figura 6.3](#) mostra os resultados da estabilização da formação circular.



(a)  $K < 0$ : Formação circular sincronizada. (b)  $K = 0$ : Formação circular arbitrária.



(c)  $K > 0$ : Formação circular balanceada.

Figura 6.3 - Estabilizando a formação circular com e sem controle de orientação (Eq. 6.21). As redes espacial e de orientação são idênticas. Configuração:  $N = 12$ ,  $\omega_0 = 0.1$ , e  $K_0 = 0.1$ . Animações disponíveis no link: <http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3LEC74S>.

#### 6.4 Formações circulares simétricas

Na sequência serão estudados arranjos balanceados com padrões de simetria, isto é, as fases serão distribuídas de forma simétrica no círculo unitário.

Considere  $M$  um inteiro positivo, divisor de  $N$ . Um padrão  $(M, N)$  é um arranjo simétrico de  $N$  fases consistindo de  $M$  “clusters” uniformemente espaçados ao redor do círculo unitário, cada um com  $N/M$  fases.  $M = 1$  corresponde ao estado sincronizado, em que todas as partículas viajam para a mesma direção e sentido. Já o padrão  $(N, N)$ , diz respeito às  $N$  fases uniformemente espaçadas no círculo unitário. Todos os padrões simétricos são balanceados (Figura 6.4).

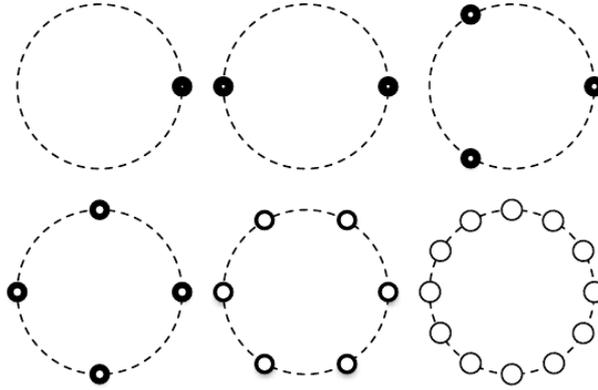


Figura 6.4 - Padrões de fase simétricos correspondentes a  $N = 12$ . Os seis padrões dizem respeito aos seis divisores de  $N$ , que são  $M = 1, 2, 3, 4, 6$  e  $12$ . Cada padrão contém um número  $M$  de “clusters” ilustrados no círculo unitário (linha pontilhada).

**Fonte:** (PALEY, 2007)

Caso um estado simétrico tenha suas fases multiplicadas pelo número de “clusters”, o resultado é um arranjo sincronizado. Isto é, multiplicando as fases dos agentes em um padrão  $(M, N)$  por  $M$ , resulta em um arranjo sincronizado (PALEY, 2007). Por exemplo, considere um sistema balanceado do tipo  $(M, N) = (2, 2)$ , com fases  $\theta_1 = 90^\circ$  e  $\theta_2 = 270^\circ$ , ao multiplicar as fases pela quantidade de clusters  $M = 2$ , o resultado é  $\theta_1 = 180^\circ$  e  $\theta_2 = 180^\circ$ , portanto um arranjo com  $|p_\theta| = 1$ .

Sob estas afirmações, Paley (2007) define o Lema a seguir:

**Lema 1.** *Seja  $M$  um divisor de  $N$ . Um arranjo  $\theta$  de  $N$  fases é um padrão  $(M, N)$  se e somente se, para todo  $m \in \{1, \dots, M-1\}$ , o arranjo de fases  $m\theta$  é balanceado e o arranjo de fases  $M\theta$  é sincronizado.*

#### 6.4.1 Interação todos com todos

Considere o parâmetro de ordem reescrito segundo a eq 6.23.

$$p_{m\theta} \doteq \frac{1}{mN} \sum_{k=1}^N e^{im\theta_k} \quad (6.23)$$

em que  $m$  é um inteiro positivo.

O potencial correspondente, para formações circulares simétricas é dado pela equação 6.24.

$$U^{M,N}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{N}{2} \sum_{m=1}^M K_m |p_{m\boldsymbol{\theta}}|^2 \quad (6.24)$$

com  $K_m > 0$  para  $m = 1, \dots, M-1$ , e  $K_M < 0$ .

O  $k$ -ésimo gradiente de  $U^{M,N}(\boldsymbol{\theta})$  é

$$\frac{\partial U^{M,N}}{\partial \theta_k} = \sum_{m=1}^M K_m \langle i e^{im\theta_k}, p_{m\boldsymbol{\theta}} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{K_m}{m} \sin(m\theta_{jk}). \quad (6.25)$$

O controle para atingir formações circulares simétricas é

$$u_k = \omega_0 (1 + K_0 \langle e^{i\theta_k}, P_k \mathbf{c} \rangle) - \frac{\partial U^{M,N}}{\partial \theta_k}, K_0 > 0 \quad (6.26)$$

A Figura 6.5 mostra exemplos de formações circulares simétricas com diferentes tamanhos de “clusters”, para  $N = 12$ .

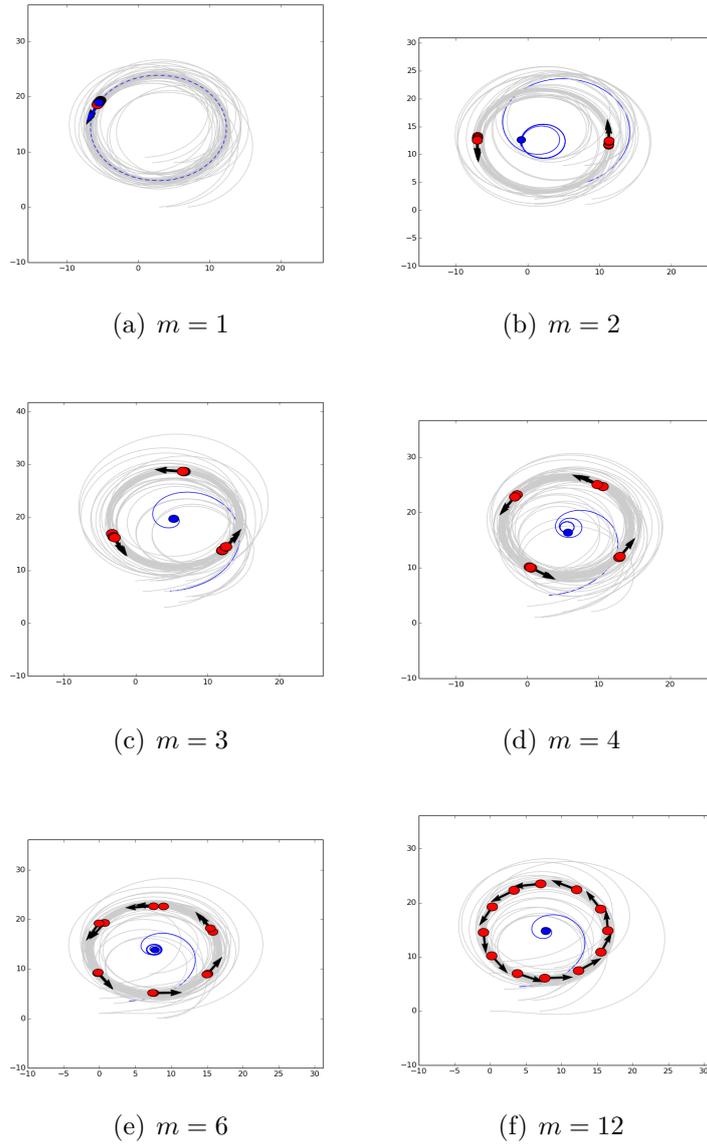


Figura 6.5 - Formações circulares simétricas, com controle 6.26. Configuração:  $N = 12$  e  $\omega_0 = 0, 1$ . Animações disponíveis no link: <http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3LEC74S>.

#### 6.4.2 Interação limitada e não-direcionada

O Potencial de Fase Laplaciano é dado pela seguinte equação:

$$W_L^{M,N}(\boldsymbol{\theta}) \doteq - \sum_{m=1}^M \frac{Km}{2} W_L(m\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \frac{Km}{m^2} \langle e^{im\boldsymbol{\theta}}, Le^{im\boldsymbol{\theta}} \rangle, \quad (6.27)$$

de modo que  $K_m > 0$ , para  $m = 1, \dots, M - 1$  e  $K_M < -\sum_{m=1}^{M-1} K_m$ .

O  $k$ -ésimo gradiente de  $W_L^{M,N}(\boldsymbol{\theta})$  é

$$\frac{\partial W_L^{M,N}}{\partial \theta_k} = - \sum_{m=1}^M \frac{K_m}{m} \langle i e^{im\theta_k}, L_k e^{im\boldsymbol{\theta}} \rangle \quad (6.28)$$

O controle correspondente, para redes não-direcionadas e não-completas, é o seguinte:

$$u_k = \omega_0 (1 + K_0 \langle e^{i\theta_k}, L_k \mathbf{c} \rangle) - \frac{\partial W_L^{M,N}}{\partial \theta_k}, K_0 > 0. \quad (6.29)$$

A seguir, a Figura 6.6 mostra alguns resultados do uso do controle 6.29, para diferentes topologias de redes, com  $N = 12$  e  $M = 3$ . Não é correto afirmar que uma rede de tamanho  $N = 12$  possui topologia livre-de-escala, ou pequeno mundo. A intenção aqui foi criar redes a partir de algoritmos de geração de redes com estas topologias específicas, mesmo que com poucos vértices. É possível observar que quando a rede é completa, os “clusters” aparentam ser mais bem definidos, mas que também é possível se chegar no objetivo com topologias de rede diversas.

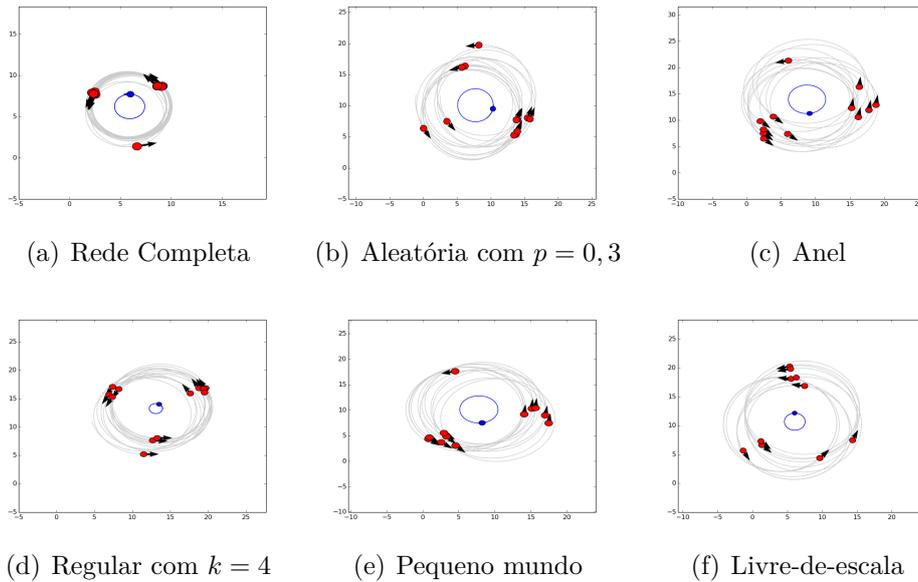


Figura 6.6 - Formações circulares simétricas, com controle 6.26, para diferentes topologias. Configuração:  $N = 12$ ,  $M = 3$  e  $\omega_0 = 0, 1$ .

Em um caso real de simulação de agentes móveis, as redes de interação são dinâmicas, mudando a cada instante de tempo, visto que a região sensorial de cada agente é limitada. Neste caso, o tempo total para convergência dos agentes em estados simétricos é maior, como mostra a Figura 6.7. Nesta simulação, cada agente enxerga um raio de 5, 5bl centrado em seu centro de massa, e as redes de interação são criadas dinamicamente a partir desta informação. A dimensão do raio de visão dos agentes é baseada nos experimentos da Seção 5.4.

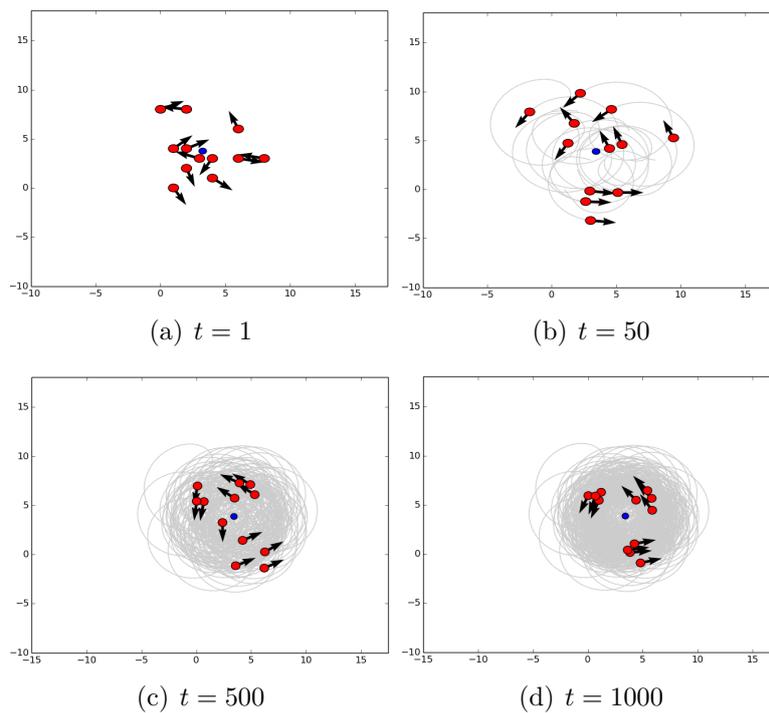


Figura 6.7 - Formações circulares simétricas, com controle 6.26, utilizando redes geradas dinamicamente, considerando vizinhanças de raio 5, 5 bl. Configuração:  $N = 12$ ,  $M = 3$  e  $\omega_0 = 0, 1$ .

## 6.5 Conclusões

Este capítulo explorou o modelo de partículas com dinâmica de osciladores acoplados, desenvolvido por Sepulchre et al. (2007), Paley et al. (2007), Paley (2007). Em um primeiro momento foram apresentados meios para se obter formações paralelas, por meio da sincronização de fase, e também o caso balanceado (contrário de sincronizado), com os agentes se movendo em direções contrárias, de modo que o centro de massa permanecesse em um ponto fixo. Além disto, foram estudadas formações circulares, de forma que os agentes orbitassem um mesmo ponto, em um movimento

circular, simétrico (em subgrupos simétricos) e não-simétrico.

## 7 MODELO COMBINADO

O objetivo deste capítulo é o de apresentar uma estratégia que permita a combinação entre os modelos estudados nos Capítulos 5 e 6. Tem-se, assim, uma estratégia completa, que conduz os agentes desde uma posição distante até o local de formação, onde essa é controlada para atingir configurações desejadas. Para tanto, inicialmente utiliza-se o modelo reativo para convergência de formações (do Capítulo 5) e em seguida aciona-se o modelo de partículas com dinâmica de osciladores de fase acoplados (do Capítulo 6). Vale ressaltar que, quando o segundo modelo é ativo, soma-se às partículas a dinâmica do movimento do agente virtual, a fim de que os comportamentos emergentes do deslocamento em formação siga a direção de referência desejada, que é dada pelo agente virtual. Os termos somados ao movimento são

$$\dot{x} = \cos \theta_a \quad (7.1a)$$

$$\dot{y} = \sin \theta_a, \quad (7.1b)$$

sendo  $\theta_a$  o ângulo de navegação do agente virtual.

Assim, os agentes podem assumir formações circulares, simétricas, paralelas e balanceadas, seguindo a direção desejada de referência.

Para esse propósito, optou-se pela configuração que chegasse o mais rápido possível na formação definitiva viável, sendo ela a estratégia E-2.2, com  $\alpha_a = 8$ ,  $\alpha_{av} = 9$  e  $\alpha_{cv} = 4$ , conforme apresentado na Tabela 5.2. Os parâmetros para utilização do modelo de PDOA são:  $\omega_0 = 0,015$ ,  $K_0 = 0,1$  e  $N = 12$ .

Na obtenção da estratégia, aqui denominada *combinada* ou *híbrida* de controle, a etapa crítica é o ponto da trajetória onde o controle da partícula é chaveado da inicial, de aproximação, vista no Capítulo 5, para a que controla formação, abordada no Capítulo 6. Esse chaveamento pode se dar logo quando o agente cruza o RIAV, ou após o sistema chegar a uma FDV. Dependendo da escolha empreendida, podem surgir problemas de estabilidade. Essa questão é aqui analisada.

A Figura 7.1 mostra o resultado da aplicação da estratégia E-2.2 para convergência dos agentes em uma formação, e controle de formações circulares simétricas com

interação todos-com-todos 6.26, com  $M = 12$  (caso 1). Este controle só é acionado após os agentes convergirem para uma FDV. Os agentes chegaram à formação definitiva no tempo  $t = 760$  e nos instantes seguintes é utilizado o controle 6.26, o qual leva o sistema a uma formação circular simétrica seguindo a direção do deslocamento do agente virtual.

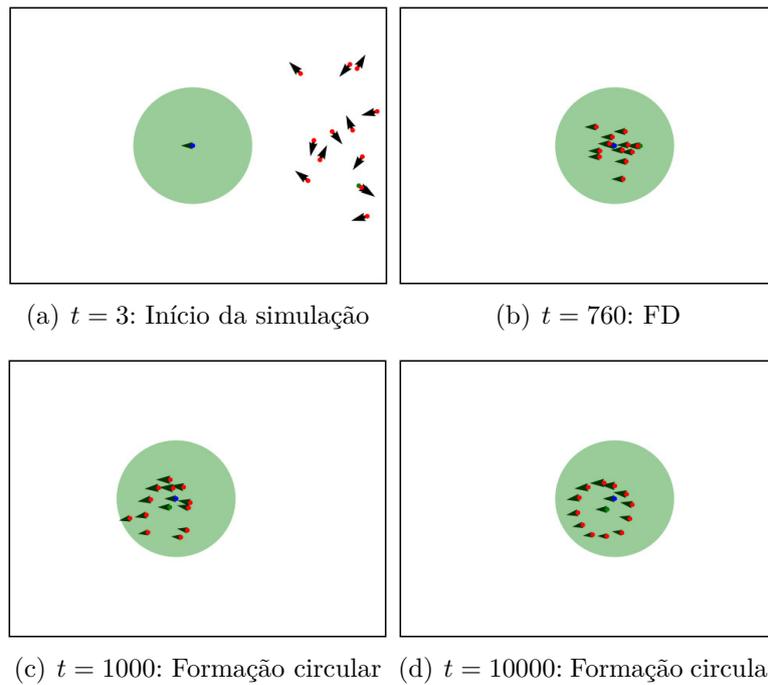


Figura 7.1 - Abordagem híbrida, combinando o modelo de convergência do Capítulo 5 e o controle 6.26. O controle só é acionado após os agentes convergirem para uma FDV. Animação disponível no link: <http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3LEC74S>.

Logo abaixo, encontra-se o resultado da junção da estratégia E-2.2 do modelo reativo com o controle de formações circulares simétricas com interação todos-com-todos 6.26. Desta vez, o controle é aplicado a todos os agentes que forem entrando no RIAV, sem esperar por uma FDV (Figura 7.2 - caso 2). Em outras palavras, o controle reativo para de fazer efeito em um determinado agente, a partir do momento que ele entra no RIAV. Essa abordagem demora mais tempo para convergir para a formação circular simétrica, uma vez que a ação do controle 6.26 acontece gradualmente, conforme os agentes vão adentrando o RIAV. Outro fator que influi na lentidão desta convergência é que, eventualmente, alguns agentes podem sair do RIAV. Isso acontece quando sua trajetória de deslocamento se dá na direção do limite do raio,

levando-os para fora, onde as interações entre indivíduos são governadas pelo modelo reativo do Capítulo 5.

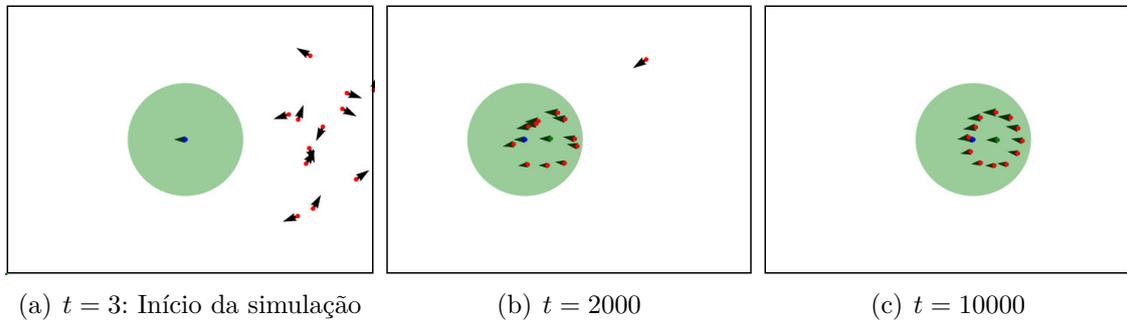


Figura 7.2 - Abordagem híbrida, combinando o modelo de convergência do Capítulo 5 e o controle 6.26 para os agentes que estiverem na RIAV. Animação disponível no link: <http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3LEC74S>.

Para melhor entendimento sobre as diferenças entre as duas abordagens supra citadas (Figuras 7.1 e 7.2), foi gerada a Figura 7.3, a qual ilustra os resultados do parâmetro de ordem para os agentes.

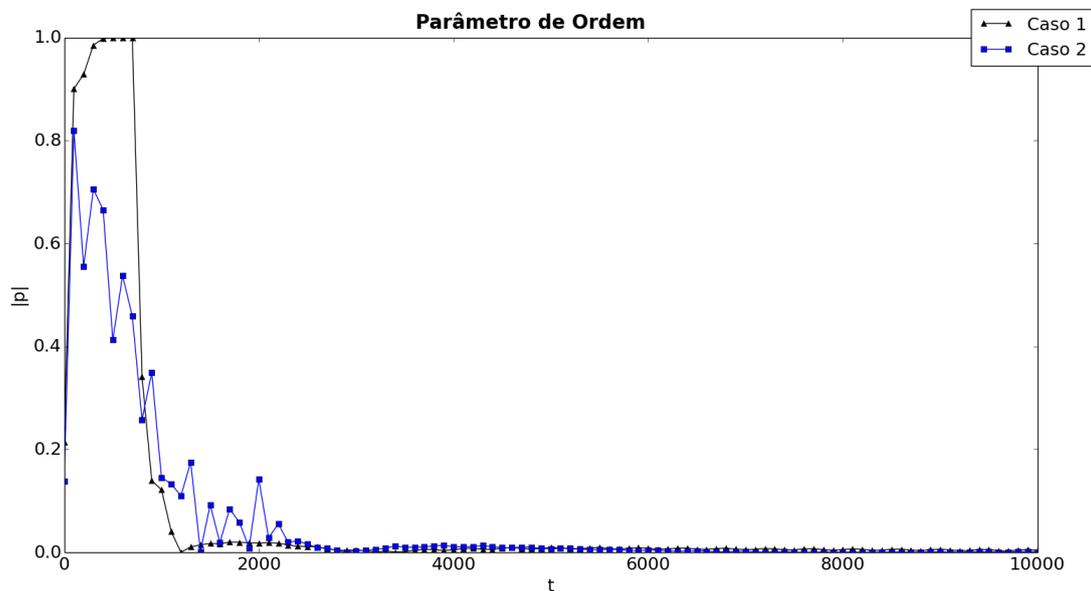


Figura 7.3 - Parâmetro de ordem 6.6 para as simulações, utilizando o modelo do Capítulo 5 e controle 6.26. No Caso 1, aciona-se o controle 6.26 apenas após os agentes convergirem para uma FDV, enquanto que no Caso 2 ele é acionado para os agentes que estiverem dentro do RIAV, conforme eles vão entrando.

Observa-se que no Caso 1 (acionamento do modelo de PDOA apenas após uma FDV), o modelo chega à perfeita sincronização, com  $|p| = 1$ , que é quando os indivíduos chegam a uma FDV. Em seguida, o parâmetro de ordem tende a zero rapidamente, em uma queda brusca, mostrando que o sistema se organiza até a formação circular simétrica desejada. Em contrapartida, o Caso 2 (acionamento do modelo de PDOA conforme os agentes adentram o RIAV) também se mostra eficaz, pois é capaz de conduzir os agentes até o objetivo desejado, mas demanda mais tempo que o Caso 1.

Da mesma forma, analisamos dois outros casos, utilizando o controle para formações circulares simétricas Laplaciano 6.29, o qual leva em conta redes não completas, diferentemente dos Casos 1 e 2, previamente apresentados. Nesse sentido, foram utilizadas redes geradas dinamicamente, de acordo com as limitações sensoriais dos agentes, assim como realizado na Figura 6.7, considerando apenas os agentes posicionados dentro do RIAV. Os resultados só começam a ser satisfatórios quando o raio de visão dos agentes chega a valores próximos ao necessário para criação de redes de interligação completas, isto é, quando cada agente é capaz de enxergar praticamente todo o grupo. Quando este raio de visão tem valores baixos (abaixo de  $15bl$ ), o sistema não chega nem perto de convergir, pois na maior parte do tempo os indivíduos executam um movimento circular autônomo, sem interagir com outros agentes, visto que sua visão é limitada, e eventualmente saem do RIAV. A Figura 7.4 apresenta a média do parâmetro de ordem após um transiente, comparando os resultados para diferentes raios de visão dos agentes. Essas simulações foram executadas com a estratégia E-2.2 do modelo reativo, e com o controle 6.29, utilizando redes criadas dinamicamente. No Caso 3, o chaveamento para o controle 6.29 ocorre apenas após os agentes convergirem para uma FDV. No Caso 4, este chaveamento se dá para os agentes dentro do RIAV, conforme eles vão entrando.

Os resultados da Figura 7.4 mostram claramente que quanto maior o raio de visão dos agentes, maiores as chances de o sistema convergir para as formações circulares simétricas desejadas. Em outras palavras, quanto mais completa a rede de interação entre os agentes, melhores os resultados. Quando o raio de visão é  $5bl$ , a rede de interligação é desconectada, pois para  $\omega_0 = 0,015$ , o diâmetro da trajetória circular de cada partícula é de aproximadamente  $26bl$ , ou seja, as partículas não irão enxergar seus vizinhos mais distantes. Criam-se, portanto, sub-redes, que dificilmente levarão o sistema ao objetivo final. Entretanto, ao observar os resultados para um raio de visão de  $25bl$  (mais próximo da realidade de uma rede completa), vê-se claramente a convergência para a formação desejada. Todavia, a média do parâmetro de ordem

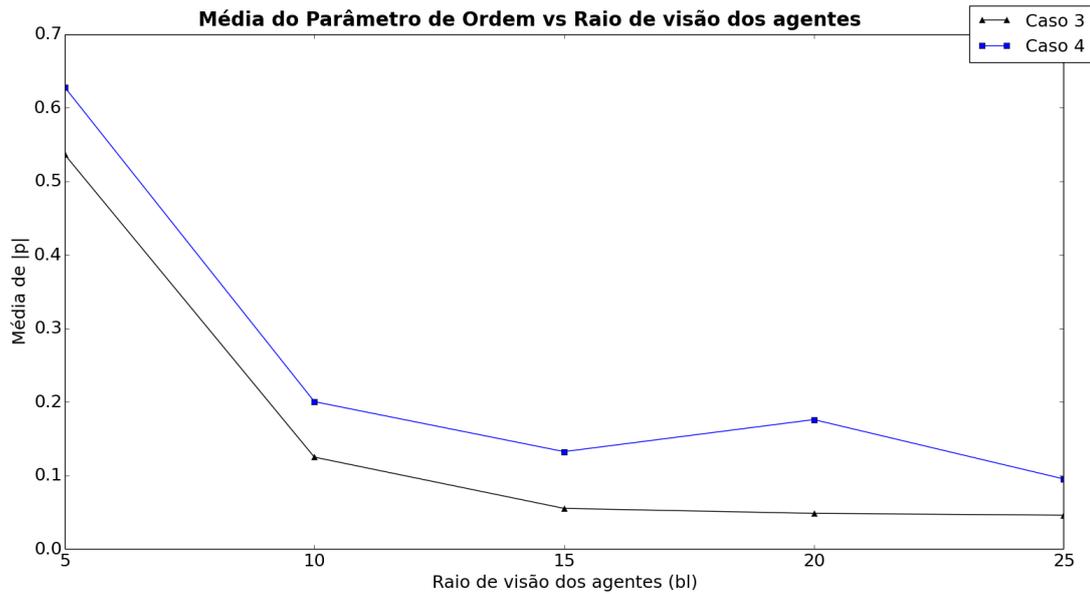


Figura 7.4 - Média do Parâmetro de ordem 6.6 para as simulações, no intervalo  $2000 < t < 10000$ , com diferentes raios de visão dos agentes, utilizando o modelo do Capítulo 5 e controle 6.29. No Caso 3, o chaveamento para o controle 6.29 se dá após os agentes convergirem para uma FDV, enquanto o Caso 4 o aciona para os agentes que estiverem dentro do RIAV, conforme eles vão entrando, sem a necessidade de esperar pela FDV.

não chega a zero por dois motivos: o controle 6.29 é uma aproximação do controle 6.26, portanto dificilmente chegará à perfeição, no caso de a rede não ser completa para todos os instantes de tempo; além disso, eventualmente algum agente pode sair do RIAV, no caso de empreender algum movimento muito próximo dos limites desta região, causando uma perturbação no parâmetro de ordem.

## 7.1 Conclusões

Neste tópico, foi apresentada uma estratégia completa, que conduz os agentes desde posições aleatórias até o local de formação, onde essa é controlada para atingir configurações desejadas. Para tanto, os modelos estudados nos Capítulos 5 e 6 foram unidos, e foram analisadas duas abordagens de chaveamento entre o modelo reativo e o modelo de PDOA: na primeira, inicialmente os agentes convergem para uma FDV, e depois o controle circular simétrico do modelo de PDOA é ativado; na segunda, este controle circular é acionado para os agentes dentro do RIAV, conforme eles vão adentrando este raio. Quando o controle circular considera interações do tipo todos-com-todos, os resultados são bons em todos os casos. Contudo, quando utiliza-se a abordagem de interação mediada por redes de interligação geradas dinamicamente,

verificou-se que o objetivo só é alcançado quando as redes são quase completas. Para que isto aconteça, o diâmetro das trajetórias circulares dos agentes ( $2|\omega_0|^{-1}$ ) deve ser compatível com seu raio de visão. Sob estas circunstâncias, os resultados obtidos são satisfatórios, com os agentes chegando até formações circulares simétricas, seguindo a direção do deslocamento do agente virtual.

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O movimento coletivo é um fenômeno presente em toda parte, desde colônias de bactérias até cardumes de peixes, ou mesmo em grupos de pessoas. Conhecer as regras de funcionamento destes movimentos na natureza é importante, pois elas podem ser aplicadas a diferentes tipos de veículos artificiais, como robôs móveis e veículos aéreos não-tripulados, por exemplo. Nesse sentido, existem vários modelos que mimetizam estes movimentos observados na natureza, os quais são chamados de modelos de partículas autopropulsoras. Esses modelos, em sua maioria, são baseados em regras de acoplamento e interação de osciladores de fase, cujo objetivo é controlar os estados síncronos das partículas.

Uma contribuição desta pesquisa foi o desenvolvimento de um modelo reativo para convergência de agentes em movimento de deslocamento de formação em direções pré-estabelecidas. A modelagem baseou-se na criação de um controle para o módulo das velocidades das partículas, o qual depende de suas posições com relação a um personagem que define a direção do movimento, o qual foi batizado de agente virtual. Além disso, as forças que representam as regras de interação entre as partículas (atração, alinhamento e coesão), foram ponderadas por coeficientes de controle, a fim de se obter o módulo da força resultante exercida sobre cada agente, a partir do que ele sente do ambiente. A aplicação desta força é realizada por meio do ajuste do ângulo de navegação de cada agente. A cada instante de tempo, caso o agente tenha vizinhos posicionados em sua região sensorial, a força resultante da influência destes vizinhos é calculada e aplicada em seu ângulo de navegação, de modo que ao fim de todas as interações, os agentes convirjam para uma formação, e sigam em uma direção pré-definida. Foram criadas oito estratégias, sendo cada uma delas caracterizada por uma combinação específica das forças do sistema, e foram executados experimentos a fim de se estimar quais valores dos coeficientes de controle levam os agentes a formações definitivas em um tempo considerado razoável. Para medir a qualidade das formações, com relação à distribuição dos agentes dentro de uma região, e tempo necessário para que ela se forme, foram criados três índices quantitativos. Com eles foi possível mensurar as estratégias (combinação de forças do sistema) com relação aos tipos de formações obtidas.

A segunda parte da pesquisa destinou-se a explorar um modelo de partículas com dinâmica de osciladores de fase acoplados, em que cada oscilador representa uma partícula, e sua fase corresponde ao seu ângulo de navegação. Para avaliar o tipo de formação obtida utilizou-se o parâmetro de ordem, o qual consiste na média das

velocidades das fases do sistema. Inicialmente foram estudados os controles mais simples, obtendo-se formações em que o centro de massa desloca-se em velocidade máxima, que é o caso de formações paralelas, com fases sincronizadas, ou em velocidade mínima, no caso de fases balanceadas. Em seguida, explorou-se o controle para formações circulares, em que o objetivo é fazer as partículas orbitarem ao redor de um mesmo ponto, isto é, garantir que os centros das circunferências de rotação das partículas coincidam. Para este caso, é possível obter formações sincronizadas, que é quando todas as partículas ocupam as mesmas coordenadas no espaço e seu centro de massa se move com velocidade máxima, ou formações balanceadas, em que as partículas possuem fases em posições opostas do círculo unitário, de modo que o centro de massa convirja para um ponto fixo. Por fim, foram estudados controles para levar as partículas a formações circulares simétricas, tornando possível que as partículas tenham o movimento circular citado anteriormente, mas agora se dividindo em “clusters” de indivíduos, todos orbitando um mesmo ponto, com fases balanceadas. Vale ressaltar que todos os tipos de formações estudados derivam de interações entre indivíduos mediadas por redes de interligações, as quais podem ser fixas ou dinâmicas.

O modelo reativo tem a característica de agrupar agentes distantes de forma que seja obtida uma formação paralela se deslocando em uma direção definida *a priori*. A partir disso, torna-se possível ativar outros controles, os quais podem se beneficiar da proximidade dos indivíduos da simulação. Em outras palavras, o modelo reativo pode servir como um passo inicial, anterior à atuação de outros modelos, para que estes últimos sejam mais efetivos.

Partindo deste pressuposto, a última parte da pesquisa constituiu-se em justamente unir o modelo reativo com o modelo de osciladores. Nesse sentido, inicialmente o primeiro modelo é acionado, e a partir de algum ponto, aciona-se o segundo, mantendo sempre a direção do deslocamento da formação. Foram realizadas simulações iniciando com o uso do modelo reativo, a fim de se estabelecer uma formação paralela, seguida do acionamento do modelo com o controle para formações circulares simétricas. No caso de as interações entre os agentes serem mediadas por redes geradas dinamicamente, espera-se que o raio de visão dos agentes seja compatível com o diâmetro das trajetórias circulares, pois desse modo cada agente é capaz de enxergar todos (ou quase todos) os outros indivíduos do modelo. Sob estas circunstâncias, obtivemos formações circulares simétricas se movendo na direção do deslocamento do agente virtual.

## 8.1 Trabalhos futuros

Almeja-se em pesquisas futuras aplicar esses modelos a veículos artificiais reais, como robôs móveis terrestres, por exemplo. A materialização desta aplicação poderia originar um sistema para exploração de locais de difícil acesso, ou monitoramento permanente de grandes áreas, onde torna-se difícil manter seres humanos por muito tempo, ou quaisquer outros objetivos em que possam ser utilizados grupos de veículos em deslocamento de formação. Além disto, serão realizadas análises de estabilidade com o modelo reativo.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABBASPOUR, A.; ALIPOUR, K.; JAFARI, H. Z.; MOOSAVIAN, S. A. A. Optimal formation and control of cooperative wheeled mobile robots. **Comptes Rendus Mécanique**, v. 343, n. 576, p. 307–321, 2015. ISSN 1631-0721. 1, 20
- ACEBRÓN, J. A.; BONILLA, L. L.; VICENTE, C. J. P.; RITORT, F.; SPIGLER, R. The kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 77, p. 137–185, Apr 2005. 24
- BALANOV, A. G.; JANSON, N. B.; POSTNOV, D. E.; SOSNOVTSEVA, O. **Synchronization: from simple to complex**. [S.l.]: Springer, 2009. 437p p. ISBN 978-3-540-72127-7. 19
- BALLERINI, M.; CABIBBO, N.; CANDELIER, R.; CAVAGNA, A.; CISBANI, E.; GIARDINA, I.; LECOMTE, V.; ORLANDI, A.; PARISI, G.; PROCACCINI, A.; VIALE, M.; ZDRAVKOVIC, V. Interaction ruling animal collective behavior depends on topological rather than metric distance: Evidence from a field study. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 105, n. 4, p. 1232–1237, 2008. 8
- BARABASI, A. L.; ALBERT, R. Emergence of scaling in random networks. **Science**, v. 286, n. 5439, p. 509–512, 1999. 27
- BECCO, C.; VANDEWALLE, N.; DELCOURT, J.; PONCIN, P. Experimental evidences of a structural and dynamical transition in fish school. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 367, n. 0, p. 487 – 493, 2006. ISSN 0378-4371. 8
- CAI, W.; WENG, L.; ZHANG, R.; ZHANG, M.; SONG, Y. Virtual leader based formation control of multiple unmanned ground vehicles (ugvs): Control design, simulation and real-time experiment. In: PARDALOS, P.; MURPHEY, R.; GRUNDEL, D.; HIRSCH, M. (Ed.). **Advances in cooperative control and optimization**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2007, (Lecture Notes in Control and Information Sciences, v. 369). p. 221–230. ISBN 978-3-540-74354-5. 1, 20
- CAO, X.; ZHU, D. Multi-auv underwater cooperative search algorithm based on biological inspired neurodynamics model and velocity synthesis. **The Journal of Navigation**, v. 68, n. 6, p. 1075–1087, 2015. 1

- CARROLL, T. L.; PECORA, L. M. Synchronizing Nonautonomous Chaotic Circuits. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing**, v. 40, n. 10, p. 646–650, 1993. ISSN 10577130. 20
- CHAPMAN, A. D.; STUDY., A. B. R.; AUSTRALIA. Book, Online. **Numbers of living species in Australia and the world / Arthur D. Chapman**. Department of the Environment, Water, Heritage and the Arts [Canberra, ACT], 2009. 80 p p. ISBN 9780642568601 9780642568618. Disponível em: <<http://nla.gov.au/nla.cat-vn4703172>>. 7
- COUZIN, I. D.; KRAUSE, J.; JAMES, R.; RUXTON, G. D.; FRANKS, N. R. Collective memory and spatial sorting in animal groups. **Journal of Theoretical Biology**, v. 218, n. 1, p. 1 – 11, 2002. ISSN 0022-5193. 1, 33, 38
- CUCKER, F.; SMALE, S. Emergent behavior in flocks. **IEEE Transactions on Automatic Control**, p. 852–862, 2007. 1, 33, 38
- CZIRÓK, A.; BARABÁSI, A.-L.; VICSEK, T. Collective motion of self-propelled particles: Kinetic phase transition in one dimension. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 82, p. 209–212, Jan 1999. 1, 32, 38
- CZIRÓK, A.; BEN-JACOB, E.; COHEN, I.; VICSEK, T. Formation of complex bacterial colonies via self-generated vortices. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 54, p. 1791–1801, Aug 1996. 7
- DENOTH, F.; DONATO, L. A. Self-Synchronizing Cardiac Pacemaker. **IEEE Transactions on Biomedical Engineering**, BME-14, n. 2, p. 103–108, 1967. 20
- DORFLER, F.; DHOPE, S.; JOHNSON, B.; HAMADEH, A. Synchronization of nonlinear circuits in dynamic electrical networks. In: **European control conference**. [S.l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2014. p. 552–557. ISBN 9783952426913. 20
- ERMENTROUT, G. B.; RINZEL, J. Beyond a pacemaker’s entrainment limit: phase walk-through. **American Journal of Physiology - Regulatory, Integrative and Comparative Physiology**, American Physiological Society, v. 246, n. 1, p. 102–106, 1984. 19, 22
- HALL, M.; FRANK, E.; HOLMES, G.; PFAHRINGER, B.; REUTEMANN, P.; WITTEN, I. H. The weka data mining software: An update. **SIGKDD Explor. Newsl.**, ACM, New York, NY, USA, v. 11, n. 1, p. 10–18, nov. 2009. ISSN 1931-0145. 36

HERBERT-READ, J. E.; PERNA, A.; MANN, R. P.; SCHAERF, T. M.; SUMPTER, D. J. T.; WARD, A. J. W. Inferring the rules of interaction of shoaling fish. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 108, n. 46, p. 18726–18731, 2011. 8

IGRAPH. **Igraph**: The network analysis package. 2015. Disponível em: <<http://igraph.org/redirect.html>>. Acesso em: setembro 2014. 48

KATZ, Y.; TUNSTROM, K.; IOANNOU, C. C.; HUEPE, C.; COUZIN, I. D. Inferring the structure and dynamics of interactions in schooling fish. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 108, n. 46, p. 18720–18725, 2011. 9

KING, A. J.; MYATT, J. P.; FURTBAUER, I.; OESCH, N.; DUNBAR, R. I. M.; SUMNER, S.; USHERWOOD, J. R.; HAILES, S.; BROWN, M. R. Social density processes regulate the functioning and performance of foraging human teams. **Scientific Reports**, v. 5, n. 18260, 2015. 10

KLEIN, J. K. **Controlled collective motion for multivehicle trajectory tracking**. Dissertação (Mestrado) — University of Washington, USA, 2005. 1, 10, 11

KURAMOTO, Y. **Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence**. New York: Springer-Verlag, 1984. 23, 95

LEHNERT, A. J. **Controlling synchronization patterns in complex networks**. Tese (Doutorado) — der Technischen Universitat Berlin, 2015. 25, 26

LEONARD, N.; PALEY, D.; LEKIEN, F.; SEPULCHRE, R.; FRATANTONI, D.; DAVIS, R. Collective motion, sensor networks, and ocean sampling. **Proceedings of the IEEE**, v. 95, n. 1, p. 48–74, Jan 2007. ISSN 0018-9219. 1, 4, 11

MACAL, C. M.; NORTH, M. J. Tutorial on agent-based modelling and simulation. **Journal of Simulation**, Operational Research Society Ltd., v. 4, n. 3, p. 151–162, 2010. 32

MAKRIS, N. C.; RATILAL, P.; JAGANNATHAN, S.; GONG, Z.; ANDREWS, M.; BERTSATOS, I.; GODØ, O. R.; NERO, R. W.; JECH, J. M. Critical population density triggers rapid formation of vast oceanic fish shoals. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 323, n. 5922, p. 1734–1737, 2009. 8

MARTYNETZ, I. T. **Acoplamento Químico para modelo unidimensional e bidimensional de redes de neurônios**. 2015. 20

- MATPLOTLIB. **Matplotlib package**. 2012. Disponível em: <<http://matplotlib.org/>>. Acesso em: setembro 2014. 48
- MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. **Nature**, v. 261, p. 459 – 467, 1976. ISSN 0028-0836. 15
- MIRZA, D.; NAUGHTON, P.; SCHURGERS, C.; KASTNER, R. Real-time collaborative tracking for underwater networked systems. **Ad Hoc Networks**, v. 34, p. 196–210, 2015. ISSN 1570-8705. 1
- MONTEIRO, L. **Sistemas dinâmicos**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2011. ISBN 9788578611026. 13, 14, 16, 21, 22
- NARAYAN, V.; RAMASWAMY, S.; MENON, N. Long-Lived Giant Number Fluctuations in a Swarming Granular Nematic. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 317, n. 5834, p. 105–108, 2007. ISSN 0036-8075. 1
- NEWMAN, M. E. J.; STROGATZ, S. H.; WATTS, D. J. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 64, p. 026118, Jul 2001. 27
- NUMPY. **Numpy package**. 2013. Disponível em: <<http://www.numpy.org/>>. Acesso em: setembro 2014. 47
- OTT, E. **Chaos in dynamical systems**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1994. ISBN 0521437997. 13
- PALEY, D.; LEONARD, N. E.; SEPULCHRE, R.; GRÜNBAUM, D.; PARRISH, J. K. Oscillator models and collective motion: Spatial patterns in the dynamics of engineered and biological networks. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 27, n. 4, p. 89–105, 2007. 2, 7, 8, 34, 91, 95, 99, 105
- PALEY, D. A. **Cooperative control of collective motion for ocean sampling with autonomous vehicles**. Tese (Doutorado) — Princeton University, 2007. 3, 4, 34, 91, 94, 101, 105
- PARK, C.; CHO, N.; LEE, K.; KIM, Y. Formation flight of multiple uavs via onboard sensor information sharing. **Sensors**, v. 15, p. 17397–17419, 2015. 1, 11
- PARRISH, J. K.; VISCIDO, S. V.; GRUNBAUM, D. Self-organized fish schools: An examination of emergent properties. **Biol Bull**, Woods Hole, Mass. :Marine Biological Laboratory,, v. 202, p. 10, 2002. 1

- PECORA, L. M.; CARROLL, T. L. Synchronization in chaotic systems. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 64, p. 821–824, Feb 1990. 20
- PIKOVSKY, A.; ROSENBLUM, M.; KURTHS, J. **Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences**. Cambridge: Pres Syndicate of the University of Cambridge, 2001. 18, 19, 24
- POTTS, W. K. The chorus-line hypothesis of manoeuvre coordination in avian flocks. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 309, n. 5966, p. 344–345, maio 1984. 8
- REYNOLDS, C. **Boids - Background and Update**. 2001. Disponível em: <<http://www.red3d.com/cwr/boids/>>. Acesso em: abril 2015. 35
- REYNOLDS, C. W. Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model. **SIGGRAPH Comput. Graph.**, ACM, New York, NY, USA, v. 21, n. 4, p. 25–34, ago. 1987. ISSN 0097-8930. 3, 34, 35, 38
- RORTH, P. Collective guidance of collective cell migration. **Trends in Cell Biology**, v. 17, n. 12, p. 575 – 579, 2007. ISSN 0962-8924. 7
- RUSSELL, S.; NORVIG, P. **Inteligência artificial**. [S.l.: s.n.], 2004. 31, 32, 42
- SALAZAR, F. J. T. **Deployment and maintenance of a satellite formation flight around L4 and L5 Lagrangian points in the earth-moon system based on low cost strategies**. 169 p. Tese (Doutorado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), São José dos Campos, 2012-12-04 2012. Disponível em: <<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m19/2012/11.22.12.22>>. Acesso em: 15 abr. 2015. 10
- SCHETTER, T.; CAMPBELL, M.; SURKA, D. Multiple agent-based autonomy for satellite constellations. **Artificial Intelligence**, v. 145, n. 1?2, p. 147 – 180, 2003. ISSN 0004-3702. 1, 10
- SEPULCHRE, R.; PALEY, D.; LEONARD, N. Stabilization of planar collective motion: All-to-all communication. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, v. 52, n. 5, p. 811–824, May 2007. ISSN 0018-9286. 34, 91, 94, 105
- \_\_\_\_\_. Stabilization of planar collective motion with limited communication. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, v. 53, n. 3, p. 706–719, April 2008. ISSN 0018-9286. 3, 34

SMALE, S.; HIRSCH, M.; DEVANEY, R. **Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos**. [S.l.]: Elsevier, 2004. ISBN 9780123497031. 22

STROGATZ, S.; STEWART, I. Coupled oscillators and biological synchronization. **Scientific American**, v. 269, n. 6, p. 102–9, 1993. 14, 19, 20, 22

STROGATZ, S. H. From kuramoto to crawford: Exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. **Phys. D**, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v. 143, n. 1-4, p. 1–20, set. 2000. ISSN 0167-2789. 19, 23, 41, 93

SUMIDA, I. Y. **Simulação multiagentes para modelagem de situações de pânico**. Dissertação (Mestrado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2005. 10, 31

SUMPTER, D. The principles of collective animal behaviour. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London B: Biological Sciences**, The Royal Society, v. 361, n. 1465, p. 5–22, 2006. ISSN 0962-8436. 2, 3, 7, 8, 10

VERES, S. M.; LINCOLN, N. K.; MOLNAR, L. **Control engineering of autonomous cognitive vehicles- a practical tutorial**. 2011. Disponível em: <<https://www.eucognition.org/uploads/docs/Tutorials/control-engineering-of-autonomous-cognitive-vehicles---a-practical-tutorial.pdf>>. Acesso em: outubro 2015. 32

VICSEK, T.; CZIRÓK, A.; BEN-JACOB, E.; COHEN, I.; SHOCHET, O. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 75, p. 1226–1229, Aug 1995. 1, 32, 33, 38

VICSEK, T.; ZAFEIRIS, A. Collective motion. **Physics Reports**, v. 517, n. 3?4, p. 71 – 140, 2012. ISSN 0370-1573. Collective motion. 1, 2, 3, 7, 8, 9

WANG, X.; YADAV, V.; BALAKRISHNAN, S. N. Cooperative uav formation flying with obstacle/collision avoidance. **Control Systems Technology, IEEE Transactions on**, v. 15, n. 4, p. 672–679, July 2007. ISSN 1063-6536. 1

WATTS, D.; STROGATZ, S. Collective dynamics of 'small-world' networks. **Nature**, n. 393, p. 440–442, 1998. 27

WILENSKY, U. **NetLogo Flocking model**. 1998. Disponível em: <<http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/Flocking>>. Acesso em: junho 2014. 35

WILSON, R. J. **Introduction to graph theory**. [S.l.]: Addison Wesley Longman Limited, 1996. ISBN 0582249937. 24

WOOD, A. J.; ACKLAND, G. J. Evolving the selfish herd: emergence of distinct aggregating strategies in an individual-based model. **Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences**, The Royal Society, v. 274, n. 1618, p. 1637–1642, 2007. ISSN 0962-8452. 33

WOOLDRIDGE, M.; JENNINGS, N. R. Intelligent agents: theory and practice. **The Knowledge Engineering Review**, v. 10, p. 115–152, 6 1995. ISSN 1469-8005. 31

YATES, C. A.; BAKER, R.; ERBAN, R.; MAINI, P. Refining self-propelled particle models for collective behaviour. **Canadian Applied Maths Quarterly (CAMQ)**, v. 18, n. 3, 2011. 10, 33, 34

ZHOU, Y.; CHENG, N.; LU, N.; SHEN, X. Multi-uav-aided networks: Aerial-ground cooperative vehicular networking architecture. **Vehicular Technology Magazine, IEEE**, v. 10, n. 4, p. 36–44, 2015. ISSN 1556-6072. 11

ZHU, D.; LV, R.; CAO, X.; YANG, S. X. Multi-auv hunting algorithm based on bio-inspired neural network in unknown environments. **International Journal of Advanced Robotic Systems**, v. 12, 2015. 1