

Explorando a transformada wavelet contínua

Exploring the continuous wavelet transform

M.O. Domingues^{*1}, O. Mendes², M.K. Kaibara³, V.E. Menconi², E. Bernardes⁴

¹Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, Brasil

²Divisão de Geofísica Espacial, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, Brasil

³Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, Niterói, Rio de Janeiro

⁴PIBIC-CNPq-INPE / Instituto de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná

Recebido em 21 de janeiro de 2016. Revisado em 7 de março de 2016. Aceito em 19 de março de 2016

A transformada *wavelet* contínua constitui poderosa ferramenta para análise multiescala de dados. Ela tem amplas aplicações na Física, na Matemática, nas Ciências Naturais e, inclusive, grande apelo nas engenharias, computação e áreas de tecnologia e inovação. Do ponto de vista introdutório, a transformada wavelet tem sido abordada amplamente em trabalhos anteriores. Assim, esta apresentação dá ênfase ao uso dessa técnica em situações teóricas e práticas que normalmente não são exploradas; porém fundamentais para um uso mais adequado, ou mesmo correto, dessa ferramenta. Um embasamento consistente possibilita, sobretudo, uma extensão de sua aplicação para novas pesquisas, facilitadas pela disponibilidade de programas e ferramentas gratuitas e, até, várias dessas sob a forma de recursos de livre distribuição (*free softwares*). Por critério de escolha dos autores, apresentam-se, neste artigo, conceitos e exemplos de técnicas que podem ser de grande interesse para vários tipos de estudos na Física e em outras áreas correlatas. Este texto destina-se a pesquisadores, professores e estudantes de pós-graduação, com a possibilidade de atender ainda necessidades de estudantes dos últimos anos de graduação.

Palavras-chave: wavelet, sinais multiescala, análise de sinais.

The continuous wavelet transform is a powerful tool for multiscale data analysis. It has wide applications in physics, mathematics, natural sciences and even great appeal in engineering, computing and areas of technology and innovation. As an introductory point of view, the wavelet transform has been widely addressed in previous works. Thus, this presentation emphasizes the use of this technique in theoretical and practical situations that are not usually explored, but situations that are fundamental to a better use, or even a correct use, of this tool. Consistent bases enable mainly extensions of wavelet application to new investigations, that are facilitated by the availability of free programs and tools, and even several of these in completely available distribution of resources (free softwares). The content of this article, by the authors' choice criteria, presents concepts and examples of techniques that can be of great interest for various studies in physics and other related areas. This text is aimed at researchers, teachers and graduate students, with the possibility of still meet the preparation needs of students at last undergraduation stage.

Keywords: wavelet, multiscale signals, signal analysis.

1. Introdução

A teoria *wavelet* causou um *frenesi* na comunidade científica nas últimas décadas e gerou um fenômeno de interesse, na pesquisa e na aplicação, com crescimento exponencial, gerando dezenas de milhares

de publicações, patentes e prêmios internacionais associados [8]. O leitor e sua família já participam e conhecem os efeitos desse fenômeno, tanto ao utilizar as imagens jpeg de um celular que podem ser enviadas por internet, quanto ao assistir os filmes de animação 3D, ou mesmo a ter seus dados biométricos, por meio das características digitais,

*Endereço de correspondência: margarete.domingues@inpe.br.

identificados, ou talvez ainda até a ter sua placa de carro identificada por uma câmera numa rua com pouca luminosidade. Todas essas inovações e muitas outras do nosso cotidiano atual são consequências da sinergia entre a matemática, a física e as engenharias no contexto multi-escala que a teoria *wavelet* propicia.

Uma das ferramentas principais da teoria *wavelet* é a transformada *wavelet*. A transformada *wavelet*, como coloca [2], equivale a um microscópio matemático cuja ampliação é dada pelo inverso do parâmetro de dilatação, designado a , e a capacidade óptica pela escolha da função *wavelet* analisadora escolhida, designada ψ . No contexto histórico, a transformada *wavelet* contínua foi a motivadora da formalização da teoria *wavelet*. Na década de 80, os trabalhos do pesquisador geofísico francês J. Morlet e seus colaboradores A. Grossmann e P. Goupillaud [3–5] destacaram-se como trabalhos precursores. A partir deles, iniciaram-se outras importantes aplicações já na área de turbulência [6], com diversas extensões para diferentes áreas da física [7–11].

Os objetivos básicos deste artigo consistem na apresentação dos conceitos relacionados à transformada *wavelet* contínua e na exploração das suas interpretações e algumas ferramentas associadas, visando a análise de sinais não lineares de uma forma mais atual. Assim, com uma visão melhor fundamentada, pesquisadores e professores, estudantes de pós-graduação e, mesmo, de graduação podem tirar um benefício maior de tais tipos de ferramentas de análises exploratórias.

O presente trabalho compõe-se das partes seguintes. Na Seção 2, faz-se uma breve revisão da transformada de Fourier como ponto de partida para a introdução da transformada *wavelet*, que está apresentada na Seção 3. Na Seção 4, descrevem-se propriedades de algumas funções *wavelets* analisadoras mais populares e suas características principais. Apresenta-se ainda concisamente o conceito de tempo-frequência e a sua relação com a transformada *wavelet*. Nas Seções de 3 a 8, apresentam-se a definição da transformada *wavelet* contínua CWT e a evolução dessa ferramenta de análise para estudos de sinais, bem como as características de sua utilização. Ilustram-se situações por meio de exemplos de análise de alguns sinais. Na Seção 9, como uma extensão prática da seção anterior, apresenta-se como utilizar a CWT para estudos de relações entre sinais. Na Seção 10, faz-se as considerações finais. De maneira complementar,

incluem-se ainda dois apêndices. O primeiro contendo informações sobre o cálculo da fase em sinais e o segundo sobre como melhorar a escolha de paletas de cores na construção de escalogramas.

2. De Fourier à *wavelets*

O método de Fourier é uma técnica para o estudo de sinais que tem sido muito utilizada na ciência e na engenharia. A técnica consiste na transformação de um domínio em um outro domínio, em que muitas características do sinal analisado são revelados. O domínio transformado é denominado domínio espectral ou frequencial, enquanto o domínio original da função é chamado de domínio temporal ou domínio espacial.

Na teoria de Fourier incluem-se a transformada de Fourier e a série de Fourier. A série de Fourier é usada para analisar funções que são periódicas enquanto a transformada de Fourier é usada para representar funções aperiódicas. A transformada de Fourier pode ser vista como uma extensão da série de Fourier em que uma função aperiódica é considerada periódica no intervalo $[-L/2, L/2]$, com L tendendo a infinito. Maiores detalhes podem ser obtidos em [12].

Como a transformada *wavelet* é muito similar à transformada de Fourier em muitos aspectos, nesta seção faz-se uma breve revisão desta transformada.

A transformada de Fourier de um sinal f , de uma variável real t , é definida pela integral

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t} dt \quad (1)$$

em que f satisfaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Isto mostra que o uso de funções globais nem sempre é eficaz na representação local de sinais, como exemplificado na Figura 1, em que há duas frequências mas em intervalos distintos. Para obter uma representação deste tipo, necessita-se, então, de uma ferramenta de análise mais localizada, que seja uma combinação dos domínios frequencial e temporal. Isto é muito importante, pois na prática se está interessado em uma porção do espectro e, portanto, tem-se interesse em conhecer que porção do domínio temporal do sinal é responsável por aquela característica no espectro. A porção desejada

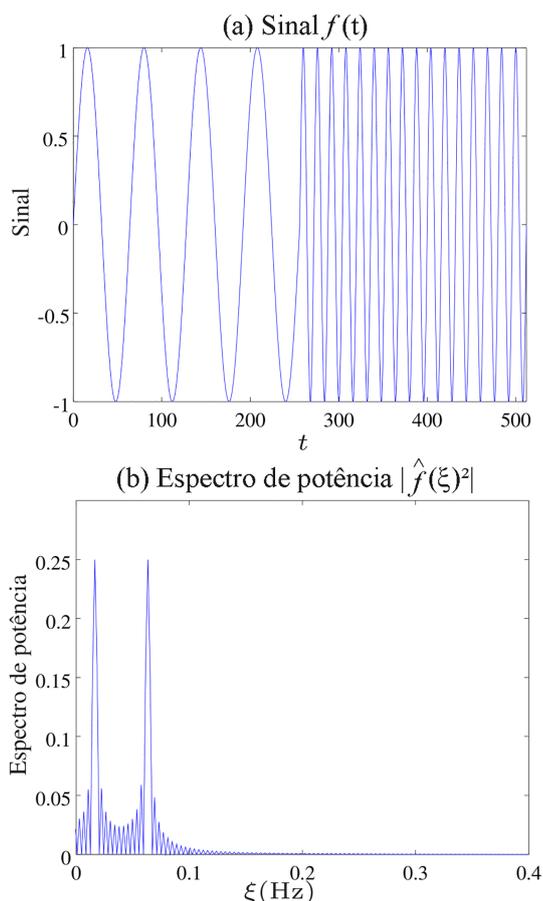


Figura 1: Sinal com frequências de $\frac{1}{64}$ Hz e $\frac{1}{16}$ Hz, a. Respectivo espectro de potência, b.

do sinal pode ser obtida pela multiplicação do sinal original f por uma função que seja zero fora do intervalo desejado. Designa-se essa função por $g(t)$, que é chamada função janela. Exige-se também que ela satisfaça $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty$. Desta forma, o produto $f(t)g(t - u)$ conterá informações de f perto de $t = u$. Variando o parâmetro u , desliza-se a janela ao longo do eixo temporal de modo que se possa analisar o comportamento local do sinal f em diferentes intervalos. Diz-se que $f(t)g(t - u)$ é o sinal janelado.

Define-se a Transformada Janelada de Fourier por

$$\hat{f}(u, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t - u)e^{-i\xi t} dt, \quad (2)$$

onde g é a função que faz o papel da janela e $\hat{g}(0) \neq 0$. Assim, na Transformada Janelada de Fourier, primeiro retira-se a parte desejada do sinal, e em seguida, calcula-se a Transformada de Fourier da parte retirada. Ou seja, diferentemente da Transformada de Fourier, em que, o sinal $f(t)$ deve ser conhecido em todo o eixo temporal antes que seu componente

espectral em cada frequência possa ser calculado, na transformada janelada de Fourier precisa-se conhecer $f(t)$ apenas no intervalo em que $g(t - u)$ é diferente de zero. Assim, $\hat{f}(u, \xi)$ fornece informações para o espectro de f perto de $t = u$.

A função janela desempenha, como pode ser observado, um papel relevante. Os parâmetros mais importantes em sua definição são o seu centro e seu comprimento. Para uma função janela g , define-se seu centro t^* por

$$t^* = \frac{1}{\|g\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |g(t)|^2 dt$$

e o seu raio por

$$\Delta t = \frac{1}{\|g\|} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (t - t^*)^2 |g(t)|^2 dt \right]^{1/2}.$$

Nesse caso, diz que g é a janela temporal e que (2) fornece informações de f na janela

$$[t^* + u - \Delta t, t^* + u + \Delta t].$$

De modo análogo, tem-se a janela frequencial \hat{g} com centro ξ^* e raio $\Delta \xi$ definidos por

$$\xi^* = \frac{1}{\|\hat{g}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \xi |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\Delta \xi = \frac{1}{\|\hat{g}\|} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \xi^*)^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2}.$$

Neste caso, tem-se a informação da função $\hat{f}(u, \xi)$ no intervalo

$$[w^* + \xi - \Delta \xi, w^* + \xi + \Delta \xi].$$

Assim, a transformada janelada de Fourier fornece informação de f na janela tempo-frequência

$$[t^* + u - \Delta t, t^* + u + \Delta t] \times [w^* + \xi - \Delta \xi, w^* + \xi + \Delta \xi].$$

Teoricamente, o trabalho de Fourier mostra que um sinal não pode ser limitado em tempo e frequência simultaneamente, como discutido em detalhes em [11]. A partir desse resultado, estabelece-se que as variações em tempo Δt e em frequência $\Delta \xi$ são inversamente proporcionais. Ou seja,

$$\Delta t \Delta \xi \geq \frac{1}{2},$$

em que a constante $\frac{1}{2}$ pode assumir outros valores de acordo com a normalização utilizada na transformada de Fourier. Note que os valores dos raios Δt e

$\Delta\xi$ da função janela independem de sua localização no plano $t - \xi$, conforme esquematizado na Figura 2. Uma vez que a função janela é escolhida, a resolução tempo-frequência é fixada.

Por exemplo, considere a função janela de Hanning discreta

$$g(n) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{N - 1} \right) \right],$$

em que n é a posição na amostra discreta e $N - 1$ é o tamanho total da janela, com janelas de tamanho de 16s e 64s com uma superposição de 90% na translação pelo sinal discreto a ser analisado. Ao ser aplicada a transformada janelada de Fourier no sinal apresentado na Figura 1, obtêm-se os dois espectrogramas da Figura 3. Observa-se nessa figura que a localização em que ocorreu alteração da frequência é melhor detectada com a janela de 16s, enquanto a detecção das frequências é melhor com a janela de 32s.

Caso se escolha Δt aproximadamente igual ao período da primeira senoide, então a transformada janelada de Fourier é capaz de resolver melhor regiões em que o sinal tem baixa frequência e tem uma resolução pobre em regiões de alta frequência. Por outro lado, se Δt é aproximadamente igual ao período da segunda senoide, então regiões de baixa frequência não são resolvidas adequadamente. Observe que se Δt é muito pequeno, então $\Delta\xi$ é proporcionalmente maior e, assim, a parte de baixa frequência é desfocada.

Assim, o objetivo é dar orientações sobre um método que possa fornecer uma boa resolução em tempo e frequência em qualquer localização no plano

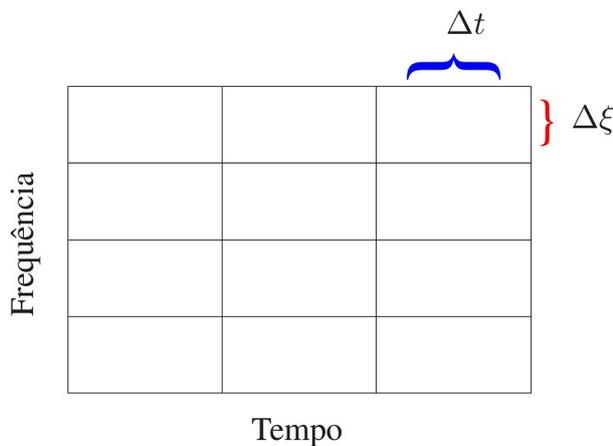


Figura 2: Plano tempo–frequência e as representações das caixas para a Transformada Janela de Fourier.

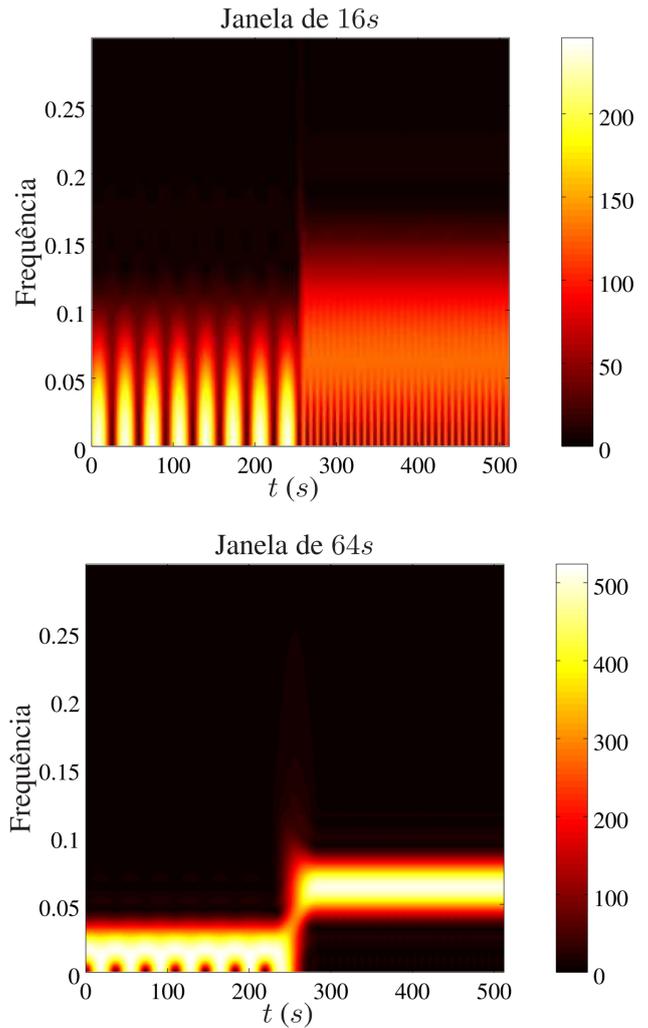


Figura 3: Transformadas janeladas de Fourier do sinal da Figura 1 com janelas de Hanning de 16 e 64 segundos.

tempo-frequência, como ilustrado na Figura 4. Ou seja, tem-se que ter tanto uma função janela cujo raio aumenta em tempo (reduz em frequência) enquanto resolve os conteúdos de baixa frequência e uma janela que decresce em tempo (aumenta em frequência) enquanto resolve o conteúdo de altas frequências de um sinal. Isto conduz ao desenvolvimento das funções wavelets e da transformada *wavelet*, em que existem variações proporcionais das janelas em intervalos de tempo e frequência. As relações tempo-frequência em analogia com o princípio da incerteza são discutidas nas referências [11] e [13]. Vídeos muito interessantes sobre o conceito do tempo apresentados pelo Prêmio Nobel da Física Prof. Etienne Klein também são recomendados aos interessados nesses conceitos ¹.

¹ *Que savons-nous du temps?*:

<https://www.youtube.com/watch?v=NDYIdBMLQR0>

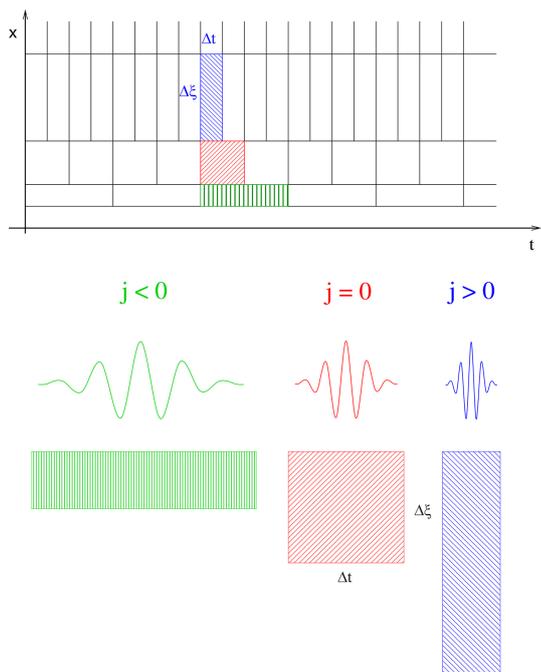


Figura 4: Plano tempo–frequência e as representações das caixas para a Transformada wavelet.

3. Transformada contínua

Nesta seção, define-se a transformada *wavelet* contínua, fazem-se considerações sobre a existência da transformada inversa e apresentam-se algumas de suas propriedades. Com isso, algumas características de sua utilização podem ser destacadas, como a representação bidimensional do módulo e da fase dos coeficientes *wavelet* e a extração de cristas a partir dos coeficientes desta transformada. Outras características podem ainda ser ressaltadas, como a obtenção de um análogo ao espectro de potência de Fourier, i. e., o escalograma global, uma entropia wavelet em analogia a proposição de Shannon, a capacidade de lidar com sinais não periódicos e, ainda, a distribuição de energia por escala que contribuem com a dinâmica de um sistema.

3.1. Definição

A transformada *wavelet* contínua, doravante chamada CWT, é uma transformada integral linear que pode ser utilizada na exploração de características de sinais não estacionários para extrair informações de variações em certas bandas de frequências e/ou detectar estruturas locais presentes [10].

Le temps existe-il?
<https://www.youtube.com/watch?v=4lf9xFKoT8Y>

Dado um sinal f , sua transformada integral é definida como:

$$\mathcal{W}_f^\psi(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)} dt, \quad (3)$$

em que o parâmetro $a (> 0)$ se refere a escala e τ a translação ou localização da função *wavelet*-analisadora² ψ , sendo a e $\tau \in \mathbb{R}$. O parâmetro a controla a dilatação/contração da função *wavelet*-analisadora. À medida que o parâmetro τ varia, o sinal f é analisado localmente em torno dele. Assim, podem-se analisar os aspectos multiescala do sinal não estacionário estudado. O traço superior em $\overline{\psi}$ denota o complexo conjugado da função ψ e $\mathcal{W}_f^\psi(a, \tau)$ é conhecido como coeficiente *wavelet*. Essa transformada é chamada de contínua, pois esses parâmetros de escala a e de localização τ assumem valores contínuos nessa representação.

Para os fins práticos da análise de sinais discretos, tais valores podem ser discretizados tendo o cuidado de se manter o plano escala-tempo totalmente preenchido. Isso resulta numa representação redundante do sinal analisado em relação aos seus coeficientes *wavelets*. Por isso, essa transformada é pouco eficiente do ponto de vista computacional. Contudo, esse fato auxilia bastante o estudo exploratório de sinais, apesar de poder atenuar algumas estruturas encontradas no sinal dependendo da escolha da função *wavelet*, a ser discutido adiante, na Seção 4.

3.2. Propriedades

A transformada *wavelet*, por definição, é um operador linear. Ou seja, dada funções $f(t), g(t)$ e $h(t)$, suas transformadas *wavelet* satisfazem as seguintes relações:

1. Superposição linear:

$$\mathcal{W}_f^\psi(a, t) = \mathcal{W}_g^\psi(a, t) + \mathcal{W}_h^\psi(a, t),$$

em que $f(t) = g(t) + h(t)$.

2. Transposição:

$$\mathcal{W}_f^\psi(a, t - \tau) = \mathcal{W}_g^\psi(a, t),$$

em que $g(t) = f(t - \tau)$.

²Em muitos trabalhos utiliza-se o termo *wavelet*-mãe também para essa função *wavelet* ψ .

3. Escalonamento:

$$\mathcal{W}_f^\psi(\alpha a, \alpha t) = \mathcal{W}_g^\psi(a, t),$$

em que $g(t) = \sqrt{\alpha}f(\alpha t)$.

Em geral, não se tem expressões analíticas para a transformada wavelet; exceto em alguns casos, como, por exemplo:

1. Para funções constantes, a transformada *wavelet* é zero.
2. Para funções senoidais, a transformada wavelet é uma função senoidal com um deslocamento τ , sendo seu módulo $|\mathcal{W}_f^\psi(a, \tau)|$ dependente da escala a . Por exemplo, se $f(t) = \exp(i\xi t)$, então

$$\mathcal{W}_{f(a,\tau)}^\psi = \sqrt{a} \widehat{\psi}(a\xi) \exp(i\xi\tau).$$

3. Para funções lineares, como, por exemplo, $f(t) = t$, a transformada wavelet é proporcional à escala multiplicada pela transformada de Fourier da derivada da função *wavelet* analisadora em relação a frequência ξ , em $\xi = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_f^\psi(a, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} t \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt \\ &= \sqrt[3]{a} \int_{-\infty}^{\infty} t \overline{\psi(t-\tau')} dt \\ &= \frac{\sqrt[3]{a}}{i} \left. \frac{d\widehat{\psi}(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0}. \end{aligned}$$

3.3. Normalizações

Para sinais cujo quadrado integrável da intensidade é finito, faz-se uma analogia com o conceito de energia cinética e atribui-se esse valor o nome de energia do sinal. Espectralmente falando, a decomposição da energia de um sinal em escalas permite explicitar as escalas que mais contribuem com o sinal analisado. Assim, a transformada *wavelet* permite, nesses casos, a determinação da variação temporal da distribuição de energia do sinal analisado por meio de suas escalas de decomposição. Esse conceito é baseado na fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{c^\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left| \mathcal{W}_f^\psi(a, \tau) \right|^2 \frac{da}{a^2} d\tau. \quad (4)$$

A normalização da CWT é muito importante nesse contexto e depende do estudo a ser realizado. A normalização usual é a dada na norma \mathbb{L}^2 , que

assegura uma isometria entre o domínio onde está o sinal a ser analisado e o domínio de seus coeficientes *wavelets*. Nesse caso, o termo de normalização $(\sqrt{a})^{-1}$ é apresentado na transformada, como na Equação 3, e é válida a relação similar ao Teorema de Parseval da análise de Fourier, expressa na Equação 4. É requerido também, em geral, que as funções *wavelet* sejam ortogonais em relação às suas funções dilatadas e transladadas e que o sinal em análise seja de quadrado integrável.

Sinais fractais não são de quadrado integrável, assim a normalização é realizada na norma \mathbb{L}^1 . Do ponto de vista prático, o termo $(\sqrt{a})^{-1}$ apresentado na Equação 3 é substituído por $(a)^{-1}$. Mais detalhes podem ser encontrados em [29, 34]. Um exemplo de uso da CWT com essa normalização \mathbb{L}^1 é encontrado no pacote FRACLAB, do ambiente *scilab*³, que é indicado para estudos de sinais fractais, ou em [28], em que estudos da amplitude do sinal são de interesse.

Pode-se também optar por uma ou outra normalização em estudos específicos em que se tenha interesse na amplitude do sinal; e não em sua energia. Por exemplo, muitas vezes os valores dos coeficientes *wavelet* são usados para cálculos de correlação por escala, como descrito na Seção 9.4, e no cálculo do coeficiente de Hurst [35–37].

3.4. Transformada *wavelet* inversa

Escolhida a função *wavelet*, é possível obter uma constante c_ψ de modo que a transformada wavelet admita a transformada inversa

$$I\mathcal{W}_f^\psi(t) = \frac{1}{c^\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \mathcal{W}_f^\psi(a, t) \overline{\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)} \frac{da}{a^2} d\tau.$$

Essa constante c^ψ é algumas vezes conhecida como constante de admissibilidade da função *wavelet* e está expressa na Equação 6.

4. Funções *wavelets*

Na investigação de sinais, existem várias funções *wavelets* analisadoras que podem ser utilizadas. Entretanto, elas devem obedecer conceitos como admissibilidade, energia unitária e diferem intrinsecamente em vários aspectos como momentos nulos e regularidade. Esses últimos são muito importantes no propósito da sua utilização. Desta forma, uma

³Endereço eletrônico: <http://www.scilab.org/>.

breve descrição desses conceitos são apresentados, incluindo ainda o adequado entendimento do conceito de escala e pseudofrequência.

4.1. Condição de admissibilidade

A condição de admissibilidade de uma função *wavelet* ψ é dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0, \tag{5}$$

que também pode ser expressa no domínio de Fourier como

$$c_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty, \tag{6}$$

em que $\hat{\psi}$ é a transformada de Fourier da função *wavelet* ψ . Assim, preserva-se a característica ondulatória da função *wavelet* e determina-se seu suporte localizado (ou efetivo, do ponto de vista prático).

Essa característica ondulatória dá origem ao nome *wavelet*, em inglês. O termo original veio do francês *ondelette*, proposto pelo físico Alex Grosman. Como referência histórica, nos trabalhos de Jean Morlet o termo original era *octave* ou, em português, oitava. Em português, dada a riqueza de nossa língua há várias designações usualmente utilizadas, como por exemplo: ondinha, ondeta, ondícula, ôndula, ondícula, ondaleta e ondeleta.

4.2. Condição de energia unitária

A função *wavelet* deve ter energia unitária, i.e.,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1.$$

Tal condição garante que a função *wavelet* possua suporte compacto, ou tenha um decaimento rápido de amplitude (*e-folding time*), conhecido como suporte efetivo, garantindo a localização espacial.

4.3. Momentos nulos

Uma característica importante de uma função *wavelet* é o seu número de momentos nulos M , formalizado como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0, \quad 0 \leq m \leq M. \tag{7}$$

Essa propriedade de momentos nulos torna possível a análise da regularidade local de um sinal. O teorema a seguir caracteriza os momentos nulos de

uma função *wavelet* de decaimento rápido como as derivadas de ordem M de uma função de decaimento rápido.

Teorema 1. *Uma função wavelet $\psi(t)$ com um decaimento rápido possui M momentos nulos se e somente se existe uma função $\vartheta(t)$ com um rápido decaimento tal que*

$$\psi(t) = (-1)^M \frac{d^M \vartheta}{dt^M}. \tag{8}$$

Como uma consequência

$$\mathcal{W}_f^\psi(a, \tau) = a^M \frac{d^M}{d\tau^M} (f \star \vartheta_a)(\tau), \tag{9}$$

com $\vartheta_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \vartheta(\frac{-t}{s})$. Além disso, ψ possui no máximo M momentos nulos se e somente se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t) dt \neq 0.$$

4.4. Detecção de regularidade

Outra característica importante é a regularidade da função *wavelet* analisadora. Se a função *wavelet* analisadora é regular e de ordem $n \geq 1$, tal que seus momentos nulos até essa ordem também sejam iguais a zero, i.e.,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0,$$

suas derivadas de primeira ordem também são zero em $\xi = 0$, ou seja:

$$\frac{d\hat{\psi}^n(t)}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = 0.$$

Neste caso, a transformada *wavelet* de uma função $f(t) = t$ também é igual a zero. Em outras palavras, a transformada *wavelet* de uma função linear é zero quando a função *wavelet* analisadora tem momentos nulos de primeira ordem. Similarmente, se a função *wavelet* analisadora tem momentos nulos de primeira e segunda ordem iguais a zero, a transformada *wavelet* de uma função constituída por funções quadráticas e lineares localmente também é zero.

4.5. Escala e frequência central

O termo escala refere-se ao comprimento (dilatação) da função *wavelet*, ou pode ser definido como a distância entre duas oscilações O período central

(ou inverso da frequência-central) tem uma relação direta com a escala.

Buscando uma analogia com a análise de Fourier, pode-se matematicamente estabelecer uma relação entre a frequência central associada à função *wavelet* ξ_ψ e a pseudofrequência (ou frequência central) associada a escala ξ_a da seguinte forma:

$$\xi_a = \frac{\xi_\psi}{a\Delta t}, \quad (10)$$

em que Δt é o período de amostragem, conforme descrito em [29]. Assim, na escolha da wavelet, deve-se também levar em conta a relação da escala com a sua respectiva pseudofrequência. Analogamente, pode-se calcular dessa forma os pseudoperíodos.

Pode-se alternativamente, de uma forma mais rústica, calcular a transformada *wavelet* de sinais ondulatorios com períodos conhecidos e localizar sua respectiva escala de valor máximo de energia associada a esse período.

5. Escolha das funções *wavelets*

Existem inúmeras escolhas de funções que podem ser utilizadas como funções *wavelet* analisadoras, no contexto da transformada *wavelet* contínua. Essa escolhas podem alterar os resultados obtidos de forma a enfatizar uma certa característica do sinal analisado. Nesta seção, uma seleção de funções *wavelet* populares são apresentadas e, no decorrer do artigo, alguns exemplos comparando os resultados de alguns sinais com a análise dessas funções *wavelet* são discutidos. Mais detalhes sobre escolhas de funções *wavelet* analisadoras para ressaltar determinadas características do sinal, a ser analisado, podem ser encontradas, por exemplo, em [21] e referências citadas.

Em particular, na Tabela 1, são apresentados alguns valores para a frequência-central ξ_ψ , de acordo com o algoritmo proposto por [29] para algumas das *wavelets* apresentadas a seguir.

5.1. *wavelet* de Haar, *wavelet* de Shannon

A função *wavelet* de Haar, descrita historicamente pelo matemático húngaro A. Haar [25], embora muito simples, ilustra bem as características-chave da transformada *wavelet*. A sua função *wavelet* dual, no sentido de que as duas funções representam casos extremos opostos na relação tempo-frequência, é a *wavelet sinc* [22, 26]. A *wavelet* de Haar tem boa

Tabela 1: *Wavelet* e suas frequências centrais

Funções <i>wavelet</i>	ξ_ψ
Haar	0,996
Maar	0,250
Meyer	0,690
Morlet	1,0

Nota: No caso da wavelet analisadora de Morlet, esse valor depende da escolha do parâmetro σ , neste caso considera-se $\sigma = 1$.

localização temporal; já a *wavelet sinc* tem boa localização frequencial. Cada uma delas é ortogonal às suas translações por inteiros. Tendo isso em vista, todas as outras funções de interesse ou funções exemplos têm um comportamento que se situa entre estes dois tipos de transformada.

A *wavelet* de Haar é definida por:

$$\psi = \begin{cases} 1, & -1/2 \leq t < 0, \\ -1, & 0 \leq t < 1/2, \\ 0, & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

Logo, essa função é real e antissimétrica com respeito a $t = 0$, e o intervalo em que ela é diferente de zero é finito. Ou seja, ela possui boa localização no espaço temporal; porém não no espaço frequencial. Tal característica reduz bastante a sua aplicação prática no estudo de sinais. Como uma caracterização geral, essa função respeita a condição de admissibilidade e energia unitária, é descontínua e possui apenas um momento nulo. A *wavelet* de Haar é não regular, sua derivada primeira é descontínua, e seu momento de primeira ordem não é zero.

A transformada de Fourier da *wavelet* de Haar é complexa e simétrica em torno de $\xi = 0$,

$$\hat{\psi}(\xi) = 2i \exp\left(-\frac{\xi}{2}i\right) \text{sinc}\left(\frac{\xi}{4}\right) \text{sen}\left(\frac{\xi}{4}\right),$$

em que a função *sinc*(t) denota $\text{sen}(\pi t)/(\pi t)$. A amplitude do espectro de Fourier da *wavelet* de Haar converge a zero lentamente com uma taxa $1/\xi$.

Por outro lado, tem-se a função *wavelet sinc*, também designada como *wavelet* de Shannon, definida por:

$$\psi(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right). \quad (11)$$

Há também uma versão complexa da *wavelet* de Shannon, definida como:

$$\psi(t) = \text{sinc}(t)e^{-i2\pi t}. \quad (12)$$

Essa *wavelet* possui características ideais de filtragem de banda no espaço de Fourier. Isso gera uma

descontinuidade em sua transformada de Fourier, que faz com que seu decaimento seja $1/|t|$ no tempo, que é muito lento. Ela tem uma boa resolução frequencial; o que, em contrapartida, gera sua pobre resolução temporal. Além disso, essa função *wavelet* é infinitamente diferenciável e possui infinitos momentos nulos.

5.2. *wavelet* de Meyer

A *Wavelet* de Meyer acelera o decaimento da *Wavelet* de Shannon ao substituir as bordas com pouca regularidade por funções suaves. As taxas de decaimento estão associadas à ordem da *Wavelet* de Meyer. Em particular, a *wavelet* de Meyer possui as qualidades de ser infinitamente diferenciável e de ter infinitos momentos nulos, sendo também ortogonal às suas translações de inteiros. A função escala e a função *wavelet* de Meyer têm como características principais serem uma das primeiras bases ortogonais, nesse contexto, a terem rápida convergência no domínio de Fourier e serem infinitamente diferenciáveis.

Essa função escala é definida no domínio de Fourier da seguinte forma

$$\hat{\phi}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & |\xi| < \frac{2\pi}{3}, \\ \frac{\cos[\frac{\pi}{2}\nu(\frac{3}{2\pi}|\xi|-1)]}{2\pi}, & \frac{2\pi}{3} \leq |\xi| \leq \frac{4\pi}{3}, \\ 0, & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

Sendo $\nu(\xi)$ um polinômio interpolador que tem as seguintes propriedades:

$$\nu(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0, \\ \xi & 0 < \xi < 1, \\ 1, & \xi \geq 1, \end{cases} \quad (13)$$

e

$$\nu(\xi) + \nu(1 - \xi) = 1. \quad (14)$$

Na Tabela 2 são apresentados alguns exemplos desse polinômio para diversas ordem de aproximação. Mais detalhes podem ser obtidos em [27].

A função $\hat{\phi}(\xi)$ tem suporte no intervalo $[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}] \subset (-2\pi, 2\pi)$ e boa localização em frequência. A função escala $\phi(t)$ correspondente pode ser obtida de sua transformada inversa de Fourier e não têm suporte finito.

Tabela 2: Polinômios Interpoladores $\nu(\xi)$

Ordem	$\nu(\xi)$
1	ξ
2	$\xi^2 (3 - 2 \xi)$
3	$\xi^3 (10 - 15 \xi + 6 \xi^2)$
4	$\xi^4 (35 - 84 \xi + 70 \xi^2 - 20 \xi^3)$
5	$\xi^5 (126 - 420 \xi + 540 \xi^2 - 315 \xi^3 + 70 \xi^4)$

Similarmente, a função *wavelet* de Meyer é definida no domínio de Fourier como:

$$\hat{\psi}(\xi) = \begin{cases} \frac{e^{i\xi/2}}{2\pi} \text{sen} [\varphi(\nu; \xi)], & \frac{2\pi}{3} \leq |\xi| \leq \frac{4\pi}{3}, \\ \frac{e^{i\xi/2}}{2\pi} \text{cos} [\varphi(\nu; \xi)], & \frac{4\pi}{3} \leq |\xi| \leq \frac{8\pi}{3}, \\ 0, & \text{em outro caso,} \end{cases} \quad (15)$$

em que $\varphi(\nu; \xi) = \frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{2\pi} |\xi| - 1 \right)$. Esse função *wavelet* possui suporte compacto e sua regularidade é a mesma de $\nu(\xi)$. A *wavelet* $\psi(t)$ correspondente pode ser obtida da transformada inversa de Fourier e não têm suporte finito, mas ela possui um decaimento para 0, quando $t \rightarrow \infty$, mais rápido do que qualquer polinômio, i.e., $\forall n \in \mathbb{N}, \exists C_n$ tal que

$$|\psi(t)| \leq \frac{C_n}{(1 + |t|^2)^n}.$$

Essa última propriedade vale também para as suas derivadas. Ressalta-se aqui que cuidados devem ser tomados para a utilização dessa função com banco de filtros no domínio do tempo; pois o uso dessa função pode implicar perda de energia do sinal processado, i.e., não se tem mais a isometria entre o espaço dos dados e dos dados transformados.

Uma implementação eficiente dessa *wavelet* no domínio de Fourier está disponível no pacote *Wavelab* que pode ser utilizado no *GNU/Octave* ⁴. Muitas outras implementações de *wavelet* também estão disponíveis nesse pacote.

5.3. *wavelet* chapéu mexicano

Essa é outra *wavelet* analisadora bastante conhecida, as vezes designada de Marr. Ela é a derivada segunda da função de densidade de probabilidade gaussiana,

⁴Endereço eletrônico do pacote Wavelab da Universidade de Stanford:

HTTP://STATWEB.STANFORD.EDU/~WAVELAB/.

e é expressa por

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3} \pi^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) (1-t^2). \quad (16)$$

Essa função possui suporte infinito; entretanto, o seu suporte efetivo está no intervalo $[-5, 5]$. Ela é muito utilizada em estudos onde a localização temporal é importante e pode-se abrir mão da localização frequencial.

Essa wavelet é uma função real; embora já haja uma função complexa, calculada a partir de uma transformada Hilbert.

5.4. wavelet de Morlet

Na literatura, existem várias formas de se escrever a wavelet de Morlet. De uma forma simplificada, essa wavelet consiste de uma onda plana modulada por uma função Gaussiana, escrita como:

$$\psi(t) = \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right) \exp(i\omega_0 t). \quad (17)$$

A função wavelet de Morlet é uma função complexa, o que permite analisar a fase e o módulo do sinal decomposto. Em geral, escolhe-se a forma ortogonal que Jean Morlet usou, em que $\sigma = 1$ e $\omega_0 = 5$, de tal forma que a condição de admissibilidade é satisfeita [27] e tem-se, também, o equilíbrio no plano tempo-frequência (que está relacionado a igualdade da expressão no Princípio de Incerteza de Heisenberg). Nesse caso, a pseudofrequência é expressa por $\xi_a = \frac{1}{a\Delta t}$.

O parâmetro σ provê a informação de quão boa é a relação tempo-frequência. Valores pequenos de σ faz com que se tenha uma boa resolução temporal; enquanto valores maiores proveem uma boa resolução frequencial. Deve-se atentar para o fato de que, para $\sigma < 1$, ocorre uma quebra na condição de admissibilidade.

wavelet de Morlet adaptada

Do ponto de vista prático, sinais reais são geralmente discretos, finitos e possuem falhas. Essas restrições dificultam a análise pelas técnicas wavelet convencionais em muitos casos. Em [28] é proposto um procedimento de ajuste da função wavelet de Morlet que se adapte tanto as falhas como ao início e final da série do sinal tratado. Com isso, supera-se os problemas de estimativa de energia

nas escalas no cálculo dos coeficientes wavelet. À medida que a translação da função wavelet avança sobre o sinal desconhecido, uma nova função wavelet é criada a partir da função wavelet original e de uma função de transferência. A ideia principal desta técnica é restaurar a condição de admissibilidade com essa nova função wavelet; uma vez que a condição de admissibilidade seria perdida quando a função wavelet original se sobrepusesse às lacunas de dados.

Para maior clareza, convém explicar mais detalhadamente. Mais precisamente, neste procedimento considera-se uma função $f(t)$ que é conhecida por algum intervalo de tempo t e, em seguida, tem-se $g(t) = f(t)G(t)$, em que $G(t)$ é a função de transferência para as lacunas de dados. Nessa construção, a função $G(t)$ possui o valor um se o sinal está registrado corretamente; e zero caso contrário. Depois disso, pode-se construir a nova função

$$\psi'(t; a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \tilde{\psi}\left(\frac{t-\tau}{a}\right) G(t)$$

Nas regiões de falha, a função $\tilde{\psi}$ é usada ao invés da função wavelet ψ . Então, em [28], desenvolveu-se uma função wavelet adaptativa $\tilde{\psi}$ para a função wavelet de Morlet (dada na Eq. 17), dada pela seguinte forma:

$$\tilde{\psi}(t; a, \tau) = [\exp(i\xi_0(t-\tau)) - \vartheta(a, \tau)] \times \exp\left(\frac{-(t-\tau)^2}{2\sigma^2}\right) G(t),$$

que adapta a parte oscilatória da função wavelet de Morlet para manter a condição de admissibilidade com uma nova função oscilatória $\vartheta(a, \tau)$, definida como:

$$\vartheta(a, \tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega_0(t-\tau)) \exp\left(\frac{-(t-\tau)^2}{2\sigma^2}\right) G(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(t-\tau)^2}{2\sigma^2}\right) G(t) dt}.$$

Essa nova função wavelet depende também da própria escala a em que está a função wavelet de Morlet e, assim, deve ser continuamente construída com os parâmetros a e τ .

6. Escalograma

Os escalogramas são gráficos que representam a visualização bidimensional dos coeficientes wavelets $\mathcal{W}_f^\psi(a, \tau)$. Estes podem ser visualizados por meio

de um campo de isolinhas ou imagem. No último caso, em especial, é necessário um cuidado especial com as paletas de cores utilizadas. Uma breve discussão sobre esse assunto está apresentada no Apêndice 10.

Analogamente aos *spectrogramas* da Transformada Janelada de Fourier, que são representações das variações das amplitudes ou das energias dos coeficientes de Fourier em bandas de frequências fixas no tempo, os escalogramas em *wavelet* são a representação das amplitudes ou das energias associadas aos coeficientes *wavelet* simultaneamente em escalas e no tempo.

Em muitos trabalhos não está explícito como está sendo representado exatamente os valores dos coeficientes *wavelet* nos escalogramas. A desatenção a uma descrição mais completa, costuma suscitar, por exemplo, as perguntas seguintes. *Qual foi a normalização utilizada no cálculo dos coeficientes wavelets? Qual formulação da wavelet analisadora foi empregada? Como se visualiza e se interpreta realmente o gráfico apresentado?* Essas dúvidas dificultam em muito a análise dos resultados por terceiros e sua reprodutibilidade. A seguir são apresentados alguns exemplos de como apresentar os coeficientes *wavelets* e algumas formas de visualizar as estruturas presentes nos escalogramas.

Neste trabalho, todos os escalogramas consideram $|\mathcal{W}_f^\psi(a, 5)|^2$ e a escala a pode ter representação linear ou por um $\log_2(a)$. Nesta área, é possível também um representação dos coeficientes *wavelets* em \log_{10} . Outros artifícios, desde que sejam bem informados, costumam ser usados também para dar destaque às características específicas de sinais analisados.

Em geral, ou as amplitudes quadráticas dos módulo dos coeficientes *wavelets* originários de uma transformada com normalização no $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ são utilizadas; ou o módulo das amplitudes dos coeficientes *wavelets* originários de uma transformada com normalização no $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ é utilizada.

As amplitudes quadráticas dos módulo dos coeficientes *wavelets* podem ser interpretadas como a distribuição da energia do sinal no tempo por sua escala; enquanto o módulo das amplitudes dos coeficientes *wavelets*, como a variabilidade da amplitude no tempo por sua respectiva escala. Para permitir um entendimento básico, o termo *energia* é usado, neste contexto, como uma analogia a *energia cinética* usual da física, sem a constante $\frac{1}{2}$.

O programa YAWTb⁵ pode ser utilizado para o cálculo dessa transformada com várias funções *wavelets* analisadoras, sendo um dos poucos programas abertos que também dispõe de transformadas multidimensionais.

6.1. Extração de cristas

A CWT de um sinal real utilizando uma *wavelet* analítica tem a propriedade de que a derivada em um ponto da crista é zero. Assim, calcula-se:

$$\frac{\partial \theta(a, \tau)}{\partial a} = 0.$$

Essa condição é suficiente para localizar a crista de energia no escalograma. Por outro lado, pode ser caro computacionalmente calcular isso. Dessa forma, existem alguns algoritmos que facilitam esse trabalho, como o proposto em [30]. Para exemplo, a *wavelet* de Morlet, descrita na Seção 4, é um exemplo de uma função *wavelet* analítica. No pacote *wavelab* há algoritmos para extração das cristas e, também, do esqueleto do escalograma. Maiores detalhes estão discutidos no livro de S. Mallat [22].

6.2. Fase

Quando a função *wavelet* é complexa, é possível com base nos coeficientes *wavelet* $\mathcal{W}_f^\psi(a, \tau)$ definir a fase $\theta(a, \tau)$ além do módulo, utilizando as partes real e imaginária desses coeficientes. A fase contém informações importantes do comportamento do sinal analisado.

Usualmente, os valores de fase podem ser representados graficamente ou como uma imagem, em uma visualização similar a do escalograma, ou como um campo vetorial. Vale a pena ressaltar que apenas os valores de fase em que os módulos sejam significativos devem ser analisados.

Em geral, essa fase é analisada no intervalo $[0, 2\pi)$. Para dar completeza ao assunto, o Apêndice 10 descreve quais cuidados devem ser tomados, computacionalmente, para se obter o valor correto da fase. Exemplos de diferentes formas de visualização dessa quantidade estão nas Figuras 7, 10, 11 e 12.

6.3. Uso de diferentes funções *wavelets*

Os resultados apresentados nos escalogramas dependem, também, da função *wavelet* escolhida. Caso

⁵YAWTb: Yet another wavelet toolbox, endereço eletrônico: <http://sites.uclouvain.be/ispgroup/yawtb/>

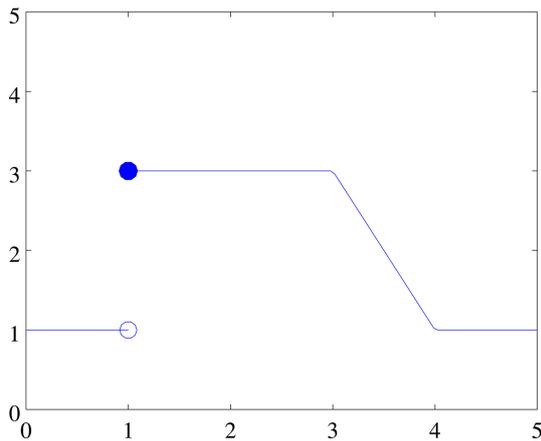


Figura 5: Sinal não estacionário com descontinuidade em $t = 1$ e com descontinuidade na derivada em $t = 3$ e $t = 4$, valores constantes entre $t \in [0, 1)$, $t \in [1, 3)$ e $t \in [4, 5)$ e valores com um decaimento linear entre $t \in [3, 4)$.

se deseje estudar mudanças de amplitude, uma *wavelet* complexa pode ser a mais adequada, como a de Morlet. Isso ajuda a capturar o comportamento oscilatório dos dados. Outras vezes, *wavelets* reais, como a chapéu mexicano ou a Morlet (módulo e fase), são mais úteis quando o interesse está em estudar a localização de eventos no tempo.

Ilustrativamente, considera-se um sinal não estacionário descrito pela função:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 3, & 1 \leq t < 3 \\ -2t + 9, & 3 \leq t < 4 \\ 1, & 4 \leq t \leq 5, \end{cases} \quad (18)$$

que está apresentado na Figura 5. Ele é utilizado para ilustrar as propriedades de localização temporal e frequencial das *wavelets*, bem como suas habilidades de detectar a regularidade local.

Como resultados, nas Figuras 6 e 7, observa-se que somente a *wavelet* de Haar é capaz de identificar a parte linear do sinal e que todas as funções *wavelet* são capazes de detectar a descontinuidade na função. Em resumo, a transformada wavelet de um sinal polinomial de grau M é igual a zero quando a função *wavelet* analisadora possui momentos nulos até a ordem $n \leq M$. Desta forma, a transformada *wavelet* é eficiente em detectar distúrbios locais, não-estacionariedades, singularidades localizadas e transientes no sinal analisado. As fases dos coeficientes *wavelets* indicam as variações apresentadas no sinal apenas nas regiões de maior energia. Assim, a fase relativa à *wavelet* de Morlet, nesse caso, identifica melhor a região de descontinuidade do sinal.

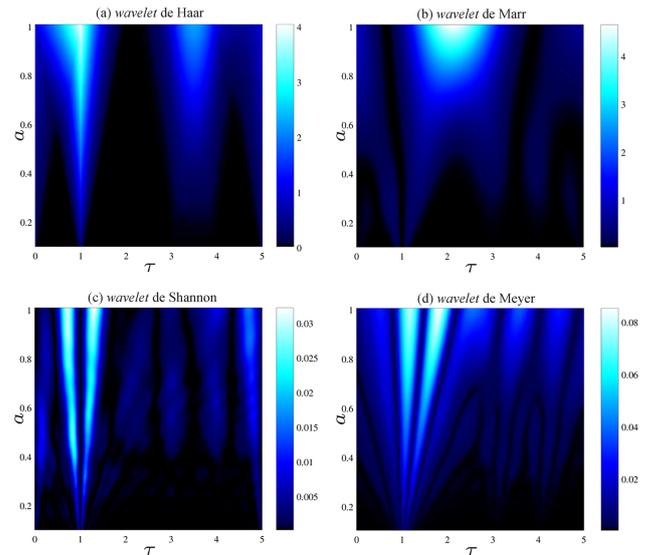


Figura 6: Escalograma do sinal não estacionário descrito pela função 18 para as funções *wavelet* analisadoras de Haar, Marr, Shannon e Meyer.

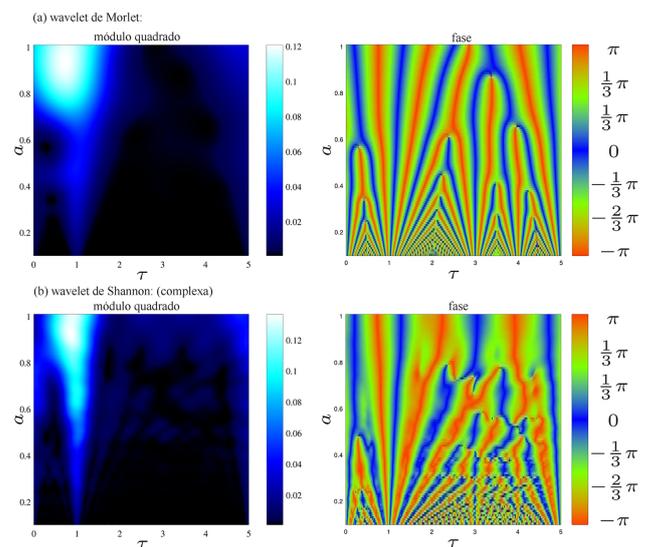


Figura 7: Escalograma e função da Equação de fase do sinal não estacionário descrito pela função 18 para as *wavelets* de Morlet e Shannon complexa.

Nota-se que diferentes energias do sinal podem ser observadas dependendo da função *wavelet* escolhida.

6.4. Significância dos resultados

Para a determinação de quais amplitudes dos coeficientes *wavelets*, apresentados nos espectros *wavelets*, são realmente significativas alguns cuidados e testes são aplicados. Exemplos utilizando o cone de influência e os testes pontuais e de área apresentados a seguir estão nas Figuras 9 e Fig 10.

Cone de influência

O cone de influência de um espectro wavelet é a região afetada pela fronteira desse espectro em que os valores dos coeficientes *wavelet* podem estar afetados. Esse cone é definido pelo decaimento (*e-folding time*) do espectro *wavelet* em cada escala [32].

Testes pontuais

Os testes pontuais são estabelecidos a partir do trabalho de [32] assumindo um ruído vermelho de fundo no espectro para uma hipótese nula e testando cada ponto no plano tempo-escala separadamente, aceitando-se os casos em que a potência local do espectro assumisse um valor maior que um nível de significância escolhido. Essa técnica tem alguns desafios ligados a escolha do nível de significância e a escolha do ruído de fundo em se tratando da escala, conforme descrito em [33].

Testes de área

A ideia básica do teste de significância de área é dar pesos diferenciados dependendo das escalas, ou seja, as áreas são calculadas como,

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau da}{a^2}.$$

A medida refere-se ao fator a^2 , considerando-se o \mathbb{L}^2 . Neste caso, calcula-se uma área crítica, i.e., de importância para a análise, e uma área compreendida pela região definida no teste puntual, para cada escala a . O valor um menos a razão entre essas áreas é o nível de significância. É possível também estabelecer algoritmos para avaliar os valores críticos para essas áreas. Mais detalhes podem ser obtidos em [24, 33].

6.5. Sinais não periódicos

A maioria dos algoritmos utilizados para calcular a transformada *wavelet* contínua necessita que se utilize dados periódicos para seu uso. No caso de dados não periódicos é necessária, em geral, uma periodização suave dos dados nas fronteiras. Essa periodização pode ser realizada por filtros como a função de Hanning

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi t), & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Esse filtro quando aplicado em cada uma das fronteiras reduz suavemente seus valores sem acrescentar artefatos computacionais aos coeficientes fora de sua regiões de influência nas decomposições multi-escalas. Outras soluções podem ser praticadas, como por exemplo, introduzir um delta de Dirac nas fronteiras para ver a região de influência das diversas escalas dessa estrutura. Além dessas formas, pode-se também ajustar a função *wavelet* para que ela se adapte as fronteiras mantendo suas características.

7. Escalograma global

Analogamente ao espectro de potência da transformada de Fourier, é possível fazer a integração do parâmetro τ dos escalogramas *wavelet* dados na Equação 3. Este resultado é conhecido como escalograma global, que representa as amplitudes quadráticas do módulo dos coeficientes *wavelet*, em que:

$$S_{\psi}^f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{W}_{\psi}^f(a, \tau)|^2 d\tau. \quad (19)$$

Os resultados do escalograma global podem ser interpretados como a distribuição da energia do sinal por sua escala a . Em geral, esses resultados, em especial em altas frequências, são mais suaves e possuem menor amplitude do que o espectro de potência calculado com Fourier. Assim, se o espectro de potência tiver picos estreitos, é melhor usá-lo para determinar a magnitude dos picos. O escalograma global tem contribuído no estudo de sinais turbulentos, quando, por exemplo, deseja-se avaliar o decaimento dos coeficientes e essa suavização facilita esta tarefa [6].

8. Entropia *wavelet*

Em analogia à definição de entropia colocada pelo matemático e engenheiro eletrônico Shannon, pesquisador destacado da *Teoria da informação*, a entropia *wavelet* contínua é definida por [31] como:

$$S_{\psi}(\tau) = \int_0^{\infty} -\mathcal{P}_{\psi}(a, \tau) \ln(\mathcal{P}_{\psi}(a, \tau)) da,$$

em que

$$\mathcal{P}_{\psi}(a, \tau) = \frac{|\mathcal{W}_f^{\psi}(a, \tau)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{W}_f^{\psi}(a, \tau)|^2 da}$$

corresponde a distribuição da energia de probabilidade para cada escala a em um certo tempo τ .

Essa entropia *wavelet* é mínima quando o sinal é caracterizado por uma atividade organizada e é máxima quando o sinal é constituído de superposições de um grande número de processos. Por exemplo, ao se considerar um sinal ordenado mono-frequencial, a sua representação multinível é identificada em uma única escala (ou nível), que por sua vez concentra 100% da energia total do sinal e, conseqüentemente, a entropia wavelet contínua é próxima a zero. Por outro lado, se o sinal for constituído de um ruído branco, todas as escalas devem contribuir no total de energia e, assim, a entropia *wavelet* é máxima.

Por meio dessa abordagem multiescala, as escalas mais relevantes do sinal, ou seja, aquelas que contém os processos mais complexos, podem ser automaticamente detectadas.

9. Relações tempo-escala para dois sinais

A transformada *wavelet* contínua é uma ferramenta adequada para se analisar oscilações localizadas e intermitentes usualmente em uma série temporal. Contudo, é muito comum a necessidade de examinar e caracterizar a interação de duas séries temporais. Dessa forma, alguns recursos muito procurados de análises, e que aqui estão fundamentados nas transformadas wavelets, são descritos a seguir. Inicialmente, consideram-se a transformada cruzada, os escalogramas e fases cruzadas, e os espectros cruzados wavelet. Para superar alguns desafios advindos do espectro cruzado, exploram-se ainda a coerência wavelet, a correlação cruzada wavelet e a correlação por escala.

9.1. Transformada cruzada

A transformada *wavelet* cruzada (XWT), denotada por $\mathcal{W}_{f,g}^\psi$, a partir de Hudgins et al. em [38], para dois sinais f e g , é definida como sendo o produto das transformadas wavelet de f , \mathcal{W}_f^ψ , com a complexa conjugada da transformada wavelet de g , $\overline{\mathcal{W}_g^\psi}$, ou seja:

$$\mathcal{W}_{f,g}^\psi(a, \tau) = \mathcal{W}_f^\psi(a, \tau) \overline{\mathcal{W}_g^\psi(a, \tau)}.$$

9.1.1. Escalograma e fase cruzados

Como a XWT pode ser complexa, segue que ela pode ser decomposta em termos da amplitude $|\mathcal{W}_{f,g}^\psi|$ e da fase $\Phi_{f,g}$, analogamente à CWT. A magnitude

de XWT enfatiza o tempo e a escala em que as duas séries temporais interagem. Desta forma, os coeficientes em módulo da XWT são a decomposição em tempo-escala do espectro cruzado *wavelet*, e seu respectivo gráfico de densidade no plano $a \times \tau$ é o escalograma cruzado.

Neste caso, interpreta-se a fase como medida da diferença (ou da ordem de interação) entre os dois sinais f e g no tempo τ e na escala a . A fase captura a coordenação entre as componentes.

9.1.2. Espectro cruzado *wavelet*

Em analogia com o espectro de potência *wavelet*, o espectro cruzado *wavelet* de dois sinais f e g é definido por:

$$\begin{aligned} C_{fg}^\Psi(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_f^\psi(a, \tau) \cdot \overline{\mathcal{W}_g^\psi(a, \tau)} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_{f,g}^\psi(a, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

9.1.3. Desafios da análise dos resultados

Os resultados do espectro cruzado *wavelet* podem indicar resultados que não são verificados como verdadeiros nos testes de significância de interrelação entre duas séries temporais, o que dificulta a análise dos resultados. Uma alternativa, e também ferramenta auxiliar, é a aplicação da coerência wavelet [39]⁶.

9.2. Coerência *wavelet*

Há várias definições possíveis para coerência *wavelet* [40, 41]. Segundo definido por Torrence e Webster em [42], a coerência pode ser expressa como:

$$C^2(a, \tau) = \frac{|S(a^{-1} \mathcal{W}_{f,g}^\psi(a, \tau))|^2}{S(a^{-1} |\mathcal{W}_f^\psi(a, \tau)|^2) \cdot S(a^{-1} |\mathcal{W}_g^\psi(a, \tau)|^2)} \quad (20)$$

em que $S = S(a, \tau)$ é um operador de suavização na escala e no tempo. A média em escala é realizada com uma janela de tamanho fixo para cada escala, em que as escalas são usualmente representadas em logaritmos. Ou seja, considerando o cálculo dos coeficientes *wavelets* na posição

$$a_i = 2^{\frac{k-1}{N_{vozes}}} a_0,$$

⁶ Esses autores disponibilizam um programa gratuito chamado SOWAS para GNU/Octave e R que pode ser usado para o cálculo da XWT. Endereço eletrônico: <http://tocsy.pik-potsdam.de/wavelets.php>

em que $k = 1, \dots, N_{vozes}N_{oitavas} + 1$, $a_{\min} = a_0$ e $a_{\max} = a_0 2^{N_{oitavas}}$. Sendo que o valor a_0 corresponde a frequência de Nyquist, $N_{oitavas}$ é o número de oitavas e N_{vozes} é o número de vozes por escala. Enquanto, a média em tempo é feita com uma janela de tamanho proporcional a escala. Mais detalhes podem ser encontrados em [24,33].

A coerência wavelet fornece um estimador qualitativo da evolução temporal do grau de linearidade da interação entre duas séries temporais numa dada escala. O valor um significa uma relação linear entre as funções f e g em torno do tempo τ e da escala a ; enquanto o valor zero significa que a interação está desaparecendo.

Na expressão, o fator a^{-1} tem a função de normalizar a densidade de energia e a suavização S é feita usando uma convolução na direção do tempo e da escala para a *wavelet* em uso. Analogamente á CWT e na XWT, quando a função *wavelet* é complexa, pode-se também calcular a fase associada a coerência [39]⁷.

9.3. Correlação cruzada wavelet

Os métodos clássicos de correlação cruzada são utilizados para determinar as estruturas coerentes de dois sinais apenas em relação a sua defasagem temporal e, desalentadoramente, falham quando existem múltiplos períodos. Devido a suas propriedades, a função de correlação wavelet cruzada, $\mathbb{C}_{f,g}^\psi(a, \tau)$, auxilia em tais casos, propiciando que os sinais f e g sejam adequadamente analisados. Por definição,

$$\mathbb{C}_{f,g}^\psi(a, \tau) = \lim_{T \rightarrow -\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \overline{\mathbb{W}_f^\psi(a, b)} \mathbb{W}_g^\psi(a, b + \tau) \frac{db}{T}, \tag{21}$$

em que τ é a defasagem dos coeficientes *wavelets* no espaço de *wavelets* ou a defasagem dos dois sinais. A partir dos coeficientes $\mathbb{C}_{f,g}^\psi(a, \tau)$, obtêm-se coeficientes *wavelets* de correlação cruzada

$$\mathbb{C}^\psi(a, \tau) = \frac{\sqrt{\left(\left| \Re \left(\mathbb{C}_{f,g}^\psi(a, \tau) \right) \right|^2 + \left| \Im \left(\mathbb{C}_{f,g}^\psi(a, \tau) \right) \right|^2 \right)}}{\sqrt{\left| \Re \left(\mathbb{C}_f^\psi(a, 0) \right) \right| \left| \Re \left(\mathbb{C}_g^\psi(a, 0) \right) \right|}}, \tag{22}$$

⁷O programa gratuito SOWAS pode ser usado para o cálculo da coerência.

em que

$$\mathbb{C}_f^\psi(a, 0) = \lim_{T \rightarrow -\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbb{W}_f^\psi(a, \tau) \overline{\mathbb{W}_f^\psi(a, \tau)} \frac{d\tau}{T}.$$

Como duas propriedades importantes, têm-se que $\mathbb{C}_{f,g}^\psi(a, \tau)$ e $\mathbb{C}^\psi(a, \tau)$ são simétricas em relação a τ e os coeficientes $\mathbb{C}^\psi(a, \tau)$ pertencem ao intervalo $[-1, 1]$. Mais detalhes podem ser encontrados em [40] e referências citadas.

9.4. Correlação por escala

A correlação por escala $\mathbb{C}_{\mathbb{S}^\psi}(a)$ é utilizada no estudo das relações entre diferentes escalas de dois sinais f e g analisados no domínio de *wavelets*. Essa correlação é calculada pela seguinte expressão:

$$\mathbb{C}_{\mathbb{S}^\psi}(a) = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{W}_g^\psi(a, \tau) \overline{\mathbb{W}_f^\psi(a, \tau)} d\tau}{S_f^\psi(a) S_g^\psi(a)} \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{23}$$

em que o termo $\mathbb{W}_f^\psi(a, \tau)$ expressa:

$$\mathbb{W}_f^\psi(a, \tau) = \left| \mathbb{W}_f^\psi(a, \tau) - \widetilde{\mathbb{W}_f^\psi(a)} \right|, \tag{24}$$

sendo que $\widetilde{\mathbb{W}_f^\psi(a)}$ denota a média aritmética no tempo, denotado pela variável τ de $\mathbb{W}_f^\psi(a, \tau)$ para uma certa função f . Se $f = g$, tem-se a auto-correlação por escala. Maiores detalhes desses procedimentos podem ser vistos em [28, 43] e nas referências citadas.

9.5. Exemplos

Para possibilitar uma apreciação prática de aplicações, consideram-se aqui dois exemplos. O primeiro envolve dois sinais não estacionários utilizados em [40] para ilustrar a correlação *wavelet* e aqui estão sendo utilizados para o cálculo da *wavelet* cruzada e da coerência *wavelet*. O segundo exemplo usa a coerência *wavelet* para identificar defasagens entre sinais com o mesmo ruído aditivo.

Exemplo 1 Dois sinais não estacionários são utilizados para ilustrar o espectro cruzado e a coerência *wavelet*. A Figura 8(a) diz respeito às funções distintas que possuem contribuições em simultaneidade no tempo. Já a Figura 8(b) representa as suas diversas contribuições com defasagens temporais.

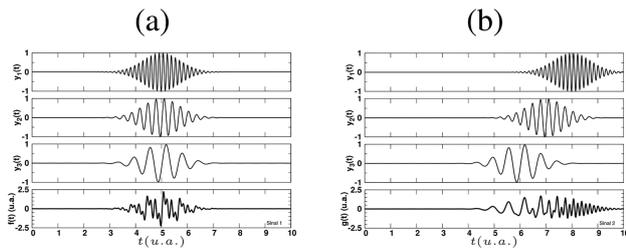


Figura 8: Funções distintas, (a) com contribuições em simultaneidade, e (b) com contribuições em defasagem.

Na Figura 9 são apresentados os escalogramas e as diversas contribuições desses sinais nas escalas e localmente no tempo em que ocorreram, em que os valores estão expressos pelos coeficientes *wavelet* de maior amplitude.

Na Figura 10 estão plotados o módulo e fase da XWT. Os maiores valores indicam em que tempos e escalas os sinais estão simultaneamente relacionados, pois ambos possuem energia nessa região. Dando sequência a análise, na Figura 11, o módulo e a fase da coerência wavelet estão apresentados confirmando os resultados do XWT. Para essas análises utilizou-se a *wavelet* de Morlet e incluiu-se o cone de influência, e testes pontuais e de área de significância nos escalogramas apresentados da CWT e da XWT.

Exemplo 2 Para a aplicação de coerência *wavelet*, sinais defasados com um mesmo nível de ruído, apresentados na parte superior da Figura 12, são considerados. Observa-se que a defasagem é identificada e que os ângulos de fase, representado pelas setas, indicam o atraso de um sinal com respeito ao outro sinal no escalograma, como apresentado na parte inferior da Figura 12.

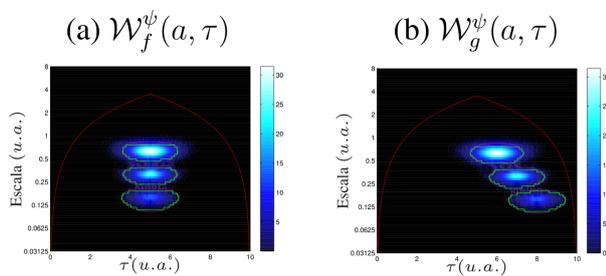


Figura 9: Escalograma usando a *wavelet* de Morlet, incluindo o cone de influência (linha em vermelho), teste puntual (linha magenta) e área de significância (linha em verde), considerando os sinais apresentados na Fig 8(a, b) respectivamente.

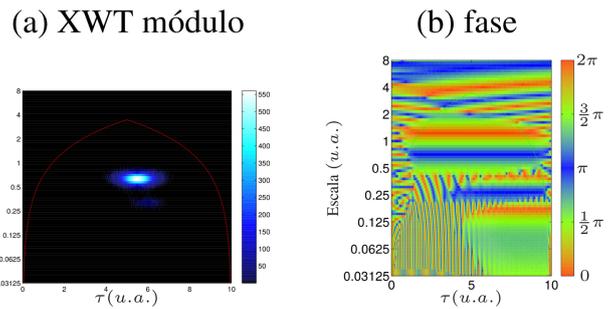


Figura 10: Módulo e fase da XWT usando a *wavelet* de Morlet, incluindo o cone de influência (linha vermelha), teste puntual (linha magenta) e de área de significância (linha verde), considerando os escalogramas apresentados na Fig 9.

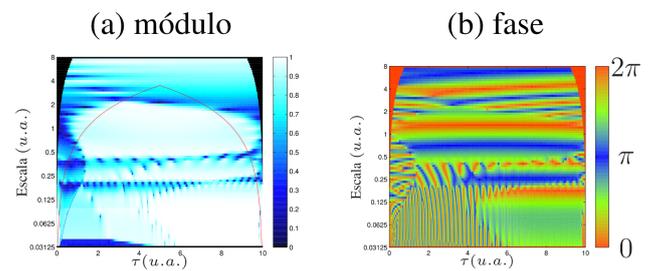


Figura 11: Módulo e fase da coerência wavelet calculada com a função *wavelet* de Morlet, incluindo o cone de influência e área de significância considerando os escalogramas apresentados na Fig 10.

10. Considerações finais

O esforço deste texto foi permitir uma visão abrangente, contando com uma apresentação didaticamente mais compactada, sobre essas valiosas ferramentas, as wavelets.

A versão do texto aqui apresentada é uma complementação e uma significativa extensão do material apresentado em [20, Cap. 3], no tópico Transformada *wavelet* contínua⁸, do minicurso *Bem vindo ao mundo das wavelets*, na ELAC/INPE de 2010, e do artigo [21]. Ao leitor interessado em uma imersão mais plena, aborda-se naquele material a evolução das ideias que motivaram a elaboração da transformada contínua e de uma série de outras ferramentas decorrentes dessas ideias, como também mencionam-se importantes bibliotecas públicas onde se podem obter implementações dessas ferramentas. Para um maior aprofundamento nessa transformada, as referências [10,22,23] e [24] também são recomendadas.

⁸Esse material de 2012 está disponível gratuitamente no site da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada, na parte de publicações.

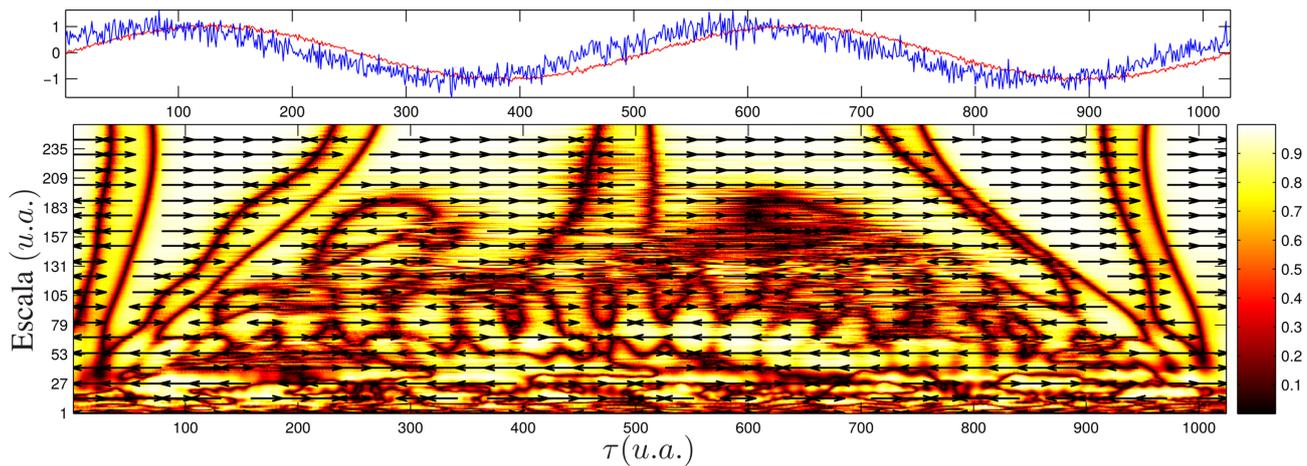


Figura 12: Sinais sintéticos (painel superior), coerência *wavelet* módulo e fase (painel inferior) calculada a partir da função *wavelet* de Morlet.

Esclarece-se ainda que a transformada *wavelet* contínua apresenta uma série de ferramentas úteis e simples para serem utilizadas na análise de sinais não estacionários. Existem ainda inúmeras aplicações da transformada *wavelet* dentro da Física, como se mostra, em particular, nos exemplos apresentados em [1] e nas referências citadas. Para caracterizar um exemplo prático de área de utilização, as Ciências Espaciais têm demandado metodologias ágeis de investigar processos eletrodinâmicos velados em um ambiente remoto e invisível de plasmas e, simultaneamente, possibilitar suas visualizações, ou formas de representação de processos, com localização espacial e temporal [14–19].

Essas ferramentas contribuem, em especial na Física, para diversos estudos e são atualmente de fácil utilização, por consequência de ricas bibliotecas numéricas acessíveis (algumas foram descritas neste trabalho). Um dos propósitos principais deste esforço, no entanto, é fomentar uma adequada fundamentação nesta área de análise de dados e ajudar no enriquecimento de extração de informações e na correta interpretação de resultados. Assim, encorajamos os leitores interessados – sejam pesquisadores, professores, engenheiros ou estudantes – a explorarem as características e os potenciais dessas ferramentas na investigação de seus sinais.

Apêndice

A. Cálculo da Fase

O argumento ou fase de um número complexo, que pode ser escrito na forma $z = x + iy$, em que

$I^2 = -1$ pode ser obtido por uma visão geométrica ou por uma visão algébrica [44]. Geometricamente, da relação no plano complexo, ou diagrama de Argand, $\arg(z)$ é o ângulo entre o eixo real e o vetor representando z , dado em radianos e positivo se medido no sentido anti-horário. Por outro lado, algebricamente, o argumento de z é a quantidade θ tal que $z = x + iy = r \cos \phi + ir \sin \theta$, em que a quantidade r é denominada módulo ou amplitude de z expressa por $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dada essa definição de argumento, qualquer número complexo não nulo pode ter vários valores possíveis. Por exemplo, considerando o ângulo geométrico, a rotação do círculo não muda os pontos, de tal forma que multiplicações inteiras dos ângulos pelo valor 2π radianos, ou seja, um ciclo completo de rotação, são os mesmos. O mesmo é válido no caso algébrico, considerando-se a periodicidade das funções seno e cosseno. Existem, então, muitas possibilidades para se expressar θ quando a origem é circundada múltiplas vezes. Quando se é necessário definir θ mais precisamente, utiliza-se por convenção o valor principal definido como o valor no intervalo $[0, 2\pi)$ radianos (ou em alguns casos $(-\pi, \pi]$) e denotado usualmente por $Arg(z)$, em que: $\arg(z) = \{ Arg(z) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \}$.

O valor de $A(z)$ é normalmente disponível em bibliotecas das linguagens computacionais usando a função *atan2*, ou alguma variante desta, que normalmente calcula essa função no intervalo $(-\pi, \pi]$. Muitos textos associam esse valor ao arco-tangente (y/x), em que y/x é a inclinação. O arco-tangente converte esse valor para o ângulo; entretanto isso só é correto

quando $x > 0$, tal que o ângulo esteja entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. Portanto, deve-se considerar os demais quadrantes. Assim, considera-se para $Arg \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$,

$$Arg(z = x + iy) = \begin{cases} \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & y \geq 0, x < 0 \\ \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & y < 0, x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & y > 0, x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & y < 0, x = 0 \\ \text{indefinido}, & x = y = 0. \end{cases}$$

Para a aplicação no intervalo $[0, 2\pi)$, soma-se o valor 2π ao $Arg(z)$ quando seu valor é negativo.

Para sistemas que implementam a *signed zero* (como, *IEEE floating point*), ao se considerar $x < 0$, a função $\operatorname{atan2}(-0, x)$ retorna o valor $-\pi$ e $\operatorname{atan2}(+0, x)$ retorna $-\pi$.

B. Paletas de cores

Ao se considerar gráficos, há diversas formas de se evidenciar as representações dos coeficientes *wavelets*. Por exemplo, pode-se utilizar diferentes paletas de cores para destacar os padrões locais nos escalogramas e diagramas de fase. Isto é, essas paletas são responsáveis por dar destaque ou não a certas características das visualizações, dado o seu efeito na própria percepção humana [45–47]. Algumas paletas podem ser apresentadas em uma distribuição linear e outras em logaritmo, essa última é a que mais se assemelha a percepção humana, ou, ainda, facilitar a identificação de certas bandas de cores para pessoas com síndromes de deficiência de percepção de cores, como discutido em [48].

Apesar desses recursos de alteração de paletas de cores serem disponíveis na maioria dos programas de visualizações atuais, muitos escalogramas apresentados em artigos científicos ainda não utilizam o potencial dessa ferramenta, o que muitas vezes limita ou dificulta a análise dos resultados. Um exemplo de um mesmo escalograma utilizando a *wavelet* de Haar com diferentes paletas de cores, visando distintas percepções, é mostrado na Figura 13. Nela utilizam-se as paletas de cores vermelha (*hot*) e sua versão modificada (*hot modificada*), a *jet*, a azul baseada na versão modificada da vermelha para facilitar a visualização de deficientes visuais e a *Morgens-temning* recomendada para certas deficiências visuais.

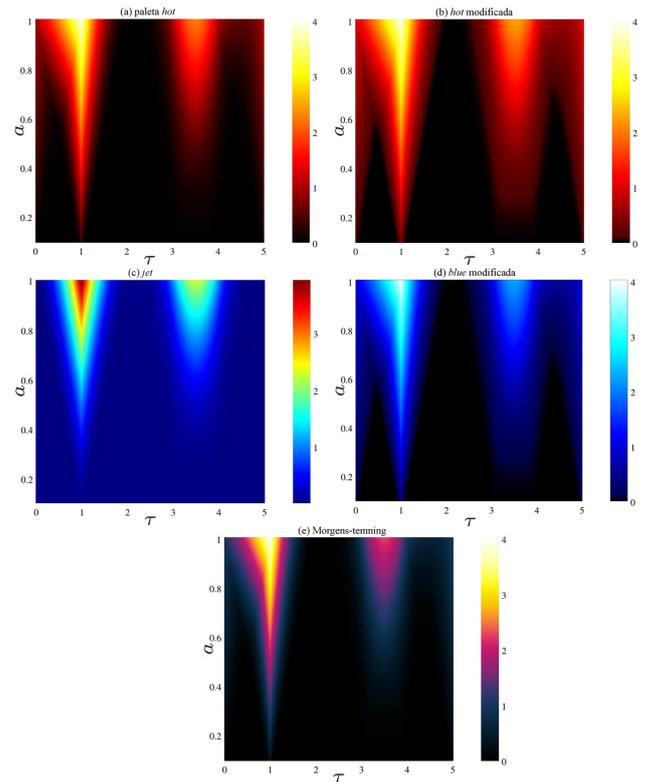


Figura 13: Escalograma do sinal não estacionário descrito na Equação 18 utilizando a *wavelet* analisadora de Haar.

Agradecimentos

Os autores agradecem aos Drs. L. Deane de Sá, M. Vianna, M. Farge, K. Schneider, P. Frick e G. Silva as discussões científicas que motivaram este trabalho; aos alunos dos curso CAP-384/INPE, CITE/INPE, DINCON, ELAC/INPE e aos revisores as sugestões e incentivos que melhoraram essa publicação. E. B. agradece ao PIBIC/INPE e V.M. agradece ao PCI/INPE-MCTI as bolsas. M.O.D. agradece a Ecole Centrale de Marseille-França, à CAPES (o apoio financeiro a eventos WWLET – Wavelet & Aplicações). M.O.D. e O. M agradecem ao CNPq (proc. 306038/2015 – 3, 312246/2013 – 7) e à FAPESP (2015/25624 – 2) o auxílio dado às pesquisas, que motivaram os desenvolvimentos que serviram de base à realização deste material.

Referências

- [1] J.C. van den Berg, *Wavelet in Physics* (Cambridge University, Cambridge, 2004).
- [2] E. Foufoula-Georgiou and P. Kumar, *Wavelets in Geophysics* (Academic Press, San Diego, 1994), v. 4.
- [3] J. Morlet, NATO ASI Series **1**, 233 (1983).

- [4] A. Grossmann and J. Morlet, *SIAM J. Math. Anal.* **15**, 723 (1984).
- [5] P. Goupillaud, A. Grossmann and J. Morlet, *Geophysical Research Letters* **11**, 85 (1984).
- [6] M. Farge, *Annual Review of Fluid Mechanics* **24**, 395 (1992).
- [7] S. Jaffard, Y. Meyer and R.D. Ryan, *Wavelets: Tools for Science & Technology* (Society for Industrial Mathematics, Philadelphia, 2001).
- [8] B.B. Hubbard, *The World According to Wavelets: The Story of a Mathematical Technique in the Making* (A.K. Peters/CRC Press, Natick, 1998), 2^a ed.
- [9] J.C. Goswami and A.K. Chan, *Fundamentals of Wavelets. Microwave and Optical Engineering* (Wiley Interscience, New Jersey, 2011), 2^a ed.
- [10] J.-P. Antoine, R. Murenzi, P. Vandergheynst and S.T. Ali, *Two-Dimensional Wavelets and Their Relatives* (Cambridge University, Cambridge, 2008).
- [11] C. Chui, *An introduction to Wavelets* (Academic Press, San Diego, 1992), v. 1.
- [12] J.W. Brown and R.V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems* (McGraw-Hill, New York, 1993).
- [13] A. Papoulis, *The Fourier Integral and its Applications* (McGraw-Hill, New York, 1962).
- [14] O. Mendes, M.O. Domingues and A. Mendes da Costa, *Advances in Space Research* **35**, 812 (2005).
- [15] O. Mendes and M.O. Domingues, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **24**, 3 (2002).
- [16] V. Klausner, O. Mendes, M.O. Domingues, A.R.P. Papa, R.H. Tyler, P. Frick and E.A. Kerani, *Journal of Geophysical Research - Space Physics* **119**, 3077 (2014).
- [17] A. Lara, A. Borgazzi, O. Mendes, R.R. Rosa and M.O. Domingues, *Solar Physics* **248**, 155 (2008).
- [18] L.E.A. Vieira, W.D. Gonzalez, E. Echer, F.L. Guarneri, A. Prestes, A.L.C. Gonzalez, J.C. Santos, A. Dal Lago and N.J. Schuch, *Solar Physics* **217**, 383 (2003).
- [19] M.J.A. Bolzam, *Brazilian Journal of Physics* **35**, 592 (2005).
- [20] J.E. Castilho, M.O. Domingues, O. Mendes e A. Pagamisse, *Introdução ao Mundo das Wavelets - Notas em Matemática Aplicada* (SBMAC, São Carlos, 2012).
- [21] M.O. Domingues, O. Mendes and A. Mendes da Costa, *Advances in Space Research* **35**, 831 (2005).
- [22] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing* (Academic Press, San Diego, 1999), 2nd ed.
- [23] M. Vetterli, J. Kovacevic and V.K. Goyal, *Foundations of Signal Processing* (Cambridge University Press, Cambridge 2014).
- [24] D. Maraun, *What Can We Learn from Climate Data? Methods for Fluctuation, Time/Scale and Phase Analysis*. PhD Thesis, University of Potsdam, 2006.
- [25] A. Haar, *Mathematische Annalen* **69**, 331 (1910).
- [26] Y. Meyer, *Wavelets* (Springer Verlag, Berlin, 1989).
- [27] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets* (SIAM, Philadelphia, 1992).
- [28] P. Frick, A. Grossmann and P. Tchamitchian, *Journal of Mathematical Physics* **39**, 4091 (1998).
- [29] P. Abry, *Ondelettes et Turbulences: Multirésolutions, Algorithmes de Décomposition, Invariance D'échelle et Signaux de Pression* (Diderot Editeur, Paris, 1997).
- [30] M. Liebling, T.-F. Bernhard, A.H. Bachmann, L. Froehly, T. Lasser and M. Unser, in: *Proceedings in Biomedicine IX* (San Jose, California, 2005), p. 397-402.
- [31] S. Sello, *New Astronomy* **8**, 105 (2003).
- [32] C. Torrence and G.P. Compo, *Bull. Amer. Meteor. Soc.* **79**, 61 (1998).
- [33] D. Maraun, J. Kurths and M. Holschneider, *Phys. Rev. E* **75**, 016707 (2007).
- [34] S. Jaffard, B. Lashermes and P. Abry, *Wavelet Leaders in Multifractal Analysis. Wavelet Analysis and Applications* (Birkhauser Verlag, Switzerland, 2006).
- [35] I. Simonsen, A. Hansen and O.M. Nes, *Physical Review E* **58**, 2779 (1998).
- [36] P. Abry and D. Veitch, *IEEE Transactions on Information Theory* **44**, 1 (1998).
- [37] R. López-Montes, R. Pérez-Enríquez, E.A. Araujo-Pradere and J.A.L. Cruz-Abeyro, *Advances in Space Research* **55**, 586 (2015).
- [38] L. Hudgins, C. Friebe and M. Mayer, *Physical Review Letters* **71**, 3279 (1993).
- [39] D. Maraun and J. Kurths, *Nonlinear Processes in Geophysics* **11**, 505 (2004).
- [40] D. Labat, *Journal of Hydrology* **314**, 275 (2005).
- [41] J.P. Lachaux, A. Lutz, D. Rudrauf, D. Cosmelli, M. Le Van Quyen, J. Martinerie and F. Varela, *Clinical Neurophysiology* **32**, 157 (2002).
- [42] C. Torrence and P. Webster, *Quart. J. Roy. Soc.* **124**, 1985 (1998).
- [43] C. Meneveau, *Journal of Fluid Mechanics* **232**, 469 (1991).
- [44] M.R. Spiegel, S. Lipschutz, J.J. Schiller and D.S. Seymour, *Schaum's Outline of Complex Variables* (Schaum's Outline, New York, 2009).
- [45] M. Farge, *L'Aéronautique et l'Astronautique* **24**, 1 (1990).
- [46] S. Silva, B.S. Santos and J. Madeira, *Cultural Heritage* **35**, 320 (2011).
- [47] C. Kelleher and T. Wagener, *Environmental Modelling & Software* **26**, 822 (2011).
- [48] M. Geissbuehler and T. Lasser, *Optics Express* **21**, 9862 (2013).