



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/02.03.18.24-TDI

PONTOS LAGRANGIANOS - APLICAÇÃO PARA O ASTEROIDE 2001SN₂₆₃

Leonardo Barbosa Tôrres dos Santos

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida e Prado, e Diogo Merguizo Sanchez, aprovada em 17 de fevereiro de 2017.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3NAF8RB>>

INPE
São José dos Campos
2017

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@inpe.br

COMISSÃO DO CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (DE/DIR-544):

Presidente:

Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação (CPG)

Membros:

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

Dr. André de Castro Milone - Coordenação de Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dra. Carina de Barros Melo - Coordenação de Laboratórios Associados (CTE)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação de Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Dr. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SID)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SID)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Marcelo de Castro Pazos - Serviço de Informação e Documentação (SID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/02.03.18.24-TDI

PONTOS LAGRANGIANOS - APLICAÇÃO PARA O ASTEROIDE 2001SN₂₆₃

Leonardo Barbosa Tôrres dos Santos

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida e Prado, e Diogo Merguizo Sanchez, aprovada em 17 de fevereiro de 2017.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3NAF8RB>>

INPE
São José dos Campos
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Santos, Leonardo Barbosa Tôrres dos.

Sa59p Pontos lagrangianos - aplicação para o asteroide 2001SN₂₆₃ / Leonardo Barbosa Tôrres dos Santos. – São José dos Campos : INPE, 2017.

xxxvi + 137 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/02.03.18.24-TDI)

Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2017.

Orientadores : Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida e Prado, e Diogo Merguizo Sanchez.

1. Pontos de equilíbrio. 2. Curva de velocidade zero. 3. Estabilidade linear. 4. Dinâmica orbital. 5. Transferência orbital. I.Título.

CDU 521.31:629.78



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

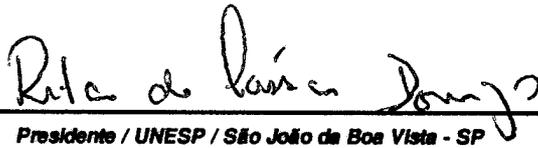
This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aluno (a): **Leonardo Barbosa Tôres dos Santos**

Título: "PONTOS LAGRANGIANOS - APLICAÇÃO PARA O ASTEROIDE 2001SN263"

Aprovado (a) pela Banca Examinadora
em cumprimento ao requisito exigido para
obtenção do Título de **Mestre** em
**Engenharia e Tecnologia Especiais/Mecânica
Espacial e Controle**

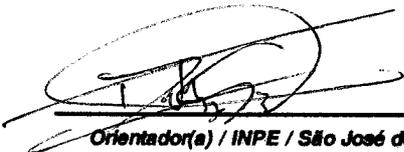
Dra. Rita de Cássia Domingos


Presidente / UNESP / São João da Boa Vista - SP

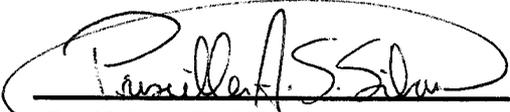
Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado


Orientador(a) / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Diogo Merguizo Sanchez


Orientador(a) / INPE / São José dos Campos - SP

Dra. Priscilla Andressa de Sousa Silva


Convidado(a) / ITA/DCTA / São José dos Campos - SP

Este trabalho foi aprovado por:

() maioria simples

unanimidade

São José dos Campos, 17 de fevereiro de 2017

*“A Matemática, vista corretamente, possui não só a verdade, mas a
beleza suprema.”*

BERTRAND RUSSELL

“Somos quem podemos ser, sonhos que podemos ter.”

HUMBERTO GESSINGER

A meus pais Maria de Fátima Rodrigues Barbosa dos Santos e Mário Torres dos Santos, aos meus irmãos Leandro Barbosa Torres dos Santos e Dudley Barbosa Torres dos Santos e, por fim, a minha noiva Vanessa Fernandes Vasconcelos

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meus pais Mario Torres dos Santos e Maria de Fátima Rodrigues Barbosa dos Santos e meus irmãos Leandro Barbosa Torres dos Santos e Dudley Barbosa Torres dos Santos, por me apoiarem nestes anos, por me darem as condições necessárias para alcançar meus objetivos, e pela paciência comigo nos dias mais estressantes vividos ao longo desta caminhada. Agradeço a meus orientadores, o Doutor Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado e ao Doutor Diogo Merguizo Sanchez, por mostrarem-me os melhores caminhos para desenvolvimento deste trabalho, dando-me os direcionamentos e a liberdade para conduzir o meu trabalho da melhor forma possível e também fornecendo valiosas sugestões sem as quais, este trabalho não seria possível. Agradeço também a minha noiva Vanessa Fernandes Vasconcelos pelo apoio, compreensão e incentivo em todos os momentos. Agradeço à Liana Dias Gonçalves, que nunca mediu esforços para me ajudar, pelas valiosas discussões e acima de tudo, pela sua amizade. Agradeço a minha mentora e Astrofísica, Sueli Viegas por todos os conselhos que tem me dado durante essa longa caminhada. Agradeço a meu Professor Wictor Carlos Magno, que embora distante, nunca deixou de me ensinar e de me aconselhar durante essa caminhada. Agradeço ao Astrofísico Antonio Carlos Miranda por todo o suporte e ajuda que me cedeu para que eu conseguisse alcançar meus objetivos. Agradeço aos meus amigos, com os quais dividi experiências, nervosismos e risadas. Por fim, agradeço em especial, à Fundação de Amparo à Pesquisas do Estado de São Paulo (FAPESP) pelos subsídios #2016/14665-2, 2011/08171-3, 2014/22293-2, 2014/2295-5 e apoio institucional. Agradeço também as agências de fomento pelo o apoio concedido pelas doações do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e o apoio financeiro do Conselho Nacional para a Melhoria do Ensino Superior (CAPES).

RESUMO

No presente trabalho foram analisadas as equações do movimento do Problema Restrito de Três Corpos. O Problema Restrito de Três Corpos, ainda que seja um caso particular, apresenta aplicações práticas quando comparado ao Problema Geral de Três Corpos. Foram considerados diversos modelos para o estudo. O primeiro modelo investigado foi o Problema Restrito Plano Circular de Três Corpos, seguido pelo estudo do Problema Restrito Plano Elíptico de Três Corpos e, na sequência, investigamos o Problema Restrito Completo de Três Corpos. Neste modelo é considerada a dimensão e a forma dos dois corpos primários do sistema. E por fim, investigamos as equações do movimento do Problema Restrito Síncrono de Três Corpos, em que o primário menos massivo foi modelado como um dipolo de massa em rotação. Neste estudo investigamos as curvas de velocidade zero, utilizando a constante de Jacobi C , e determinamos as posições dos pontos de liberação. Encontramos também as regiões de fronteira onde o movimento da partícula é permitido. Na sequência fazemos uma comparação com os resultados equivalentes para a dinâmica, considerando os primários como pontos de massa para enfatizar a influência do alongamento de um dos corpos. Depois investigamos a condição de estabilidade de todos os pontos de equilíbrio. Em uma fase subsequente do estudo, investigamos a dinâmica orbital de um veículo espacial quando posicionada próxima ao binário menos massivo (modelado como um dipolo de massa em rotação). Investigamos nessa fase do estudo órbitas de colisão, escape e aquelas que sobrevivem por dois anos. Nesta parte do trabalho, levamos em consideração as forças gravitacionais de um sistema binário de asteroide e a pressão da radiação solar. Investigamos ainda um caso mais geral, analisando, para diversas razões de massa, o comportamento de uma veículo espacial nas proximidades de um sistema binário de asteroides. E por fim, foram investigadas órbitas de transferências entre os pontos de equilíbrio. Para este estudo, usamos o modelo do Problema Restrito Síncrono Completo de Três Corpos. Nessas transferências levamos em consideração, na trajetória de um veículo espacial em uma manobra bi-impulsiva, o efeito da pressão da radiação solar, dimensão e forma de um dos corpos primários. Encontramos soluções com menor e maior consumo de combustível para realizar essas transferências. Concluimos que é importante considerar nessas transferências a dimensão e a distribuição de massa dos corpos, caso contrário o veículo espacial não atingirá o ponto de chegada desejado.

Palavras-chave: Pontos de equilíbrio. Curva de Velocidade Zero. Estabilidade linear. Dinâmica orbital. Transferência orbital.

LAGRANGIAN POINTS: APPLICATION TO THE ASTEROID

2001SN₂₆₃

ABSTRACT

The Planar Restricted Three-Body Problem, although a particular case of the Three-Body Problem, has countless practical applications in astrodynamics. In this work, models considering variations of the Planar Restricted Three-Body Problem were built. The first natural variations is the Planar Elliptic Restricted Three-Body Problem, followed by the Planar Restricted Full Three-Body Problem. In the latter model, the mass distribution of the primaries is considered. The last model built consider the less massive primary as a rotating mass dipole, whose rotation is synchronous with the more massive primary. This model was called Synchronous Restricted Full Three-Body Problem. For all models, including the Planar Restricted Three-Body Problem, we found the positions of the equilibrium points, as well as the zero velocity curves, as a first part of this work. Comparisons between these results for the different models were made. The results coming from the zero velocity curves are useful to determine regions where the motion of a particle is allowed. The stability conditions of all equilibrium points, for all models, were investigated. In the sequence of the work, we investigated the orbital dynamics of a spacecraft when released near the less massive binary (comprised by a rotating mass dipole). We investigated orbits that survived for two years, which may collide with the primaries or escape from the system. In this part of the work, we took into account the gravitational forces of a binary asteroid system and the solar radiation pressure. We also made a more general case analyzing, for several ratios of mass, the behavior of a spacecraft in the vicinity of a binary system of asteroids. Finally, transfer orbits were investigated between the equilibrium points. For this study, we use the Synchronous Restricted Full Three-Body Problem. In these transfers we took into account, in the trajectory of a spacecraft in a bi-impulsive maneuver, the effect of the gravitational force of the primary bodies, the solar radiation pressure, and the size and shape of one of the primaries. We found solutions with lower and higher fuel consumption to accomplish these transfers. We observed that it is important to consider, in these transfers, the size and mass distribution of the bodies, otherwise the spacecraft will not reach the desired point of arrival.

Keywords: Equilibrium points. Curve of Velocity Zero. Linear stability. Orbital dynamics. Orbital Transfer.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 Representação da alteração da órbita de um cometa devido à aproximação com a órbita de Júpiter. (adaptação). FONTE: (MURRAY; DERMOTT, 1999)	3
1.2 Órbitas determinadas a partir do software <i>Orbitas</i> . Na imagem é mostrada as órbitas da Terra, Marte, asteroide estudado e Júpiter, respectivamente. A órbita de cor vermelha é a órbita da Terra.	7
1.3 Figura ilustrativa do sistema triplo do asteroide 2001SN ₂₆₃ (adaptação). FONTE: (PRADO, 2014)	7
2.1 Figura ilustrativa do PRCTC.	11
2.2 Curvas de Hill para $C = 2.5$. (adaptação). FONTE: (VALTONEN; KARTTUNEN, 2005)	16
2.3 Curvas de Hill para $C = 1.95$. (adaptação). FONTE: (VALTONEN; KARTTUNEN, 2005)	18
2.4 Pontos de Lagrange e suas respectivas curvas de contornos. (adaptação). FONTE: (MURRAY; DERMOTT, 1999)	18
2.5 Posições dos pontos de Lagrange em relação às variações da razão de massa. (adaptação). FONTE: (VALTONEN; KARTTUNEN, 2005)	20
2.6 Ilustração dos pontos lagrangeanos L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5 para $\mu = 0.3$. Posição dos pontos de Lagrange em relação às variações da razão de massa. FONTE: (PINTO, 2006)	20
2.7 Ilustração dos pontos L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5 para uma razão de massa $\mu = 0.02$, que se refere ao sistema <i>Alpha – Beta</i> do asteroide triplo 2001SN ₂₆₃	22
2.8 Representação da posição dos corpos m_1, m_2 e m_3 em relação ao centro de massa CM num referencial sinódico. FONTE: (ZENG et al., 2016d)	24
2.9 Figura representativa de um dipolo de massa em rotação inserido em um corpo alongado.	29
2.10 Um esquema do sistema de coordenadas sinódico em um sistema de massa de dipolo (adaptação). FONTE: (ZENG et al., 2015)	30
2.11 Representação gráfica dos pontos de equilíbrio E_1, E_2, E_3 e E_4 para $\mu = 0$ e as curvas de velocidade zero de uma massa de dipolo em rotação. FONTE: (ZENG et al., 2015).	32

3.1	Figura representativa das localizações espaciais do sistema triplo de asteroide 2001SN ₂₆₃ (fora de escala).	40
3.2	Ilustração dos pontos de equilíbrio L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5 para $\mu = 0.02$ de <i>Alpha – Beta</i> do sistema triplo de asteroide 2001SN ₂₆₃	41
3.3	Oscilação da posição do ponto lagrangeano L_4	42
3.4	Ampliação da região interna ao circulado da Figura 3.3 (L_4).	43
3.5	Forma achatada de um sistema binário de asteroides.	44
3.6	Imagem dos nove pontos de equilíbrio coplanares pontos clássicos (cor vermelha), pontos não clássicos (cor verde) e as posições do centro de massa dos corpos primários (cor azul).	45
3.7	Novos pontos de equilíbrio, chamados de L_6, L_7, L_8 e L_9 (cor verde) e o centro de massa do asteroide menos massivo (cor azul).	45
3.8	Novos pontos de equilíbrio, chamados de L_6, L_7, L_8 e L_9 (cor verde), o centro de massa do asteroide menos massivo (cor azul) e uma oval (cor ciano) representando a dimensão do asteroide menos massivo.	46
3.9	Novos pontos de equilíbrio, chamados de L_6, L_7, L_8 e L_9 (cor verde), o centro de massa do asteroide menos massivo (cor azul) e uma oval (cor ciano) representando a dimensão do asteroide menos massivo (levando em consideração a margem de erro).	47
3.10	Imagem dos nove pontos de equilíbrio coplanares.	47
3.11	Imagem representativa da forma geométrica do sistema em estudo (não está em escala).	52
3.12	Valor da razão de massa μ^* versus d . A expressão matemática do ajuste da curva é dada por: $\mu^*(d) = 0,0192636 - 4,23 \times 10^{-8}d + 1,19 \times 10^{-9}d^2$ O RMS do resíduo é $1,54 \times 10^{-6}$	56
3.13	Coordenadas x dos pontos lagrangeanos L_1, L_2 e L_3 para valores diferentes de μ^*	59
3.14	Coordenadas x dos pontos lagrangeanos L_1, L_2 e L_3 para valores diferentes de d	60
3.15	<i>Curvas de velocidade zero</i> . O primeiro contato ocorre quando $C = 3.202$	61
3.16	Ampliação da Figura 3.15, mostrando a região em torno do dipolo de massa em rotação.	62
3.17	<i>Curvas de velocidade zero</i> . O segundo ponto de contato ocorre quando $C = 3.179$	63
3.18	Ampliação da Figura 3.17, mostrando a região ao redor do dipolo de massa em rotação.	64
3.19	<i>Curvas de velocidade zero</i> . O terceiro ponto de contato ocorre quando $C = 3,010$	64

3.20	Ampliação da Figura 3.19, mostrando a região em torno do dipolo de massa em rotação.	65
3.21	<i>Curvas de velocidade zero</i> . O quarto e o quinto pontos de contato ocorrem quando $C = 2.989$	66
3.22	Ampliação da Figura 3.21, mostrando a região em torno do dipolo de massa em rotação.	66
3.23	Valores da constante de Jacobi (C_1) nos pontos de equilíbrio versus μ^* . A expressão matemática do ajuste da curva, para o PRSTC, é dada por: $C_1(\mu^*) = 3.17076 + 14.0785\mu^* - 110.225(\mu^*)^2 + 447.321(\mu^*)^3 - 707.855(\mu^*)^4$. O RMS do resíduo vale 0,013487.	68
3.24	Valores da constante de Jacobi (C_3) nos pontos de equilíbrio versus μ^* . A expressão matemática do ajuste da curva, para o PRSTC, é dada por: $C_3(\mu^*) = 3.00195 + 2.13346\mu^* - 1.1387(\mu^*)^2$. O RMS do resíduo vale 0,00132344.	68
3.25	Valores da <i>constante de Jacobi</i> (C_2) nos pontos de equilíbrio versus μ^* . A expressão matemática do ajuste da curva, para o PRSTC, é dada por: $C_2(\mu^*) = 3.11758 + 16.8451\mu^* - 303.73(\mu^*)^2 + 3172.56(\mu^*)^3 - 18555(\mu^*)^4 + 55120.4(\mu^*)^5 - 64721.5(\mu^*)^6$. O RMS do resíduo vale 0,0070268.	70
3.26	Valores da <i>constante de Jacobi</i> (C_{4-5}) nos pontos de equilíbrio versus μ^* . A expressão matemática do ajuste da curva, para o PRSTC, é dada por: $C_{4-5}(\mu^*) = 2.99943 + 1.99985\mu^* - 3.99953(\mu^*)^2$. O RMS do resíduo vale 2.1927×10^{-6}	70
4.1	Imagem representativa do sistema estudado.	74
4.2	Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 99% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 1% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração.	78
4.3	Região de colisão com o corpo mais massivo (azul), colisão com o corpo menos massivo (vermelho), região de ejeção do sistema (amarelo) e órbitas que sobreviveram por toda integração (preto). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 99% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 1% da massa total do sistema no primário menos massivo.	80

4.4	Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, esta sendo considerado que 99% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 1% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração	81
4.5	Região de colisão com o corpo mais massivo (azul), colisão com o corpo menos massivo (vermelho) e a região de ejeção do sistema (amarelo). Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, esta sendo considerado que 99% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 1% da massa total do sistema no primário menos massivo	81
4.6	Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 95% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 5% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração.	82
4.7	Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho) e as órbitas que sobreviveram por toda integração (preto). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, esta sendo considerado que 95% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 5% da massa total do sistema no primário menos massivo	83
4.8	Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, esta sendo considerado que 95% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 5% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração.	84

4.9	Região de colisão com o corpo mais massivo (azul), colisão com o corpo menos massivo (vermelho) e as regiões de ejeção do sistema (amarelo). Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 95% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 5% da massa total do sistema no primário menos massivo.	85
4.10	Trajectoria do veículo espacial (vermelha) em torno do corpo alongado (M_2 , mostrado em verde). O corpo M_1 é mostrado em azul. Aqui não levamos em consideração a pressão da radiação solar.	85
4.11	Trajectoria do veículo espacial (vermelha) em torno do corpo alongado (M_2 , mostrado em verde). O corpo M_1 é mostrado em azul. Aqui levamos em consideração a pressão da radiação solar.	86
4.12	Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, esta sendo considerado que 90% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 10% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração.	87
4.13	Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, esta sendo considerado que 90% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 10% da massa total do sistema no primário menos massivo	87
4.14	Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 90% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 10% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração.	88

4.15	Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 90% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 10% da massa total do sistema no primário menos massivo.	88
4.16	Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 85% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 15% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração.	89
4.17	Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 85% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 15% da massa total do sistema no primário menos massivo.	89
4.18	Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 85% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 15% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração.	90
4.19	Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 85% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 15% da massa total do sistema no primário menos massivo.	90

4.20	Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 80% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 20% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração.	91
4.21	Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 80% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 20% da massa total do sistema no primário menos massivo.	91
4.22	Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 80% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 20% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração.	92
4.23	Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 80% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 20% da massa total do sistema no primário menos massivo.	92
4.24	Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 75% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 25% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração.	93

4.25	Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 75% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 25% da massa total do sistema no primário menos massivo.	93
4.26	Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 75% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 25% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração.	94
4.27	Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 75% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 25% da massa total do sistema no primário menos massivo.	94
4.28	Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 70% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 30% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração.	95
4.29	Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 70% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 30% da massa total do sistema no primário menos massivo.	95

4.30	Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 70% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 30% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração.	96
4.31	Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 70% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 30% da massa total do sistema no primário menos massivo.	96
4.32	Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 65% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 35% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração.	97
4.33	Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 65% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 35% da massa total do sistema no primário menos massivo.	97
4.34	Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 65% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 35% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração.	98

4.35	Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 65% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 35% da massa total do sistema no primário menos massivo.	98
4.36	Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 60% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 40% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração.	99
4.37	Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 60% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 40% da massa total do sistema no primário menos massivo.	99
4.38	Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 60% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 40% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração.	100
4.39	Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 60% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 40% da massa total do sistema no primário menos massivo.	100

4.40	Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 55% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 45% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração.	101
4.41	Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 55% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 45% da massa total do sistema no primário menos massivo.	101
4.42	Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 55% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 45% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração.	102
4.43	Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 55% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 45% da massa total do sistema no primário menos massivo.	102
4.44	Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 50% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 50% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração.	103

4.45	Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 50% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 50% da massa total do sistema no primário menos massivo.	103
4.46	Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 50% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 50% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração.	104
4.47	Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 50% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 50% da massa total do sistema no primário menos massivo.	104
5.1	Transferência de Hohmann do ponto de equilíbrio L_1 para L_3	110
5.2	Transferência de L_1 para L_2 . A curva verde representa o caso onde consideramos os corpos primários como corpos de massa pontual. A curva vermelha representa o corpo mais massivo como um corpo de massa pontual e o primário menos massivo um dipolo de massa em rotação.	112
5.3	Transferência de L_1 para L_2 . A curva verde representa o caso onde consideramos os corpos primários como corpos de massa pontual. A curva vermelha representa o corpo mais massivo como um corpo de massa pontual e o primário menos massivo um dipolo de massa em rotação.	113
5.4	Transferência de uma sonda espacial do ponto L_1 para o ponto L_2 . A órbita da cor verde representa a órbita de tempo mínimo que a sonda realizaria a transferência se os dois corpos fossem massas pontuais. A órbita da cor vermelha representa a órbita de tempo mínimo que a sonda realizaria a transferência se um dos primários tivesse a forma alongada.	114
5.5	Transferência de L_1 para L_3 . A curva verde representa o caso onde consideramos os corpos primários como corpos de massa pontual. A curva vermelha representa o corpo mais massivo como um corpo de massa pontual e o primário menos massivo um dipolo de massa em rotação.	115

5.6	Transferência de L_1 para L_3 . A curva verde representa o caso onde consideramos os corpos primários como corpos de massa pontual. A curva vermelha representa o corpo mais massivo como um corpo de massa pontual e o primário menos massivo um dipolo de massa em rotação.	116
5.7	Transferência de uma sonda espacial do ponto L_1 para o ponto L_3 . A órbita da cor verde e preta representa a órbita de tempo mínimo local e mínimo global que a sonda realizaria a transferência se os dois corpos fossem massas pontuais. A órbita da cor vermelha representa a órbita de tempo mínimo que a sonda realizaria a transferência se um dos primários tivesse a forma alongada. E a órbita azul representa a órbita com o mesmo tempo da órbita que possui um mínimo global.	117
5.8	Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 50% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 50% da massa total do sistema no primário menos massivo.	118
5.9	Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 50% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 50% da massa total do sistema no primário menos massivo.	119
5.10	Transferência de L_1 para L_3	120
5.11	Transferência de L_1 para L_3	121
5.12	Trajetórias do ponto de equilíbrio L_1 para L_3	122
5.13	Transferência de L_1 para L_2	123
5.14	Transferência de L_1 para L_2	124
5.15	Trajetórias do ponto de equilíbrio L_1 para L_2	125

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
3.1 Pontos lagrangeanos de um sistema semelhante aos corpos <i>Alpha – Beta</i> e de <i>Alpha – Gamma</i> do asteroide 2001SN ₂₆₃ e suas respectivas razões de massa no problema restrito circular de três corpos.	40
3.2 Pontos lagragianos de um sistema semelhante aos corpos <i>Alpha – Beta</i> e de <i>Alpha – Gamma</i> e suas respectivas razões de massa no problema restrito elíptico de três corpos.	43
3.3 Posição dos pontos de equilíbrio quando leva-se em consideração o achatamento de um ou dois dos primários e quando considera-se um ou os dois primários como ponto de massa	48
3.4 Posição dos pontos de equilíbrio quando leva-se em consideração o achatamento de um ou dois dos primários e quando considera-se um ou os dois primários como ponto de massa.	50
3.5 Posição dos pontos de equilíbrio para o sistema estudado e também para o sistema considerando os corpos primários como pontos de massa.	58
3.6 Os valores de C_i ($i = 1,2,3,4,5$) para as posições $[x_0, y_0]$ dos pontos de equilíbrio do sistema estudado e também quando consideramos os corpos primários como pontos de massa.	62
3.7 Autos Valores da equação característica para o PRSTC usando um modelo de dipolo de massa.	71
3.8 Autos valores da equação característica para o Problema Restrito de Três Corpos.	71

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- PRCTC – Problema Restrito Circular de Três Corpos
- PRETC – Problema Restrito Elíptico de Três Corpos
- CVZ – Curva de Velocidade Zero
- PRGTC – Problema Restrito Geral de Três Corpos
- PRSTC – Problema Restrito Síncrono de Três Corpos

LISTA DE SÍMBOLOS

G	–	Constante de gravitação universal
M_1	–	Corpo primário mais massivo
M_2	–	Corpo primário menos massivo
m_1	–	Massa do corpo primário mais massivo
m_{21}	–	Massa do dipolo esquerdo do corpo M_2
m_{22}	–	Massa do dipolo direito do corpo M_2
k	–	Parâmetro adimensional
A	–	Coefficiente de achatamento
Q	–	Função auxiliar
μ	–	Razão de massa

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Conceitos	1
1.2 Introdução	1
1.3 Objetivo	9
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	11
2.1 O Problema Restrito Circular de Três Corpos	11
2.2 Análise Qualitativa das Curvas de Hill e Pontos de Lagrange	15
2.3 Análise Quantitativa das Curvas de Hill e Pontos de Lagrange	17
2.4 O Problema Restrito Elíptico de Três Corpos	21
2.5 Problema Restrito Completo de Três Corpos	23
2.6 Dipolo de Massa em Rotação	27
2.7 Estabilidade Linear do Movimento Próximo ao Ponto de Equilíbrio	33
2.7.1 Equações do Movimento	33
2.8 Pressão da Radiação Solar	34
2.8.1 A física da pressão da radiação solar	35
3 PONTOS LAGRAGEANOS DO SISTEMA DE ASTEROIDES	
2001SN ₂₆₃	39
3.1 Resultados Obtidos com o Modelo do Problema Circular de Três Corpos	39
3.2 Resultados Obtidos com o Modelo do Problema Restrito Elíptico de Três Corpos	41
3.3 Resultados Obtidos com o Modelo do Problema Restrito Completo de Três Corpos	43
3.4 Pontos de Equilíbrio Obtidos com o Problema Restrito Síncrono Com- pleto de Três Corpos Usando o Modelo do Dipolo de Massa em Rotação	50
3.4.1 Equações do movimento	51
3.4.2 Pontos de equilíbrio	52
3.4.3 Curvas de Velocidade Zero	53
3.4.4 Análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio	54
3.4.5 Resultados numéricos	57
3.4.5.1 Localizações dos pontos de equilíbrio	57
3.4.6 Curvas de Velocidade Zero	60

3.4.7	Evolução dos valores de C para as constantes de Jacobi	67
3.4.8	Estabilidade dos pontos de equilíbrio	71
4	REGIÃO DE ESTABILIDADE EM TORNO DE UM SISTEMA SÍNCRONO DE ASTEROIDES UTILIZANDO UM MODELO DE DIPOLO DE MASSA EM ROTAÇÃO	73
4.1	Metodologia	73
4.2	Equação do movimento	74
4.3	Região de estabilidade	76
4.3.1	Resultados numéricos	76
5	TRANSFERÊNCIAS ORBITAIS	107
5.1	Metodologia	108
5.2	Resultados numéricos	111
6	CONCLUSÕES	127
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	131

1 INTRODUÇÃO

1.1 Conceitos

Com o objetivo de estabelecer um vocabulário comum no contexto deste trabalho, algumas definições são apresentadas nesta seção.

Problema Restrito Plano Circular de Três Corpos (PRPCTC): Um modelo matemático utilizado neste trabalho considerando que os três corpos (os primários M_1 e M_2 e o corpo que se deseja conhecer o movimento (M_3)) são pontos de massa e os corpos primários estão em uma órbita circular em torno do centro de massa do sistema. Supõe-se também que o movimento dos três corpos seja plano.

Problema Restrito Plano Elíptico de Três Corpos (PREPTC): Semelhante ao PRCTC. A única diferença é que no PRETC os corpos primários estão em órbitas elípticas em torno do centro de massa do sistema.

Problema Restrito Completo de Três Corpos (PRCTC): Os corpos primários não são mais considerados apenas como pontos de massa. Dessa vez é levada em consideração a forma, dimensão, distribuição de massa, etc, dos corpos primários. O problema é *Restrito* porque a massa de um dos corpos é desprezável em comparação com os outros dois corpos; *Completo* porque a forma e a distribuição de massa de um (ou dos dois primários) dos corpos é levada em consideração.

Problema Restrito Síncrono de Três Corpos (PRSTC): O primário mais massivo (M_1) é modelado como um ponto de massa e o primário menos massivo (M_2) é modelado como um dipolo de massa em rotação. A rotação de M_2 tem o mesmo período de sua translação em torno do centro de massa do sistema. Por conta disso, a configuração geométrica dos corpos se mantém, de onde se origina o nome Síncrono.

1.2 Introdução

O problema de n corpos, baseado na lei da gravitação universal e na segunda lei de Newton, versa sobre o estudo do movimento de n corpos em um espaço tridimensional. Este movimento é descrito por um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares, obtidas por meio da mecânica clássica. Através do uso da lei da gravitação universal, é possível chegar a uma aproximação relevante com relação ao movimento dos corpos celestes dentro do Sistema Solar.

Kepler, em seus estudos, encontrou uma solução para um problema envolvendo dois

corpos, onde desenvolveu três leis fundamentais. A primeira lei estabelece que os corpos do Sistema Solar giram em órbitas elípticas, com o Sol em um dos focos; a segunda lei, também denominada *Lei das Áreas*, diz que o raio vetor que liga um planeta ao Sol descreve áreas iguais em tempos iguais; e a terceira lei, a *lei dos períodos* diz que os quadrados dos períodos de translação dos planetas são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores de suas órbitas.

Mais tarde, Newton conseguiu demonstrar que o sistema de equações diferenciais do movimento de dois corpos possuía uma solução geral, caso se saiba as posições e velocidades iniciais dos corpos envolvidos no sistema. A solução do problema de dois corpos, ainda que elegante, é apenas uma aproximação da real dinâmica dos movimentos planetários, devido às forças de interferências de outros planetas nestas órbitas. Isto fez com que surgisse um questionamento a respeito da estabilidade das órbitas planetárias: pequenas perturbações entre os planetas poderiam, após certo tempo, originar algum tipo de alteração nas órbitas fazendo com que os planetas colidissem, ou se repelissem a ponto de saírem do Sistema Solar? (VALTONEN; KARTTUNEN, 2005)

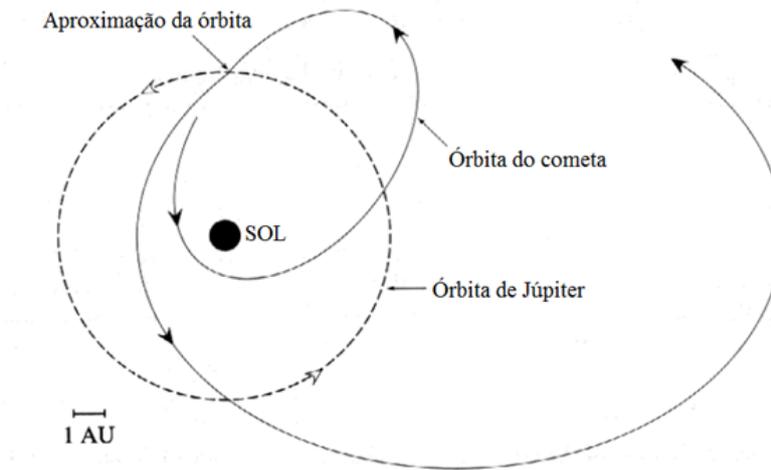
Em 1767, Euler encontrou soluções particulares para o problema de três corpos, utilizando em seus cálculos três configurações possíveis em um sistema com três corpos colineares (VALTONEN; KARTTUNEN, 2005). Então, Poincaré começou a estudar o problema envolvendo três corpos, mas ao longo do desenvolvimento de seus estudos notou que a solução quando se considerava mais do que dois corpos no sistema ($n > 2$) era complicada.

Outra solução do problema de três corpos foi encontrada por Lagrange em 1772. Lagrange considerou um sistema onde os corpos estavam nos vértices de um triângulo equilátero (VALTONEN; KARTTUNEN, 2005). O problema de três corpos é apresentado na natureza de muitas maneiras diferentes, e por conta disto há um estímulo para estudar esse problema. Ao contrário do que se pode pensar, o movimento da Terra e dos outros planetas ao redor do Sol não é um problema restrito de dois corpos. A presença da força gravitacional de outros planetas cria uma força extra, que perturba a trajetória original do planeta (VALTONEN; KARTTUNEN, 2005). Alguns cientistas, por volta do século XVIII, buscaram estudar se esta força extra poderia alterar a trajetória orbital da Terra, fazendo-a escapar da órbita que a prende ao sistema solar, e vagar pelo espaço, ou ainda ser atraída e engolida pelo Sol (VALTONEN; KARTTUNEN, 2005). Outra aplicação que envolve o problema de três corpos é a relação Sol - Terra - Lua, e a influência da Terra na órbita lunar. A lua está em uma

órbita estável ao redor da Terra ou ela pode um dia colidir conosco? (VALTONEN; KARTTUNEN, 2005).

Em pesquisas recentes, vem crescendo a demanda pela busca soluções para o problema geral de três corpos, nas mais diferentes situações do campo da astrodinâmica. Um exemplo é o estudo das estrelas binárias e as suas interações com estrelas solitárias. Este estudo é importante para a compreensão da evolução de aglomerados de estrelas. Sistemas estelares triplos e outros, envolvendo diferentes corpos, como corpos compactos de galáxias, que também ocorrem em sistemas triplos, são considerados problemas de três corpos (MURRAY; DERMOTT, 1999). Através do estudo de três corpos se pode-se conhecer as mudanças na trajetória de um cometa através da relação de *Tisserand*. A relação de *Tisserand* é utilizada para determinar se a trajetória pertence a um novo cometa ou é apenas a trajetória de um cometa já conhecido que teve sua rota alterada após passar, por exemplo, perto de Júpiter e, com isso sofreu influência gravitacional. Observe, na Figura 1.1, como se dá esse movimento (MURRAY; DERMOTT, 1999):

Figura 1.1 - Representação da alteração da órbita de um cometa devido à aproximação com a órbita de Júpiter. (adaptação). FONTE: (MURRAY; DERMOTT, 1999)



Esta mesma técnica, baseada na relação de *Tisserand*, foi utilizada para permitir que veículos espaciais como *Voyager*, *Galileo* e *Cassini* viajassem em direção aos planetas exteriores do sistema solar (MURRAY; DERMOTT, 1999).

Para simplificar o estudo do problema de três corpos, surgiu o Problema Restrito Circular de Três Corpos (PRCTC). O PRCTC é um caso bastante particular, mas tem muitas aplicações práticas, em comparação com o problema geral de três corpos. O problema consiste no estudo de um sistema onde existem dois corpos (M_1 e M_2), chamados de corpos primários e estão em órbitas circulares ao redor do centro de massa do sistema (DULLIN; WORTHINGTON, 2014; DANTAS; LLIBRE, 2009). Busca-se estudar o movimento de um terceiro corpo que também faz parte deste sistema, cuja massa é considerada desprezável com relação as massas de M_1 e M_2 . A dinâmica do movimento dos corpos primários não é afetada pela presença do corpo de massa infinitesimal. (RAMÍREZ; VIDAL, 2013; PRADO, 2001). Alguns sistemas nos quais podem ser aplicados os conceitos do problema restrito de três corpos são:

- i) A dinâmica de cometas e asteroides no Sistema Solar. Os estudos de resultados mais relevantes são os que colocam um asteroide ou cometa, de massa desprezável, fazendo parte de um sistema com o Sol e Júpiter (PRADO, 2001).
- ii) O trajeto a ser percorrido por um veículo espacial se dirigindo ao sistema solar exterior, onde também se considera como corpos do sistema o Sol e Júpiter.
- iii) O trajeto de um veículo lunar, envolvendo no sistema a Terra e a Lua (PRADO, 2001; REN; SHAN, 2014; DUTT; ANILKUMAR, 2014).

A importância do estudo do movimento dos corpos celestes, em geral, se dá não só pela descoberta de como foi formado o universo conhecido até hoje, mas também com o intuito de verificar a possibilidade de possíveis colisões entre corpos que vagam pelo espaço com o planeta Terra.

Entre as órbitas dos planetas Marte e Júpiter existe uma região com uma grande concentração de pequenos corpos celestes, conhecida como cinturão principal de asteroides. Além disto, há asteroides que interceptam a órbita de planetas que não estão situados na faixa do cinturão, mesmo que alguns desses objetos tenham o afélio naquela região. Estes asteroides representam um perigo para o planeta Terra, pelo risco de colisão. O interesse científico em estudar estes asteroides é a crença de que muitos deles ainda carregam na sua composição elementos que indicariam a composição original do disco formador do sistema solar. Estes corpos têm grande

importância científica, pois são uma espécie de laboratório para desvendar como era o Sistema Solar na época de sua formação.

Nos últimos anos, houve um grande interesse na exploração de pequenos corpos no sistema solar (??). Em 1994, pela primeira vez, foi observada uma lua orbitando um asteroide. Até aquela época, acreditava-se que asteroides e cometas eram corpos solitários. Posteriormente, foram encontrados vários sistemas de asteroides duplos e triplos, bem como asteroides com anéis (PAMELA et al., 2013; RIBAS et al., 2014). Só no século XXI veículos espaciais foram enviados para a exploração de asteroides e cometas. Em 2000, o veículo espacial Norte-americano *NEAR Shoemaker* desembarcou no asteroide Eros. Em 2003, uma espaçonave japonesa chamada *Hayabusa* analisou dados e coletou materiais do asteroide *Itokawa*. Em 2012, uma espaçonave americana chamada *Dawn* orbitou o asteroide *Vesta*, a fim de coletar dados para entender melhor a origem e a formação do sistema solar. Em novembro de 2013, a Missão *ROSETTA*, lançada pela *ESA* (Agência Espacial Européia), realizou uma conquista histórica: um vôo bem sucedido com o pouso inovador do veículo espacial *Philae* no cometa *67P / ChuryumovGerasimenko* (PAMELA et al., 2013).

Estima-se que 16% dos asteroides descobertos até o momento com trajetórias que passam perto da Terra (NEA- *Near Earth Asteroid*) sejam binários, e o estudo desses corpos e suas peculiaridades proporcionam importantes descobertas científicas e tecnológicas (MARGOT et al., 2002; MERLINE et al., 2002). Quando um veículo espacial é colocada em um dos pontos de equilíbrio Sol-asteroide, por exemplo, o asteroide é geralmente tratado como um ponto de massa com um potencial gravitacional esfericamente simétrico (WILLIAMS; ABATE, 2009). No entanto, se o veículo espacial estiver perto da superfície do asteroide, o efeito não esférico do seu campo gravitacional e da rotação do asteroide/cometa desempenha um papel fundamental na órbita do veículo, e deve ser levada em conta (ZENG et al., 2015). Um dos campos de aplicação para o estudo de asteroides é na área da Dinâmica Gravitacional, onde são estudados os corpos que compõem o sistema solar, sua formação e evolução. Além disso, a exploração de asteroides e seus sistemas é ideal para missões de demonstração de tecnologia, como banco de testes para experimentos de demonstração em órbita (IOD-*In-Orbit Demonstration*) (FERRARI et al., 2016). Um dos tópicos mais relevantes na área de asteroides é o movimento de um veículo espacial na vizinhança desses sistemas particulares, um foco para futuras missões espaciais. A missão de Avaliação de Impacto e Deflexão de Asteroides (AIDA- *Asteroid Impact and Deflection Assessment*), que é um dos exemplos de aplicação do estudo de asteroides e também é uma parceria entre a *ESA* e a *NASA*. Esta missão foi criada com o ob-

jetivo de unir dois projetos diferentes: O *Double Asteroid Redirection Test (DART)* da *NASA* (que terá a função de ser o impactor cinético) e a *Asteroid Impact Mission (AIM)* da *ESA* (que funcionará como um monitor de sistema binário antes e depois do impacto, coletar dados dos binários de asteroides, e implementará um aterradora na superfície do asteroide menor) (FERRARI et al., 2016).

Todas essas missões citadas, entre muitas outras, trouxeram e irão trazer novas informações sobre a dinâmica, composição e formação de asteroides e cometas. Essas informações podem ajudar a ampliar o conhecimento atual para uma melhor compreensão da origem do sistema solar. Essas missões são também as primeiras etapas para a exploração espacial de pequenos corpos, criando a possibilidade de uma nova forma de atividade industrial: a mineração espacial. Isso significa que as naves espaciais vão viajar para o corpo pequeno para obter minerais a partir deles, e trazê-los de volta para a Terra. Considerando que a Terra tem uma quantidade finita de minerais importantes, eventualmente essa atividade será necessária (SCHEERES et al., 2000). Um dos maiores desafios para tais missões é modelar a órbita do veículo espacial em torno de pequenos e irregulares corpos celestes (PRADO; KUGA, 2001; PRADO; KUGA, 2001; PRADO; RIOS-NETO, 1993).

Um dos asteroides cotados para desenvolver pesquisas nessa área é o sistema de asteroide triplo 2001SN₂₆₃ (Figura 1.2), que foi observado pela primeira vez em fevereiro de 2008, pela estação radio-astronômica de Arecibo, em Porto Rico (PRADO, 2014; WOO; MISRA, 2014; MASAGO et al., 2016). Este sistema é formado por um objeto central de 2,5 km de diâmetro (asteroide *Alpha*) e outros dois menores de 0,77 km e 0,43 km de diâmetro (asteroide *Beta* e asteroide *Gamma*, respectivamente). Os dois últimos descrevem órbitas em torno do corpo central (asteroide *Alpha*), conforme mostram as Figuras 1.2 e 1.3.

Colocando *Alpha* como centro referencial do sistema, percebe-se que *Beta* está em uma órbita que tem o semieixo maior de 16,63 km e excentricidade de 0,015, e *Gamma* está em uma órbita com semieixo maior de 3,8 km e excentricidade de 0,016 (PRADO, 2014).

Os asteroides em sistemas triplos permitem o estudo de mais de um corpo em um único estudo e há hipóteses de que estes asteroides podem ser utilizados como fonte de minerais e elementos químicos raros (PRADO, 2014). Embora seja um estudo com bastante importância, não existem muitas missões ou projetos direcionados para esse fim.

Figura 1.2 - Órbitas determinadas a partir do software *Orbitas*. Na imagem é mostrada as órbitas da Terra, Marte, asteroide estudado e Júpiter, respectivamente. A órbita de cor vermelha é a órbita da Terra.

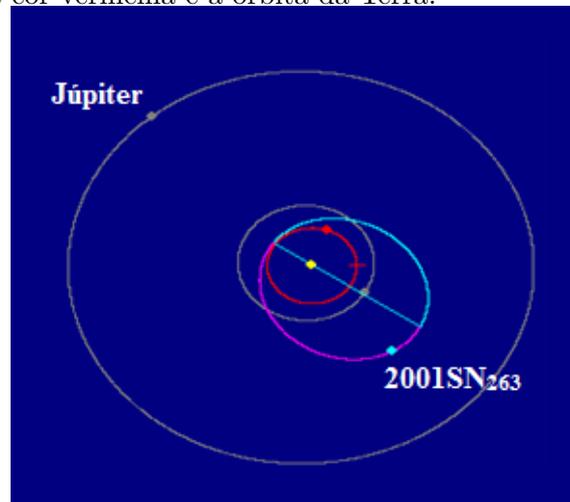
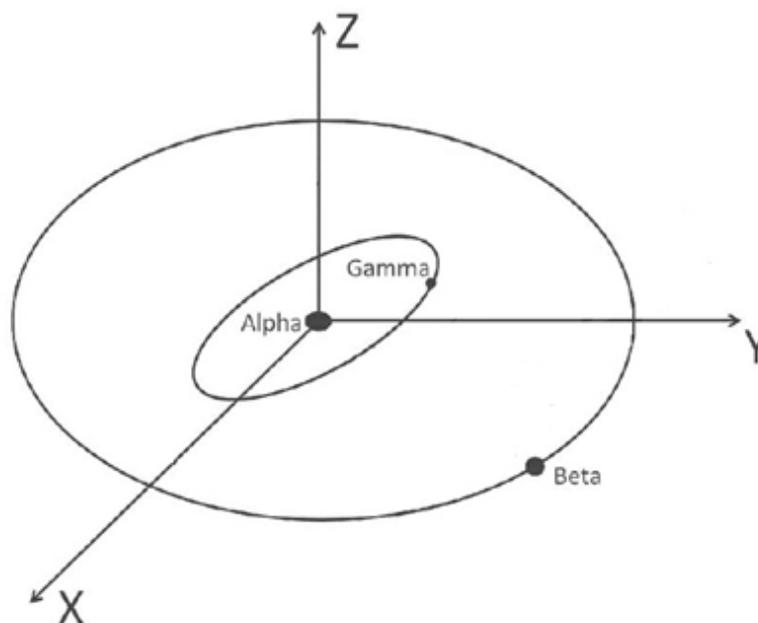


Figura 1.3 - Figura ilustrativa do sistema triplo do asteroide 2001SN₂₆₃ (adaptação).
FONTE: (PRADO, 2014)



Atualmente, há uma proposta de projeto brasileiro intitulado *Missão Aster* (MASAGO, 2014; MASAGO et al., 2016; BRUM et al., 2016). O projeto tem pretensões de ser pioneiro no Brasil em termos de exploração espacial e tem como meta principal orbitar o asteroide triplo 2001SN₂₆₃, que está localizado no cinturão de asteroides. Essa missão será a pioneira no mundo em visitar um sistema triplo. A missão pretende fazer avançar a ciência no Brasil e ampliar os investimentos em tecnologias, que servirão como base para outras missões espaciais tão complexas quanto esta, além de poder gerar subprodutos capazes de produzir riqueza e o bem-estar social. Politicamente, deverá lançar o país a um patamar mais elevado nos debates científicos, no que concerne os estudos sobre o espaço, colocando o Brasil em situação compatível com sua capacidade e posicionamento geopolítico atuais. O estudo deste asteroide triplo busca incluir uma análise da composição química deste sistema cujo objetivo principal é localizar componentes orgânicos. Além disso, há o interesse em determinar a órbita dos dois outros corpos menores e a forma deles. Por fim, a missão almeja alavancar o estudo das ciências desde o âmbito escolar até os mais avançados centros de pesquisa. Pretende-se desenvolver atividades educacionais (cursos relacionados à ciência e à tecnologia) e de divulgação, e levá-las às escolas e à sociedade. Além disso, visa capacitar instrutores e professores para ministrar os cursos de forma adequada, e despertar o interesse e a vocação dos estudantes e da sociedade, para que estes ingressem nas carreiras científica e tecnológica. O projeto envolve várias instituições brasileiras, como (PRADO, 2014; MASAGO et al., 2016): Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), Universidade Julio de Mesquita Filho (UNESP), Universidade Nacional de Brasília (UNB), Observatório Nacional (ON), Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), Universidade Federal do ABC (UFABC), Universidade de São Paulo (USP), Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), Instituto Tecnológico de Mauá (ITM), Universidade Federal do Paraná (UFPr), Universidade Federal de Fluminense (UFF), Universidade de Campinas (UNICAMP) e Museu de Astronomia e Ciências Afins do Rio de Janeiro. Mais informações sobre o plano-Diretor do INPE (2015-2019) a respeito do projeto da missão ASTER pode ser encontrado em: www.inpe.br/noticias/arquivos/pdf/PlanoDiretor_final2.pdf

Os testes de vários instrumentos em desenvolvimento no Brasil também são outra razão para realizar essa missão, porque todos os aspectos complexos envolvidos nesta missão criam um bom desafio para os desenvolvimentos tecnológicos e de testes (BRUM et al., 2016; BRUM et al., 2015; BRUM et al., 2015; BRUM; RODRIGUES, 2013; BRUM et al., 2011; NETO et al., 2016).

1.3 Objetivo

Esta dissertação de mestrado tem por objetivo determinar de forma precisa a posição dos pontos de equilíbrio das equações do movimento para diferentes hipóteses e modelos matemáticos. As características físicas e orbitais serão baseadas no sistema de asteroide 2001SN₂₆₃. Depois de determinada as posições de equilíbrio, pretendemos analisar a estabilidade de todos os pontos encontrados. Conhecendo a localização destes pontos e sua estabilidade, pretende-se na sequência, encontrar uma família de transferências orbitais entre esses pontos de equilíbrio. Finalmente, faremos uma análise de órbitas próximo ao primário menos massivo, levando em consideração a sua distribuição de massa, dimensão e o efeito da pressão da radiação solar.

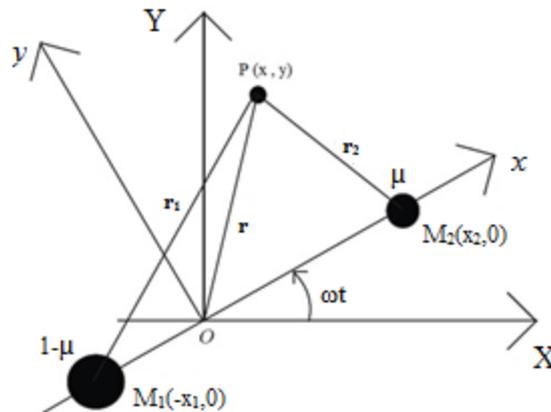
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 O Problema Restrito Circular de Três Corpos

Considere dois corpos (M_1 e M_2 , corpos primários) com massas finitas (m_1 e m_2), ambos com simetria esférica. Suponha que estes corpos estejam girando em uma órbita circular em torno do centro de massa do sistema. Considere agora um terceiro corpo (M_3), de massa desprezável quando comparada com as massas m_1 e m_2 , se movendo em torno do sistema formado por M_1 e M_2 . E M_3 não tem massa suficiente para perturbar as órbitas dos corpos primários. Vamos supor aqui que somente forças gravitacionais atuem no sistema. (MCCUSKEY, 1963; MURRAY; DERMOTT, 1999).

Considere μ como sendo a razão de massa entre o corpo de menor massa e a soma das massas dos dois corpos primários, $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$ e $1 - \mu$ como sendo a massa normalizada do corpo maior (M_1). Note que a massa do sistema foi escolhida de tal forma que a soma das massas dos dois corpos primários seja unitária. Considere também que o valor da constante de gravitação universal G é unitária. Na Figura 2.1 P indica a posição de o veículo espacial infinitesimal e r é o raio vetor que liga o centro de massa do sistema até o corpo de massa infinitesimal. A distância de $1 - \mu$ e μ até o ponto P são dadas por r_1 e r_2 respectivamente. O plano xy é tal que o eixo xy acompanha a rotação dos corpos primários em torno do centro de massa (MCCUSKEY, 1963; SZEBEHELY, 1967).

Figura 2.1 - Figura ilustrativa do PRCTC.



Vamos chamar de \ddot{r} a aceleração e \dot{r} a velocidade do corpo infinitesimal medido no sistema girante composto pelos corpos primários de massa μ e $1 - \mu$ (unidade canônica). Os corpos massivos assim como o plano xy estão girando com velocidade angular constante igual a ω rad/s ao redor do eixo z (REN; SHAN, 2014; BEUTLER, 2005). Com base na lei da gravitação universal de Newton e na segunda lei de Newton em um referencial não inercial, a equação do movimento da partícula de massa infinitesimal (em unidades canônicas), é dada por (MCCUSKEY, 1963; SZEBEHELY, 1967; THORNTON; MARION, 2011);

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - \frac{(1 - \mu)(x - x_1)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - x_2)}{r_2^3}, \quad (2.1)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = y - \frac{(1 - \mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}, \quad (2.2)$$

$$\ddot{z} = -\frac{(1 - \mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3}. \quad (2.3)$$

Percebe-se que, para determinar uma solução para o movimento do corpo de massa infinitesimal do problema restrito circular de três corpos, são necessárias seis integrais (MCCUSKEY, 1963). Note que essa equação do movimento da massa infinitesimal foi deduzida a partir de um referencial girante. As Equações (2.1), (2.2) e (2.3) admitem uma integral que foi descoberta por Jacobi (MOLTON, 1960). Esta é a única integral de movimento associada ao problema restrito circular de três corpos no espaço. Para isso, foi considerada uma função, conhecida também como pseudo-potencial, para as equações de movimento dada por: Seja:

$$U = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{(1 - \mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \quad (2.4)$$

lembrando que:

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}, \quad (2.5)$$

$$r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2}. \quad (2.6)$$

Derivando a Equação (2.4) parcialmente em relação a x , y e z temos:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x - \frac{(1 - \mu)(x - x_1)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - x_2)}{r_2^3}, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = y - \frac{(1 - \mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3}. \quad (2.9)$$

Note que as Equações (2.7), (2.8) e (2.9) são exatamente o lado direito das Equações (2.1), (2.2) e 2.3, respectivamente. Então, podemos escrever as Equações (2.1), (2.2) e (2.3) da seguinte forma:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (2.10)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (2.11)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (2.12)$$

Multiplicando estas últimas Equações por $2\dot{x}$, $2\dot{y}$ e por $2\dot{z}$, e somando-as, obtém-se:

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} = 2x\frac{\partial U}{\partial x} + 2y\frac{\partial U}{\partial y} + 2z\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (2.13)$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 2\frac{\partial U}{\partial t}. \quad (2.14)$$

Integrando ambos os lados em relação ao tempo, encontra-se (MCCUSKEY, 1963):

$$v^2 = 2U - C, \quad (2.15)$$

onde v é a velocidade do corpo de massa desprezável. A Equação (2.15) é conhecida como *Integral de Jacobi* (SZEBEHELY, 1967). Assim, percebe-se que a Equação (2.15) é uma função que depende de U , que foi introduzida por Jacobi, e de uma constante de integração que foi denominada C e constitui uma integral da equação do movimento. C também é conhecida como constante de Jacobi (DUTT; ANILKUMAR, 2014; REN; SHAN, 2014). Restam ainda cinco integrais para serem encontradas (MCCUSKEY, 1963). Se restringirmos ainda mais o movimento do corpo de massa infinitesimal para o plano xy , é possível reduzir o número de constantes de integração para três. Jacobi mostrou que existe uma relação entre duas dessas constantes de integração com a terceira (MCCUSKEY, 1963). Assim, parece que basta encontrar uma nova constante de integração para completar a solução deste problema especial no plano. Mas Bruns provou (*Acta Mathematica*, vol.XI.,) que, quando as coordena-

nadas retangulares são usadas, nenhuma nova integral algébrica existe (MOLTON, 1960).

As Equações do movimento no sistema de coordenadas girante e particularmente a Equação (2.15) são muito úteis na discussão qualitativa do comportamento da partícula infinitesimal (MCCUSKEY, 1963). Para simplificar a discussão, suponha que o corpo de massa infinitesimal se mova no plano x - y . Então, analisando a Equação (2.15) podemos concluir que a velocidade é uma função da posição no plano. A constante de integração C depende da posição inicial e da velocidade inicial da partícula (PRADO, 2001; MCCUSKEY, 1963; SZEBEHELY, 1967). Nota-se que a Equação (2.15) relaciona o quadrado da velocidade e as coordenadas do corpo infinitesimal no sistema de coordenadas girante (MOLTON, 1960). Logo, quando a constante de integração C é determinada numericamente pelas condições iniciais, a Equação (2.15) determina a velocidade com a qual o corpo infinitesimal se moverá, em todos os pontos do espaço em rotação. Inversamente, dada uma velocidade, a Equação (2.15) dará o lugar geométrico onde o corpo infinitesimal pode estar. Em particular, se v é tomado igual a zero nesta equação, isto definirá uma superfície na qual a velocidade será zero (MOLTON, 1960). É notável que existirá uma curva de velocidade zero quando $2U - C = 0$. Escrevendo isso em coordenadas cartesianas temos (MCCUSKEY, 1963):

$$2U = (x^2 + y^2) + \frac{2(1 - \mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} = C. \quad (2.16)$$

Integrando ambos os lados em relação ao tempo, encontra-se (MCCUSKEY, 1963):

$$2U = (x^2 + y^2) + \frac{2(1 - \mu)}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}} + \frac{2\mu}{\sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}} = C. \quad (2.17)$$

Este movimento só é possível nas regiões definidas pelas curvas de velocidade zero em que $2U > C$ pois, caso não houvesse essa relação, a velocidade ao quadrado teria que ser negativa, o que é impossível (PRADO, 2001). Estas regiões são conhecidas como região de *Hill* (DUTT; SHARMA, 2011). Nota-se então que não se pode obter por meio desta análise qualquer informação acerca da trajetória específica da partícula estudada. Conhece-se somente os limites do movimento da partícula das regiões acessíveis (PRADO, 2001). A curva de contorno definida pela Equação (2.17) marca a fronteira das regiões nas quais o movimento é permitido (RAMÍREZ; VIDAL, 2013; MCCUSKEY, 1963). A Equação (2.17) gera as chamadas *curvas de Hill* ou *curvas*

equipotenciais (PRADO, 2001) . Na seção seguinte, será feita a análise do movimento de um veículo espacial com valores elevados de C .

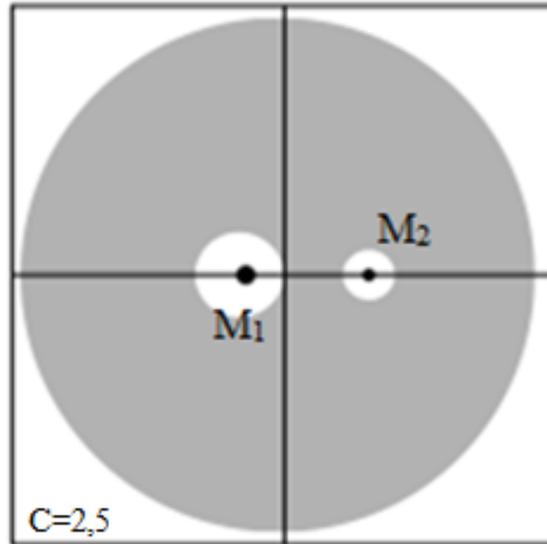
2.2 Análise Qualitativa das Curvas de Hill e Pontos de Lagrange

Sendo C muito grande, a expressão $2U - C$ será positiva, tanto se x e y forem grandes, quanto se r_1 ou r_2 forem muito pequenos, conforme pode ser visto na Equação (2.17) (RAMÍREZ; VIDAL, 2013; MCCUSKEY, 1963). Atribuindo um alto valor a x e y , que satisfaça a Equação (2.17), o terceiro e o quarto termos serão relativamente desprezáveis, e então pode-se escrever a Equação (2.17) como:

$$(x^2 + y^2) = C - \frac{2(1 - \mu)}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}} - \frac{2\mu}{\sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}} = C - \epsilon, \quad (2.18)$$

onde ϵ é uma pequena quantidade. Está é a equação de uma região oval de raio $(C - \epsilon)^{1/2}$. Deste modo, a curva de contorno no plano xy é aproximadamente uma curva oval circular (MOLTON, 1960). Isso permite concluir que a partícula deve estar fora dos limites externos da região sombreada na Figura 2.2 ($C = 2.5$) (PRADO, 2001). A região sombreada da Figura 2.2 é o lugar geométrico onde o veículo espacial não pode entrar, devido a falta de velocidade (ou energia) necessária. Ao considerar um pequeno valor de r_1 , e um alto valor de C , os termos x^2 e y^2 na equação (2.18), e o termo r_2 , ambos tornam-se insignificante em comparação com o terceiro termo, resultando em uma curva circundante ao corpo M_1 , conforme mostra a Figura 2.2 ($C = 2.5$). Neste caso, a partícula deve estar próxima de M_1 , dentro da oval esquerda, de cor branca, mostrada na Figura 2.2 ($C = 2.5$) (PRADO, 2001; RAMÍREZ; VIDAL, 2013). Agora, para um pequeno valor de r_2 , e um alto valor de C , os termos x^2 e y^2 na Equação (2.17) e o termo r_1 tornam-se insignificantes em comparação com o quarto termo. O resultado é uma oval em torno o corpo M_2 . Isso significa que a partícula deve estar próxima de M_2 , dentro da oval direita mostrada na Figura 2.2 ($C = 2.5$) (PRADO, 2001). Para um alto valor de C , e altos valores de x^2 e y^2 , ou ainda um pequeno valor de r_1 ou r_2 , o movimento só pode ocorrer nas regiões de cor branca, representadas na Figura 2.2 ($C = 2.5$) (MCCUSKEY, 1963). As curvas de Hill apresentam dimensões diversas por causa das diferenças entre os corpos de massa finita. Caso os dois corpos tenham a mesma massa finita, as ovais seriam do mesmo tamanho e formato (MOLTON, 1960). Uma visão geral das três ovais para um alto valor de C está representada na figura abaixo, para $\mu = 0.3$ (MURRAY; DERMOTT, 1999).

Figura 2.2 - Curvas de Hill para $C = 2.5$. (adaptação). FONTE: (VALTONEN; KARTTUNEN, 2005)



As regiões marcadas em cinza (Figura 2.2) representam as regiões nas quais o movimento não é permitido. Caso o veículo espacial comece próxima de M_1 ou M_2 , ela se manterá dentro das respectivas regiões de cor branca. Logo, não há possibilidade de uma transferência de M_1 para M_2 , ou vice-versa, pois o veículo teria que cruzar uma região proibida (região sombreada na Figura 2.2). Esta regra vale para o movimento natural, uma vez que o uso de empuxos altera o valor de C . Do mesmo modo, o veículo espacial também não pode escapar do sistema e ir para o infinito. No entanto, caso o veículo espacial comece seu movimento longe dos corpos primários, é impossível uma aproximação. Observe que a oval em torno de M_1 é maior que a oval em torno de M_2 . Esta diferença existe porque $(1 - \mu) > \mu$ ($\mu < 0.5$), o que possibilita um maior valor de r_1 no termo $(1 - \mu)/r_1$ (DUTT; ANILKUMAR, 2014; PRADO, 2001).

Considerando que a Terra executa um movimento em uma órbita circular em torno do Sol, e tendo como infinitesimal a massa da Lua, observa-se que a constante C , determinada pelo movimento da Lua, é tão grande que as dobras (curva de contorno) estão em torno da Terra e do Sol, e a Lua está numa oval fechada ao redor da Terra. Desta forma, a Lua não pode recuar de modo indefinido para longe da Terra. Por meio destas observações, Hill provou que a distância da Lua à Terra tem um limite superior, que é de aproximadamente 1,5 milhões de km (0.01 au) (MOLTON, 1960). A órbita da Lua está a uma distância de 0,384 milhões de km da Terra, isto significa

que a Lua está confortavelmente dentro da esfera de influência gravitacional da Terra e, portanto, não corre o risco de ser puxada para uma órbita independente ao redor do Sol. Ao diminuir o valor de $C = 2,5$ para $C_1 = 1,95$, as regiões permitidas (cor branca) ao redor de $(1 - \mu)$ e μ crescem com o aumento de r_1 e r_2 , e se reduzem as contribuições de $(1 - \mu)/r_1$ e μ/r_2 , e a curva externa retrai ($x^2 + y^2$ diminui com C). Este comportamento é observado na Figura 2.3 ($C = 1.95$) (PRADO, 2001). As ovas se tangenciam em um ponto, chamado de L_1 (primeiro ponto de contato) (SZEBEHELY, 1967). Esse é o valor de C para que seja possível uma transferência por meio do movimento natural entre M_1 e M_2 (VALTONEN; KARTTUNEN, 2005; REN; SHAN, 2014). Mas, observe que um corpo de massa infinitesimal que parte próximo de M_1 , por exemplo, chegará ao ponto L_1 com velocidade nula. Para que ele ultrapasse a barreira, e chegue a circundar ao redor do corpo M_2 , precisaria de um pouco mais de energia (PRADO, 2001). O terceiro corpo, que sai de M_1 , por exemplo, só pode se aproximar de M_2 passando por L_1 (REN; SHAN, 2014). Este ponto L_1 também é conhecido como ponto lagrangeano. Na Figura 2.3 é possível perceber como a transferência entre o infinito e as proximidades de $M_1 - M_2$ continua proibida, mas uma transferência de M_1 para M_2 já é possível. No problema restrito de três corpos, os pontos lagrangeanos são tidos como pontos de equilíbrio no sistema estudado (PRADO, 2001).

Se formos reduzindo cada vez mais o valor de C , irão surgir valores que permitem que as ovas das regiões proibidas e as ovas das regiões permitidas se tangenciem, fazendo surgir os pontos de Lagrange L_2 , L_3 , L_4 e L_5 , nesta ordem, até que o movimento seja permitido em todo o plano. Estas análises mais detalhadas podem ser encontradas em Molton (1960), Szebehely (1967), Prado (2001), McCuskey (1963). Os pontos L_1 , L_2 , L_3 , L_4 e L_5 são também chamados de pontos lagrangeanos do sistema (MCCUSKEY, 1963). Na próxima seção será feita uma análise quantitativa das posições destes pontos. A Figura 2.4 mostra uma ilustração dos cinco pontos lagrangeanos e suas respectivas curvas de contornos, ou curvas de Hill, para $\mu = 0.2$ (MURRAY; DERMOTT, 1999).

2.3 Análise Quantitativa das Curvas de Hill e Pontos de Lagrange

A partir deste ponto, será feita a abordagem matemática dos pontos lagrangeanos em termos matemáticos. A Equação da curva de contorno para o movimento no plano xy pode ser escrita como (SZEBEHELY, 1967):

Figura 2.3 - Curvas de Hill para $C = 1.95$. (adaptação). FONTE: (VALTONEN; KARTTUNEN, 2005)

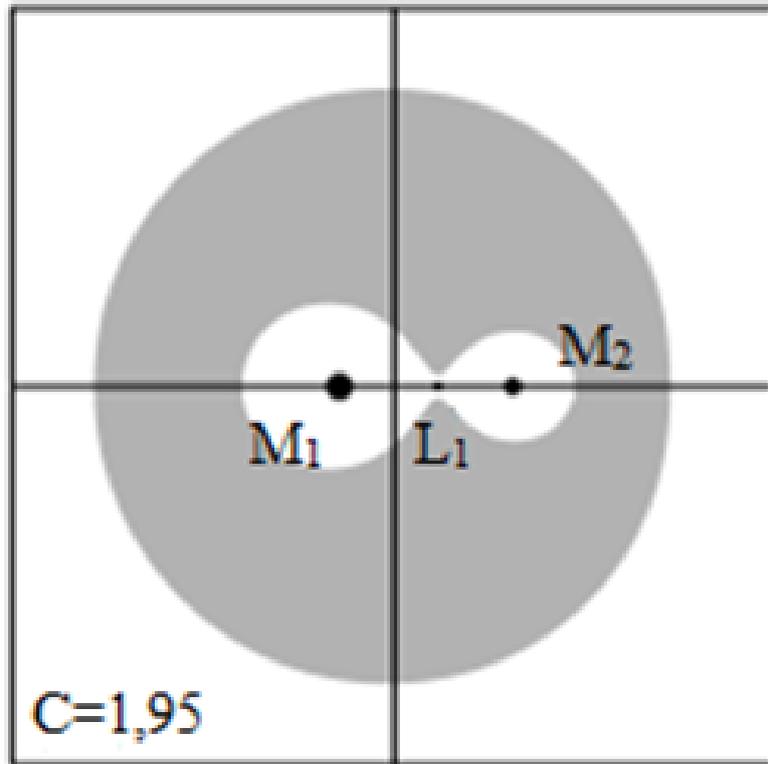
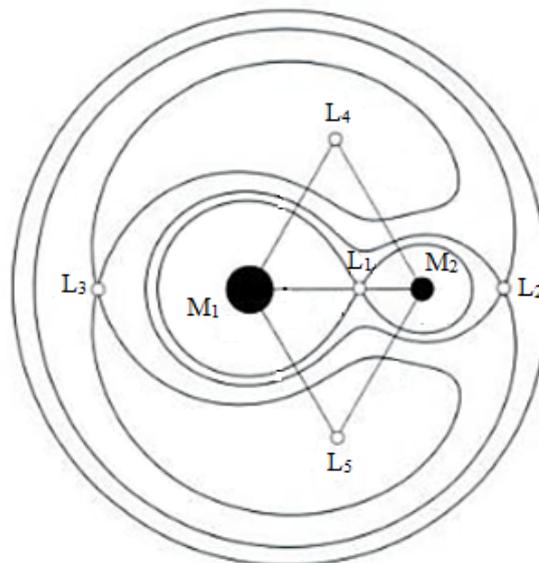


Figura 2.4 - Pontos de Lagrange e suas respectivas curvas de contornos. (adaptação). FONTE: (MURRAY; DERMOTT, 1999)



$$f(x, y) = x^2 + y^2 \frac{2(1-\mu)}{r_1} - \frac{2\mu}{r_2} = C \quad (2.19)$$

No estudo das funções, tem-se que um ponto é singular, quando $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (ANTON et al., 2007; DUTT; SHARMA, 2011). A aplicação destas condições na Equação (2.20) resulta em (MCCUSKEY, 1963):

$$x - \frac{(1-\mu)(x-x_1)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-x_2)}{r_2^3} = 0, \quad (2.20)$$

$$y - \frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} = 0. \quad (2.21)$$

Observe que as Equações (2.20) e (2.21) são exatamente o lado direito das Equações (2.1), (2.2) e (2.3) com $z = 0$.

Nas Equações (2.1) e (2.2), observa-se que um veículo espacial, ao ser colocada em um ponto de equilíbrio com velocidade inicial nula, permanecerá neste ponto indefinidamente, levando, portanto, o nome de pontos estacionários (PRADO, 2001). Observa-se, então, dois tipos de soluções:

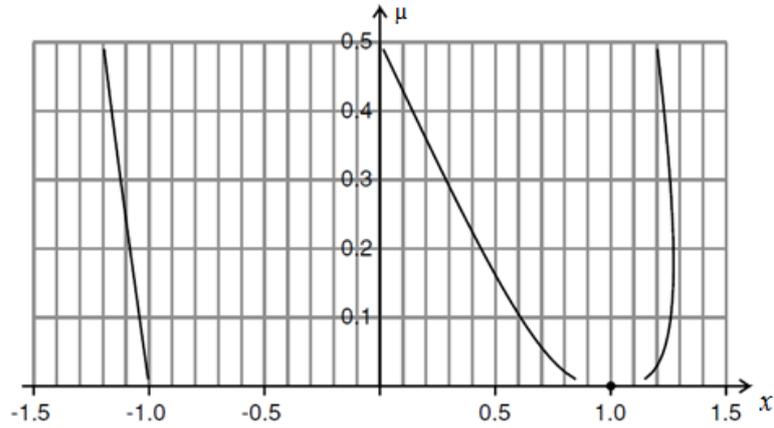
1. Ao considerar $y = 0$, a Equação (2.21) fica satisfeita e a Equação (2.20) se transforma em uma Equação em x , obtendo-se as soluções de equilíbrio colineares (WOO; MISRA, 2014; REN; SHAN, 2014; PRADO, 2001); ao resolvermos a Equação (2.20) (numericamente), encontramos três soluções reais. Estas soluções reais são justamente os pontos de equilíbrio, conhecidos também como pontos lagrangeanos (L_1 , L_2 e L_3) (SZEBEHELY, 1967; MCCUSKEY, 1963; PRADO, 2001).

2. Quando $y \neq 0$, a única maneira de satisfazer as Equações (2.20) e (2.21) é considerar $r_1 = r_2 = 1$, obtendo-se as soluções de equilíbrio não colineares (WOO; MISRA, 2014; REN; SHAN, 2014; PRADO, 2001). Resolvendo estas duas Equações numericamente, encontramos duas soluções reais, que são os pontos de Lagrange L_4 e L_5 . Os pontos L_4 e L_5 estão localizados nos vértices de um triângulo equilátero cuja base em comum é o segmento (x_1, x_2) . Estas soluções são válidas independentemente do tamanho relativo das duas massas finitas envolvidas no sistema (SZEBEHELY, 1967; MCCUSKEY, 1963; PRADO, 2001).

A Figura 2.5 mostra um gráfico dos pontos de equilíbrio colineares para diferentes

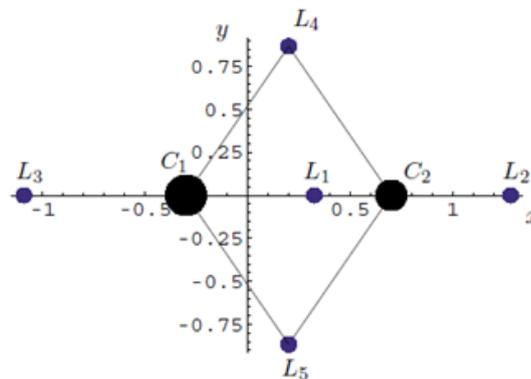
valores de μ .

Figura 2.5 - Posições dos pontos de Lagrange em relação às variações da razão de massa. (adaptação). FONTE: (VALTONEN; KARTTUNEN, 2005)



Não havendo, portanto, qualquer outra solução para as Equações (2.20) e (2.21), chega-se a um único resultado sempre: o número de pontos de equilíbrio do sistema são cinco, conforme mostra a Figura 2.6 (DULLIN; WORTHINGTON, 2014; PRADO, 2001; PINTO, 2006).

Figura 2.6 - Ilustração dos pontos lagrangeanos L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5 para $\mu = 0.3$. Posição dos pontos de Lagrange em relação às variações da razão de massa. FONTE: (PINTO, 2006)



2.4 O Problema Restrito Elíptico de Três Corpos

O PRPETC se assemelha bastante com o PRPCTC. A diferença é que para o PRPETC, os corpos primários orbitam o centro de massa do sistema em órbitas elípticas. Para o PRPETC, encontramos que as equações do movimento para o corpo de massa infinitesimal visto de um referencial girante (sinódico) são:

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \frac{r}{p} \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (2.22)$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \frac{r}{p} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (2.23)$$

$$\ddot{\zeta} = \frac{r}{p} \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (2.24)$$

onde ξ , η e ζ são coordenadas canônicas definidas como (BENNETT, 1965):

$$\xi = \frac{x}{r}, \quad (2.25)$$

$$\eta = \frac{y}{r}, \quad (2.26)$$

$$\zeta = \frac{z}{r}, \quad (2.27)$$

e $r = p/(1 + e \cos f)$ é a distância entre os corpos primários (que nesse caso não é mais constante), p é o *semi-latus rectum*, e é a excentricidade da órbita kepleriana dos primários e f é a anomalia verdadeira do corpo de menor massa (??). Para encontrar os pontos de equilíbrio, basta fazer com que o lado direito das Equações (2.22) a (2.24) sejam iguais a zero. Considerando o movimento no plano, então $z = 0$ e $\zeta = 0$. Percebe-se que a posição dos pontos Lagrangianos do problema restrito elíptico coplanar no sistema de coordenadas ξ , η e ζ é o mesmo que no problema restrito circular coplanar (MARKEV, 2010; LANZANO, 1967). Portanto, fazendo $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$, encontramos que:

$$x - \frac{(1 - \mu)(x - x_1)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - x_2)}{r_2^3} = 0, \quad (2.28)$$

$$y - \frac{(1 - \mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} = 0. \quad (2.29)$$

Observando as Equações (2.22) e (2.23) nota-se que um veículo espacial, ao ser colocada em um ponto de equilíbrio com velocidade inicial nula, permanecerá neste ponto indefinidamente, levando, portanto, o nome de pontos estacionários (PRADO,

2001). Observa-se, assim como no problema restrito circular de três corpos, dois tipos de soluções existem: soluções colineares e soluções triangulares. As soluções colineares são dadas por:

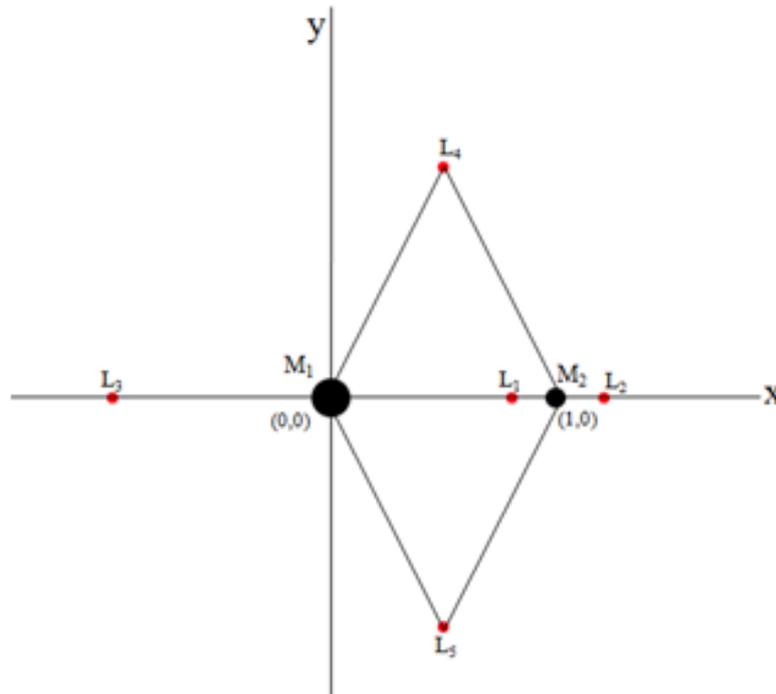
$$\rho^5 + (3 - \mu)\rho^4 + (3 - 2\mu)\rho^3 - \mu\rho^2 - 2\mu\rho - \mu = 0, \quad (2.30)$$

$$\rho^5 - (3 - \mu)\rho^4 + (3 - 2\mu)\rho^3 - \mu\rho^2 + 2\mu\rho - \mu = 0, \quad (2.31)$$

$$\rho^5 - (7 + \mu)\rho^4 + (19 + 16\mu)\rho^3 - (24 + 13\mu)\rho^2 + (12 + 14\mu)\rho - 7\mu = 0, \quad (2.32)$$

onde ρ , nas Equações (2.30) e (2.31), são as distâncias relativas dos pontos L_1 e L_2 ao corpo primário de menor massa, e o ρ da Equação (2.32) é a distância do ponto L_3 relativo ao primário de maior massa. Os pontos L_4 e L_5 estão localizados nos vértices de um triângulo equilátero, cuja base em comum é o segmento (x_1, x_2) . Não havendo, portanto, qualquer outra solução para as Equações (2.22) e (2.23), o número de pontos de equilíbrio do sistema são cinco, como mostra a Figura (DULLIN; WORTHINGTON, 2014; PRADO, 2001).

Figura 2.7 - Ilustração dos pontos L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5 para uma razão de massa $\mu = 0.02$, que se refere ao sistema *Alpha - Beta* do asteroide triplo 2001SN₂₆₃.



Sabendo a posição do ponto de libração colinear ξ_{Li} , e conhecendo a relação $\xi = x/r$, podemos encontrar a localização instantânea dos pontos de oscilação colineares e triangulares em relação ao eixo x no problema restrito elíptico de três corpos. Então x_{Li} pode ser expressa como:

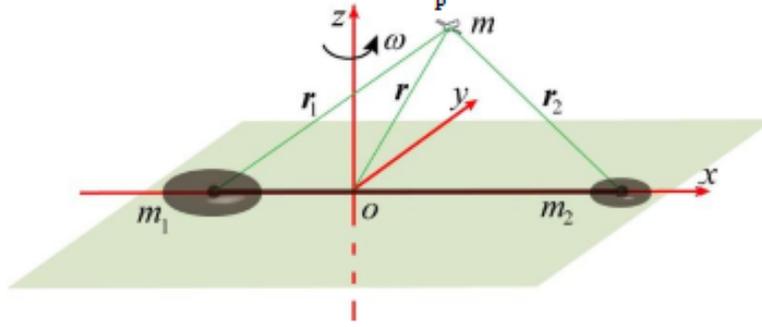
$$x_{Li} = r\xi_{Li}(i = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (2.33)$$

2.5 Problema Restrito Completo de Três Corpos

Para estudar de forma mais objetiva o problema restrito de três corpos, surgiu o Problema Restrito completo de Três Corpos (PRCTC). O problema é *restrito* porque a massa do terceiro corpo é desprezável em relação à massa dos outros dois corpos, de tal forma que o terceiro corpo não afeta o movimento dos outros dois corpos. O problema é *completo* porque a forma, a dimensão e a distribuição de massa de pelo menos um dos dois primários é considerada no estudo (ZENG et al., 2016d). Deste modo, este trabalho consiste no estudo de um sistema onde existem dois corpos (M_1 e M_2), chamados também de corpos primários, de massas finitas m_1 e m_2 e com um formato esferoide. A partir daí busca-se estudar o movimento de um terceiro corpo que também faz parte deste sistema, cuja massa é considerada desprezável (PRADO, 2001; ZENG et al., 2016d). Considere dois corpos (M_1 e M_2 , corpos primários) com massa finita m_1 e m_2 e de formato esferoide. Vamos considerar aqui que $m_1 > m_2$. Suponha que estes corpos estejam girando com um movimento circular em torno do centro de massa do sistema. Eles giram com velocidade angular. Considere agora um terceiro corpo (M_3), de massa desprezável (quando comparada com as massas dos corpos primários), se movendo em torno do sistema formado por M_1 e M_2 , mas este corpo, com massa infinitesimal, não tem massa suficiente para perturbar as órbitas dos corpos primários. Vamos supor aqui que somente forças gravitacionais atuem no sistema M_1 , M_2 e M_3 (MCCUSKEY, 1963; ZENG et al., 2016d). Considere μ como sendo a razão de massa entre o corpo de menor massa e a soma das massas dos dois corpos, $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$ e $1 - \mu$ como sendo a massa normalizada do corpo maior (M_1) (DUTT; SHARMA, 2011). Na Figura 2.8, P indica a posição do veículo espacial infinitesimal e r é o raio vetor que liga o centro de massa do sistema até o corpo de massa infinitesimal. As posições das massas m_1 e m_2 é dada por $[-\mu, 0, 0]^T$ e $[1 - \mu, 0, 0]^T$, respectivamente. A distância do corpo de massa $1 - \mu$ e μ até o ponto P é dada por r_1 e r_2 respectivamente:

Com base na lei da gravitação universal de Newton e na segunda lei de Newton para um sistema referencial não inercial, a equação do movimento do veículo espacial de

Figura 2.8 - Representação da posição dos corpos m_1 , m_2 e m_3 em relação ao centro de massa CM num referencial sinódico. FONTE: (ZENG et al., 2016d)



massa infinitesimal, é dada por (ZENG et al., 2016d):

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (2.34)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (2.35)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (2.36)$$

Os pontos acima das coordenadas se referem à derivada em relação ao tempo. O novo potencial efetivo pode ser escrito, quando considera-se os corpos primários como um esferoide, na forma:

$$U = \omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2} - k\omega^2 \left(\frac{(1-\mu)w_1}{r_1} + \frac{\mu w_2}{r_2} \right), \quad (2.37)$$

onde

$$w_i = 1 + \frac{A_i}{2r_i^2} \left(1 - \frac{3z^2}{r_i^2} \right), i = 1, 2. \quad (2.38)$$

O parâmetro adimensional k que surge na Equação (2.37) é de extrema importância, e representa a razão entre a força gravitacional e a força centrífuga, cuja definição é dada:

$$k = \frac{GM/d^2}{d\omega^2} = \frac{GM}{d^3\omega^2}. \quad (2.39)$$

A velocidade angular no sistema adimensional que surge na Equação (2.37) é dada

por:

$$\omega = \sqrt{1 + \frac{3(A_1 + A_2)}{2}}, \quad (2.40)$$

onde $A_i (i = 1, 2)$ é o coeficiente de achatamento dos corpos primários, cuja definição é dada por:

$$A_i = \frac{(\rho_i^e)^2 - (\rho_i^p)^2}{5d^2}, \quad (2.41)$$

onde o parâmetro ρ é o raio dos esferoides primários. O subscrito e representa o raio equatorial do primário e o subscrito p indica o raio polar do primário (ZENG et al., 2016d). Derivando a Equação (2.37) em relação a x temos que:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\omega^2 \left(x - k \left(\frac{(1 - \mu)(x + \mu)Q_1}{r_1^3} + \frac{\mu(x + \mu - 1)Q_2}{r_2^3} \right) \right) \quad (2.42)$$

Derivando a Equação (2.37) em relação a y temos que:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\omega^2 y \left(1 - k \left(\frac{(1 - \mu)Q_1}{r_1^3} + \frac{\mu Q_2}{r_2^3} \right) \right) \quad (2.43)$$

Derivando a Equação (2.37) em relação a z temos que:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -k\omega^2 z \left(1 - k \left(\frac{1 - \mu}{r_1^3} \left(Q_1 + \frac{3A_1}{r_1^2} \right) + \frac{\mu}{r_2^3} \left(Q_2 + \frac{3A_2}{r_2^2} \right) \right) \right), \quad (2.44)$$

onde a função auxiliar Q_i é definida por:

$$Q_i = 1 + \frac{3A_i}{r_i^2} - \frac{15z^2 A_i}{r_i^4}. \quad (2.45)$$

Substituindo as Equações (2.42), (2.43) e (2.44) nos termos das Equações (2.34), (2.35) e (2.36), encontramos:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \omega^2 \left(x - k \left(\frac{(1 - \mu)(x + \mu)Q_1}{r_1^3} + \frac{\mu(x + \mu - 1)Q_2}{r_2^3} \right) \right), \quad (2.46)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \omega^2 y \left(1 - k \left(\frac{(1 - \mu)Q_1}{r_1^3} + \frac{\mu Q_2}{r_2^3} \right) \right), \quad (2.47)$$

$$\ddot{z} = -k\omega^2 z \left(1 - k \left(\frac{1 - \mu}{r_1^3} \left(Q_1 + \frac{3A_1}{r_1^2} \right) + \frac{\mu}{r_2^3} \left(Q_2 + \frac{3A_2}{r_2^2} \right) \right) \right). \quad (2.48)$$

Para encontrar os pontos de equilíbrio, basta fazer com que o lado direito das Equações (2.46) a (2.48) sejam iguais a zero. Considerando o movimento no plano, então $z = 0$ (ZENG et al., 2016d). Fazendo $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$, encontramos que:

$$x - k\left(\frac{(1-\mu)(x+\mu)Q_1}{r_1^3} + \frac{\mu(x+\mu-1)Q_2}{r_2^3}\right) = 0, \quad (2.49)$$

$$y\left(1 - k\left(\frac{(1-\mu)Q_1}{r_1^3} + \frac{\mu Q_2}{r_2^3}\right)\right) = 0. \quad (2.50)$$

Observe que as Equações (2.49) e (2.50) são exatamente o lado direito das Equações (2.34), (2.35) e (2.36), com $z = 0$. Observando as Equações (2.34) e (2.35), observa-se que um veículo espacial, ao ser colocada em um ponto de equilíbrio com velocidade inicial nula, permanecerá neste ponto indefinidamente, levando, portanto, o nome de pontos estacionários (PRADO, 2014). Os pontos de equilíbrio colineares podem ser obtidos fazendo $y = 0$, satisfazendo a Equação (2.50) e então, podemos resolver a Equação (2.49) por métodos numéricos. Para os pontos de equilíbrio coplanares com $y \neq 0$, a Equação (2.50) deverá ser satisfeita também. Dividindo a Equação (2.50) por y temos:

$$1 - k\left(\frac{(1-\mu)Q_1}{r_1^3} + \frac{\mu Q_2}{r_2^3}\right) = 0, \quad (2.51)$$

Combinando a Equação (2.51) com a Equação (2.49), podemos chegar a uma Equação simples que é dada por (ZENG et al., 2016d):

$$2r_i^5 - 2kr_i^2 - 3kA_i = 0, i = 1, 2. \quad (2.52)$$

Se o coeficiente de achatamento A_i for negativo, ou seja, o raio polar for maior que o raio equatorial, temos duas raízes reais. Isto significa que novos pontos lagrangeanos não colineares irão surgir. As coordenadas cartesianas dos pontos não colineares são dadas por (ZENG et al., 2016d):

$$X_T = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2} + \frac{1}{2} - \mu, \quad (2.53)$$

$$Y_T = \pm\sqrt{r_1^2 - (X_T + \mu)^2} = \pm\sqrt{r_2^2 - (X_T + \mu - 1)^2}, \quad (2.54)$$

onde X_T e Y_T são as posições não colineares dos pontos estacionários. Resolvendo as Equações (2.53) e (2.54) encontramos os pontos estacionários não colineares. Dependendo do coeficiente de achatamento, podem-se encontrar os dois clássicos

pontos de Lagrange L_4 e L_5 ou, além desses dois pontos, encontramos também mais dois pontos estacionários que chamaremos de L_8 e L_9 .

2.6 Dipolo de Massa em Rotação

O desenvolvimento de missões dirigidas a asteroides e cometas permitiu o surgimento de uma nova área de pesquisa em astrodinâmica: estudo e quantificação da estabilidade e navegabilidade de órbitas de um veículo espacial próximos de corpos irregulares levando em consideração sua rotação (SCHEERES et al., 2000). Estudos nesta área são desafiadores, uma vez que cada um dos objetos de estudo (asteroides e cometas) possui características próprias nos mais diversos aspectos, como tamanho, forma, densidade e estado de rotação, que muitas vezes só são descobertos após a aproximação e, até mesmo, após o desembarque e a coleta de dados por um veículo espacial (SCHEERES et al., 2000).

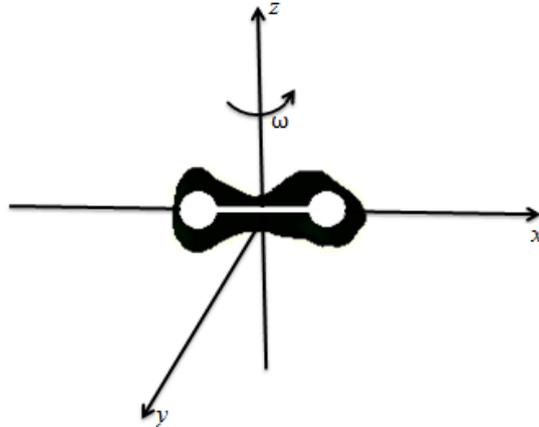
Devido ao efeito da rotação dos asteroides e dos cometas, juntamente com suas formas irregulares, os campos gravitacionais que atuam nas naves espaciais que circundam muito próximos a esses corpos são muito complexos (ZENG et al., 2015). Portanto, as missões previamente planejadas devem ser desenvolvidas com flexibilidade suficiente e cobrir vários parâmetros do corpo da missão (SCHEERES et al., 2000).

A primeira fase de estudo da dinâmica orbital dos corpos irregulares é desenvolver um modelo matemático representativo do campo gravitacional do asteroide ou cometa estudado. Por terem formas não esféricas e rotações peculiares, as órbitas dos satélites a serem enviados ao redor desses corpos não se assemelham em nada com órbitas tradicionais Keplerianas (MASAGO et al., 2016). Existem vários modelos já criados para representar matematicamente o potencial gravitacional de corpos com formas não simétricas. Um destes modelos é o método do harmônico esférico, que foi adotado para descrever o potencial gravitacional do asteroide Vesta (TRICARICO; SYKES, 2010), que pode divergir em alguns pontos (ZENG et al., 2016a). No entanto, o potencial de um corpo extremamente não esférico não pode, por exemplo, ser representado pelo modelo harmônico esférico, porque este modelo converge muito lentamente quando aplicado a corpos muito irregulares; e pode divergir quando o veículo espacial é colocada perto da superfície dos corpos estudados (ZENG et al., 2015). Outro método matemático é o modelo harmônico elipsoidal, proposto por (HOBSON, 1955), e melhorado por Pick et al. (1973) e Cui e Qiao (2014). Há também o método do poliedro, desenvolvido por Werner (1994), construído com base nos dados de imagem que são gerados por observações de radar e, portanto, não

pode ser derivado analiticamente. Muitas vezes, é preferível usar modelos simplificados para aproximar a distribuição potencial de corpos menores naturais, sem a necessidade de se fazer uma análise baseado em dados observacionais.

Neste estudo, foi utilizado um modelo baseado na massa de dipolo rotativo, inicialmente introduzido por [Chermnykh \(1987\)](#) e também estudado por [Kokoriev e Kirpichnikov \(1988\)](#), onde se supõe que o campo gravitacional de duas massas localizada no eixo de simetria de um corpo é aproximadamente igual ao campo gravitacional de um corpo axialmente simétrico. Tal formulação dá origem a um problema surpreendentemente interessante para um estudo analítico e numérico ([KOKORIEV; KIRPICHNIKOV, 1988](#); [KIRPICHNIKOV; KOKORIEV, 1988](#)). [Gozdziewski e Maciejewski \(1998\)](#) expandiram o estudo de [Kokoriev e Kirpichnikov \(1988\)](#), analisando um caso especial que ocorre quando a massa do corpo esféricamente simétrico tende a zero. Eles também analisaram a estabilidade dos pontos de libração usando o método Liapunov, variando os parâmetros ω e μ do problema. Em 1999, [Gozdziewski e Maciejewski \(1999\)](#) estendeu o modelo de [Kokoriev e Kirpichnikov \(1988\)](#) para um caso em que o corpo simétrico tem uma forma oblata e analisou bifurcações e estabilidade linear de seus pontos de equilíbrios triangulares. Um dos modelos utilizados na presente tese é o modelo de dipolo de massa em rotação, que representará um corpo alongado natural. Este modelo foi introduzido por [Zeng et al. \(2015\)](#), [Zeng et al. \(2016e\)](#). Estudos mais recentes de [Zeng et al. \(2016b\)](#) usaram um modelo de dipolo melhorado, levando em conta a oblação de ambos os corpos primários. [Zeng et al. \(2016b\)](#) encontraram até 13 pontos de equilíbrio no plano $x-y$, devido à forma não-esférica dos corpos primários. [Ferrari et al. \(2016\)](#) analisaram uma estratégia para encontrar trajetória na vizinhança de um sistema de asteroide binário, no qual um desses asteroides é modelado como um dipolo de massa rotativa. [Zeng et al. \(2016a\)](#) também analisaram trajetórias na vizinhança de corpos que são modelados como um dipolo de massa rotativo, estudaram os efeitos da trajetória de voo em uma forma analítica e uma relação interessante foi alcançada entre a trajetória do voo e a integral de Jacobi. Uma representação gráfica do modelo do dipolo de massa em rotação inserido em um corpo alongado é mostrada na [Figura 2.9](#). Esta imagem mostra um asteroide de corpo alongado (em preto) e dois pontos de massa, representados aqui pelos dois círculos brancos, introduzidos na imagem do asteroide. Esses pontos de massa são conectados por uma haste com massa desprezável. O comprimento desta haste é a distância característica entre os dois pontos de massa (comprimento de asteroide), que geralmente é considerado constante ([ZENG et al., 2015](#)). A velocidade angular ω é a velocidade de rotação do corpo alongado natural em torno de seu próprio eixo.

Figura 2.9 - Figura representativa de um dipolo de massa em rotação inserido em um corpo alongado.

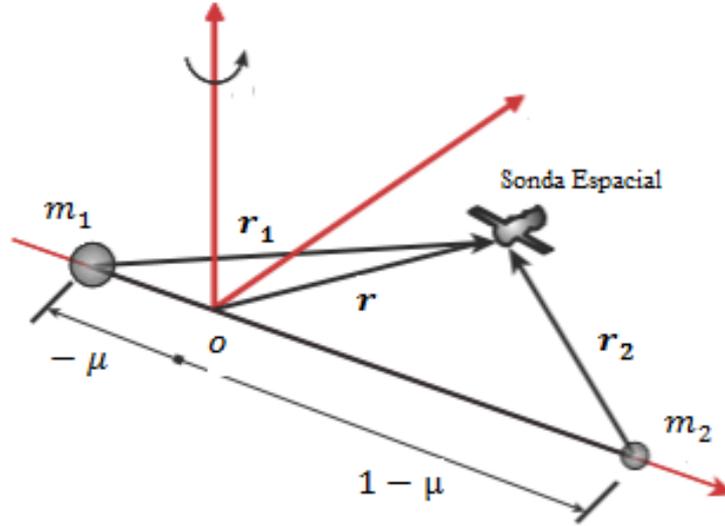


O método do dipolo de massa em rotação pode refletir a principal característica de um corpo alongado e produzir um potencial gravitacional fora e próximo a superfície do corpo. Além disso, algumas soluções analíticas podem ser obtidas com um modelo simples, que é uma generalização do PRCTC (BATTIN, 1999). O PRCTC forneceu muitas informações úteis e relevantes para a dinâmica e trajetórias dos corpos do sistema solar. Similarmente, se um corpo alongado pode ser aproximado por um dipolo em rotação, com os parâmetros adequados, podemos prever os comportamentos dinâmicos em todo o dipolo girante, e com isto, conseguiremos entender a dinâmica ao redor dos corpos alongados (ZENG et al., 2015).

A seguir, iremos estudar as equações do movimento na vizinhança de um asteroide que possui a forma alongada como se fosse um dipolo de massa em rotação. Este sistema é formado por dois corpos (M_1 e M_2) chamados de corpos primários (inseridos no interior do corpo alongado) com massa finita (m_1 e m_2), com ambos os corpos apresentando uma simetria esférica. Suponha que estes corpos estejam girando em uma órbita circular em torno do centro de massa (período de rotação do asteroide), conforme a Figura 2.10.

Considere agora um terceiro corpo M_3 (na imagem é um veículo espacial), de massa desprezável (quando comparada com as massas dos corpos primários), se movendo em torno do sistema formado por M_1 e M_2 , e este corpo, com massa infinitesimal, não tem massa suficiente para perturbar as órbitas dos corpos primários. Vamos supor aqui que somente forças gravitacionais atuem no sistema M_1 , M_2 e M_3 (ZENG

Figura 2.10 - Um esquema do sistema de coordenadas sinódico em um sistema de massa de dipolo (adaptação). FONTE: (ZENG et al., 2015)



et al., 2015). Considere μ como sendo a razão de massa entre os corpos primários e a soma das massas dos dois corpos, $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$ e $1 - \mu$ como sendo a massa normalizada do corpo maior (M_1). Note que a massa do sistema foi escolhida de tal forma que a soma das massas dos dois corpos massivos seja unitária (MCCUSKEY, 1963; ZENG et al., 2015). Considere também uma unidade adimensional para a constante de gravitação universal G de tal maneira que o seu valor também seja a unidade (MCCUSKEY, 1963). Na Figura 2.10, o veículo espacial está em uma posição no espaço $[x, y, z]^T$. O vetor posição r é o raio vetor que liga o centro de massa do sistema até o corpo de massa infinitesimal. A distância dos corpos m_1 e m_2 até o veículo espacial é dada por r_1 e r_2 , respectivamente. O plano xy é tal que o eixo xy acompanha a rotação dos corpos primários em torno do centro de massa (ZENG et al., 2016d). Semelhantemente ao PRCTC, as equações do movimento de um veículo espacial nas vizinhanças de um corpo que foi modelado como um dipolo de massa em rotação são dadas, em unidades canônicas, por:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (2.55)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (2.56)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (2.57)$$

onde U é dada pela Equação (2.4). Semelhantemente ao PRCTC, as Equações (2.55), (2.56) e (2.57) possuem dois tipos de soluções, quando $z = 0$. Estas soluções são conhecidas como soluções colineares e soluções triangulares.

A solução Colinear é dada por

$$x - \frac{(1 - \mu)s_1}{r_1^3} - \frac{\mu s_2}{r_2^3} = 0, \quad (2.58)$$

onde $r_1 = [x + \mu, 0, 0]^T$, $r_2 = [x - 1 + \mu, 0, 0]^T$, $s_1 = \text{Sign}[x - x_1]$ e $s_2 = \text{Sign}[x - x_2]$, sabendo que $x_1 = -\mu$ e $x_2 = 1 - \mu$.

A função $\text{Sign}[x]$ em matemática é a função sinal que extrai o sinal de um numero real. A função $\text{Sign}[x]$ de um número real é definida da seguinte forma:

$$\text{Sign}[x] = \begin{cases} -1 & , \text{ se } x < 0, \\ 0 & , \text{ se } x = 0, \\ +1 & , \text{ se } x > 0. \end{cases} \quad (2.59)$$

Resolvendo a Equação (2.59), encontramos três pontos lagrangeanos. No entanto, o ponto L_1 deve ser desprezado, pois sua localização é dentro do corpo, não exercendo qualquer influência sobre o estudo. Os pontos L_4 e L_5 estão localizados no vértice de um triângulo equilátero, os quais têm uma base em comum, que é o segmento (x_1, x_2) . Então, ao todo, os corpos com formatos alongados possuem quatro pontos de equilíbrio externos, mais um que é desprezado por estar inserido no interior do asteroide. Vamos adotar aqui a nomenclatura que foi utilizada por (WANG et al., 2014). Ao invés de chamarmos estes pontos de L_2 , L_3 , L_4 e L_5 , chamaremos de E_1, E_2, E_3 e E_4 , distinguindo-se, então, dos cinco pontos de Lagrange clássicos. As localizações dos dois pontos de equilíbrio triangulares são (ZENG et al., 2015):

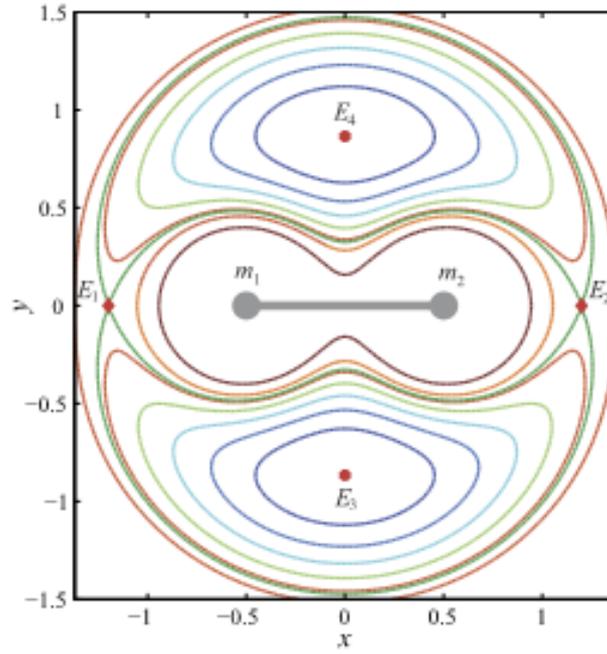
$$E_3 = \left[\frac{1}{2} - \mu, \sqrt{\frac{3}{4}}, 0 \right], \quad (2.60)$$

$$E_4 = \left[\frac{1}{2} - \mu, -\sqrt{\frac{3}{4}}, 0 \right]. \quad (2.61)$$

Não há nenhuma outra solução para as Equações (2.55), (2.56) e (2.57); logo, o número de pontos de equilíbrio, para um dipolo de massa em rotação, são quatro

$(E_1, E_2, E_3$ e $E_4)$, conforme exemplificado na Figura 2.11, para $\mu = 0,5$ (ZENG et al., 2015).

Figura 2.11 - Representação gráfica dos pontos de equilíbrio E_1, E_2, E_3 e E_4 para $\mu = 0$ e as curvas de velocidade zero de uma massa de dipolo em rotação. FONTE: (ZENG et al., 2015).



2.7 Estabilidade Linear do Movimento Próximo ao Ponto de Equilíbrio

O movimento de um o veículo espacial de massa infinitesimal próxima de um ponto de equilíbrio é dito estável se, quando esse veículo espacial sofre um pequeno deslocamento e ganha uma pequena velocidade, o veículo espacial oscila por um tempo considerável em torno desse ponto em questão (MCCUSKEY, 1963). Se o veículo espacial se afasta do ponto de equilíbrio a medida que o tempo aumenta, o movimento é instável (SZEBEHELY, 1967).

2.7.1 Equações do Movimento

Sejam as coordenadas de algum ponto de equilíbrio dadas por $(x_0, y_0, 0)$. Estamos considerando $z = 0$ porque estamos analisando os pontos de equilíbrio no plano. Agora, vamos supor que α, β sejam pequenos deslocamentos de um veículo espacial de massa infinitesimal em relação ao ponto de equilíbrio, nas direções x, y e 0 , respectivamente. Estes deslocamentos são funções do tempo e, portanto, existirão componentes da aceleração $(\ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, 0)$ e de velocidade $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, 0$. Então, podemos escrever

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \alpha, \\y &= y_0 + \beta,\end{aligned}\tag{2.62}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x}_0 + \dot{\alpha}, \\ \dot{y} &= \dot{y}_0 + \dot{\beta},\end{aligned}\tag{2.63}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \ddot{x}_0 + \ddot{\alpha}, \\ \ddot{y} &= \ddot{y}_0 + \ddot{\beta}.\end{aligned}\tag{2.64}$$

Vamos assumir que esses deslocamentos são suficientemente pequenos de tal forma que as expansões em serie de *Taylor* das Equações (2.7), (2.8) e (2.9) nas regiões em torno do ponto de equilíbrio podem ser escritas como (MCCUSKEY, 1963)

$$\begin{aligned}U_x &= (U_x)_0 + \alpha(U_{xx})_0 + \beta(U_{xy})_0, \\ U_y &= (U_y)_0 + \alpha(U_{yx})_0 + \beta(U_{yy})_0.\end{aligned}\tag{2.65}$$

onde os índices 0 significam que as derivadas parciais são avaliadas no ponto lagrangeano em questão (SZEBEHELY, 1967). Estas suposições equivalem a dizer que as forças que tendem a atuar sobre o corpo de massa infinitesimal, quando esta é deslocada ligeiramente da posição de equilíbrio, são proporcionais apenas a primeira

potência do deslocamento (MCCUSKEY, 1963).

Já vimos que as Equações (2.7) e (2.8) mostram que, no ponto lagrangeano,

$$U_x = (U_x)_0 = U_y = 0, \quad (2.66)$$

e também que

$$\ddot{x} = \ddot{y} = 0, \quad (2.67)$$

$$\dot{x} = \dot{y} = 0. \quad (2.68)$$

Desta forma, pelas Equações (2.7), (2.8), (2.62), (2.63), (2.64) e (2.65) temos que

$$\ddot{\alpha} - 2\dot{\beta} = \alpha(U_{xx})_0 + \beta(U_{xy})_0, \quad (2.69)$$

$$\ddot{\beta} + 2\dot{\alpha} = \alpha(U_{yx})_0 + \beta(U_{yy})_0. \quad (2.70)$$

As Equações (2.69) e (2.70) são as equações do movimento linearizadas de um o veículo espacial de massa infinitesimal nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio quando sofre um pequeno deslocamento (SZEBEHELY, 1967; MCCUSKEY, 1963). Para sabermos se um ponto de equilíbrio é linearmente estável ou não, basta substituir as posições dos pontos de equilíbrio nas Equações (2.69) e (2.70) e resolver o sistema. Se todos os autovalores das equações fornecerem apenas valores puramente imaginários, isso implica que o ponto de equilíbrio analisado será estável até primeira ordem (ou linearmente estável). Por outro lado, se algum dos autovalores for real ou imaginário, nós teremos um ponto de equilíbrio instável (SZEBEHELY, 1967; MCCUSKEY, 1963; MOLTON, 1960).

2.8 Pressão da Radiação Solar

A fonte de força motriz que atua em uma vela solar em um veículo espacial é o momentum transportado para a vela através da energia radiativa do Sol. A noção de que a luz pode empurrar a matéria é bastante incomum em nossa experiência cotidiana, mas isto é um mecanismo comum no sistema solar. Um dos exemplos mais marcantes é a beleza das caudas de cometas. Sabe-se que os cometas possuem duas caudas distintas: uma é a cauda de íons que é varrida pelo vento solar, a outra é uma cauda de poeira que é varrida pela pressão da radiação solar. Esta pressão da radiação solar é, de longe, o efeito dominante nas velas solares (MCINNES, 1999).

Nesta secção, uma análise física da pressão da radiação solar será explorada. Existe diversas descrições físicas que podem ser consideradas. Neste trabalho usaremos a abordagem da física quântica, que descreve a radiação (ou fótons) como sendo pacotes de energia. Outras abordagem, como a eletromagnética pode ser encontrada em (MCINNES, 1999).

2.8.1 A física da pressão da radiação solar

Seja um fóton viajando radialmente para fora do Sol e se chocando com uma vela solar transferindo momentum. O momentum linear transportado por um fóton é dado por:

$$p = \frac{E}{c} \quad (2.71)$$

onde $E = h\nu$ em que h é a constante de planck dada por $6,626 \cdot 10^{-34}$ J/s, ν é a frequência da onda eletromagnética (em Hertz) e c é a velocidade da luz no vácuo. Então, podemos escrever que o momentum linear de um fóton em dado por:

$$p = \frac{h\nu}{c} \quad (2.72)$$

Para sabermos qual é a variação do momentum durante um intervalo Δt transferido para uma vela solar, precisamos saber primeiro se o fóton é absorvido completamente, refletido completamente, ou refletido parcialmente. Se o fóton for totalmente absorvido pela vela solar, a variação do momentum linear é dada por

$$\Delta p = \frac{\Delta E}{c} \quad (2.73)$$

Se a radiação for totalmente refletida, a variação de momentum linear na vela solar é dada por:

$$\Delta p = 2 \frac{\Delta E}{c} \quad (2.74)$$

Se a radiação for parcialmente absorvida ou parcialmente refletida, a variação do momentum linear sobre a vela solar é dada por (BEUTLER, 2005):

$$\Delta p = C_r \frac{\Delta E}{c} \quad (2.75)$$

onde C_r é o coeficiente de refletividade, que possui um valor que está entre 1 e 2, pois depende se o material tem uma maior capacidade de absorção ou se tem a capacidade maior de reflexão.

A energia absorvida de uma fonte de radiação de intensidade S por um corpo de superfície A num intervalo de tempo Δt é

$$\Delta E = S \cdot A \cdot \Delta t \quad (2.76)$$

onde S é o fluxo de energia (energia por unidade de área por unidade de tempo [$J/(m^2s)$]).

Conhecendo agora a variação do momentum linear durante um intervalo Δt podemos encontrar a força da radiação solar transferida para uma vela solar fazendo o uso da segunda lei de Newton.

Para uma vela solar que absorve 100% da radiação solar, temos que a força que atua nessa vela é dada por

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}. \quad (2.77)$$

Conhecendo Δp relacionado a absorção total dada pela Equação 2.73 e sabendo que ΔE é dada pela Equação 2.76, temos que a força da radiação solar que atua numa superfície 100% absorvedora é

$$F = \frac{S \cdot A}{c} \quad (2.78)$$

A mesma análise pode ser feita para uma superfície 100% refletora e parcialmente refletora ou parcialmente absorvedora.

Dividindo a Equação 2.78 pela área da superfície absorvedora, podemos encontrar a pressão da radiação solar que é dada por

$$P_r = \frac{S}{c} \quad (2.79)$$

Dividindo o fluxo de energia S a uma distancia de 1 U.A. (Unidade astronômica) pela velocidade da luz, encontramos que a Pressão da radiação solar é uma constante dada por (MONTENBRUCK; GILL, 2000)

$$P_s = 4,56316 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2 \quad (2.80)$$

Agora podemos definir a aceleração que um veículo espacial de massa m e área A sofre ao ser perturbada pela pressão da radiação solar, conforme mostra a Equação

2.81

$$a_{prs} = \frac{F}{m} = -C_r \frac{A}{m} P_s \frac{r_0^2}{(r_{sat} - r_{sol})^2} \hat{r} \quad (2.81)$$

onde r_0 é a distancia Terra-Sol, r_{sat} é o vetor posição geométrico do satélite, r_{sol} é o vetor posição geométrico do Sol e \hat{r} é a distancia radial do Sol relativo ao satélite.

É importante perceber que a aceleração que uma partícula sofre devido a influencia da pressão de radiação solar, representada pela Equação 2.81, não depende da altura do satélite acima da superfície terrestre. Esta é uma das razões pelas quais a pressão de radiação solar é a perturbação dominante não-gravitacional acima de altitudes de cerca de 600 km (BEUTLER, 2005).

3 PONTOS LAGRANGEANOS DO SISTEMA DE ASTEROIDES 2001SN₂₆₃

A escolha deste par de asteroides deve-se à missão Brasileira ASTER, que objetiva enviar uma sonda espacial para o sistema de asteroides 2001SN₂₆₃ (PRADO, 2014; TRACY et al., 2015; MASAGO et al., 2016). Embora os detalhes deste modelo de sistema de asteroides não sejam objeto de estudo do presente trabalho, tomamos este sistema como base para desenvolver um estudo geral do problema. As características físicas e orbitais deste sistema podem ser encontradas (TRACY et al., 2015).

3.1 Resultados Obtidos com o Modelo do Problema Circular de Três Corpos

Foi desenvolvido um programa que calcula os cinco pontos lagrangeanos de um problema restrito circular de três corpos. Para verificar a confiabilidade do programa, foi calculado os pontos de equilíbrio para o sistema Sol-planeta, onde planeta é cada planeta do sistema solar, e depois comparado com os resultados existentes na literatura desses pontos de equilíbrio. Também foi feito a análise para o sistema Terra-Lua, em que foi aplicando no programa utilizando as propriedades orbitais e físicas de cada sistema estudado. Depois de validado o programa, aplicamos o conceito no sistema binário de asteroides 2001SN₂₆₃. Foram utilizadas, primeiramente, as características físicas e orbitais do centro de massa do asteroide *Alpha* – *Gamma* e do asteroide *Beta*. Como o corpo *Gamma* tem uma massa pequena em relação aos outros dois corpos (*Alpha* e *Beta*), e está bastante próximo do corpo *Alpha* (cerca de 4 km), o centro de massa desse sistema (*Alpha* – *Gamma*) está no interior do corpo *Alpha* (praticamente no seu centro). Para melhor visualização da situação, observe a Figura 3.1

Então, nos resultados do PRCTC e no PRETC, quando nos referirmos ao sistema *Alpha* – *Beta*, estamos considerando na verdade *Alpha/Gamma* – *Beta*, já que está sendo levado em consideração o centro de massa do sistema *Alpha* – *Gamma*. A partir destas considerações foram calculados os pontos de equilíbrio do sistema *Alpha* – *Beta*.

Depois, calculamos os pontos de equilíbrio, de um sistema binário de asteroides, considerando as características físicas apenas dos corpos *Alpha* – *Gamma* do sistema triplo de asteroide 2001SN₂₆₃. As distâncias dos pontos lagrangeanos aqui calculadas são distâncias relativas ao centro de massa do sistema analisado. A Tabela 3.1 mostra os pontos de equilíbrio analisados neste estudo.

Figura 3.1 - Figura representativa das localizações espaciais do sistema triplo de asteroide 201 SN_{263} (fora de escala).

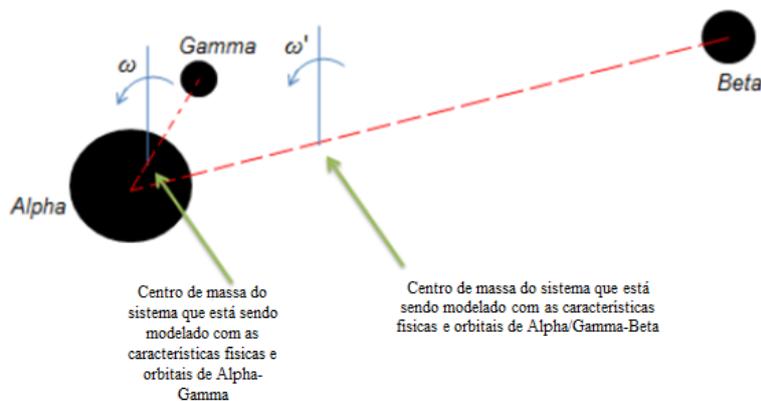


Tabela 3.1 - Pontos lagrangeanos de um sistema semelhante aos corpos *Alpha* – *Beta* e de *Alpha* – *Gamma* do asteroide 201 SN_{263} e suas respectivas razões de massa no problema restrito circular de três corpos.

M_1	M_2	μ	L_1	L_2	L_3	L_{4x}	L_{4y}	L_{5x}	L_{5y}
<i>Alpha</i>	<i>Beta</i>	0.02	0.78406	1.19262	-1.01062	0.4745	0.86602	0.4745	-0.86602
<i>Alpha</i>	<i>Gamma</i>	0.01	0.845006	1.14926	-1.0044	0.489432	0.86602	0.489432	-0.86602

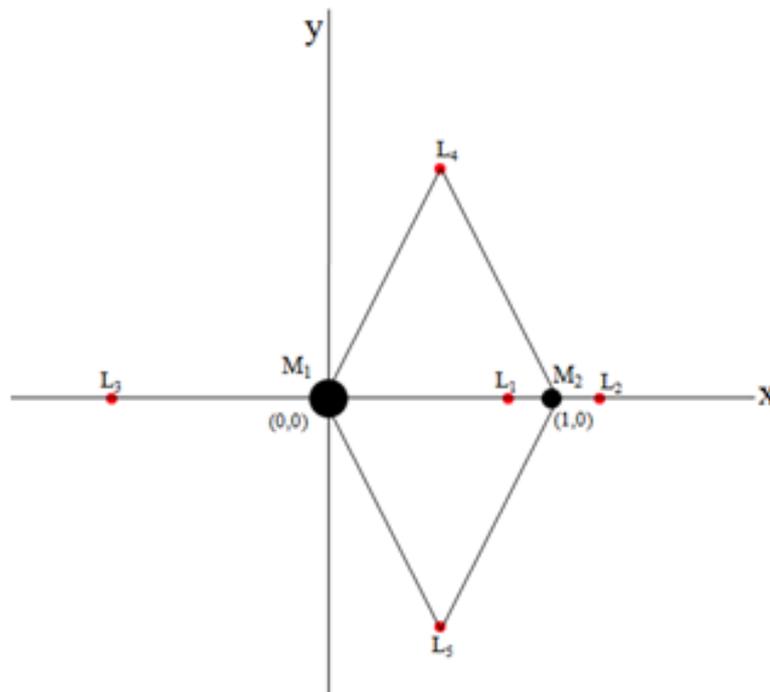
Os valores encontrados dos pontos de equilíbrio que são mostrados na Tabela 3.1 está em unidade canônica do sistema que foi analisado.

Analisando a estabilidade desses pontos de equilíbrio do problema restrito circular de três corpos (para este sistema estudado), utilizando a Equação (2.69) e (2.70), percebemos que os pontos de equilíbrio colineares (L_1 , L_2 , L_3) são pontos de equilíbrio instáveis. Já os pontos de equilíbrio triangulares (L_4 e L_5) são pontos de equilíbrio espectralmente estável (ou seja, todos os autovalores dos pontos L_4 e L_5 são puramente imaginários). Em seguida, escrevemos o lado direito das Equações (2.69) e (2.70) de forma matricial e verificamos que esta matriz é diagonalizável (lembrando que substituímos os valores das posições dos pontos L_4 e L_5 nas derivadas parciais). Logo, podemos concluir que os pontos de equilíbrio L_4 e L_5 são linearmente estáveis.

3.2 Resultados Obtidos com o Modelo do Problema Restrito Elíptico de Três Corpos

Para fazer a análise dos pontos de equilíbrio para o problema restrito elíptico de três corpos, é preciso levar em consideração os elementos keplerianos da órbita dos primários. Neste estudo, consideramos um sistema binário de asteroides que possuem as mesmas características físicas e orbitais dos corpos *Alpha*–*Beta* do sistema triplo de asteroide 2001SN₂₆₃. Fazendo o uso das Equações (2.22) a (2.24), e considerando o movimento no plano, podemos encontrar os pontos de equilíbrio num referencial girante e pulsante. A localização destes pontos, em escala, para este sistema analisado, é mostrada na Figura (3.2), onde o corpo M_1 é a soma das massas dos corpos *Alpha* e *Gamma* do sistema triplo de asteroide 2001SN₂₆₃.

Figura 3.2 - Ilustração dos pontos de equilíbrio L_1 , L_2 , L_3 , L_4 e L_5 para $\mu = 0.02$ de *Alpha* – *Beta* do sistema triplo de asteroide 2001SN₂₆₃

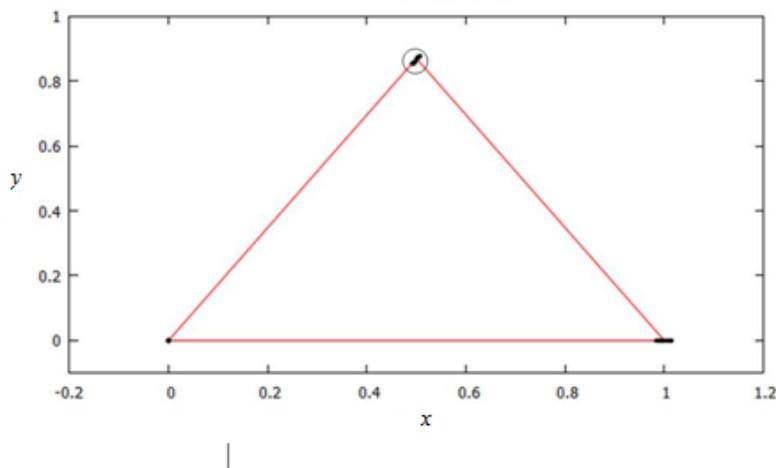


Conhecendo as posições dos pontos de libração coplanares ξ_{L_i} e η_{L_i} no referencial girante e pulsante, e conhecendo a relação $\xi = x/r$ e $\eta = y/r$, podemos encontrar a localização instantânea dos pontos de oscilação colineares e triangulares relacionados

ao eixo x e y no problema elíptico restrito de três corpos. Assim, x_{L_i} e y_{L_i} podem ser determinados utilizando as Equações (2.25) e (2.23).

Nas Figuras 3.3 e 3.4, há uma imagem das posições instantâneas do ponto L_4 e a posição instantânea dos corpos primários do sistema analisado. Como o problema é elíptico, a distância entre os corpos primários varia ao longo do tempo e, considerando este fato, as posições dos pontos lagrangeanos também variam. Na Figura 3.4, temos uma ampliação da região em torno do ponto L_4 , que está circulado na Figura 3.3. Os pontos pretos mostram o ponto lagrangeano instantâneos (vistos de um referencial girante) L_4 . Podemos ver na Figura 3.4 que o ponto L_4 oscila em torno da localização do ponto médio (em vermelho), onde este ponto é o ponto lagrangeano médio L_4 do mesmo sistema estudado, mas considerando o PRCTC.

Figura 3.3 - Oscilação da posição do ponto lagrangeano L_4 .



A Tabela 3.2 a seguir mostra as posições dos pontos de equilíbrio médio (referencial girante e pulsante) em unidades canônicas para os sistemas de corpos *Alfa – Beta* e *Alfa – Gama* e suas respectivas razões de massa.

Da mesma forma que foi feito para o PRCTC, notamos que os pontos de equilíbrio colineares (L_1, L_2, L_3) são pontos de equilíbrio instáveis para o PRETC. Entretanto, os pontos de equilíbrio triangulares (L_4 e L_5) são pontos de equilíbrio linearmente estáveis para o sistema estudado.

Figura 3.4 - Ampliação da região interna ao circulado da Figura 3.3 (L_4).

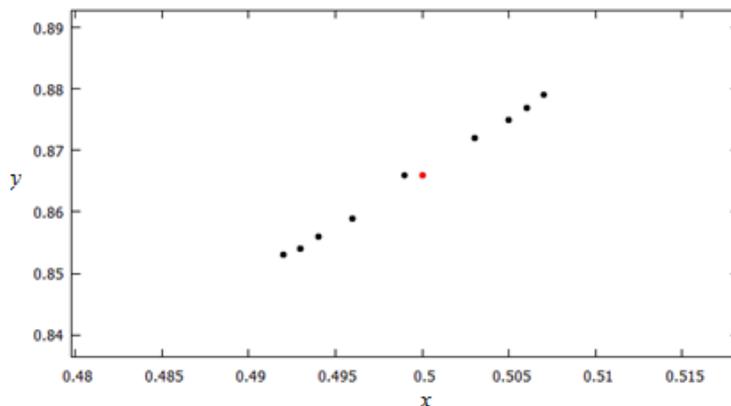


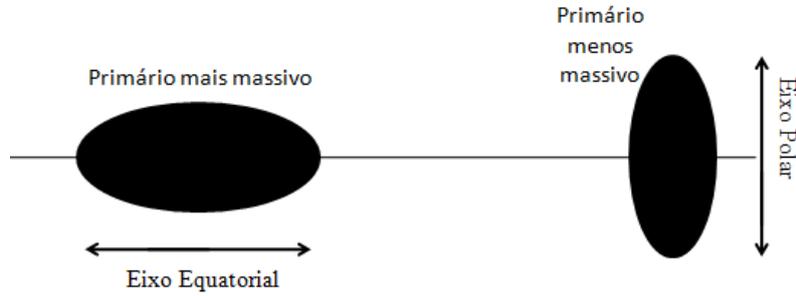
Tabela 3.2 - Pontos lagrangianos de um sistema semelhante aos corpos *Alpha* – *Beta* e de *Alpha* – *Gamma* e suas respectivas razões de massa no problema restrito elíptico de três corpos.

Primário mais massivo	Primário menos massivo	μ	L_1	L_2	L_3	L_{4x}	L_{4y}	L_{5x}	L_{5y}
<i>Alpha</i>	<i>Beta</i>	0.02	0.81	1.20	0.98	0.5	0.87	0.5	-0.87
<i>Alpha</i>	<i>Gamma</i>	0.01	0.86	1.16	0.99	0.5	0.87	0.5	-0.87

3.3 Resultados Obtidos com o Modelo do Problema Restrito Completo de Três Corpos

Pensando em termos de missões espaciais que tem o objetivo de visitar um sistema binário de asteroides, como já mencionado, é importante que haja um estudo mais abrangente e flexível, pois, muitas vezes, só se conhece a forma destes corpos quando a sonda espacial está se aproximando deles. Nesta seção, iremos levar em consideração a dimensão e a forma dos corpos estudados e iremos nos basear nas características físicas e orbitais apenas dos corpos *Alpha* e *Beta* que compõem o asteroide 2001SN₂₆₃. Para calcular os pontos de equilíbrio de um sistema binário de asteroides é preciso conhecer as características deste sistema. Dados recentes deste sistema podem ser encontrados em (TRACY et al., 2015). Neste tópico, consideraremos os asteroides com formatos de esferoides. O raio do asteroide *Alpha* é estimado em 1,45 km e o raio do menor eixo (Polar) é de 1,35 km. Se tomarmos como referência o asteroide *Alpha* (por ser o corpo mais massivo e maior), temos que o raio do asteroide *Beta* no eixo polar e de 0,5 km no eixo equatorial do asteroide *Beta* é de 0,32 km, como pode ser observado na Figura 3.5:

Figura 3.5 - Forma achatada de um sistema binário de asteroides.



Então, conhecendo os dados característicos do sistema a ser analisado, podemos calcular os valores de A_1 e A_2 , onde o A_1 e A_2 são os coeficientes de achatamento dos asteroides mais massivo e menos massivo, respectivamente. Com isso podemos calcular Q_1 , Q_2 e k pelas Equações (2.45) e (2.39). Conhecendo esses valores, nós calculamos, utilizando as Equações (2.49), (2.50), (2.53) e (2.54), as posições dos pontos estacionários, levando em consideração a dimensão e a forma dos asteroides. Neste estudo, devido à forma dos primários, foi possível encontrar nove pontos de equilíbrio no plano do sistema (além dos cinco pontos de equilíbrio clássicos surgiram mais quatro novos pontos de equilíbrio). A Figura 3.6 mostra as posições dos pontos lagrangeanos do sistema binário de asteroides estudados e a localização do centro de massa dos primários. Em vermelho estão os pontos lagrangeanos clássicos, conhecidos como L_1 , L_2 , L_3 , L_4 e L_5 , em azul estão as posições do centro de massa dos corpos primários, (o ponto azul à esquerda representa o primário mais massivo (α) e o ponto azul à direita representa o primário menos massivo (β)) e em verde, muito próximo β , estão os novos pontos de equilíbrio, chamados aqui de L_6 , L_7 , L_8 e L_9 .

A Figura 3.7 é uma aproximação do corpo menos massivo, para melhor visualização dos pontos L_6 , L_7 , L_8 e L_9 . Vemos que estes novos pontos de equilíbrio estão muito próximos ao centro de massa do corpo β .

Quando levamos em consideração a dimensão do corpo menos massivo, nos baseando nas dimensões do asteroide β do sistema de asteroides 2001SN₂₆₃, vemos que os novos pontos de equilíbrio estão no interior do corpo menos massivo, conforme é mostrado na Figura 3.8. Nesta Figura podemos observar uma oval que representa o asteroide β (cor ciano), o centro de massa deste asteroide (cor azul) e os novos pontos de equilíbrio (cor verde). Isto implica que, para este caso, esses novos pontos

Figura 3.6 - Imagem dos nove pontos de equilíbrio coplanares pontos clássicos (cor vermelha), pontos não clássicos (cor verde) e as posições do centro de massa dos corpos primários (cor azul).

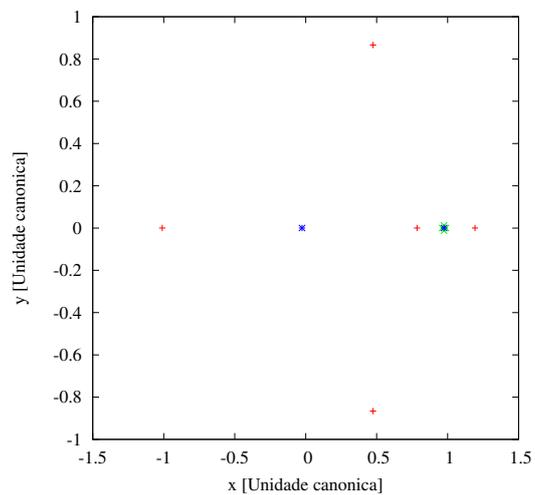
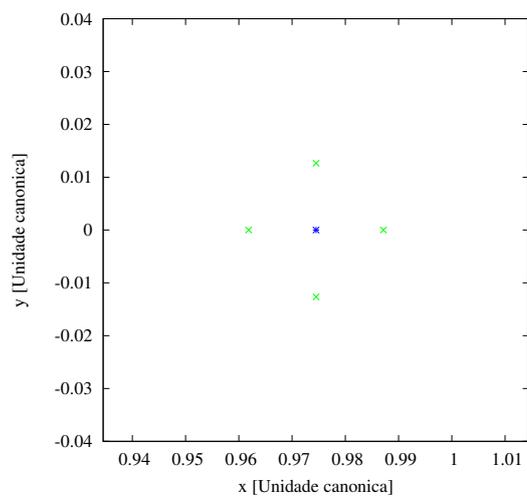
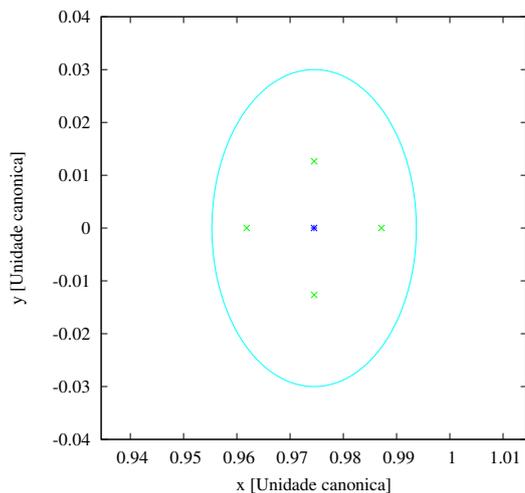


Figura 3.7 - Novos pontos de equilíbrio, chamados de L_6 , L_7 , L_8 e L_9 (cor verde) e o centro de massa do asteroide menos massivo (cor azul).



de equilíbrio não tem sentido físico algum.

Figura 3.8 - Novos pontos de equilíbrio, chamados de L_6 , L_7 , L_8 e L_9 (cor verde), o centro de massa do asteroide menos massivo (cor azul) e uma oval (cor ciano) representando a dimensão do asteroide menos massivo.



Entretanto, quando levamos em consideração as margens de erro da dimensão deste asteroide, alguns desses novos pontos de equilíbrio ficam praticamente na superfície deste asteroide, conforme mostra a Figura 3.9.

Isto é bastante interessante, pois existe um ponto de equilíbrio na superfície de um asteroide. Se uma sonda espacial tiver interesse em pousar em um sistema binário de asteroides com as especificações semelhantes às analisadas aqui, será possível encontrar uma posição no asteroide na qual a sonda consiga chegar na superfície com velocidade zero e assim conseguir pousar. Na Figura 3.10 temos as curvas de velocidade zero para o sistema analisado.

Figura 3.9 - Novos pontos de equilíbrio, chamados de L_6 , L_7 , L_8 e L_9 (cor verde), o centro de massa do asteroide menos massivo (cor azul) e uma oval (cor ciano) representando a dimensão do asteroide menos massivo (levando em consideração a margem de erro).

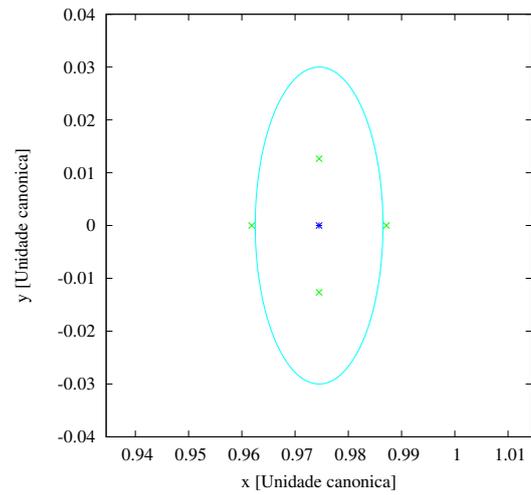
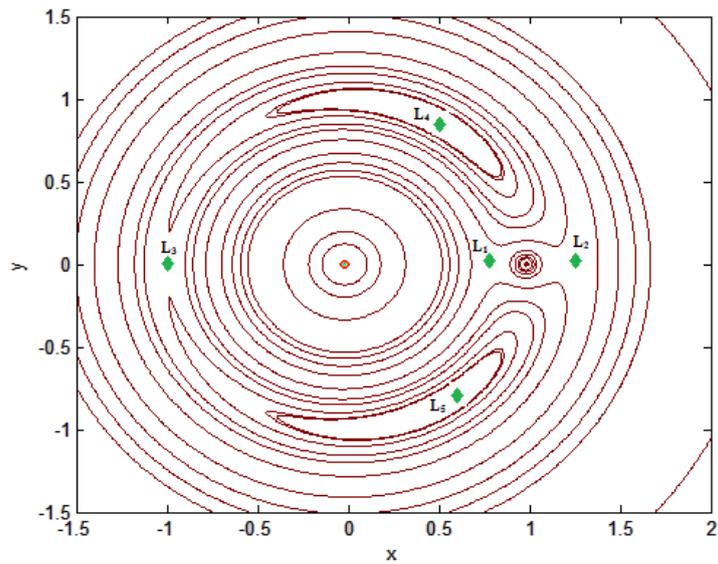


Figura 3.10 - Imagem dos nove pontos de equilíbrio coplanares.



Saber onde se localizam esses pontos estacionários é importante para, por exemplo, manter uma sonda espacial, pois estes pontos indicam os locais onde a sonda sofre o mínimo de perturbação e com isso se gasta o mínimo de combustível possível para mantê-lo em órbita. E, como vimos, além de manter uma sonda, podemos encontrar pontos de equilíbrio próximo a superfície de um asteroide, sendo portanto, um lugar adequado para realizar um pouso ou mesmo fazer observações próximas ao corpo. As distâncias dos pontos lagrangeanos aqui calculadas são distâncias relativas ao centro de massa do sistema. A Tabela 3.3, do sistema estudado, está normalizada, considerando a distância entre os dois primários como sendo unitária.

Tabela 3.3 - Posição dos pontos de equilíbrio quando leva-se em consideração o achatamento de um ou dois dos primários e quando considera-se um ou os dois primários como ponto de massa

		Achatamento nos dois primários	Apenas o primário menos massivo achatado	Apenas o primário mais massivo achatado	Os primários como massas pontuais
L_1	x	0.78438	0.78432	0.78412	0.78406
	y	0	0	0	0
L_2	x	1.19238	1.19237	1.19236	1.19262
	y	0	0	0	0
L_3	x	-1.01072	-1.01062	-1.01072	-1.01062
	y	0	0	0	0
L_4	x	0.47466	0.47456	0.47461	0.47450
	y	0.86605	0.86599	0.86608	0.86602
L_5	x	0.47466	0.47456	0.47461	0.47450
	y	-0.86605	-0.86599	-0.86608	-0.86602
L_6	x	0.96185	0.96185	Não existe	Não existe
	y	0	0	Não existe	Não existe
L_7	x	0.98716	0.98716	Não existe	Não existe
	y	0	0	Não existe	Não existe
L_8	x	0.97452	0.97443	Não existe	Não existe
	y	0.01265	0.01265	Não existe	Não existe
L_9	x	0.97452	0.97443	Não existe	Não existe
	y	-0.01265	-0.01265	Não existe	Não existe

A primeira coluna é referente aos pontos lagrangeanos do sistema estudado e suas respectivas coordenadas. A segunda coluna se refere às posições numéricas dos pontos de equilíbrio quando consideramos os dois primários com um formato achatado. Lembrando que neste sistema, o primário mais massivo é mais alongado no equador

e o primário menos massivo é mais alongado no eixo polar, conforme mostramos na Figura 3.5. A terceira coluna da Tabela 3.3 diz respeito às posições dos pontos estacionários quando consideramos apenas o corpo menos massivo com forma achatada. A quarta coluna considera apenas o corpo mais massivo com um formato de um esferoide e, por fim, a quinta e última coluna são as posições dos pontos de libração quando os corpos são considerados como massa pontual. Podemos perceber pela Tabela 3.3 que as posições dos pontos de equilíbrio que correspondem a L_1 e L_2 variam mais significativamente, devido ao fato de estes pontos estarem mais próximos dos primários, logo, qualquer mudança no campo gravitacional destes corpos alterará as posições desses pontos de equilíbrio. Já o ponto L_3 sofre maior influência gravitacional do corpo M_1 . Podemos perceber que este ponto de equilíbrio sofre alteração quando mudamos a forma do asteroide mais próximo deste ponto, que é o corpo M_1 . Quando é levada em consideração a forma achatada do corpo M_2 , pode-se perceber que surgem mais quatro pontos de equilíbrio próximos ao asteroide menos massivo, que denominamos de L_6 , L_7 , L_8 e L_9 . Por outro lado, quando não consideramos a forma alongada do corpo M_2 , esses novos pontos de equilíbrio deixam de existir, surgindo apenas os cinco pontos de equilíbrio clássicos. A análise que fizemos acima levou em consideração as características físicas e orbitais dos asteroides *Alpha* e *Beta* do sistema triplo de asteroide 2001SN₂₆₃. O mesmo tipo de análise foi feita, mas agora, levando em consideração as características físicas e orbitais apenas dos corpos *Alpha* e *Gamma* do sistema triplo 2001SN₂₆₃. A Tabela 3.4 mostra as posições dos pontos de equilíbrio deste modelo de sistema binário de asteroides.

A Tabela 3.4 pode ser analisada da mesma forma que analisamos a Tabela 3.3. Podemos perceber que na Tabela 3.4 surgem apenas os pontos de equilíbrio clássicos. Isto ocorre devido à forma do achatamento dos corpos analisado neste segundo caso. No primeiro caso, quando consideramos os dados dos asteroides *Alpha* e *Beta*, percebemos que o corpo *Alpha* é um corpo *oblato* (ou seja, mais alongado no eixo equatorial), já o corpo *Beta* tinha um achatamento *prolato* (ou seja, era mais alongado no eixo polar), conforme mostramos na Figura 3.5. Esta forma *prolato* faz surgir novos pontos de equilíbrio próximos ao corpo com uma alongação maior no eixo polar. Por outro lado, quando consideramos as características físicas dos corpos *Alpha* e *Gamma* do asteroide 2001Sn₂₆₃, percebemos que os dois corpos tem um formato *oblato*. Para este tipo de forma, não foi encontrada nenhuma solução para a Equação do movimento além das cinco soluções clássica.

Fazendo o estudo da estabilidade de cada ponto de equilíbrio calculado, encontramos que:

Tabela 3.4 - Posição dos pontos de equilíbrio quando leva-se em consideração o achatamento de um ou dois dos primários e quando considera-se um ou os dois primários como ponto de massa.

		Achatamento nos dois primários	Apenas o primário menos massivo achatado	Apenas o primário mais massivo achatado	Os primários como massas pontuais
L_1	x	0.84468	0.843743	0.845956	0.845006
	y	0	0	0	0
L_2	x	1.15095	1.15053	1.14968	1.14926
	y	0	0	0	0
L_3	x	-1.00634	-1.0044	-1.00634	-1.0044
	y	0	0	0	0
L_4	x	0.491158	0.489233	0.491357	0.489432
	y	0.867134	0.86614	0.867134	0.866025
L_5	x	0.491158	0.489233	0.491357	0.489432
	y	-0.867134	-0.86614	-0.867134	-0.866025

i) Do sistema modelado baseado nas características físicas e orbitais do sistema *Alpha – Beta* encontramos que: Apenas os pontos de equilíbrio L_4 e L_5 são linearmente estáveis. Os demais pontos encontrados são todos instáveis.

ii) Do sistema que foi modelado baseado nas características físicas e orbitais dos corpos *Alpha – Gamma*, encontramos que: Os pontos de equilíbrio L_1 , L_2 e L_3 são instáveis e os pontos de equilíbrio L_4 e L_5 são linearmente estáveis.

3.4 Pontos de Equilíbrio Obtidos com o Problema Restrito Síncrono Completo de Três Corpos Usando o Modelo do Dipolo de Massa em Rotação

A pesquisa desenvolvida no presente estudo usa o modelo do dipolo de massa em rotação para representar um sistema síncrono de asteroides. Este tópico tem por objetivo analisar os pontos de equilíbrio de um sistema binário de asteroides, levando em consideração o movimento rotacional do corpo alongado.

Isso significa que o asteroide que possui o movimento rotacional é suposto ser um asteroide com uma forma alongada, de modo que podemos considerar este asteroide como um dipolo de massa. Assume-se que o período de rotação é o mesmo período do movimento de translação dos asteroides em torno do centro de massa do sistema. Esta suposição justifica o nome *Problema Restrito Síncrono Completo de Três*

Corpos. O problema é *Restrito* porque a massa de um dos corpos é desprezível em comparação com os outros dois corpos; *Síncrono* porque o período de rotação do primário alongado coincide com o seu período de translação em torno do centro de massa do sistema. O problema é *Completo* porque a forma e a distribuição de massa de um dos corpos é levada em consideração.

Como já se sabe, existem asteroides na forma de sistemas duplos, triplos, etc. Sabe-se também que alguns desses sistemas são síncronos, como já mencionado. Isso significa que este estudo é útil para entender o movimento de uma espaçonave viajando perto de um sistema de asteroides levando em consideração a forma de um dos asteroides e seu movimento de rotação em torno do próprio eixo.

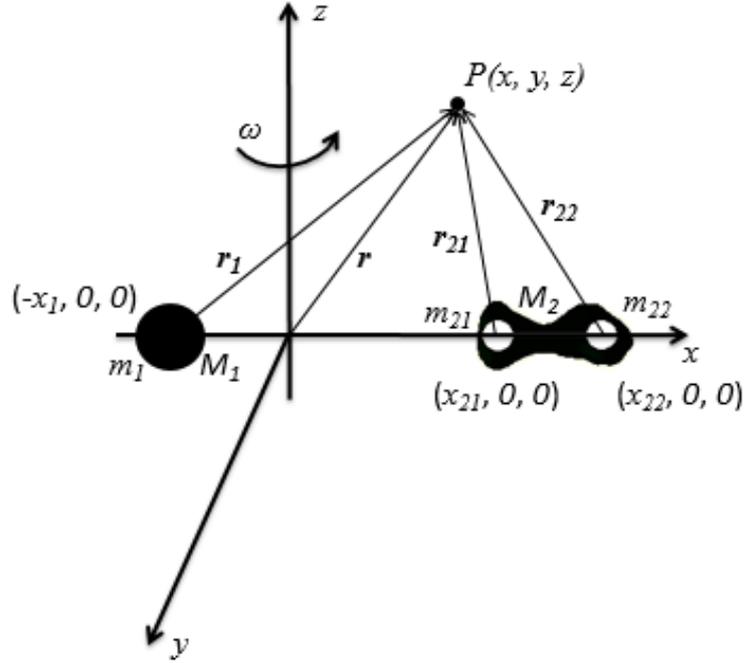
3.4.1 Equações do movimento

Neste problema, assume-se que o movimento de um corpo de massa desprezível ($P(x, y, z)$) é governado pelas forças de gravidade dos corpos M_1 e M_2 . O corpo de massa infinitesimal não afeta a dinâmica dos primários. A unidade de distância é normalizada para ser a distância do corpo M_1 ao centro de massa do corpo do dipolo, em que o dipolo é justamente corpo M_2 , que é formado por dois corpos hipotéticos com massas m_{21} e m_{22} . O corpo mais massivo do sistema é adotado para ser o ponto com massa m_1 . O corpo menor é modelado como uma massa de dipolo rotativo que é composta pelas massas m_{21} e m_{22} , como mostrado na Figura 3.11.

A unidade de tempo é definida de tal forma que o período de rotação do dipolo de massa, que é também o seu período de translação, uma vez que são os mesmos devido ao sincronismo, é igual a 2π . Assim, temos $G(m_1 + m_{21} + m_{22}) = 1$. A posição espacial da massa desprezível é $P(x, y, z)$ e as coordenadas dos corpos com massa m_1 , m_{21} e m_{22} são $(-x_1, 0, 0)$, $(x_{21}, 0, 0)$ e $(x_{22}, 0, 0)$, respectivamente, em relação ao sistema rotativo. É também adotado que $m_1 > m_{21} = m_{22}$ e que a razão de massa é dada por $\mu^* = \frac{m_{21}}{m_1 + m_{21} + m_{22}}$, onde $\mu^* = \frac{\mu}{2}$, com μ a relação usual usada no problema restrito de três corpos. Os corpos primários estão no eixo x, cujas coordenadas são dadas por $x_1 = -2\mu^*$, $x_{21} = -2\mu^* - \frac{d}{2} + 1$ e $x_{22} = -2\mu^* + \frac{d}{2} + 1$. Aqui d é a distância entre o ponto de massa m_{21} e o ponto de massa m_{22} (o comprimento do maior eixo do asteroide menor). Lembre-se de que d é dado em unidades canônicas. As equações de movimento do corpo de massa desprezível, no plano $x - y$, quando vistas em um referencial girante, são dadas pelas Equações mostradas a seguir.

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x, \quad (3.1)$$

Figura 3.11 - Imagem representativa da forma geométrica do sistema em estudo (não está em escala).



$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y, \quad (3.2)$$

onde

$$\Omega = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - 2\mu^*}{r_1} + \frac{\mu^*}{r_{21}} + \frac{\mu^*}{r_{22}}, \quad (3.3)$$

com

$$r_1 = [(x - x_1), y, 0]^T, \quad (3.4)$$

$$r_{21} = [(x - x_{21}), y, 0]^T, \quad (3.5)$$

$$r_{22} = [(x - x_{22}), y, 0]^T, \quad (3.6)$$

e ω_x e ω_y são as derivadas parciais de ω em relação a x e y , respectivamente.

3.4.2 Pontos de equilíbrio

As posições dos pontos de equilíbrio do PRSTC são obtidas fazendo o lado direito das Equações (3.1) e (3.2) para ser igual a zero, isto é, $\Omega_x = \Omega_y = 0$. Equações (3.7) e (3.8) mostram os detalhes.

$$x - \frac{(1 - 2\mu^*)(x - x_1)}{((x - x_1)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{\mu^*(x - x_{21})}{((x - x_{21})^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{\mu^*(x - x_{22})}{((x - x_{22})^2 + y^2)^{3/2}} = 0, \quad (3.7)$$

$$y - \frac{(1 - 2\mu^*)y}{((x - x_1)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{\mu^*y}{((x - x_{21})^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{\mu^*y}{((x - x_{22})^2 + y^2)^{3/2}} = 0, \quad (3.8)$$

Resolvendo este sistema de equações, é encontrar dois tipos de soluções, como mostrado a seguir.

1- Quando consideramos $y = 0$, Equação (3.8) é satisfeita e a Equação (3.7) torna-se uma Equação em x . As soluções desta Equação são chamadas soluções colineares (MOLTON, 1960; ZENG et al., 2016d);

2-Quando $y \neq 0$, existe um sistema de Equações em x e y . Essas soluções são conhecidas como soluções não-colineares (MOLTON, 1960; ZENG et al., 2016d).

3.4.3 Curvas de Velocidade Zero

A já conhecida *Integral de Jacobi* é dada por (SZEBEHELY, 1967):

$$v^2 = 2\Omega - C. \quad (3.9)$$

Podemos notar que esta Equação (3.9) é uma função que depende de Ω , que foi introduzida por *Jacobi*, e de uma constante de integração que foi chamada de C , que é uma integral das equações de movimento. C também é conhecida como *Constante de Jacobi* (DUTT; ANILKUMAR, 2014; REN; SHAN, 2014). Para simplificar a discussão, assume-se que o corpo com massa desprezível está se movendo no plano x - y . Então, a Equação (3.9) mostra que, para um dado valor de C , a velocidade é a função da posição do corpo no plano de movimento. A constante de integração C depende da posição inicial e da velocidade inicial da partícula (MCCUSKEY, 1963). Observe que a Equação (3.9) associa o quadrado da velocidade e as coordenadas do corpo com massa infinitesimal no sistema de coordenadas girante (MOLTON, 1960). Portanto,

quando a constante de integração C é determinada numericamente a partir das condições iniciais, a Equação (3.9) determina a velocidade do corpo com massa desprezível em todos os pontos do espaço. Inversamente, para uma determinada velocidade, a Equação (3.9) dá a forma geométrica dos lugares onde o corpo pode permanecer. Em particular, se a velocidade for ajustada igual a zero na Equação (3.9), uma região onde a velocidade da partícula é zero é encontrada (MOLTON, 1960). Em termos matemáticos, esta curva é definida por $2\Omega - C = 0$ (MCCUSKEY, 1963). Escrevendo esta condição em coordenadas cartesianas, é possível obter a Equação:

$$\frac{x^2 + y^2}{1} + \frac{2(1 - 2\mu^*)}{r_1} + \frac{2\mu^*}{r_{21}} + \frac{2\mu^*}{r_{22}} = C \quad (3.10)$$

3.4.4 Análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio

Para determinar a estabilidade linear dos pontos de equilíbrio (L_k , $k = 1, 2, 3, 4$ e 5), é necessário transferir a origem do sistema de coordenadas para a posição dos pontos de equilíbrio encontrados (x_0, y_0, θ) e então linearizar as equações de movimento em torno destes pontos, obtendo os resultados mostrados a seguir

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \Omega_{xx}(x_0, y_0)\xi + \Omega_{xy}(x_0, y_0)\eta, \quad (3.11)$$

$$\dot{\eta} + 2\dot{\xi} = \Omega_{xy}(x_0, y_0)\xi + \Omega_{yy}(x_0, y_0)\eta. \quad (3.12)$$

onde as derivadas parciais em (x_0, y_0) significam que o valor é calculado no ponto de equilíbrio que está sendo analisado. As derivadas parciais são mostradas nas Equações (3.13) à (3.15).

$$\begin{aligned} \Omega_{xx} = 1 + & \frac{3(1 - 2\mu^*)(x - x_1)^2}{((x - x_1)^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{1 - 2\mu^*}{((x - x_1)^2 + y^2)^{3/2}} \\ & + \frac{3\mu^*(x - x_{21})^2}{((x - x_{21})^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{\mu^*}{((x - x_{21})^2 + y^2)^{3/2}} \\ & + \frac{3\mu^*(x - x_{22})^2}{((x - x_{22})^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{\mu^*}{((x - x_{22})^2 + y^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{yy} = 1 + & \frac{3(1 - 2\mu^*)y^2}{((x - x_1)^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{1 - 2\mu^*}{((x - x_1)^2 + y^2)^{3/2}} \\ & + \frac{3\mu^*y^2}{((x - x_{21})^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{\mu^*}{((x - x_{21})^2 + y^2)^{3/2}} \\ & + \frac{3\mu^*y^2}{((x - x_{22})^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{\mu^*}{((x - x_{22})^2 + y^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\Omega_{xy} = \frac{3(1 - 2\mu^*)(x - x_1)^2 y}{((x - x_1)^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{3\mu^*(x - x_{21})^2 y}{((x - x_{21})^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{3\mu^*(x - x_{22}) y}{((x - x_{22})^2 + y^2)^{5/2}}. \quad (3.15)$$

Nessas Equações, ξ e η representam a posição da partícula em relação ao ponto de equilíbrio. As raízes características não-triviais da Equação 3.11 e 3.12 são obtidas agora. Para fazer isso, é necessário escrever:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - \Omega_{xx}(x_0, y_0) & -2\lambda - \Omega_{xy}(x_0, y_0) \\ 2\lambda - \Omega_{xy}(x_0, y_0) & \lambda^2 - \Omega_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.16)$$

A equação de quarta ordem em λ é dada por:

$$\lambda^4 + (4 - \Omega_{xx}^0 - \Omega_{yy}^0)\lambda^2 + \Omega_{xx}^0 \Omega_{yy}^0 - (\Omega_{xy}^0)^2 = 0, \quad (3.17)$$

onde Ω_{xx}^0 é a abreviatura de $\Omega_{xx}(x_0, y_0)$. A mesma notação é usada para as outras derivadas parciais.

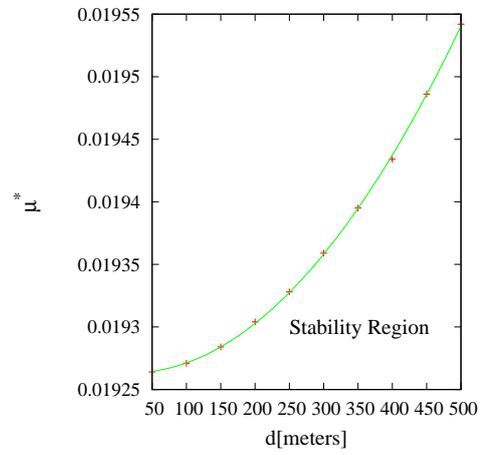
Um ponto de equilíbrio será linearmente estável se a Equação 3.17, avaliada no ponto de libração, tiver quatro raízes puramente imaginárias ou raízes complexas com partes reais negativas (KUMARI; KUSHVAH, 2014) e (ZENG et al., 2016c).

Para o PRSTC, percebemos que existe uma relação de condição de estabilidade para os pontos L_4 e L_5 e a dimensão do dipolo de massa rotativa. Se a dimensão do asteroide modelado como uma massa de dipolo em rotação é alterada, a condição de estabilidade mudará. Quando a dimensão d do asteroide aumenta, a razão de massa necessária para que o ponto L_4 e L_5 seja estável aumentará também, como mostrado na Figura 3.12. Construímos um gráfico mostrando μ^* versus d para encontrar, por meio de um ajuste de curva, uma função que relaciona analiticamente a razão de massa μ^* com d . A melhor expressão encontrada foi um polinômio de segunda ordem, dado por:

$$\mu^*(d) = 0,0192636 - 4,23 \times 10^{-8}d + 1,19 \times 10^{-9}d^2 \quad (3.18)$$

Um caso particular ocorre quando a distância d do dipolo de massa tende a zero, fazendo com que os dois corpos do dipolo se tornem um ponto de massa ou um corpo esférico, com razão de massa $2\mu^*$. A Equação (3.18), observa-se que o valor da razão de massa deve ser menor que 0,0385272, para que os pontos de equilíbrio L_4 e L_5 sejam estáveis. Este resultado está de acordo com a literatura, como mostrado por

Figura 3.12 - Valor da razão de massa μ^* versus d . A expressão matemática do ajuste da curva é dada por: $\mu^*(d) = 0,0192636 - 4.23 \times 10^{-8}d + 1,19 \times 10^{-9}d^2$ O RMS do resíduo é $1,54 \times 10^{-6}$.



(SZEBEHELY, 1967).

3.4.5 Resultados numéricos

Após as explicações feitas anteriormente, esta seção apresenta os resultados numéricos.

3.4.5.1 Localizações dos pontos de equilíbrio

Alguns testes numéricos serão feitos assumindo que $\mu^* = 0,005284$ e que o tamanho do asteroide considerado como um dipolo de massa rotativo é $d = 0,131440$ unidades canônicas. Esses valores são baseados no par de asteroides do sistema triplo, conhecido como 2001Sn₂₆₃. *Gamma*, um dos corpos deste sistema de asteroides, é um corpo alongado e tem movimento síncrono (PRADO, 2014; TRACY et al., 2015; MASAGO et al., 2016). É também assumido que a distância do asteroide mais massivo (M_1) ao centro de massa do asteroide alongado (M_2) é igual a 1, que é uma consequência da utilização de um sistema canônico de unidades. Depois de fazer essas considerações, as Equações (3.7) e (3.8) tornam-se Equações (3.19) e (3.20).

$$\begin{aligned} \Omega_x = x - & \frac{0.005284(-1.055152 + x)}{((-1.055152 + x)^2 + y^2)^{3/2}} \\ & - \frac{0.005284(-0.923711 + x)}{((-0.923711 + x)^2 + y^2)^{3/2}} \\ & - \frac{0.989432(0.010568 + x)}{((0.010568 + x)^2 + y^2)^{3/2}} = 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \Omega_y = y - & \frac{0.005284y}{(-1.055152 + x)^2 + y^2)^{3/2}} \\ & - \frac{0.005284y}{((-0.923711 + x)^2 + y^2)^{3/2}} \\ & - \frac{0.989432y}{((0.010568 + x)^2 + y^2)^{3/2}} = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Resolvendo numericamente as Equações (3.19) e (3.20), é possível encontrar cinco raízes reais. Três dessas raízes estão localizadas no eixo x , conhecidos como soluções colineares. As outras duas soluções estão no plano x - y , e são conhecidas como soluções não-colineares. As posições desses pontos são mostradas na Tabela 3.5. Para fins comparativos, a Tabela 3.5 também mostra os pontos de equilíbrio ao considerar os dois asteroides como massas pontuais. Observa-se uma modificação nas localiza-

ções dos pontos, em comparação com o sistema de massas pontuais. O ponto de equilíbrio L_1 é deslocado para a esquerda e ponto de equilíbrio L_2 é deslocado para a direita, para compensar os efeitos gravitacionais mais fortes provenientes do dipolo de massa. Esta razão física é melhor explicada a seguir.

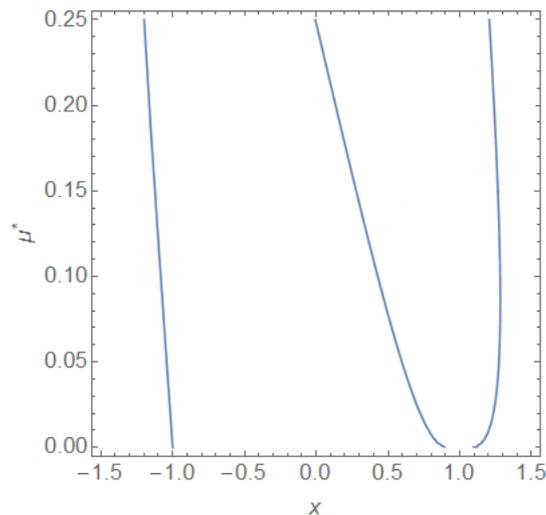
Tabela 3.5 - Posição dos pontos de equilíbrio para o sistema estudado e também para o sistema considerando os corpos primários como pontos de massa.

	Posições dos pontos de equilíbrio do sistema estudado (<i>Alpha - Gamma</i>)		Posições dos pontos de equilíbrio considerando os corpos como ponto de massa	
	x_0	y_0	x_0	y_0
L_1	0.821830	0	0.845006	0
L_2	1.172874	0	1.149257	0
L_3	-1.004406	0	-1.004403	0
L_4	0.491087	0.865094	0.489432	0.866025
L_5	0.491087	-0.865094	0.489432	-0.866025

A Figura 3.13 mostra as coordenadas x dos pontos L_1 , L_2 e L_3 (pontos de equilíbrio colineares) para valores diferentes de μ^* . Esta Figura dá uma visão mais geral dos sistemas, como uma função do parâmetro de massa. Observe que os pontos de equilíbrio L_1 e L_2 são mais afetados, porque eles estão mais próximos do asteroide alongado, portanto sofrendo um maior efeitos da variação do parâmetro de massa. Os pontos de equilíbrio são lugares onde a resultante das forças que atuam nesse ponto é zero. Há três forças atuando no sistema: i) a força gravitacional de M_1 , que é diretamente proporcional à massa do corpo e proporcional ao inverso do quadrado da distância entre o ponto de equilíbrio e M_1 ; ii) a força gravitacional de M_2 , que é diretamente proporcional à massa do corpo e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre o ponto de equilíbrio e M_2 ; e, por fim, iii) a força centrífuga, que é diretamente proporcional à distância entre o ponto de equilíbrio e o centro de massa do sistema. Assim, ao aumentar a massa do menor asteroide do par, o ponto de equilíbrio se afasta desse corpo, a fim de reduzir a magnitude da força de gravidade proveniente de M_2 , para compensar seu aumento de massa. No caso o ponto de equilíbrio L_1 é movido para a esquerda, para a direção do centro de massa do sistema, com isso, a força de gravidade devido a M_2 e a força centrífuga diminuem. Essas são as forças que apontam na direção positiva do eixo x . Por outro lado, a força de gravidade devida a M_1 , que é a força que aponta para a direção negativa do eixo x , aumenta e um novo equilíbrio é atingido, compensando o aumento do

parâmetro de massa. No caso do ponto de equilíbrio L_2 , que se move para a direita, vai para a direção oposta ao centro de massa do sistema, logo a força de gravidade devido a M_2 diminui. Esta é a força que aponta na direção negativa do eixo x . A força de gravidade devida a M_1 também diminui, que é outra força que aponta para a direção negativa do eixo x . A força centrífuga aumenta, que é a força que aponta na direção positiva do eixo x . Conseqüentemente, um novo equilíbrio é alcançado. No caso de L_3 , o ponto de equilíbrio se move para a esquerda, a direção oposta ao centro de massa do sistema. As forças de gravidade devidas a M_1 e M_2 que apontam para a direita, no eixo x , diminuem. Por outro lado, a força centrífuga, que aponta para a direção negativa do eixo x , aumenta. Sendo assim, um novo equilíbrio é alcançado. Esta interpretação física explica o comportamento das curvas mostradas na Figura 3.13, bem como os dados mostrados na Tabela 3.5.

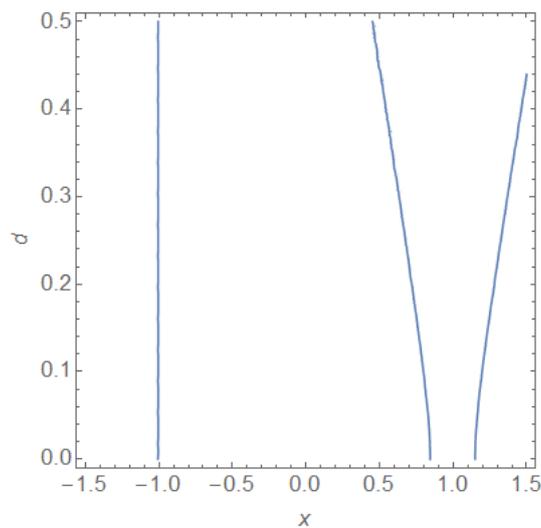
Figura 3.13 - Coordenadas x dos pontos lagrangeanos L_1 , L_2 e L_3 para valores diferentes de μ^* .



A Figura 3.14 mostra as coordenadas x dos pontos de equilíbrio L_1 , L_2 e L_3 para valores diferentes de d , onde d é a distância entre o corpo de massa m_{21} e o corpo de massa m_{22} (o comprimento do asteroide menor). Lembre-se, mais uma vez, que d é dado em unidades canônicas. Observe que os efeitos estão concentrados em L_1 e L_2 , já que L_3 está longe do asteroide de forma irregular, portanto não tem muita dependência da forma do corpo. A interpretação física segue as mesmas linhas das explicações feitas para a Figura 3.12. Aumentar o parâmetro d faz com que o corpo M_2 seja mais alongado. Embora a massa seja a mesma, a nova distribuição de um corpo alongado aumenta a força de gravidade de M_2 , atuando ao longo do

eixo do alongamento, quando comparado a um corpo esférico. A razão é que a força de gravidade depende da distância entre cada elemento de massa do corpo e o ponto de equilíbrio. Portanto, uma distribuição alongada da massa torna o elemento de massa média do corpo M_2 mais próxima do ponto de equilíbrio. Ele age como o aumento da massa de M_2 , então o comportamento da Figura 3.14 é o mesmo da Figura 3.13. É claro que as magnitudes dos desvios são menores, porque mudar a distribuição de massa tem um impacto menor na magnitude do campo gravitacional, quando comparado a um aumento real na massa do asteroide. Os pontos não colineares sofrem pequenos efeitos do alongamento do segundo corpo, de modo que os resultados relacionados com estes pontos não são mostrados aqui em detalhes. Estes pontos L_4 e L_5 estão longe do corpo alongado, logo a distribuição de massa do corpo alongado não afeta muito as posições desses pontos. Esse fato é visível na Tabela 3.5.

Figura 3.14 - Coordenadas x dos pontos lagrangeanos L_1 , L_2 e L_3 para valores diferentes de d .

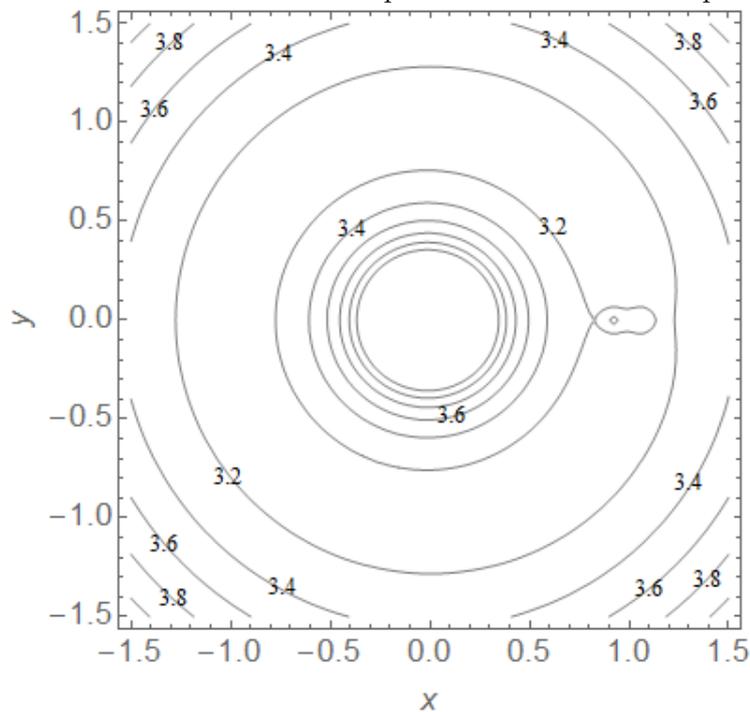


3.4.6 Curvas de Velocidade Zero

Agora, algumas *Curvas de Velocidade Zero (CVZ)*, para o PRSTC como exemplo, e, para diferentes valores da *constante de Jacobi*, são mostradas nas Figuras seguintes. Na Figura 3.15 nota-se que o *CVZ* associado à energia $C_1 = 3.201734$ toca em um ponto, chamado L_1 (primeiro ponto de contato) (SZEBEHELY, 1967). Este é o valor de C que possibilita uma transferência, em movimento natural, entre M_1 e M_2 (MCCUSKEY, 1963; DUTT; ANILKUMAR, 2014). A Figura 3.16 faz uma aproximação

visual do dipolo de massa, para uma melhor visualização do CVZ próximo ao corpo alongado. É importante notar que o corpo com massa desprezível que sai de M_1 , por exemplo, chega ao ponto L_1 com velocidade igual a zero. Portanto, para atravessar a barreira para alcançar a região perto do dipolo de massa (M_2), ele precisa de um pouco mais de energia (SZEBEHELY, 1967). O terceiro corpo ($P(x, y, z)$), vindo de M_1 com energia C_1 , por exemplo, pode apenas atingir a região M_2 passando por L_1 (REN; SHAN, 2014). A Figura 3.15 mostra que a transferência entre o infinito e a região próxima de $M_1 - M_2$ permanece proibida, mas uma transferência de M_1 para M_2 já é possível.

Figura 3.15 - *Curvas de velocidade zero*. O primeiro contato ocorre quando $C = 3.202$.



Os valores de C_i ($i = 1,2,3,4,5$) para as posições $[x_0, y_0]$ dos pontos de equilíbrio são dados na Tabela 3.6. Para fins comparativos, a Tabela 3.6 também mostra os valores para os pontos de equilíbrio quando consideramos os asteroides como massas pontuais. Observe que as diferenças estão concentradas nos valores de C_1 e C_2 , porque pertencem aos pontos que estão mais próximos do dipolo de massa. As explicações físicas são as mesmas já feitas para as localizações dos pontos de equilíbrio.

Figura 3.16 - Ampliação da Figura 3.15, mostrando a região em torno do dipolo de massa em rotação.

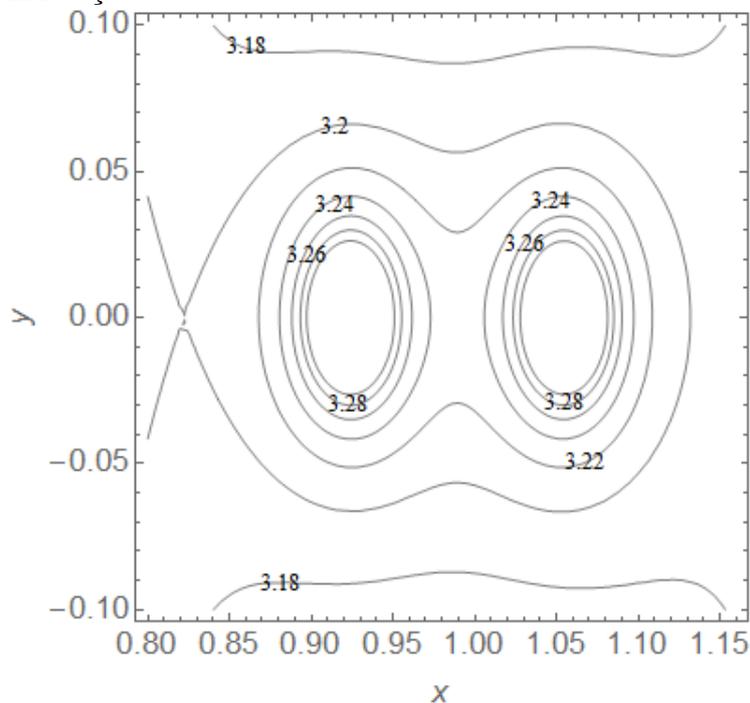
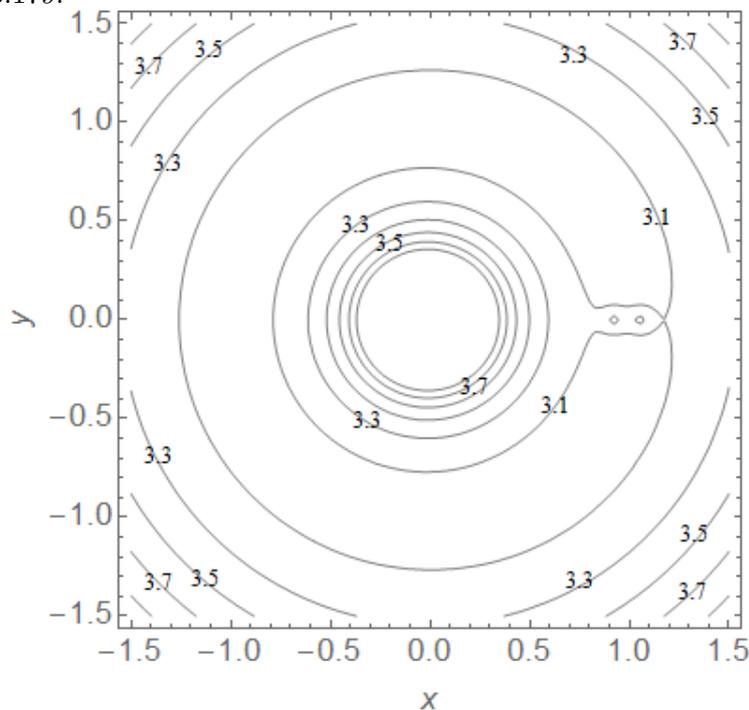


Tabela 3.6 - Os valores de C_i ($i = 1,2,3,4,5$) para as posições $[x_0, y_0]$ dos pontos de equilíbrio do sistema estudado e também quando consideramos os corpos primários como pontos de massa.

	Constante de <i>Jacobi</i> nos pontos de equilíbrio	Constante de <i>Jacobi</i> nos pontos de equilíbrio considerando pontos de massa
C_1	3.201734	3.173291
C_2	3.179947	3.159213
C_3	3.011010	3.010565
C_4	2.989531	2.989543
C_5	2.989531	2.989543

Reduzindo o valor de C , as curvas internas crescem e as externas diminuem (SZEBEHELY, 1967; DUTT; SHARMA, 2011). Quando o valor de C atinge C_2 , ocorre o segundo ponto de contato entre os ovais. Este ponto de contato é chamado L_2 , como mostrado na Figura 3.17 ($C_2 = 3.179947$) (SZEBEHELY, 1967; DUTT; SHARMA, 2011). A partir deste valor de C , existe uma comunicação entre a proximidade do sistema $M_1 - M_2$ e o infinito, a partir do lado do dipolo de massa em rotação. A Figura 3.18, da mesma forma feita para Figuras 3.15 e 3.16, traz a aproximação visual perto do dipolo, baseado na Figura 3.17.

Figura 3.17 - *Curvas de velocidade zero*. O segundo ponto de contato ocorre quando $C = 3.179$.



Também é possível reduzir ainda mais o valor de C , como mostrado na Figura 3.19. A região proibida diminui e a região de comunicação entre $M_1 - M_2$ com o infinito aumenta. Considerando o valor $C = C_3$, existe uma ligação entre o infinito e a região próxima de M_1 (à esquerda). Este ponto de conexão é chamado L_3 , e é o terceiro ponto de contato entre as ovais (SZEBEHELY, 1967). Assim como é feito com as Figuras 3.16 e 3.18, a Figura 3.20 mostra a aproximação perto do dipolo, com base na Figura 3.19.

Reduzindo um pouco mais o valor de C para $C_4 = C_5$, a região proibida diminui

Figura 3.18 - Ampliação da Figura 3.17, mostrando a região ao redor do dipolo de massa em rotação.

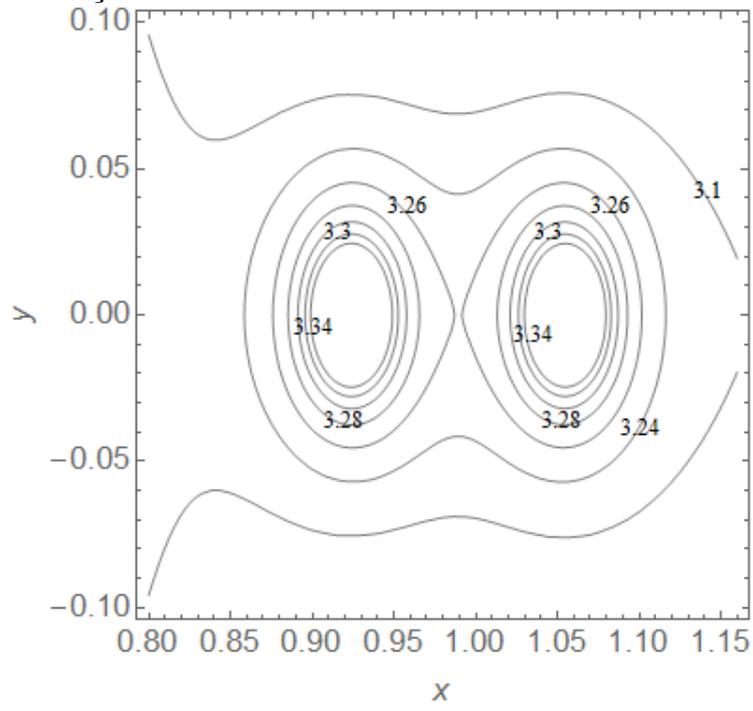


Figura 3.19 - *Curvas de velocidade zero*. O terceiro ponto de contato ocorre quando $C = 3,010$.

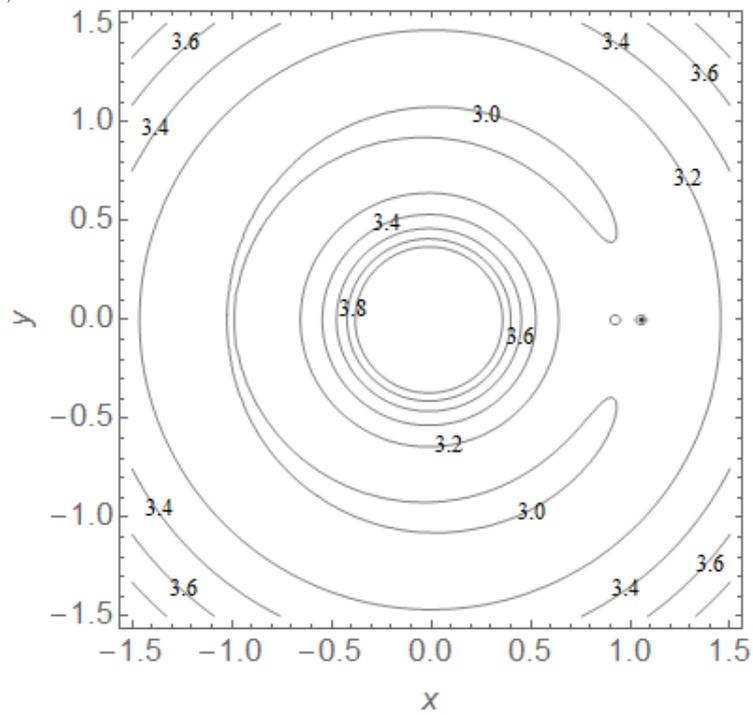
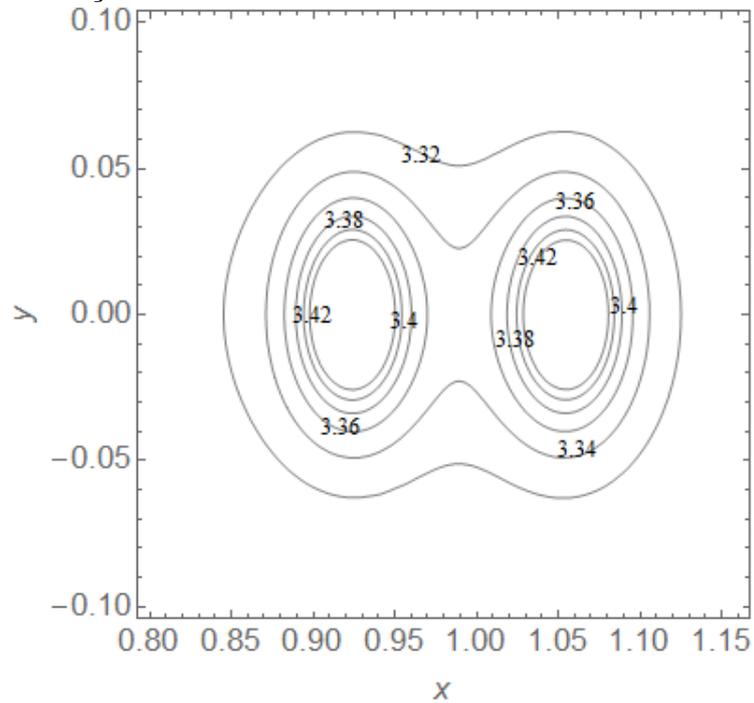


Figura 3.20 - Ampliação da Figura 3.19, mostrando a região em torno do dipolo de massa em rotação.



ainda mais. Neste momento, apenas o ambiente dos pontos L_4 e L_5 permanecem como regiões proibidas, como mostrado na Figura 3.21. Finalmente, a Figura 3.22 segue os mesmos parâmetros das Figuras 3.16, 3.18 e 3.20, mostrando a curva de CVZ perto do dipolo.

As regiões onde o movimento é possível tornam-se bastante grandes. Assumindo essas condições, a partícula pode se mover por todo o plano, exceto nas regiões próximas de L_4 e L_5 . Esta análise é um dos resultados mais importantes do problema restrito circular de três corpos (SZEBEHELY, 1967).

Figura 3.21 - *Curvas de velocidade zero*. O quarto e o quinto pontos de contato ocorrem quando $C = 2.989$.

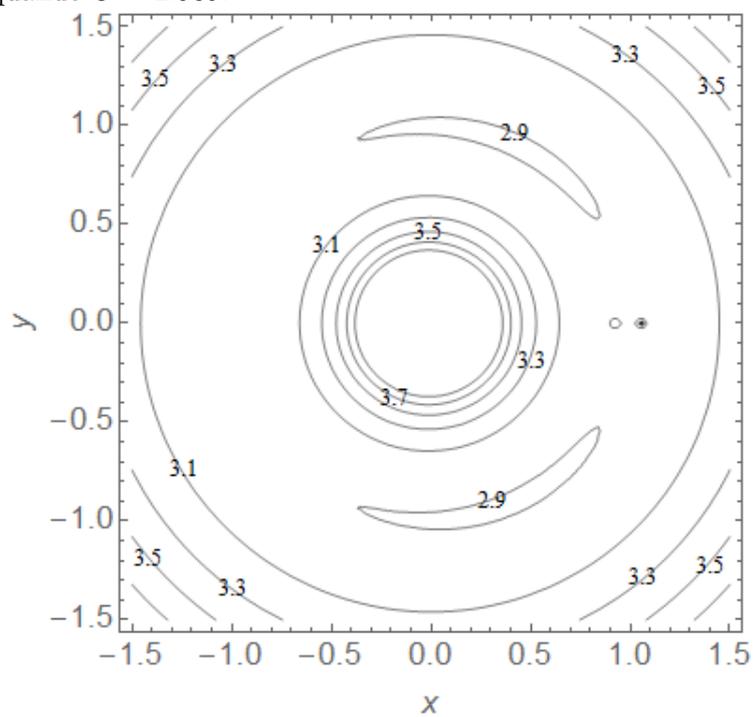
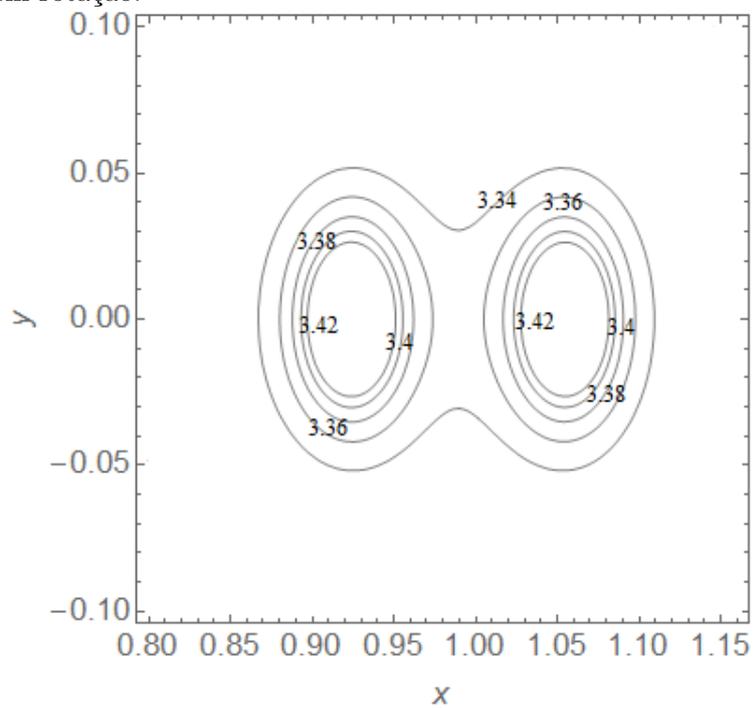


Figura 3.22 - Ampliação da Figura 3.21, mostrando a região em torno do dipolo de massa em rotação.



3.4.7 Evolução dos valores de C para as constantes de Jacobi

As Figuras 3.23 - 3.26 mostram como as constantes de *Jacobi* C_1 , C_2 , C_3 e C_{4-5} , onde C_{4-5} é uma forma abreviada para C_4 e C_5 , uma vez que têm os mesmos valores, variam em função da razão de massa μ^* . A partir das Figuras 3.23 - 3.26, onde agora se conhece os valores numéricos de C_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), encontrou-se, utilizando um ajuste de curva, uma função polinomial relacionando a *constante de Jacobi* com os pontos de equilíbrio utilizando a razão de massa (μ^*) do PRSTC (ajuste de curva verde). Estes ajustes geram um tipo de equações empíricas com as simulações numéricas que substituem experiências. Esses números também mostram esta relação quando consideramos o PRPCTC, para fins comparativos (ajuste de curva roxa). No PRSTC, as Equações encontradas para representar C_1 e C_3 foram polinômios de quarta e segunda ordem, respectivamente, dados pelas Equações 3.21 e 3.22.

As Figuras 3.23 e 3.24 mostram essas curvas para $C_1(\mu^*)$ e $C_3(\mu^*)$, respectivamente, para o PRSTC e quando nós consideramos o PRCTC. Lembre-se que $\mu^* = \frac{\mu}{2}$.

$$C_1(\mu^*) = 3.17076 + 14.0785\mu^* - 110.225(\mu^*)^2 + 447,321(\mu^*)^3 - 707.855(\mu^*)^4, \quad (3.21)$$

$$C_3(\mu^*) = 3.00195 + 2.13346\mu^* - 1.1387(\mu^*)^2. \quad (3.22)$$

Nas Figuras 3.23 e 3.24, nota-se um aumento no valor das funções $C_1(\mu^*)$ e $C_3(\mu^*)$ quando μ^* aumenta. Também percebe-se que o efeito do alongamento do corpo é muito maior para C_1 , porque L_1 está mais próximo do corpo alongado.

Figura 3.23 - Valores da constante de Jacobi (C_1) nos pontos de equilíbrio versus μ^* .
 A expressão matemática do ajuste da curva, para o PRSTC, é dada por:
 $C_1(\mu^*) = 3.17076 + 14.0785\mu^* - 110.225(\mu^*)^2 + 447.321(\mu^*)^3 - 707.855(\mu^*)^4$.
 O RMS do resíduo vale 0,013487.

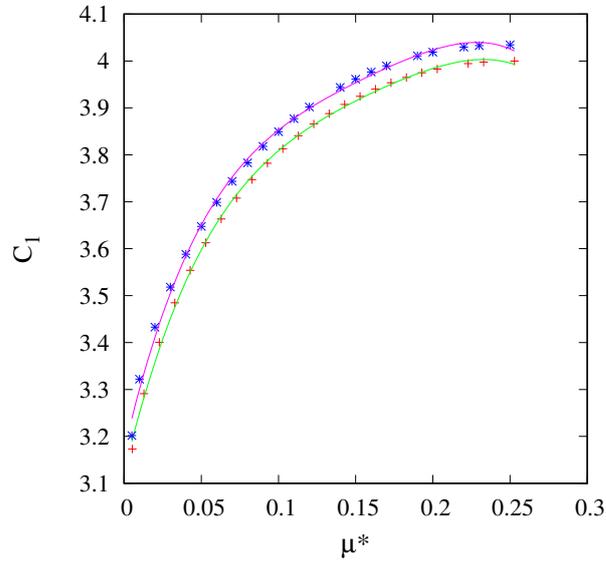
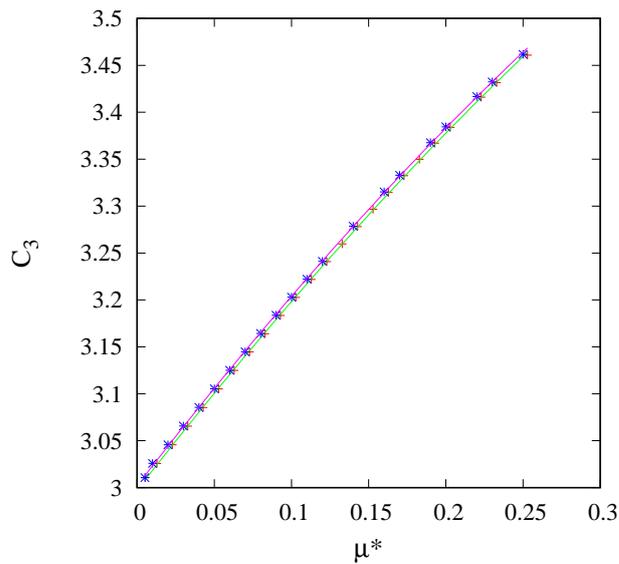


Figura 3.24 - Valores da constante de Jacobi (C_3) nos pontos de equilíbrio versus μ^* .
 A expressão matemática do ajuste da curva, para o PRSTC, é dada por:
 $C_3(\mu^*) = 3.00195 + 2.13346\mu^* - 1.1387(\mu^*)^2$. O RMS do resíduo vale 0,00132344.



A Figura 3.25 mostra a curva de ajuste para o PRSTC (ajuste de curva verde), e para o PRCTC (ajuste de curva roxa) para C_2 . O ajuste da função para $C_2(\mu^*)$, para o PRSTC, é dado por um polinômio de sexta ordem:

$$\begin{aligned} C_2(\mu^*) = & 3.11758 + 16.8451\mu^* - 303.73(\mu^*)^2 \\ & + 3172.56(\mu^*)^3 - 18555(\mu^*)^4 + 55120.4(\mu^*)^5 \\ & - 64721.5(\mu^*)^6. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Na função para $C_2(\mu^*)$, percebe-se que a função aumenta inicialmente com a razão de massa, e então, depois diminui, como mostra a figura 3.25. Esse comportamento gera um ponto máximo para $C_2(\mu^*)$, que acontece em $C_2 = 3.57923987$, para uma razão de massa de $\mu^* = 0.128555902$. Um ajuste de curva também foi feito para C_{4-5} , onde um polinômio de segunda ordem foi encontrado como a melhor solução:

$$C_{4-5}(\mu^*) = 2.99943 + 1.99985\mu^* - 3.99953(\mu^*)^2. \quad (3.24)$$

A *constante de Jacobi* C_{4-5} diminui com a razão de massa μ^* , como mostrado na Figura 3.26. O ajuste da curva verde aplica-se ao sistema estudado neste artigo e o ajuste de curva roxo é válido quando os primários são consideradas como massas pontuais. É claro que os efeitos do alongamento do corpo alongado têm efeitos pequenos, uma vez que os pontos não colineares não estão tão próximos do corpo alongado.

Figura 3.25 - Valores da *constante de Jacobi* (C_2) nos pontos de equilíbrio versus μ^* . A expressão matemática do ajuste da curva, para o PRSTC, é dada por: $C_2(\mu^*) = 3.11758 + 16.8451\mu^* - 303.73(\mu^*)^2 + 3172.56(\mu^*)^3 - 18555(\mu^*)^4 + 55120.4(\mu^*)^5 - 64721.5(\mu^*)^6$. O RMS do resíduo vale 0,0070268.

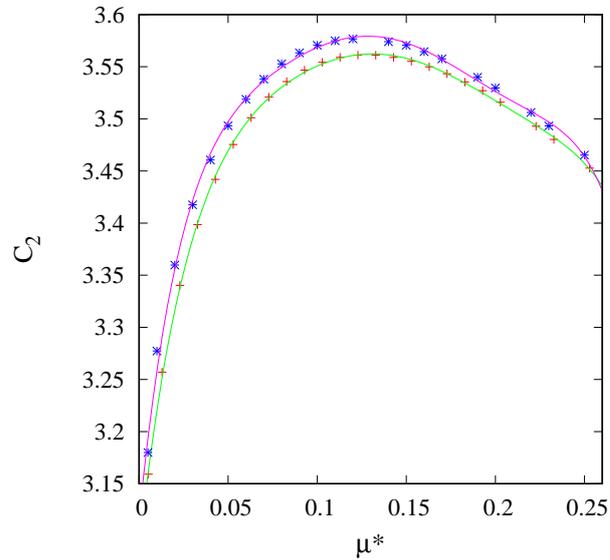
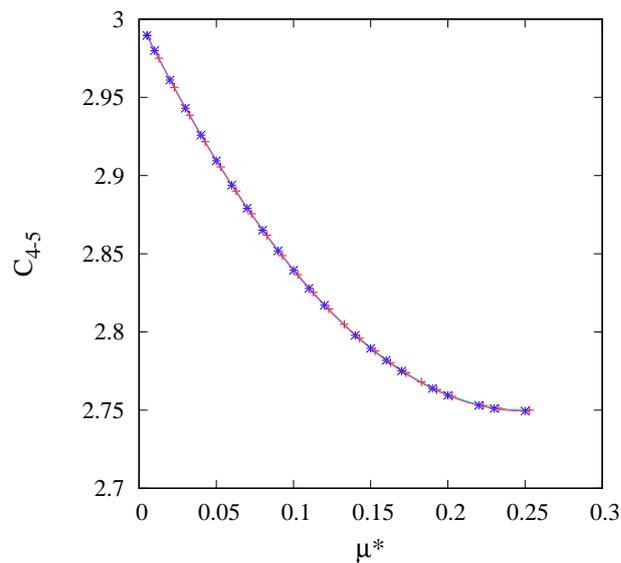


Figura 3.26 - Valores da *constante de Jacobi* (C_{4-5}) nos pontos de equilíbrio versus μ^* . A expressão matemática do ajuste da curva, para o PRSTC, é dada por: $C_{4-5}(\mu^*) = 2.99943 + 1.99985\mu^* - 3.99953(\mu^*)^2$. O RMS do resíduo vale 2.1927×10^{-6} .



3.4.8 Estabilidade dos pontos de equilíbrio

Através de simulações numéricas, as raízes da Equação (3.17) foram calculadas para uma ampla gama de valores de μ^* , considerando um tamanho fixo para o asteroide que foi modelado como um dipolo de massa em rotação ($d = 0,0657203$). Verificou-se que os pontos colineares (L_1, L_2 e L_3) são sempre instáveis. Já os pontos L_4 e L_5 são pontos de equilíbrio linearmente estáveis, quando a razão de massa μ^* não exceder o valor de 0,019328969, ou seja, L_4 e L_5 são pontos de equilíbrio linearmente estáveis para 0,019328969 no PRSTC. Agora, usando o determinante da equação característica 3.16, é possível obter os autovalores do sistema, que são mostrados na Tabela 3.7.

Tabela 3.7 - Autos Valores da equação característica para o PRSTC usando um modelo de dipolo de massa.

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
L_1	-3.545105	3.545105	-2.72753i	2.727536i
L_2	-2.578471	2.578471	-2.11447i	2.114476i
L_3	-0.165979	0.165979	-1.00908i	1.009086i
L_4	0.275949i	0.275949i	-0.96117i	0.961172i
L_5	-0.27594i	0.275949i	-0.96117i	0.961172i

Verificou-se que a matriz do sistema linear (o lado direito da equação 3.11 e 3.12) é diagonalizável. Isso significa que pode-se dizer que os pontos L_4 e L_5 são linearmente estáveis. A Tabela 3.8 mostra os autovalores quando consideramos o sistema como sendo massas pontuais, para uma comparação.

Tabela 3.8 - Autos valores da equação característica para o Problema Restrito de Três Corpos.

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
L_1	-2.911575	2.911575	-2.32149i	2.321489i
L_2	-2.173762	2.173762	-1.87148i	1.871484i
L_3	-0.165972	0.165972	-1.00908i	1.009086i
L_4	-0.27644i	0.275949i	-0.96103i	0.96103i
L_5	-0.27644i	0.276446i	-0.96103i	0.96103i

A partir da Tabela 3.7, é visível que os pontos de liberações colineares (L_1, L_2 e L_3) são pontos de equilíbrio instáveis para o sistema considerado no presente trabalho e que os pontos não-colineares (L_4 e L_5) são estáveis quando se considera uma

aproximação linear.

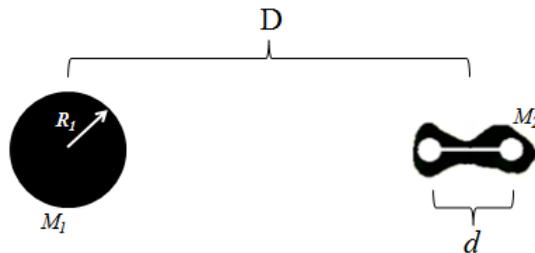
4 REGIÃO DE ESTABILIDADE EM TORNO DE UM SISTEMA SÍNCRONO DE ASTEROIDES UTILIZANDO UM MODELO DE DIPOLO DE MASSA EM ROTAÇÃO

O desenvolvimento de missões dirigidas a asteroides e cometas permitiu o surgimento de uma nova área de pesquisa em astrodinâmica: o estudo e quantificação da estabilidade e navegabilidade de órbitas de espaçonaves próximas de corpos irregulares girantes (SCHEERES et al., 2000). A primeira fase de estudo da dinâmica orbital dos corpos irregulares estudados é criar um modelo matemático representativo do campo gravitacional do asteroide ou cometa estudado. Por terem formas não esféricas e rotações peculiares, as órbitas dos satélites a serem enviados ao redor desses corpos não se assemelham em nada com a órbita tradicional Kepleriana. A pesquisa desenvolvida no presente estudo utiliza o modelo do dipolo de massa em rotação para representar um sistema síncrono de asteroides. Assim, compreender o comportamento da dinâmica orbital de uma espaçonave nas proximidades de um sistema binário de asteroides é fundamental para a execução de uma missão espacial, o que tem motivado o presente trabalho, cujo objetivo é caracterizar as regiões de estabilidade e instabilidade de um sistema duplo de asteroide, levando em consideração o movimento rotacional do corpo alongado.

4.1 Metodologia

Para este estudo, os testes numéricos foram realizados supondo que o tamanho do asteroide, considerado um dipolo de massa rotativo (M_2), é $d = 0.131440$ unidades canônicas (500 metros) e a distância entre o asteroide primário mais massivo (formato esférico) e o centro de massa do dipolo é $D = 1$ unidade canônica (que é igual a 3804 metros). Também assumimos que o corpo primário mais massivo (M_1) é uma esfera de raio $R_1 = 0.354889$ unidades canônicas, equivalente a 1350 metros, como mostrado na Figura 4.1.

Figura 4.1 - Imagem representativa do sistema estudado.



A massa total do sistema ($m_1 + m_2$) é constante e vale $9.273 * 10^{12}$. Estes valores têm como referência o par de asteroides *Alpha – Gamma* do sistema triplo 2001SN₂₆₃. *Gamma* tem a forma de um corpo alongado e tem movimento síncrono. A escolha deste par de asteroides, como já mencionado no decorrer da dissertação, se justifica devido à missão brasileira ASTER, que tem como objetivo enviar uma espaçonave ao sistema de asteroides (PRADO, 2014; TRACY et al., 2015; MASAGO et al., 2016). Embora os detalhes deste modelo de sistema de asteroides não sejam objeto de estudo do presente trabalho, tomamos este sistema como base para desenvolver um estudo geral do problema. O presente estudo é realizado variando os valores de cada uma das massas dos corpos do sistema duplo (M_1 e M_2), sem alterar a massa total do sistema ($M_1 + M_2$). No primeiro caso, a massa de M_1 é 99% da massa total do sistema ($M_1 + M_2$) e, conseqüentemente, M_2 tem massa de 1% da massa total do sistema. No segundo caso M_1 tem 95% da massa total do sistema e M_2 5% da massa total do sistema. Para os próximos casos é feita uma variação de massa de 5 em 5 por cento, na qual diminuímos a massa de M_1 e aumentamos a massa de M_2 , até que, para o último caso estudado, M_1 e M_2 tenham massas iguais, isto é, estando cada corpo com 50% da massa total do sistema. O estudo foi analisado considerando o satélite orbitando o centro de massa do corpo alongado (modelado como um dipolo de massa em rotação). As condições de colisão foram consideradas como sendo: se a posição do satélite for menor ou igual ao raio do corpo mais massivo, ou a dimensão do corpo menos massivo, temos uma colisão. Consideramos uma órbita de descarte (ejeção) quando a posição do satélite vai além de 30 unidades canônicas de distância em relação ao centro de massa do sistema dos corpos estudados.

4.2 Equação do movimento

Neste problema, assumiu-se que o movimento do corpo de massa desprezível $P(x, y, z)$ é governado pela força gravitacional dos corpos primários M_1 e M_2 . O corpo de massa infinitesimal não afeta a dinâmica dos primários. Também foi le-

vada em consideração a pressão da radiação solar. A unidade de distância é normalizada como sendo a distância do corpo M_1 ao centro de massa do corpo M_2 , que foi modelado como um dipolo de massa em rotação, que é formado por dois corpos hipotéticos com massa m_{21} e m_{22} . O corpo mais massivo do sistema é adotado como uma esfera de massa m_1 . Um esquema para esta descrição já foi mostrado na Figura 3.11. A unidade de tempo é definida como o período de rotação do dipolo de massa, que é também o seu período de translação em torno do centro de massa do sistema. Os valores são os mesmos, uma vez que estamos analisando um sistema síncrono, que tem um valor periódico de 2π . Desta forma, temos que $G(m_1 + m_{21} + m_{22}) = 1$, onde G é a constante da gravidade universal. A posição espacial do corpo de massa infinitesimal no plano é $P(x, y, 0)$ e as coordenadas dos corpos com massa m_1 , m_{21} e m_{22} , em relação ao centro de massa do sistema, $(x_1, y_1, 0)$, $(x_{21}, y_{21}, 0)$ e $(x_{22}, y_{22}, 0)$, respectivamente, no referencial fixo. Aqui, d é a distância entre o ponto de massa M_{21} e o ponto de massa M_{22} . Lembrando que d é dado em unidades canônicas. É também assumido que $m_1 > m_{21} = m_{22}$ e que a razão de massa é dada por $\mu^* = m_{21}/(m_1 + m_{21} + m_{22})$, onde $\mu^* = \mu/2$, com μ sendo a razão de massa usual usada no problema restrito de três corpos. Assim, temos que a Equação de movimento de um corpo de massa infinitesimal no plano $x - y$, quando visto a partir de um referencial fixo, é dada por:

$$\ddot{x} = -\frac{(1 - 2\mu^*)(x - x_1)}{r_1^3} - \frac{\mu^*(x - x_{21})}{r_{21}^3} - \frac{\mu^*(x - x_{22})}{r_{22}^3} - P_{radx} = 0, \quad (4.1)$$

$$\ddot{y} = -\frac{(1 - 2\mu^*)(y - y_1)}{r_1^3} - \frac{\mu^*(y - y_{21})}{r_{21}^3} - \frac{\mu^*(y - y_{22})}{r_{22}^3} - P_{rad y} = 0, \quad (4.2)$$

$$\ddot{z} = -\frac{(1 - 2\mu^*)(z - z_1)}{r_1^3} - \frac{\mu^*(z - z_{21})}{r_{21}^3} - \frac{\mu^*(z - z_{22})}{r_{22}^3} - P_{radz} = 0, \quad (4.3)$$

onde

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}, \quad (4.4)$$

$$r_{21} = \sqrt{(x - x_{21})^2 + (y - y_{21})^2 + (z - z_{21})^2}, \quad (4.5)$$

$$r_{22} = \sqrt{(x - x_{22})^2 + (y - y_{22})^2 + (z - z_{22})^2}, \quad (4.6)$$

e P_{radx} , $P_{rad y}$ e P_{radz} representam as componentes x , y e z da aceleração devido à pressão da radiação solar. A magnitude da aceleração devido à pressão da radiação solar é dada pela Equação (4.7) (MASAGO et al., 2016; MONTENBRUCK; GILL, 2000; BEUTLER, 2005).

$$P_{rad} = -C_r \frac{A}{m} P_S \frac{r_0^2}{R^2} \hat{r}, \quad (4.7)$$

em que C_r é um fator que depende da refletividade do satélite, chamado de *coeficiente de pressão de radiação*, Foi usado para a simulação o valor de $C_R = 1.5$. P_S é a pressão de radiação na órbita da Terra e vale aproximadamente $4,55 \cdot 10^{-6} N/m^2$, r_0 é a distância Sol-Terra, R é a distância Sol-Satélite, \hat{r} é a direção radial do Sol relativo ao satélite, A é a área do veículo espacial iluminada pelo sol e m é a massa do satélite (MASAGO et al., 2016; BEUTLER, 2005; MONTENBRUCK; GILL, 2000). O valor utilizado para A , nas simulações em que é levada em consideração a pressão de radiação solar, foi de $1m^2$ e a massa de $100kg$, por isso foi utilizado nas simulações o valor da razão $A/m = 0,01m^2/kg$ nos resultados que levam em consideração a pressão da radiação solar.

4.3 Região de estabilidade

Um sistema binário de asteroides é bastante interessante, uma vez que são sistemas compostos de corpos que têm massa e raio semelhantes, e geralmente estão próximos uns dos outros. Uma partícula colocada na vizinhança de um sistema binário, por exemplo, sofre perturbações complexas, e a compreensão desta perturbação é fundamental para determinar as regiões de estabilidade e instabilidade em torno do sistema. A determinação de uma região de estabilidade pode indicar a localização de possíveis detritos do sistema, ainda não observados. Em contraste, uma região instável estará vazia, sem a presença de qualquer corpo ou detritos. Essas informações são importantes na hora de planejar uma missão para um sistema de asteroides, porque as características do sistema influenciam nas posições nas quais a veículo espacial será colocada, tais como regiões onde a sonda será mais protegida ou vulnerável, entre outras (ARAUJO et al., 2012). Um estudo foi desenvolvido para determinar a região de estabilidade na vizinhança de um sistema binário de asteroides, em termos dos elementos keplerianos dentro de um dado período de tempo, e levando em consideração os distúrbios gravitacionais e a pressão de radiação solar presentes no sistema. Regiões de estabilidade são definidas como regiões onde as órbitas sobrevivem durante todo o tempo de integração. As condições iniciais adotadas e os resultados são descritos na seguinte subseção:

4.3.1 Resultados numéricos

Neste tópico analisaremos as condições iniciais em relação ao centro de massa do dipolo de massa rotativa. Levamos em consideração a força gravitacional dos dois corpos primários e a pressão da radiação solar. As posições iniciais do satélite começam com uma órbita circular ($e = 0,0$) até a excentricidade $e = 0.9$. O semi-eixo maior do satélite em relação ao centro de massa varia de 250 metros de altura (em

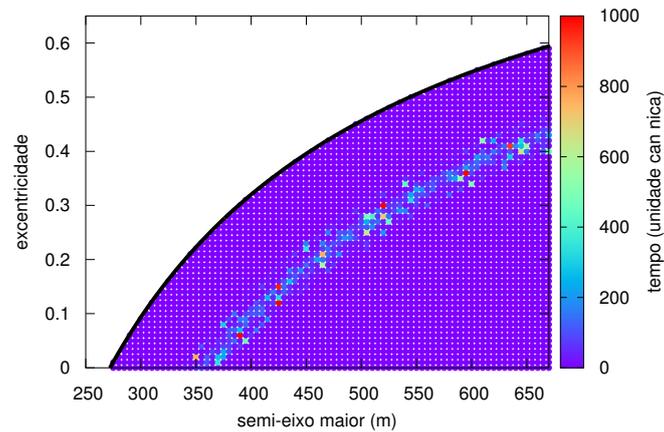
relação ao centro de massa do corpo alongado) até o final da região de *Hill* do dipolo de massa em rotação (que dependerá de sua massa), além de uma margem extra de 100 metros além da esfera de influência. Então, para cada condição inicial com massa diferente do dipolo, a esfera de influência também será diferente e a variação da condição inicial do semi-eixo maior mudará. Neste estudo, apenas o caso no plano é analisado, ou seja, a inclinação igual a zero.

O método adotado envolve a integração numérica das Equações de movimento no sistema composto por dois corpos, um sendo um corpo esférico e o outro modelado como um dipolo de massa em rotação. O tempo total de integração é dado até um período de dois anos terrestres, que equivale a aproximadamente 1000 períodos orbitais do sistema analisado. Para realizar a integração numérica, utilizou-se o método de Runge-Kutta 8 e o passo de tempo de integração foi de 0,01 período orbital. Durante a integração, monitoramos partículas que colidiram com qualquer um dos corpos, as partículas que foram ejetadas do sistema e as partículas que sobreviveram durante a integração. As colisões dependem dos raios dos corpos (como já mencionado), e as ejeções foram definidas como sendo maiores que 30 unidades canônicas.

A Figura 4.2 apresenta uma grade de condições iniciais (semi-eixo maior e excentricidade) que mostra o tempo de sobrevivência da partícula no sistema. O codificado de cor indica o tempo que a partícula sobrevive para cada condição inicial. A cor vermelha indica a condição inicial na qual o veículo espacial sobreviveu por dois anos (1000 períodos orbitais do sistema estudado). Entretanto, as regiões de cor azul escura são regiões onde o veículo espacial sobreviveu por um breve período de tempo. Se a posição da espaçonave em qualquer instante de tempo for menor que o tamanho do corpo M_2 , teremos uma colisão. Podemos, portanto, definir o limite da região, como representado na Figura 4.2 pela linha preta. As regiões à esquerda e acima da curva preta são as condições iniciais, onde o satélite começa dentro do corpo M_2 e, portanto, não tem sentido físico. A Figura 4.2 é uma simulação feita sem o uso da pressão da radiação solar. Podemos ver na Figura 4.2 que existem regiões estáveis próximas ao corpo M_2 , há cerca de 150 metros de altitude (semi-eixo 350 metros), quando a excentricidade é baixa. Estas órbitas, embora estáveis, orbitam o sistema binário de asteroides, e não apenas o corpo M_2 . Quando nós distanciamos o veículo espacial do corpo M_2 , órbitas estáveis aparecem com excentricidades cada vez maiores.

A Figura 4.3 é uma grade de cores indicando em que condição inicial a sonda irá

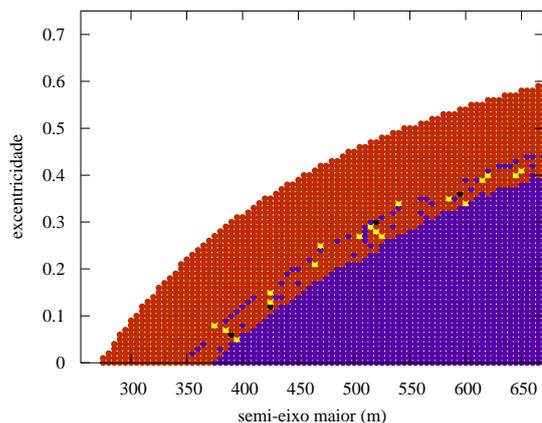
Figura 4.2 - Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 99% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e consequentemente, 1% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração.



colidir com o corpo M_1 , com o corpo M_2 , sobreviver durante toda integração ou ejetar do sistema.

A região de cor azul da Figura 4.3 indica que uma partícula colidiu com o primário mais massivo (M_1), a região de cor vermelha indica que a sonda espacial colidiu com o primário menos massivo (M_2), as regiões de cor amarelo indicam que a espaçonave ejetou do sistema e, por fim, a região de cor preta mostra as condições iniciais na quais a sonda sobrevive por todo o tempo de integração (1000 períodos orbitais do sistema, equivalente a aproximadamente dois anos terrestres). Podemos notar na parte superior da Figura 4.3 que existe uma região de cor branca. Esta região é onde as condições iniciais começam dentro do corpo M_2 , logo não tem sentido físico.

Figura 4.3 - Região de colisão com o corpo mais massivo (azul), colisão com o corpo menos massivo (vermelho), região de ejeção do sistema (amarelo) e órbitas que sobreviveram por toda integração (preto). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 99% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e consequentemente, 1% da massa total do sistema no primário menos massivo.

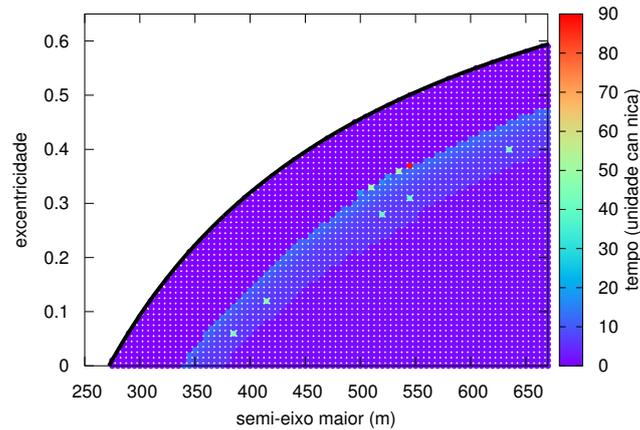


Observando as Figuras 4.2 e 4.3, podemos notar que à medida que o semi eixo maior aumenta e a excêntrica permanece baixa, o satélite é capturado pelo corpo de maior massa (M_1), fazendo com que a colisão com o corpo M_1 seja mais frequente, gerando uma região de instabilidade. E para órbitas muito próximas ao corpo M_2 , percebemos que a sonda é capturada pelo corpo menos massivo, gerando também uma região de instabilidade.

A Figura 4.4 é analisada semelhantemente à Figura 4.2 e tem também as mesmas condições iniciais. A diferença é que na Figura 4.4, a pressão da radiação solar é levada em consideração. Neste trabalho nós consideramos a razão *área – massa* como sendo igual a 0,01 unidades.

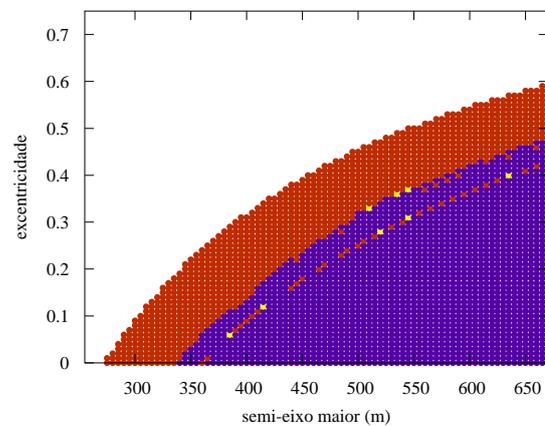
Pode ser visto na Figura 4.4 que nenhuma órbita sobreviveu por dois anos quando consideramos no cálculo a pressão da radiação solar. A pressão da radiação solar faz com que a excêntrica da órbita aumente, e com que o raio do perigeu se torne cada vez menor, fazendo o satélite, que está próximo do dipolo, colidir com ele. Nota-se também que o apogeu da órbita aumenta, fazendo a espaçonave colidir com o corpo M_1 com mais frequência, ou ser ejetado o sistema. A Figura 4.5 mostra esta análise. A grade 4.5 pode ser analisada da mesma forma que foi feito na Figura 4.3, mas, como já mencionamos, aqui a pressão da radiação solar é levada em

Figura 4.4 - Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, esta sendo considerado que 99% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e consequentemente, 1% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração



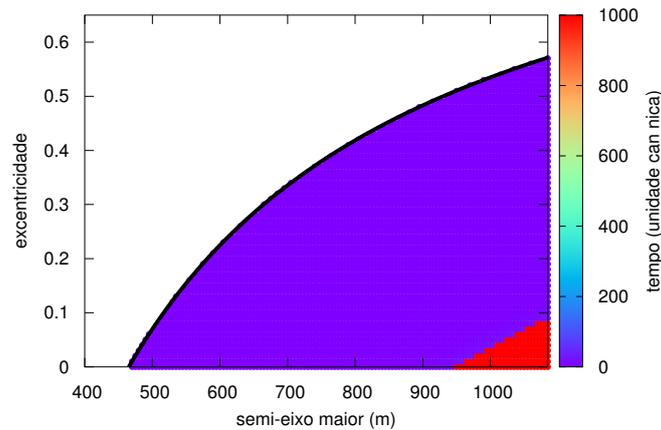
consideração.

Figura 4.5 - Região de colisão com o corpo mais massivo (azul), colisão com o corpo menos massivo (vermelho) e a região de ejeção do sistema (amarelo). Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, esta sendo considerado que 99% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e consequentemente, 1% da massa total do sistema no primário menos massivo



Depois de usar a razão de massa semelhante à dos corpos *Alpha–Gamma* do sistema de asteroides 2001*Sn*₂₆₃, modificamos a massa dos primários. Como já mencionado, manteremos neste trabalho a massa total de sistema constante e de valor 9.273×10^{12} kg. No entanto, vamos fazer uma análise agora considerando que 95% da massa total do sistema pertence ao corpo M_1 e 5% da massa total do sistema pertence ao corpo M_2 (dipolo de massa em rotação). Novamente, nesta análise, o sistema de coordenadas é centrado no centro de massa do corpo menos massivo. A Figura 4.6 mostra uma grade de condições iniciais do tempo de sobrevivência da partícula em função do semi-eixo maior e excentricidade.

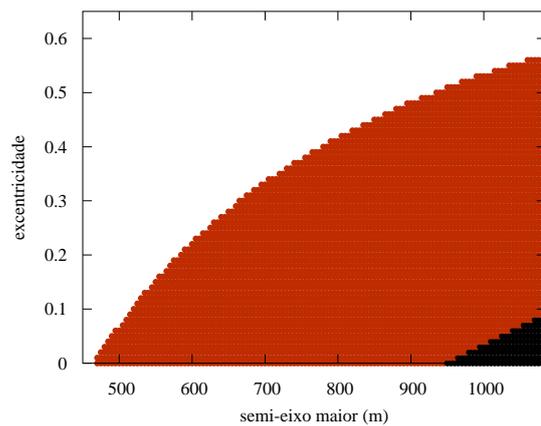
Figura 4.6 - Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 95% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 5% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração.



Na Figura 4.6, o semi-eixo maior é diferente do mostrado nas Figuras 4.2 e 4.4, porque na situação apresentada pelas Figura 4.6, o corpo M_2 tem uma massa maior, isto faz com que a região de influência seja maior. Como a massa do corpo M_2 é maior do que no caso anterior, as órbitas próximas deste corpo sofrem uma força gravitacional mais intensa, fazendo a espaçonave colidir com o corpo. As órbitas com o semi-eixo maior perto da extremidade da região de influência do corpo M_2 são órbitas estáveis quando a excentricidade é baixa. Para este caso analisado, foram encontradas órbitas estáveis ao redor do dipolo. A Figura 4.7 é uma grade de cores indicando em que condição inicial a sonda irá colidir com o corpo M_1 , com o corpo

M_2 , sobreviver durante toda integração ou ejetar do sistema. A região de cor azul na Figura 4.3 indica que o corpo colidiu com o primário mais massivo (M_1), a região de cor vermelha indica que a sonda espacial colidiu com o primário menos massivo (M_2), as regiões de cor amarela indicam que a espaçonave ejetou do sistema e ,por fim, a região de cor preta mostra as condições iniciais nas quais a sonda sobrevive por todo o tempo de integração (1000 períodos orbitais do sistema, equivalente a aproximadamente dois anos terrestre).

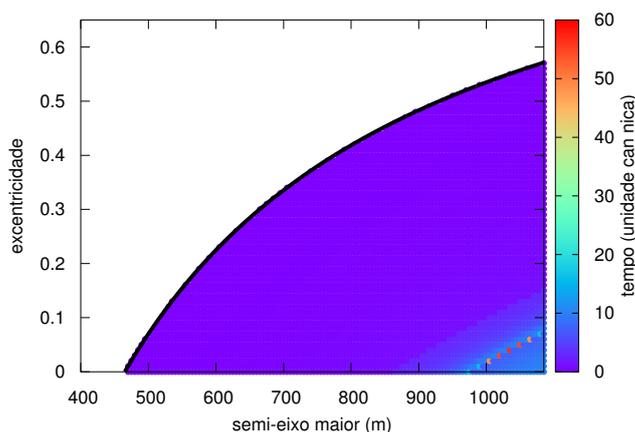
Figura 4.7 - Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho) e as órbitas que sobreviveram por toda integração (preto). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, esta sendo considerado que 95% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 5% da massa total do sistema no primário menos massivo



Podemos perceber pela Figura 4.7 que nenhuma órbita colide com o corpo M_1 e nem ejeta do sistema. Como a massa do corpo M_2 é maior que no caso anterior estudado, as órbitas são rapidamente capturada por este corpo, fazendo a sonda colidir com ele. Apenas órbitas com um semi-eixo maior alto e uma baixa excentricidade é que sobrevivem por todo tempo de integração. Lembrando que neste caso não é levado em consideração a pressão da radiação solar.

A Figura 4.8 é analisada semelhantemente à Figura 4.6 e tem também as mesmas condições iniciais. A diferença é que na Figura 4.8 , a pressão da radiação solar é levada em consideração. Novamente, a razão *área – massa* de todas as simulações que leva em consideração a pressão da radiação solar é de $0,01 \text{ m}^2/\text{kg}$.

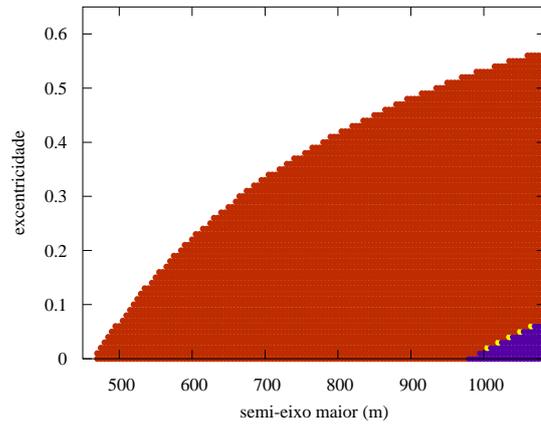
Figura 4.8 - Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, esta sendo considerado que 95% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e consequentemente, 5% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração.



Pode ser visto na Figura 4.8 que nenhuma órbita sobreviveu por dois anos quando consideramos o efeito da pressão da radiação solar. A pressão da radiação solar faz com que a excentricidade da órbita aumente, e com que o raio do perigeu se torne cada vez menor, fazendo o satélite, que está próximo do dipolo, colidir com ele. Nota-se também que o apogeu da órbita aumenta, fazendo a espaçonave colidir com o corpo M_1 com mais frequência ou ejetar do sistema. A Figura 4.9 mostra esta análise. A grade 4.9 pode ser analisada da mesma forma que foi feito na Figura 4.3, mas, como já mencionamos, aqui a pressão da radiação solar é levada em consideração.

Podemos perceber pela grade de colisão (Figura 4.9) que quando a pressão da radiação solar é levada em consideração, as órbitas da sonda são capturada na maioria dos casos pelo corpo M_2 . Isto se deve ao fato deste corpo ter um campo gravitacional forte, fazendo com que nenhuma órbita próxima a este corpo sobreviva. As órbitas que iniciam mais distante do corpo M_2 e que possuem baixa excentricidade, são capturadas pelo corpo de M_1 quando a pressão da radiação é levada em consideração. Foi plotada uma trajetória, para uma melhor compreensão do que acontece com a órbita de uma sonda espacial, quando consideramos o semi eixo maior da sonda como sendo inicialmente 1000 metros e excentricidade 0.

Figura 4.9 - Região de colisão com o corpo mais massivo (azul), colisão com o corpo menos massivo (vermelho) e as regiões de ejeção do sistema (amarelo). Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 95% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e consequentemente, 5% da massa total do sistema no primário menos massivo.



A Figura 4.10 e a Figura 4.11 mostram o resultado quando não levamos em conta a pressão da radiação solar e quando a consideramos, respectivamente, onde o círculo de cor vermelho é a órbita da espaçonave, o círculo de cor azul é a dimensão do primário mais massivo (M_1) e a elipse de cor verde é a dimensão do primário menos massivo (M_2).

Figura 4.10 - Trajetória do veículo espacial (vermelha) em torno do corpo alongado (M_2 , mostrado em verde). O corpo M_1 é mostrado em azul. Aqui não levamos em consideração a pressão da radiação solar.

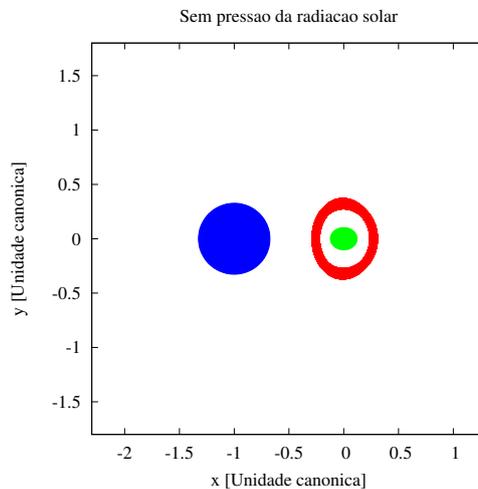
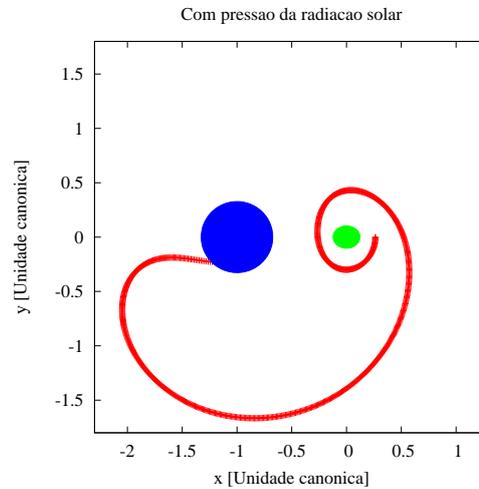


Figura 4.11 - Trajetória do veículo espacial (vermelha) em torno do corpo alongado (M_2 , mostrado em verde). O corpo M_1 é mostrado em azul. Aqui levamos em consideração a pressão da radiação solar.



A Figura 4.10 mostra que quando a pressão da radiação solar não é levada em consideração, a espaçonave, que se encontra no semi-eixo maior de 1000 metros e excentricidade 0, órbita o corpo M_2 . Quando a pressão de radiação solar é considerada nos cálculos, seu desempenho no sistema faz com que a força resultante (gravitacional + pressão de radiação solar) no veículo espacial se torne menor, fazendo, conseqüentemente, a órbita escapar do corpo M_2 e colidir com o corpo M_1 . A Figura 4.11 mostra essa situação.

A seguir estão todas as grades que foram simuladas de acordo com a variação da razão de massa. As análises de cada grade podem ser interpretada da mesma forma que foram interpretadas as grades anteriores.

A partir das Figuras 4.12 a 4.47, pode-se notar que à medida que aumentamos a massa do corpo alongado (M_2), as órbitas dos satélites que sobrevivem durante todo o período de tempo ao redor do sistema é nula, porque o aumento da massa do corpo aumenta a risco do veículo espacial ser atraída para o corpo M_2 . Uma vez que os corpos M_1 e M_2 estão muito próximos uns dos outros, estas órbitas são bastante complexas, fazendo com que a espaçonave colida com um dos corpos.

Figura 4.12 - Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 90% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 10% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração.

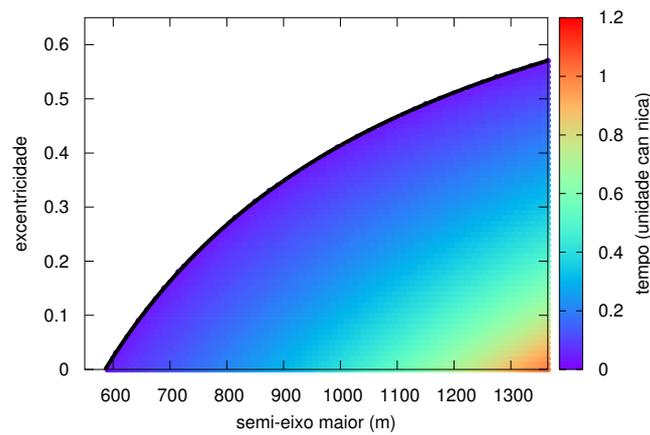


Figura 4.13 - Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 90% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 10% da massa total do sistema no primário menos massivo.

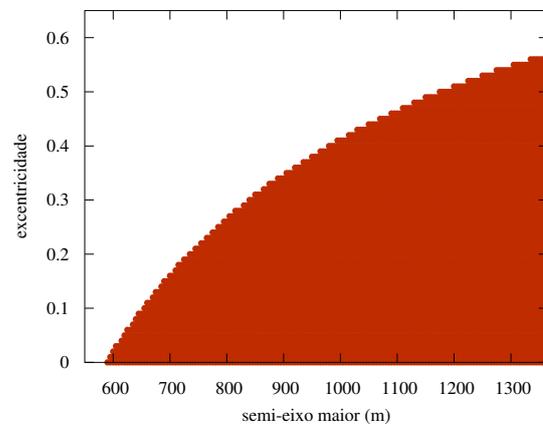


Figura 4.14 - Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 90% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 10% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração.

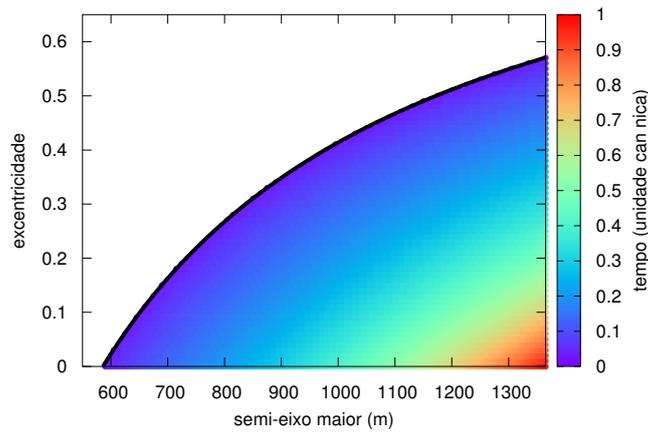


Figura 4.15 - Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 90% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 10% da massa total do sistema no primário menos massivo.

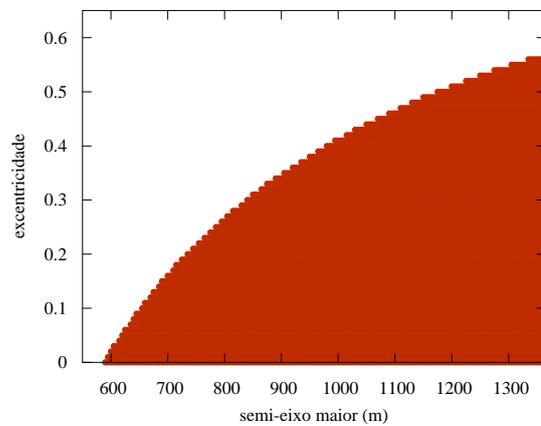


Figura 4.16 - Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 85% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 15% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração.

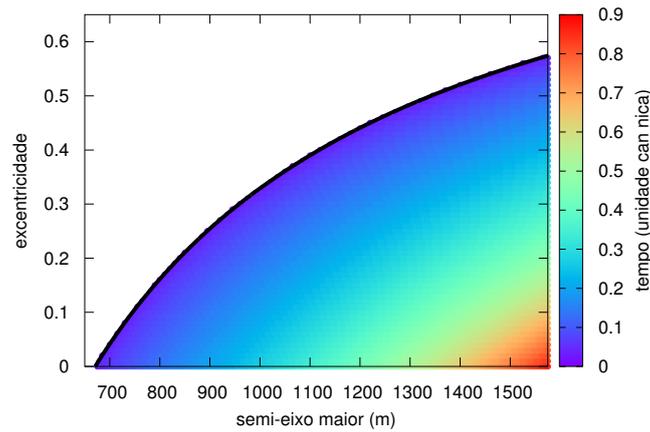


Figura 4.17 - Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 85% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 15% da massa total do sistema no primário menos massivo.

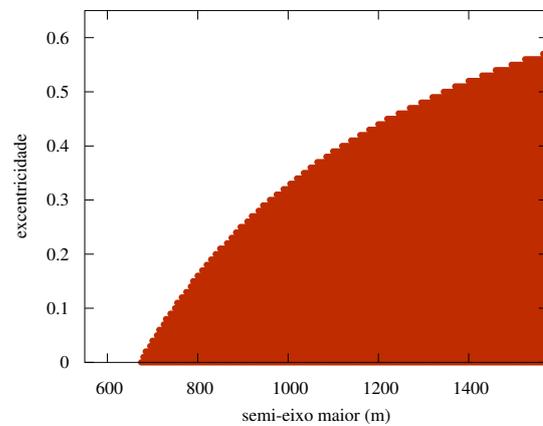


Figura 4.18 - Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 85% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 15% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração.

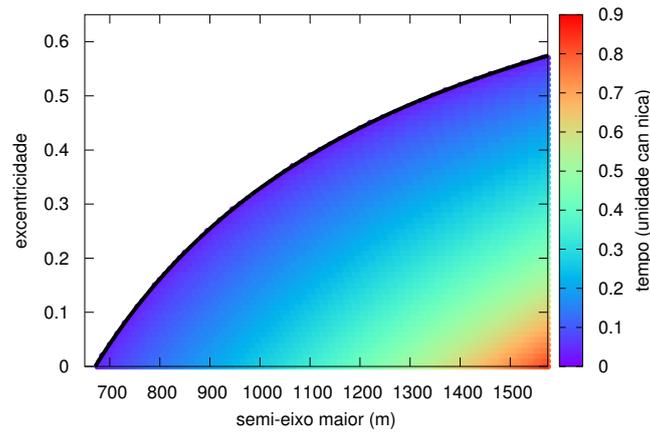


Figura 4.19 - Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 85% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 15% da massa total do sistema no primário menos massivo.

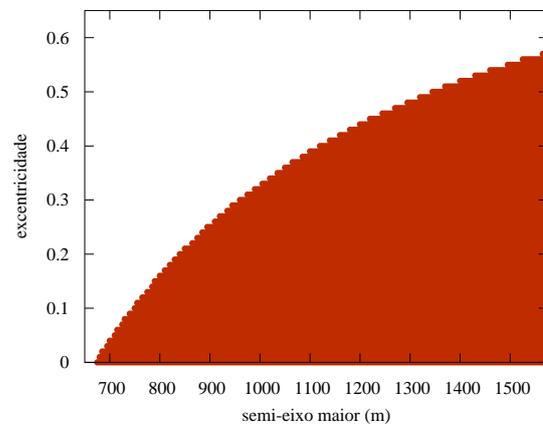


Figura 4.20 - Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 80% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 20% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração.

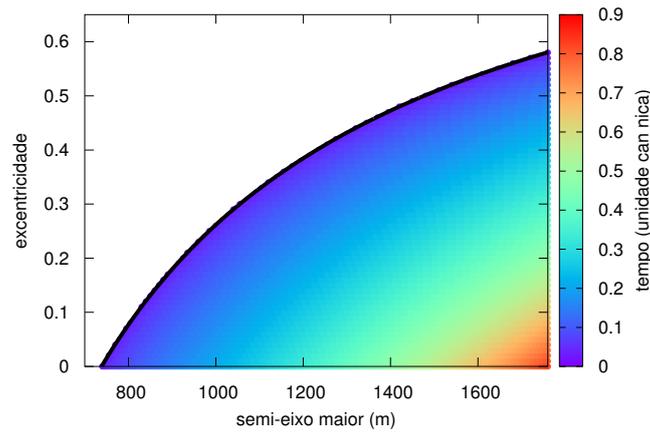


Figura 4.21 - Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 80% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 20% da massa total do sistema no primário menos massivo.

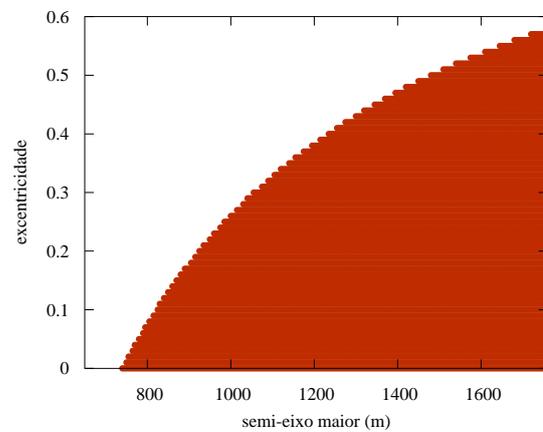


Figura 4.22 - Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 80% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 20% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração.

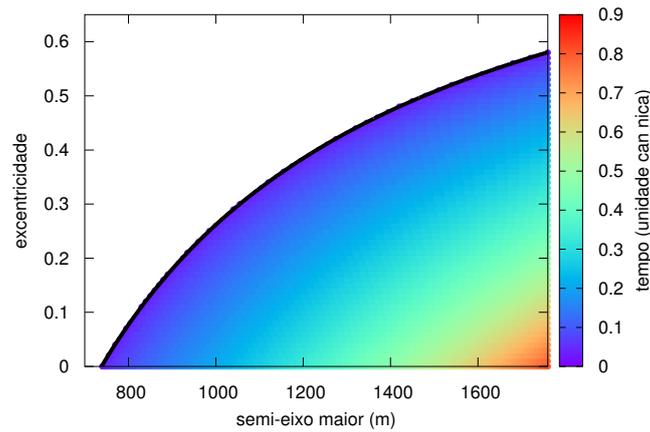


Figura 4.23 - Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 80% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 20% da massa total do sistema no primário menos massivo.

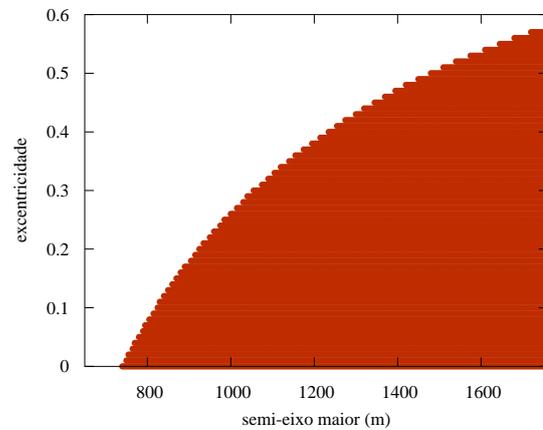


Figura 4.24 - Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 75% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 25% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração.

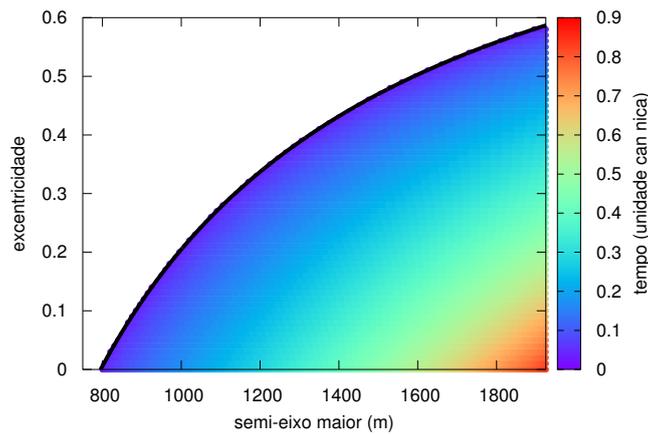


Figura 4.25 - Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 75% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 25% da massa total do sistema no primário menos massivo.

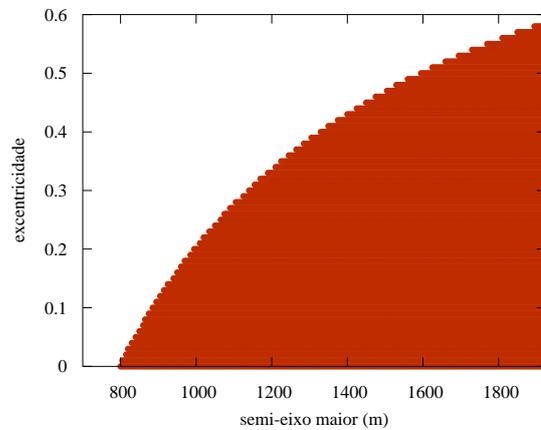


Figura 4.26 - Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 75% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 25% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração.

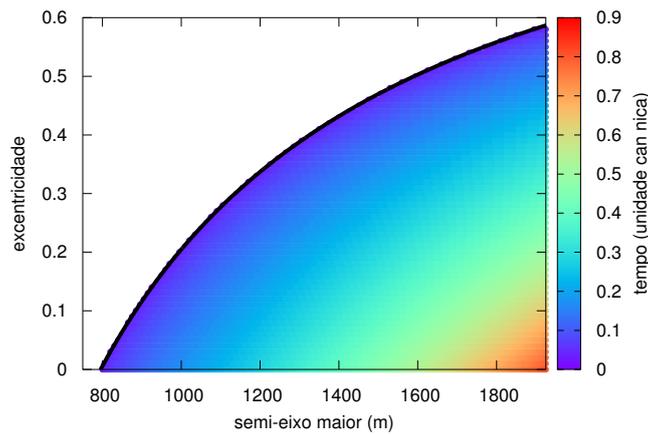


Figura 4.27 - Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 75% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 25% da massa total do sistema no primário menos massivo.

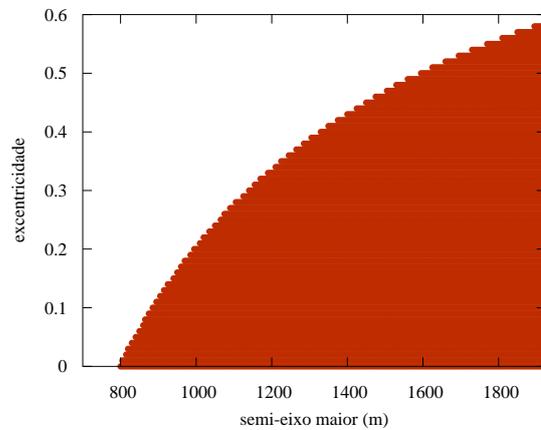


Figura 4.28 - Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 70% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 30% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração.

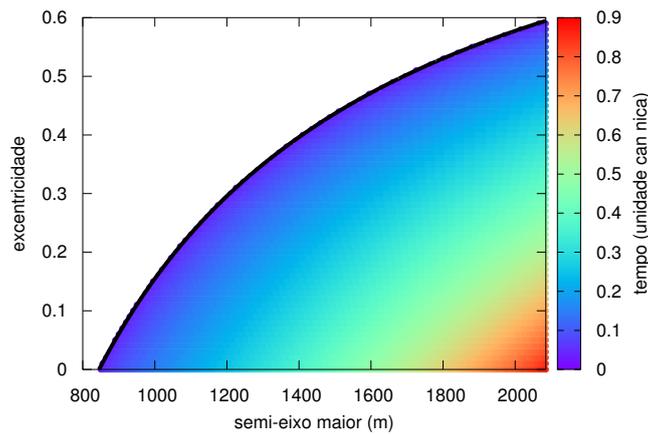


Figura 4.29 - Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 70% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 30% da massa total do sistema no primário menos massivo.

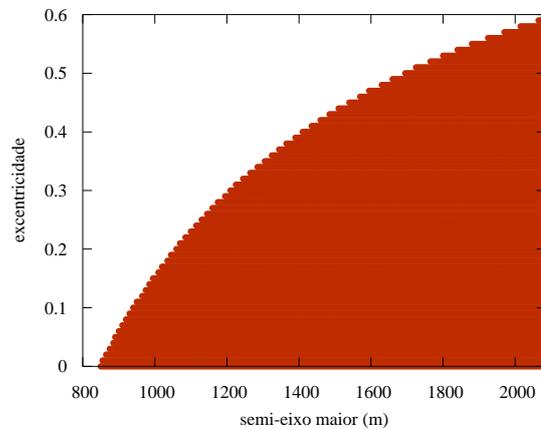


Figura 4.30 - Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 70% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 30% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração.

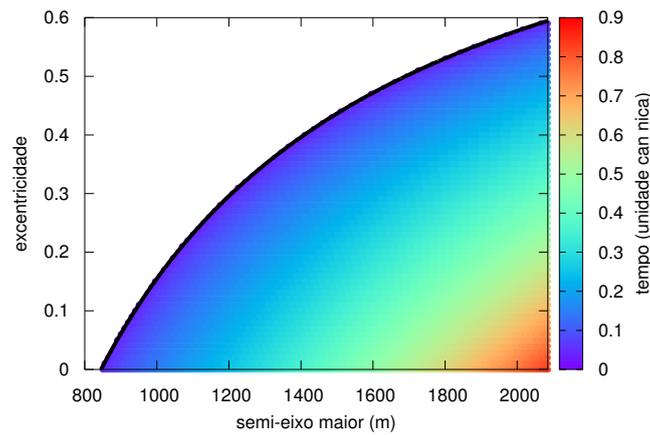


Figura 4.31 - Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 70% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 30% da massa total do sistema no primário menos massivo.

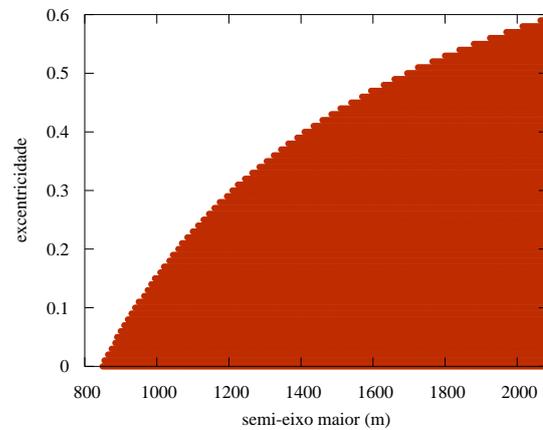


Figura 4.32 - Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 65% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 35% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração.

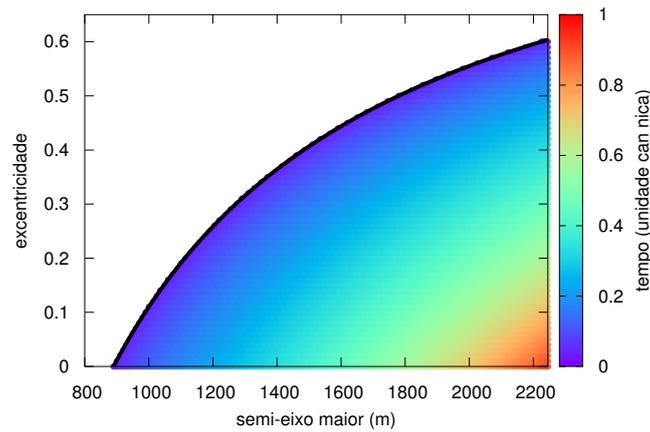


Figura 4.33 - Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 65% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 35% da massa total do sistema no primário menos massivo.

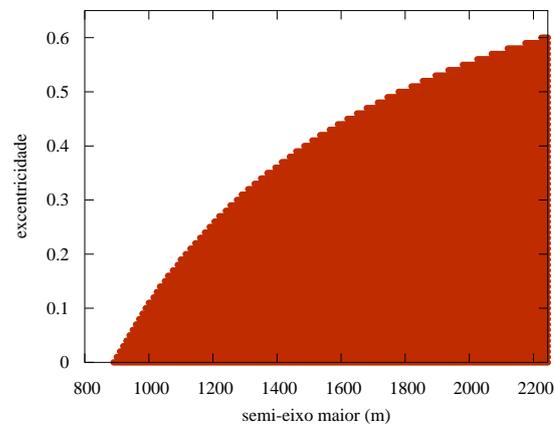


Figura 4.34 - Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 65% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 35% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração.

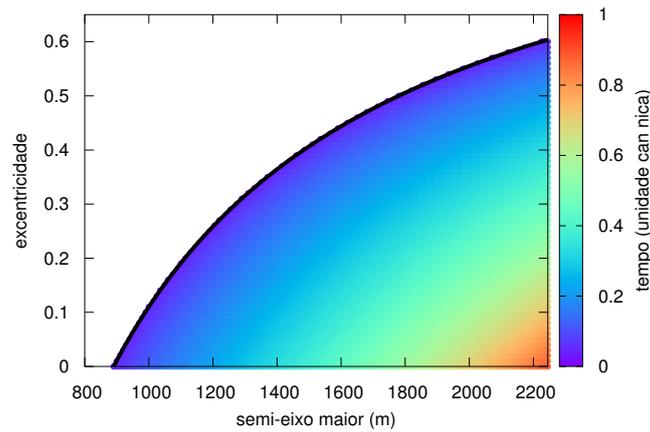


Figura 4.35 - Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 65% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 35% da massa total do sistema no primário menos massivo.

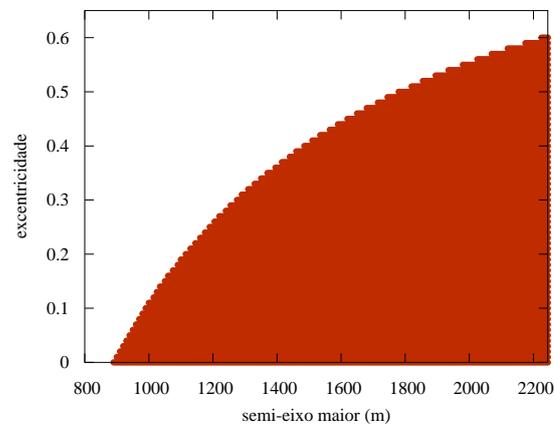


Figura 4.36 - Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 60% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 40% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração.

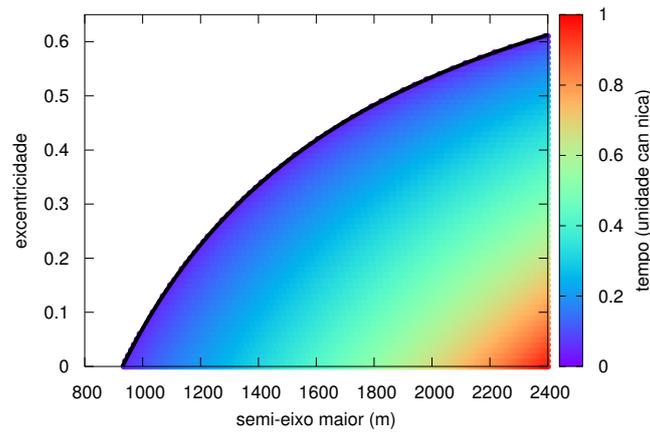


Figura 4.37 - Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 60% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 40% da massa total do sistema no primário menos massivo.

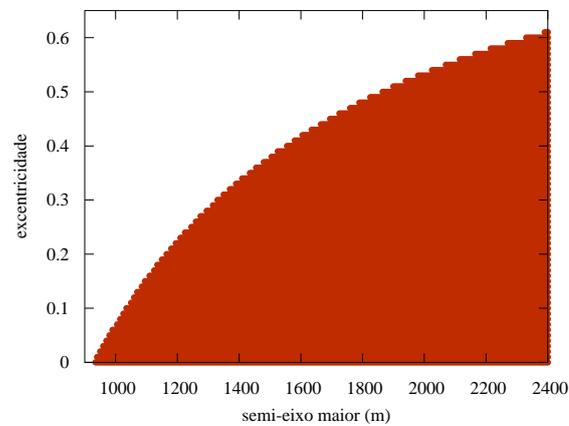


Figura 4.38 - Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 60% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 40% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração.

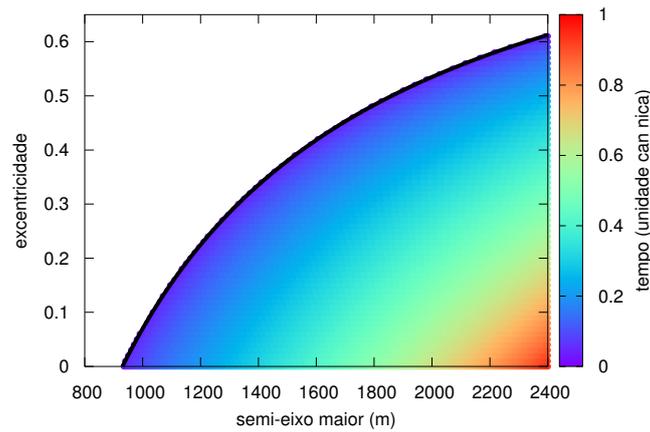


Figura 4.39 - Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 60% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 40% da massa total do sistema no primário menos massivo.

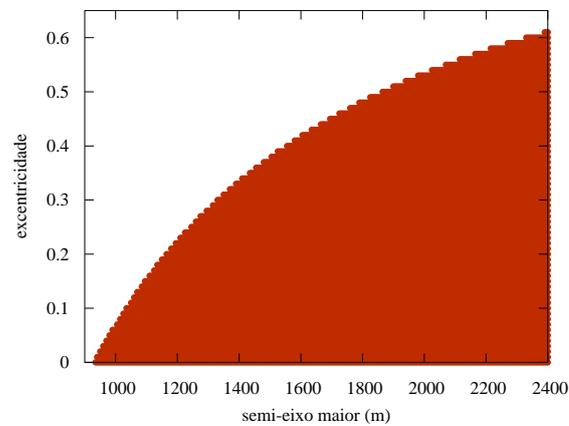


Figura 4.40 - Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 55% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 45% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração.

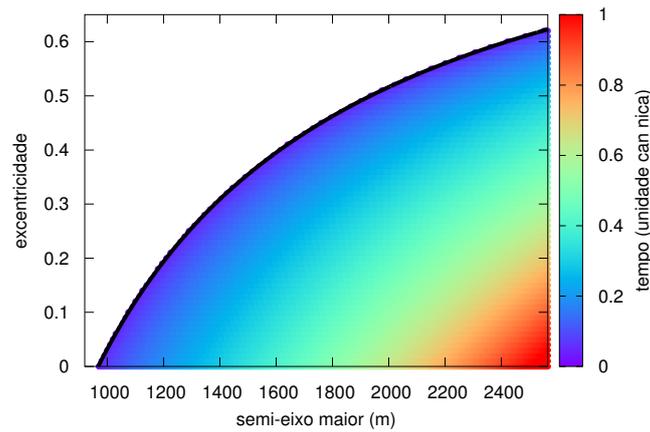


Figura 4.41 - Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 55% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 45% da massa total do sistema no primário menos massivo.

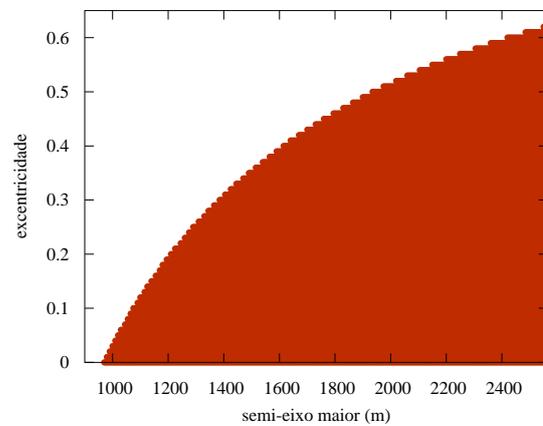


Figura 4.42 - Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 55% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 45% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração.

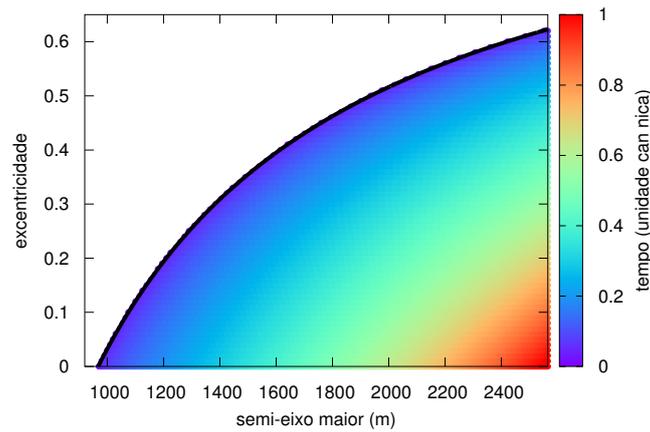


Figura 4.43 - Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 55% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 45% da massa total do sistema no primário menos massivo.

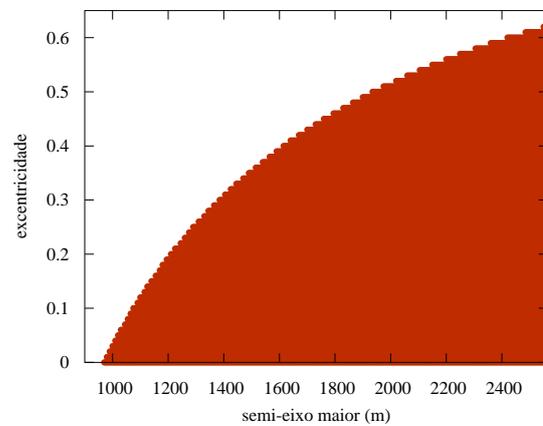


Figura 4.44 - Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 50% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 50% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração.

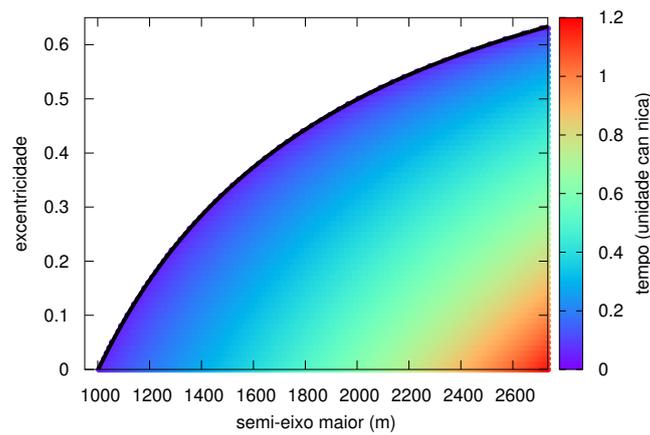


Figura 4.45 - Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 50% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 50% da massa total do sistema no primário menos massivo.

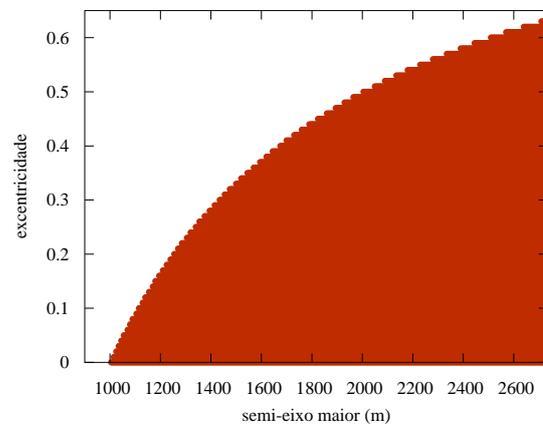


Figura 4.46 - Diagrama de estabilidade na região próxima ao corpo M_2 . O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de a e e ao longo de dois anos de integração (1000 períodos orbitais do sistema analisado). Nesta imagem, está sendo considerado que 50% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 50% da massa total do sistema no primário menos massivo. Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração.

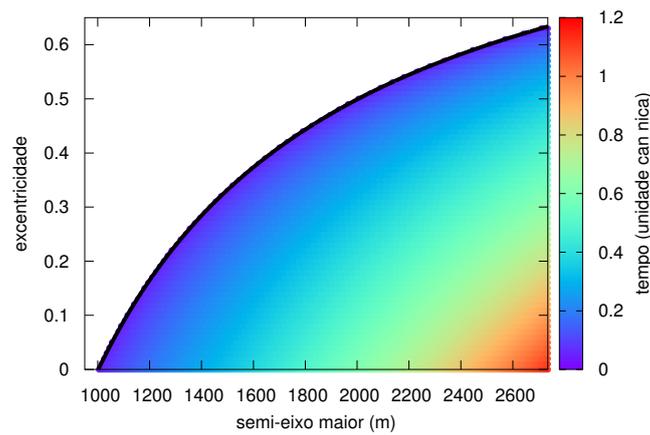
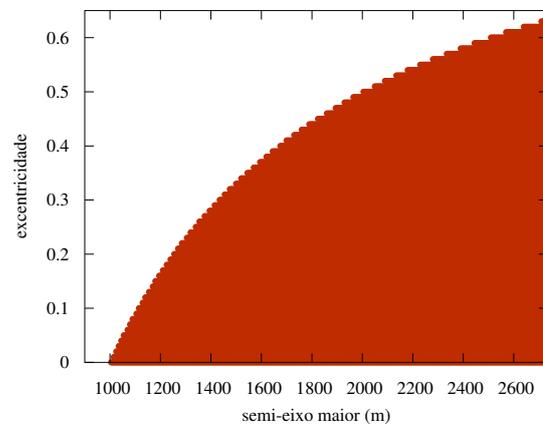


Figura 4.47 - Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 50% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e conseqüentemente, 50% da massa total do sistema no primário menos massivo.



Percebemos também que quando levamos em consideração a pressão da radiação solar, nenhuma órbita sobrevive por toda a integração numérica (1000 períodos orbitais). Pelo simples fato das órbitas não sobreviverem quando levamos em consideração a pressão da radiação solar, não significa que estas órbitas não sejam interessantes. Percebemos que algumas órbitas começam em torno do corpo menos massivo, órbita completamente este corpo e depois é atraída para o corpo mais massivo. Podemos utilizar estas órbitas para colher informações do corpo menos massivo por aquele instante de tempo que a sonda espacial está orbitando e depois, naturalmente (sem gasto de combustível), esta sonda será atraída para o corpo mais massivo. Ao chegar próxima do corpo mais massivo, é possível usar um sistema de propulsão para orbitar este outro corpo e, desta vez, colher informações a respeito deste corpo mais massivo.

5 TRANSFERÊNCIAS ORBITAIS

Os pontos de equilíbrio que surgem no problema restrito circular de três corpos (SZEBEHELY, 1967; MCCUSKEY, 1963) são muito importantes para aplicações na área de astronáutica (PRADO, 2006). São cinco pontos de equilíbrio que surgem nas soluções das equações do movimento como já vimos anteriormente. Isto significa que uma partícula ao ser posicionada em um desses pontos com velocidade inicial igual zero, em relação ao sistema de coordenadas girante, permanecerá indefinidamente neste ponto. As localizações destes pontos de equilíbrio foram mostradas na Figura 3.2. Como já foi mencionado, os pontos colineares (L_1 , L_2 e L_3) são sempre instáveis. Por outro lado, os pontos triangulares (L_4 e L_5), dependendo da razão de massa, podem ser instáveis ou linearmente estáveis (SZEBEHELY, 1967; MCCUSKEY, 1963; PRADO, 2006). Sendo pontos instáveis ou não, todos esses pontos são boas localizações para inserir uma estação espacial, uma vez que exigem uma pequena quantidade de ΔV (e combustível) para manter a sonda espacial em torno do ponto de equilíbrio. Os pontos triangulares, geralmente, são melhores para este propósito, pois muitas vezes são pontos de equilíbrio linearmente estáveis (PRADO, 2006).

O que se pode fazer também é transferir uma sonda espacial de um ponto de equilíbrio para outro. Trabalhos anteriores, analisaram as manobras orbitais entre os pontos de equilíbrio. Dentre estes trabalhos, podemos citar Broucke (1979), que analisou orbitas de transferências, utilizando o problema restrito circular de três corpos, entre os pontos lagrangeano do sistema terra-Lua. Neste estudo, Broucke (1979) investigou as transferências dos pontos lagrangeanos L_1 , L_2 , L_4 e L_5 para a Lua e também transferências da Lua para esses pontos, utilizando o teorema do espelho. O teorema do espelho pode ser encontrado em (ROY; OVENDEN, 1955; ROY, 2005). Prado (1996) também investigou transferências orbitais utilizando o sistema Terra-Lua, só que neste trabalho, o autor investigou as órbitas de transferências dos cinco pontos lagrangeanos para a Terra. Outro estudo interessante na área de transferência entre pontos lagrangeanos foi realizado por Cabette e Prado (2008), na qual os autores analisam transferências orbitais entre a terra e todos os pontos lagrangeanos, do sistema Sol-Terra, levando em consideração a perturbação do quarto corpo (que foi a Lua). Um estudo mais recente (YANG et al., 2015), analisou orbitas de transferências entre os pontos de equilíbrio em torno de um asteroide de forma alongada. Nesse estudo, o autor analisou orbitas de transferência em torno do asteroide 433 Eros. Outro estudo recente e bastante interessante foi realizado por (OLIVEIRA et al., 2016b). O autor analisou as transferências orbitais entre os pontos lagrangeanos do sistema terra-Lua para a Terra. Nesse estudo o autor levou em con-

sideração a pressão da radiação solar e mostrou que, embora a pressão da radiação fosse incluída na dinâmica do movimento, ela não fez um efeito muito significativo durante as transferências em comparação quando a pressão não é levada em consideração. Outro estudo mais recente, realizado por (OLIVEIRA et al., 2016a), foi a investigação do efeito da pressão da radiação quando é considerado um sistema Sol-Asteroide. Nesse trabalho o Oliveira et al. (2016a) notou que a pressão da radiação tem uma participação significativa no processo de transferência, em particular no sistema formado por asteroides, porque suas forças gravitacionais são menores em comparação com os sistemas com corpos maiores.

Neste tópico do estudo, investigaremos órbitas de transferências entre os pontos de equilíbrio de alguns sistemas e modelos que foram explorados nesta tese. Além do efeito gravitacional que foram utilizados por (YANG et al., 2015) e do uso da pressão da radiação solar utilizada por Oliveira et al. (2016b), Oliveira et al. (2016a), nós investigaremos transferências orbitais de um sistema binário de asteroides, levando em consideração, também, a forma alongada de um dos asteroides. Assim, o objetivo é demonstrar que quando é levada em consideração a forma de um dos primários, isto afeta diretamente no gasto de combustível necessário para realizar manobras, caso contrário a espaçonave não atingirá os pontos de equilíbrio desejados em torno dos asteroides. Este tópico de estudo, mostrará os resultados para simulações de transferências orbitais entre os pontos colineares de equilíbrio de um sistema binário de asteroides. Nós utilizamos as características físicas e orbitais dos corpos *Alpha* e *Gamma* do asteroide 2001SN₂₆₃.

5.1 Metodologia

Neste estudo utilizaremos a dinâmica orbital usando o modelo do PRCTC, que já foi explicando na seção 3.4. A diferença é que agora, nós iremos levar em consideração a pressão da radiação solar nas Equações do movimento de um corpo de massa infinitesimal. As equações de movimento do corpo de massa desprezível, no plano $x - y$, quando vistas a partir de um referencial girante, são dadas pelas Equações mostradas a seguir.

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - \frac{(1 - 2\mu^*)(x - x_1)}{((x - x_1)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{\mu^*(x - x_{21})}{((x - x_{21})^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{\mu^*(x - x_{22})}{((x - x_{22})^2 + y^2)^{3/2}} - P_{radx}, \quad (5.1)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = y - \frac{(1 - 2\mu^*)y}{((x - x_1)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{\mu^*y}{((x - x_{21})^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{\mu^*y}{((x - x_{22})^2 + y^2)^{3/2}} - P_{rad y}, \quad (5.2)$$

onde

$$r_1 = [(x - x_1), y, 0]^T, \quad (5.3)$$

$$r_{21} = [(x - x_{21}), y, 0]^T, \quad (5.4)$$

$$r_{22} = [(x - x_{22}), y, 0]^T, \quad (5.5)$$

e $P_{rad x}$ e $P_{rad y}$ representam as componentes x e y da aceleração devido à pressão da radiação solar.

O sistema de Equações (5.1) e (5.2) não tem soluções analíticas, e é necessário a utilização de integração numérica para resolver o problema. Para obter as soluções, o problema é tratado como *TPBVP* (*Two Point Boundary Value Problem*) e ele é resolvido usando integrações numéricas juntamente com o método de gradiente (PRADO, 1996). Para resolver o *TPBVP* neste trabalho foram utilizados os seguintes passos:

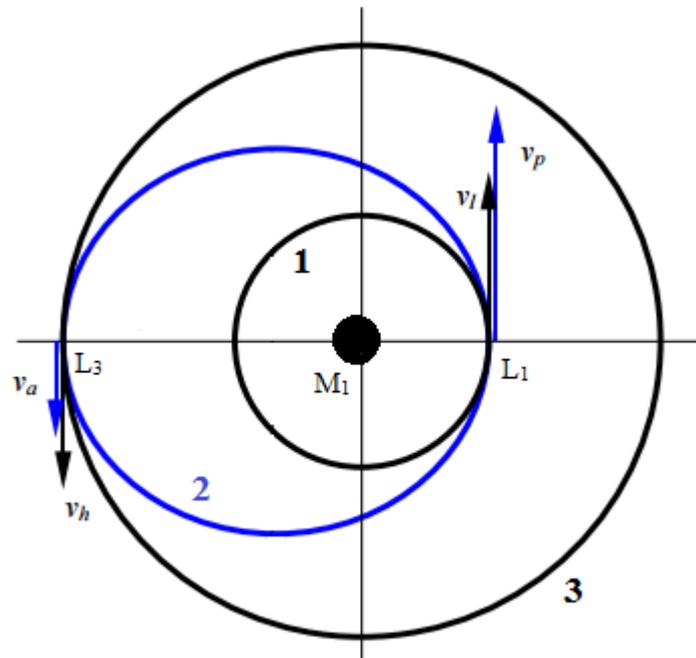
- i) É necessário dar um valor inicial para a posição (\vec{r}_i) e para a velocidade (\vec{v}_i). Deste modo, o estado inicial completo é conhecido. A posição inicial é conhecida pelo enunciado do problema, e a velocidade inicial é uma variável a ser encontrada pelo método iterativo.
- ii) Em seguida, é preciso determinar um tempo final, τ , e integrar as Equações do movimento de $\tau_0 = 0$ até τ_f .
- iii) Por fim, compara-se a posição final obtida a partir da integração numérica com a posição final desejada e o tempo final com o tempo de voo especificado (τ_f). Se houver uma concordância entre esses valores (diferença menor que um erro especificado) a solução é encontrada e o processo é interrompido. Se não houver um acordo entre os valores, é feito um incremento na velocidade inicial e no tempo final e, o processo retorna ao passo i).

O método utilizado para encontrar o incremento nas variáveis dos chutes iniciais é o método do gradiente padrão, conforme descrito em *Numerical Recipes*. As rotinas que estão disponíveis nesta referência foram utilizadas neste trabalho com pequenas

modificações.

As simulações de manobras serão assumidas como bi-impulsivas e considera-se que a manobra começa com a aplicação do primeiro impulso na posição inicial da espaçonave, que no nosso caso é um ponto de equilíbrio, e finaliza com a aplicação do segundo impulso na posição final do veículo espacial, outro ponto de equilíbrio. A Figura 5.1 é uma imagem representativa de como as transferências são efetuadas.

Figura 5.1 - Transferência de Hohmann do ponto de equilíbrio L_1 para L_3 .



Considerando que a espaçonave está posicionada inicialmente em um ponto de equilíbrio do sistema binário de asteroides e deseja mudar sua posição durante o tempo de missão, para que possa estudar e coletar informações sobre os corpos desse sistema. Um exemplo para uma transferência do ponto de equilíbrio L_1 para o ponto de equilíbrio L_3 é mostrado na Figura 5.1. Neste exemplo, a espaçonave está situada no ponto L_1 , indicada pela órbita 1, e deve atingir o ponto L_3 , indicada pela órbita 3. Desta forma é tomada uma manobra impulsiva, dando à espaçonave um acréscimo de velocidade (v_p) necessário para iniciar a órbita de transferência da órbita 1 para a órbita 3. A órbita de transferência é a órbita 2 que é uma órbita elíptica cujo raio do perigeu coincide com o raio da órbita 1 e cujo raio do apogeu é igual ao raio 3. Quando a espaçonave alcança o ponto L_3 outra manobra impulsiva é tomada, dando à espaçonave uma velocidade v_a necessária para colocar a espaçonave na órbita final

desejada, o ponto de equilíbrio L_3 .

5.2 Resultados numéricos

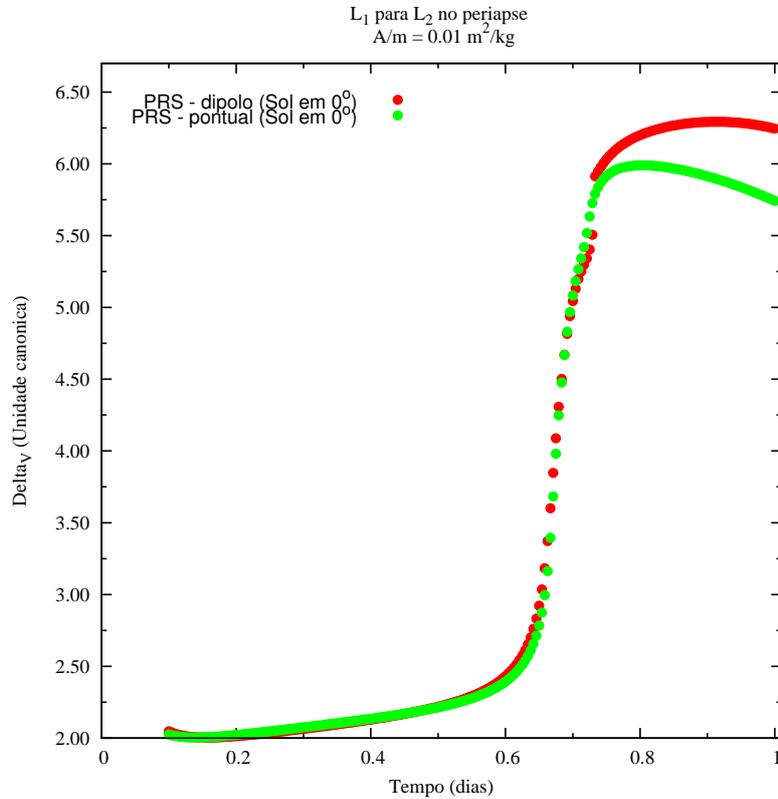
Foram feitas simulações de transferências orbitais entre os pontos de Lagrange L_1 a L_2 e entre os pontos L_1 e L_3 do sistema de asteroides. Como resultado, são mostradas as trajetórias com a correspondente variação de velocidade em relação ao tempo e a correspondente variação de velocidade em função ângulo inicial de trajetória de voo. Dois resultados distintos são exibidos: no primeiro, levamos em consideração a dimensão e forma de um dos asteroides e no segundo, consideramos que os dois asteroides são modelados como massas pontuais. A variação de velocidade requerida pelas manobras dá um número mais diretamente relacionado ao consumo de combustível, mas requer hipóteses relacionadas à velocidade e posição da espaçonave no ponto inicial de transferência e a velocidade e posição final no término da transferência.

A primeira família de orbitas de transferência considera transferências entre o ponto de equilíbrio colinear L_1 para o L_2 , considerando que o asteroide está no periapse de sua órbita ao redor do Sol, que é de cerca de 1.03617286 A.U. A segunda família de órbitas de transferência considera as transferências entre os pontos colineares de Lagrange L_1 para L_3 , considerando que o asteroide também está no periapse. Os gráficos do tempo pelo ΔV , os gráficos do angulo de disparo pelo ΔV e os gráficos da órbita de transferência são plotadas considerando um referencial girante.

Nas simulações de transferências orbitais, nós utilizamos que o Coeficiente de refletividade (C_r) vale = 1.5. P_S vale $4.5510^{-6} N/m^2$ e o valor da razão A/m vale = $0,01 m^2/kg$. A Figura 5.2 relaciona o tempo de transferência pelo ΔV gasto em cada transferência, cuja posição inicial é o ponto de equilíbrio L_1 e o ponto final é o ponto de equilíbrio L_2 . A curva de cor verde representa a transferência na qual os corpos primários são modelados como pontos de massa. A curva de cor vermelha refere-se a quando consideramos o primário menos massivo como um dipolo de massa em rotação e o primário mais massivo como um ponto de massa.

A Figura 5.3 relaciona o angulo de disparo inicial da transferência pelo ΔV necessário para realizar aquela transferência. Nesta Figura são mostrado os resultados quando transferimos a sonda espacial do ponto de equilíbrio L_1 para o ponto de equilíbrio L_2 . Novamente, a curva de cor verde refere-se a quando os corpos primários são modelados como pontos de massa. A curva de cor vermelha refere-se a quando consideramos o primário menos massivo como um dipolo de massa em rotação e o

Figura 5.2 - Transferência de L_1 para L_2 . A curva verde representa o caso onde consideramos os corpos primários como corpos de massa pontual. A curva vermelha representa o corpo mais massivo como um corpo de massa pontual e o primário menos massivo um dipolo de massa em rotação.

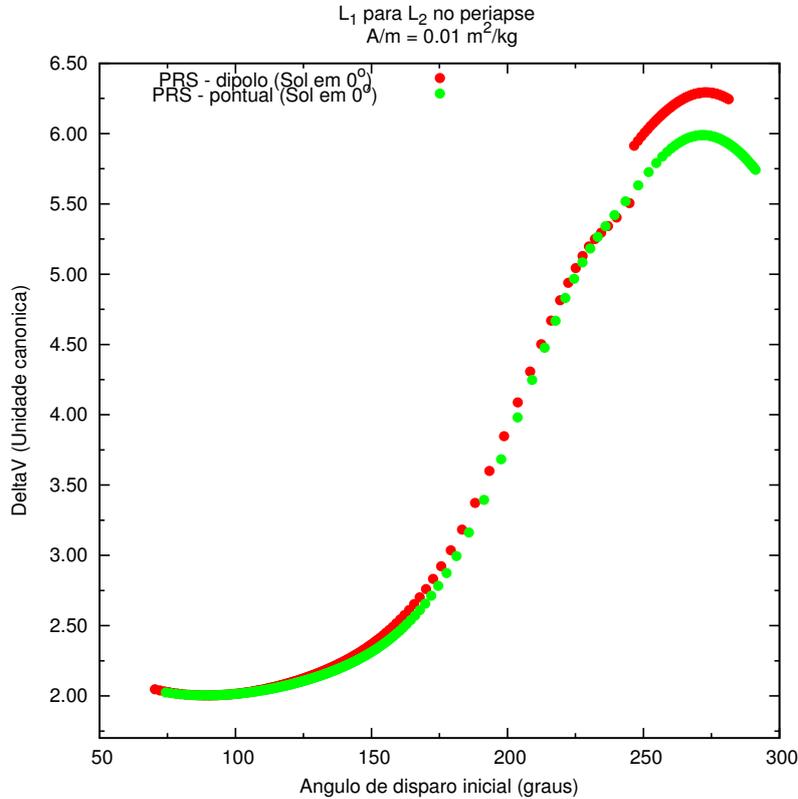


primário mais massivo de forma esférica.

A Figura 5.4 nos mostra a trajetória de uma sonda espacial quando transferimos um veículo do ponto L_1 para o ponto L_2 . Esta transferência plotada refere-se a trajetória que se gastaria o mínimo de ΔV para realizar a transferência e, conseqüentemente, o mínimo de combustível. A trajetória da cor preta, refere-se a transferência da sonda quando modelamos o primário menos massivo como um dipolo de massa em rotação. Já a trajetória da cor amarela, refere-se a transferência quando consideramos os dois corpos como pontos de massa.

A Figura 5.5, semelhantemente a Figura 5.2, relaciona o tempo de transferências com o ΔV necessário para realizar a transferência. Mas desta vez, está sendo analisado transferência do ponto de equilíbrio L_1 para o ponto de equilíbrio L_3 . A curva de cor vermelha refere-se a quando consideramos o primário menos massivo como um dipolo de massa em rotação e o primário mais massivo de forma esférica. Por outro

Figura 5.3 - Transferência de L_1 para L_2 . A curva verde representa o caso onde consideramos os corpos primários como corpos de massa pontual. A curva vermelha representa o corpo mais massivo como um corpo de massa pontual e o primário menos massivo um dipolo de massa em rotação.

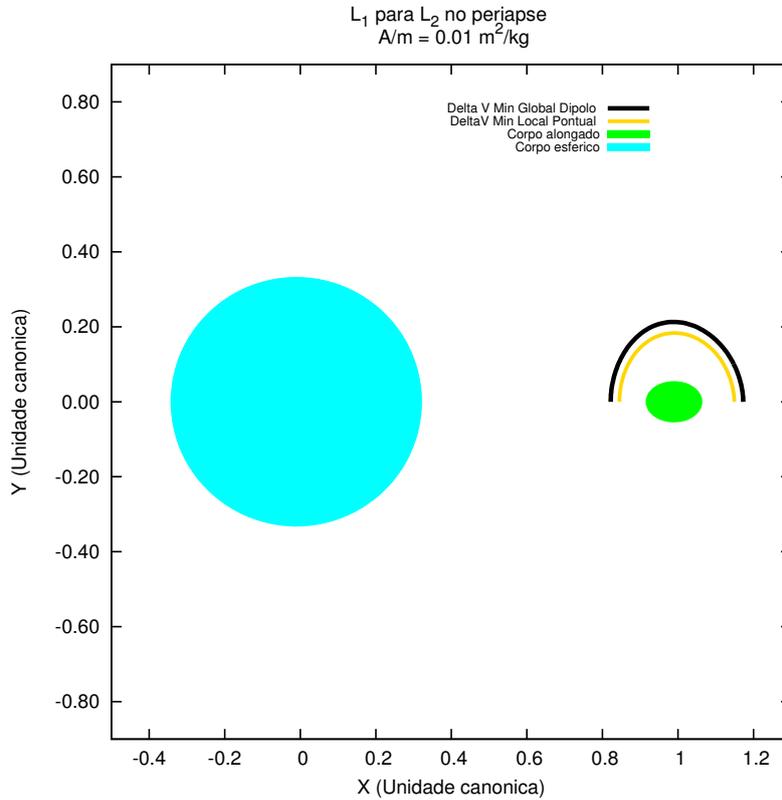


lado, a curva de cor verde são transferências quando consideramos os dois corpos primários como pontos de massa.

Observa-se pela Figura 5.5 que existe um mínimo global do ΔV (próximo ao tempo 1) quando os corpos são considerados como massas pontuais (curva verde), que passa a não existir mais quando consideramos a forma de um dos corpos (curva vermelha).

A Figura 5.6 relaciona o angulo de disparo inicial da transferência pelo ΔV necessário para realizar aquela transferência. Nesta Figura são mostrado os resultados quando transferimos a sonda espacial do ponto de equilíbrio L_1 para o ponto de equilíbrio L_3 . Novamente, a curva de cor verde refere-se a quando os corpos primários são modelados como pontos de massa. A curva de cor vermelha refere-se a quando consideramos o primário menos massivo como um dipolo de massa em rotação e o primário mais massivo de forma esférica.

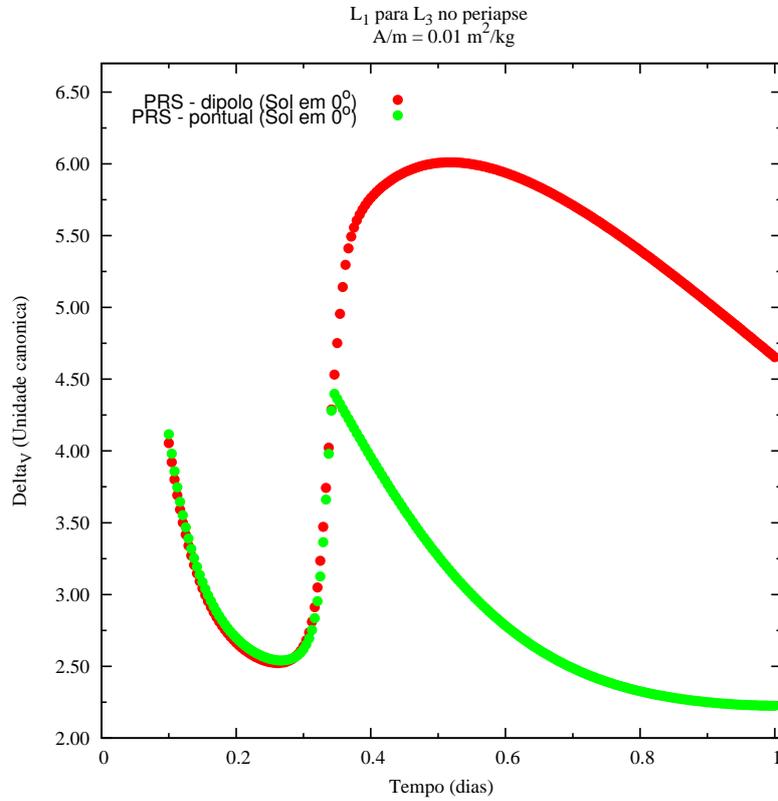
Figura 5.4 - Transferência de uma sonda espacial do ponto L_1 para o ponto L_2 . A órbita da cor verde representa a órbita de tempo mínimo que a sonda realizaria a transferência se os dois corpos fossem massas pontuais. A órbita da cor vermelha representa a órbita de tempo mínimo que a sonda realizaria a transferência se um dos primários tivesse a forma alongada.



Como a Figura 5.5 mostrou um mínimo local (tempo aproximadamente em 0.3) para a trajetória verde e um mínimo global (tempo aproximadamente em 1) para mesma trajetória, então decidimos plotar as duas órbitas para estas duas situações em destaques.

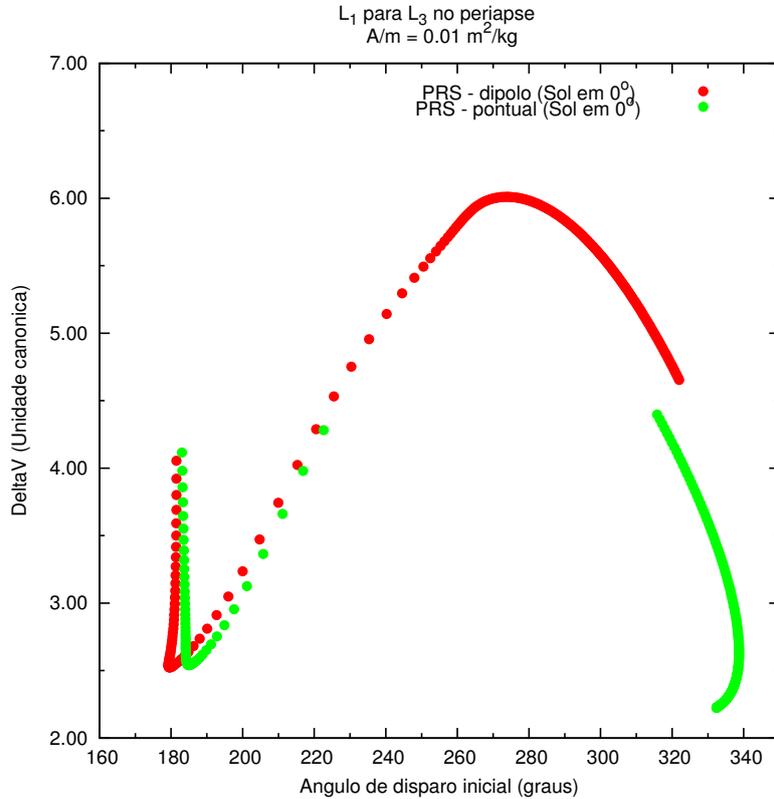
A Figura 5.7 mostra as trajetórias das transferências em diversas situações. A trajetória de cor preta é referente a quando consideramos o primário menos massivo como um dipolo de massa e o primário mais massivo como um ponto de massa. As trajetórias de cor amarela e rosa referem-se as transferência de uma sonda espacial quando consideramos os dois corpos como ponto de massa. A trajetória de cor rosa é referente a transferência onde se tem um mínimo global do ΔV da Figura 5.5 (tempo de transferência 0,995833322 períodos orbitais do sistema). Já a trajetória amarela é referente a trajetória onde tem um mínimo local na Figura 5.5 (tempo de transferência 0,2666 períodos orbitais do sistema). A trajetória de cor preta representa

Figura 5.5 - Transferência de L_1 para L_3 . A curva verde representa o caso onde consideramos os corpos primários como corpos de massa pontual. A curva vermelha representa o corpo mais massivo como um corpo de massa pontual e o primário menos massivo um dipolo de massa em rotação.



onde se tem o mínimo Δv quando um dos corpos é modelado como um dipolo de massa (tempo de transferência 0,262499998 períodos orbitais do sistema). Por fim, a curva de cor azul é a trajetória da sonda espacial quando o corpo menos massivo é modelado como um dipolo de massa. Esta trajetória seria a que seria feita no tempo 0.995833322 (Mínimo global dos pontos de massa) se fosse levada em consideração a formas de um dos corpos.

Figura 5.6 - Transferência de L_1 para L_3 . A curva verde representa o caso onde consideramos os corpos primários como corpos de massa pontual. A curva vermelha representa o corpo mais massivo como um corpo de massa pontual e o primário menos massivo um dipolo de massa em rotação.

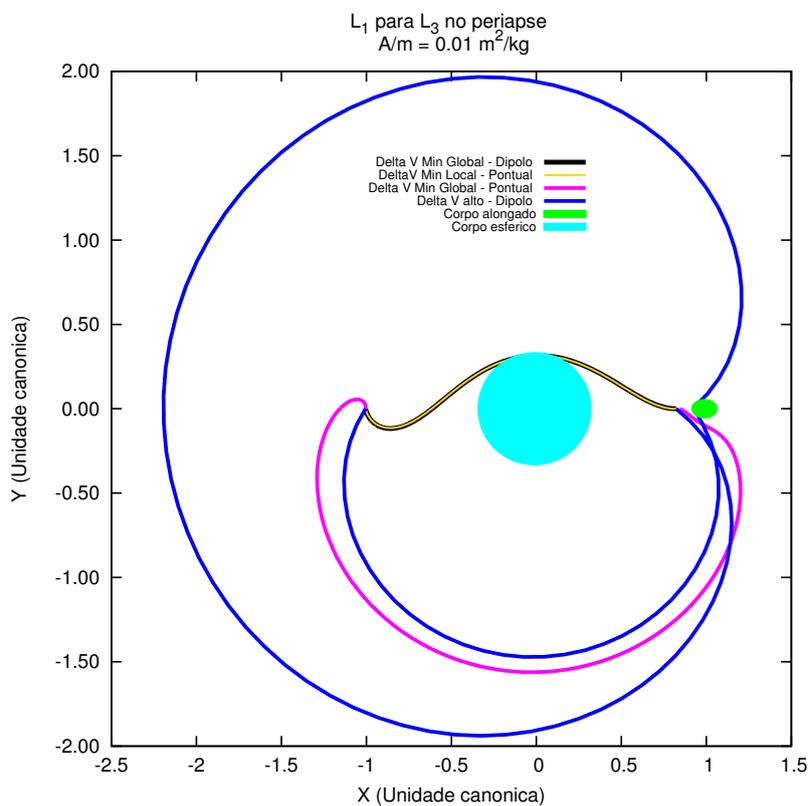


Podemos perceber pelas órbitas que a transferência que gasta o menor ΔV do veículo espacial que sai do L_1 para o L_3 colide com o primário mais massivo quando levamos em consideração sua dimensão. Outro fator importante de analisar é que quando levamos em consideração a forma alongada de um dos primários, um valor mínimo de ΔV , na transferência de L_1 para L_3 , utilizando as massas pontuais, deixa de existir. As Figuras 5.3 e 5.6 mostram as curvas que relacionam o ΔV com o angulo de disparo.

Os resultados mostram que quando levamos em consideração a forma de um dos corpos, o efeito da dinâmica da espaçonave é considerável. Também percebemos as diferenças na variação de velocidade. Transferências entre dois pontos de equilíbrio que antes era possível realizar para um ΔV baixo, deixam de existir quando levamos em consideração a forma de um dos corpos.

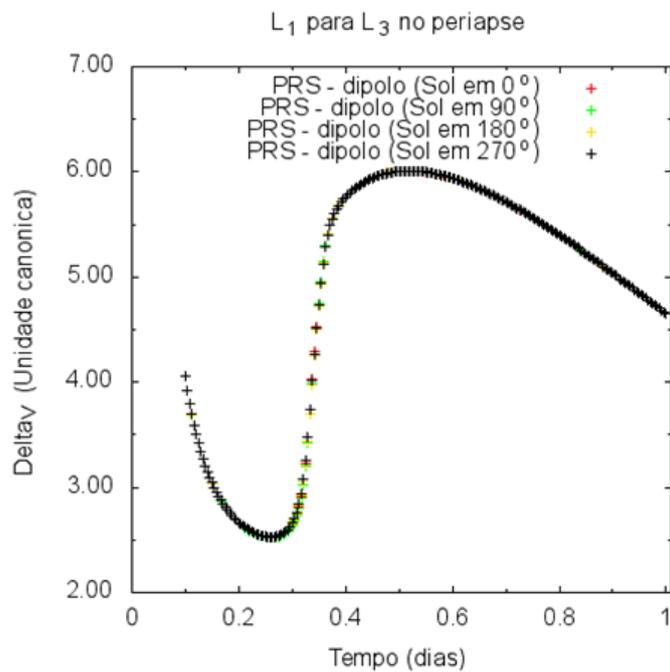
Depois de fazer as análises considerando o Sol sempre na posição de 0 graus (lado

Figura 5.7 - Transferência de uma sonda espacial do ponto L_1 para o ponto L_3 . A órbita da cor verde e preta representa a órbita de tempo mínimo local e mínimo global que a sonda realizaria a transferência se os dois corpos fossem massas pontuais. A órbita da cor vermelha representa a órbita de tempo mínimo que a sonda realizaria a transferência se um dos primários tivesse a forma alongada. E a órbita azul representa a órbita com o mesmo tempo da órbita que possui um mínimo global.



direito das figuras), resolvemos fazer uma análise variando a posição angular do sol, para observar se há mudanças nos resultados de transferências orbitais. A partir daqui, todos os resultados levam em consideração a forma dos corpos. Onde o corpo M_1 é considerado como um corpo esférico e o corpo M_2 é considerado com corpo alongado que foi modelado nas equações como um dipolo de massa em rotação. A Figura 5.8 mostra um gráfico que relaciona o ΔV pelo tempo para realizar uma transferência.

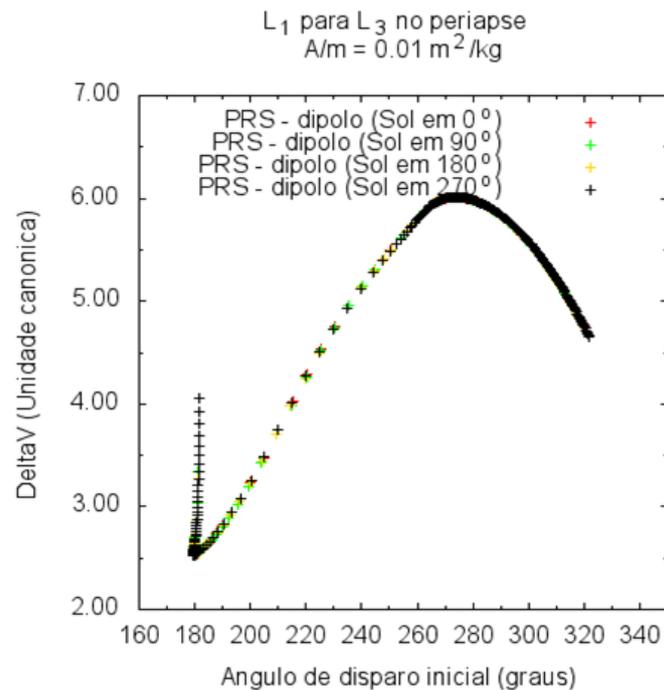
Figura 5.8 - Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 50% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e consequentemente, 50% da massa total do sistema no primário menos massivo.



Podemos perceber pela Figura 5.8 que a posição angular do sol não afeta significativamente a transferência do veículo espacial do ponto de equilíbrio L_1 para o ponto L_3 . Isso se deve ao fato da razão área massa utilizada nesse estudo ser muito baixa ($A/m = 0,01 \text{ m}^2/\text{kg}$).

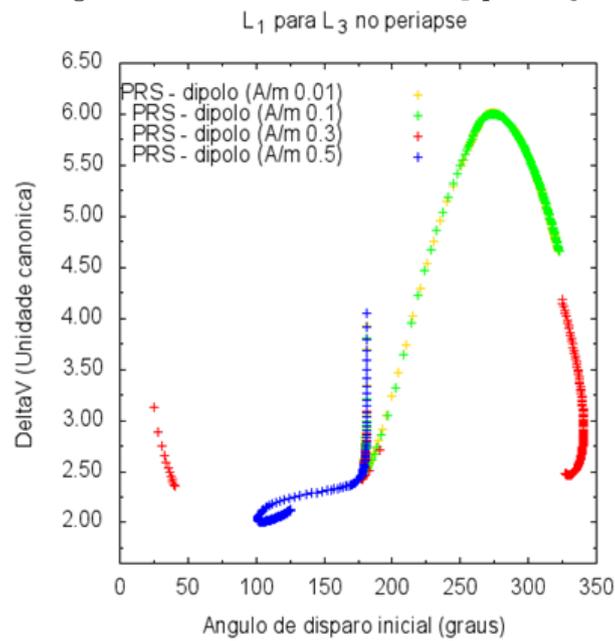
Construímos também um gráfico que relaciona o ΔV pelo angulo de disparo inicial, conforme mostra a Figura 5.9. Novamente, a posição angular do sol não altera significativamente a posição do angulo de disparo necessário para realizar a transferência pelas mesmas razões já explicadas anteriormente.

Figura 5.9 - Região de colisão com o corpo menos massivo (vermelho). Aqui a pressão da radiação solar não foi levada em consideração. A região branca é a região interna ao corpo M_2 . Nesta imagem, está sendo considerado que 50% da massa total do sistema está no corpo primário mais massivo e consequentemente, 50% da massa total do sistema no primário menos massivo.



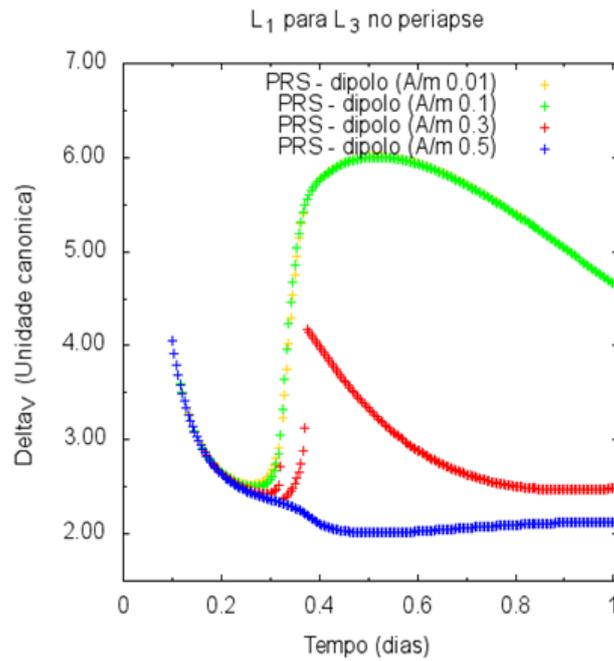
Como verificamos que a pressão da radiação solar não é muito significativa nas transferências quando consideramos a razão A/m muito pequena, resolvemos verificar o que acontece com as trajetórias quando aumentamos a razão A/m . Para isso, nós fixamos a posição do sol em 0 graus (no periapse) e variamos a razão de massa. A Figura 5.10 relaciona o ΔV pelo ângulo de disparo, quando realizamos a transferência do ponto L_1 para o ponto L_3

Figura 5.10 - Transferência de L_1 para L_3 .



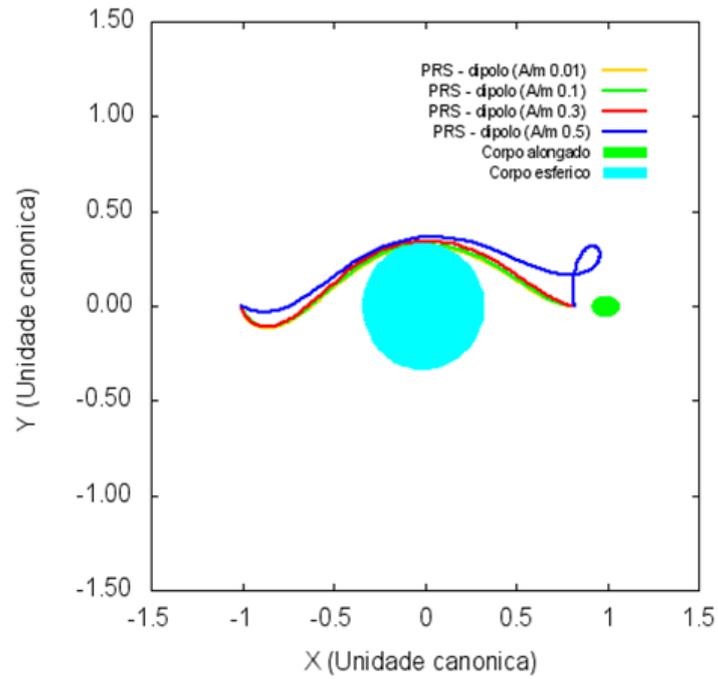
Podemos perceber que, a medida que variamos a razão área massa, a influencia da pressão da radiação solar para realizar a transferência torna significativa. Vemos que quando $A/m = 0.5 \text{ m}^2/\text{kg}$, o ΔV necessário para realizar a transferência é um pouco menor que nos outros casos. Com o intuito de saber quanto tempo dura para realizar essas transferências, construímos um gráfico que relaciona o ΔV pelo tempo (em dias) para a realização da transferência, conforme mostra a Figura 5.11

Figura 5.11 - Transferência de L_1 para L_3 .



A Figura 5.12 mostra as transferências ótimas do pontos L_1 para o ponto L_3 e suas respectivas razões de massa.

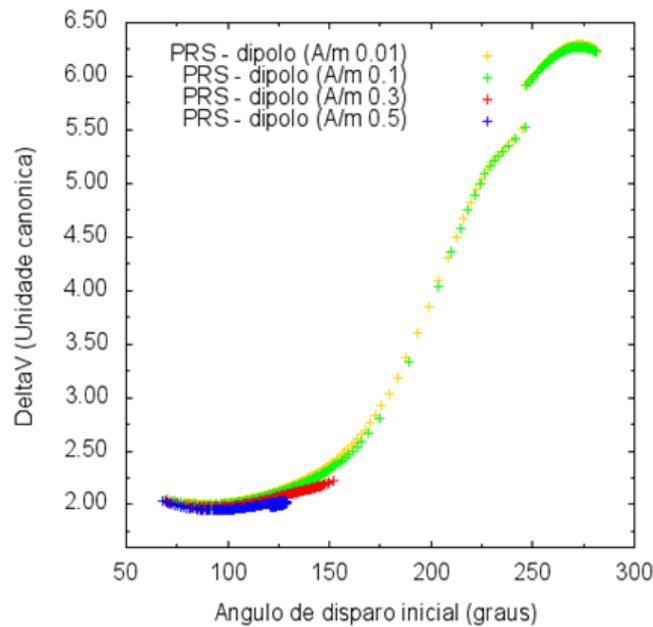
Figura 5.12 - Trajetórias do ponto de equilíbrio L_1 para L_3 .
 L_1 para L_3 no periapse



Podemos notar na Figura 5.12 que para $A/m = 0,01 \text{ m}^2/\text{kg}$ e para $A/m = 0.1 \text{ m}^2/\text{kg}$, o veículo espacial não completaria a transferência, pois, o satélite colide com o corpo mais massivo (trajetória amarela e verde, respectivamente). Já, quando a razão área massa é igual a $0.3 \text{ m}^2/\text{kg}$ (trajetória vermelha), a transferência é realizada. Esta é uma trajetória arriscada para uma missão espacial, pois a trajetória passa muito próxima a superfície do corpo M_1 . A trajetória que gasta um menor ΔV (Como foi mostrado nas Figuras 5.10 e 5.11) é mostrada da cor azul na Figura 5.12. Podemos notar que ela passa a uma altitude maior do corpo M_1 , logo, é uma manobra mais seguro para realizar em uma missão espacial.

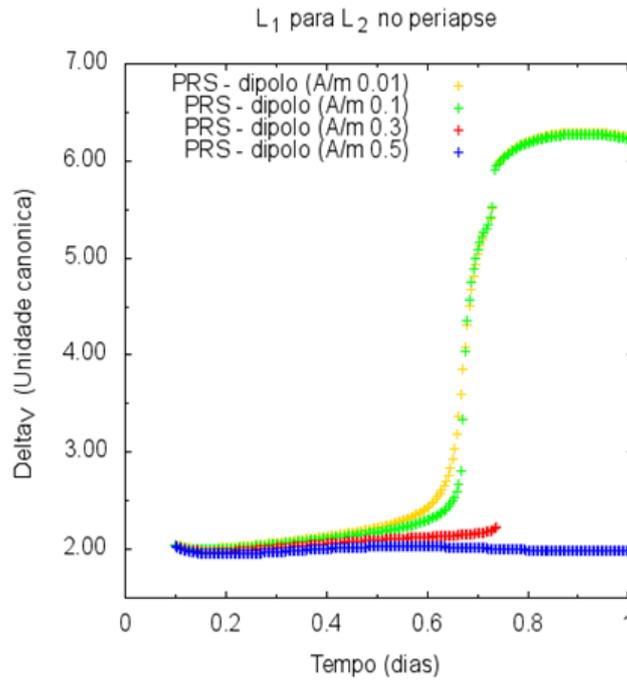
Fizemos a mesma análise considerando a transferência do ponto de equilíbrio L_1 para o L_2 . A Figura 5.13 mostra a ΔV necessário para realizar uma transferência de L_1 para L_2 e seu respectivo angulo de disparo.

Figura 5.13 - Transferência de L_1 para L_2 .
 L_1 para L_2 no periapse



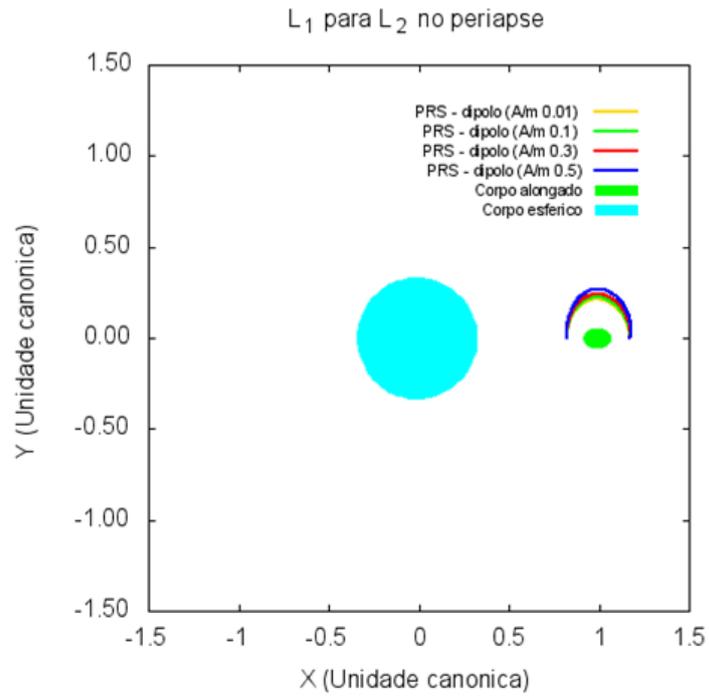
Podemos perceber que inicialmente, as curvas são bastante semelhantes. Mas a transferência quando a razão área massa vale $0.5 \text{ m}^2/\text{kg}$, o ΔV necessário para realizar a manobra é ligeiramente menor. A relação do ΔV pelo tempo para realizar a manobra é mostrada na Figura 5.14.

Figura 5.14 - Transferência de L_1 para L_2 .



Os trajetos da transferências ótimas são mostradas na Figura 5.15. Diferentemente do que foi mostrado na Figura 5.12, nenhuma das transferências mostradas na Figura 5.15 colide com um dos corpos primários.

Figura 5.15 - Trajetórias do ponto de equilíbrio L_1 para L_2 .



6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram analisados os pontos de equilíbrio para um sistema binário de asteroide. Para realizar este estudo, nós nos baseamos nas propriedades físicas e orbitais do asteroide 2001SN₂₆₃. A escolha de utilizar as características deste sistema de asteroide foi devido a uma missão brasileira, chamada *Missão ASTER*, que tem pretensões de ser pioneira no Brasil em termos de exploração espacial e tem como meta principal orbitar o asteroide triplo 2001SN₂₆₃. O foco deste estudo não foi analisar este sistema em todos os detalhes mas sim, se basear nas propriedades destes asteroides para fazer um estudo mais geral na área do problema restrito de três corpos. Neste trabalho analisamos as Equações do movimento e encontramos as soluções dessas Equações para o Problema Restrito Circular de Três Corpos (PRPCTC), Problema Restrito Elíptico de Três Corpos (PRPETC), Problema Restrito Completo de Três Corpos (PRCTC) e, por fim, o Problema Restrito Síncrono de Três Corpos (PRSTC).

Vimos que foi encontrado cinco soluções de equilíbrio para o PRPCTC e para o PRETC, conhecidas como pontos lagrangeanos, onde três desses pontos são colineares (conhecidos como L_1 , L_2 e L_3) e dois desses pontos (conhecidos como L_4 e L_5) são triangulares (e coplanares). Foi analisada a estabilidade linear desses pontos, onde verificou-se que os pontos colineares são todos instáveis. Por outro lado, os pontos de equilíbrio triangulares são linearmente estáveis. Então, se um corpo (uma sonda espacial, por exemplo) está em um desses pontos (L_4 ou L_5) e sofre uma perturbação, dependendo da intensidade desta ação, o objeto de massa infinitesimal pode passar a oscilar em torno desses pontos sem escapar. Os pontos de equilíbrio de um sistema binário de asteroide não são muito fortes devido à pouca massa dos corpos, mas recebe bem menos perturbações do que qualquer outro ponto no espaço. Sendo assim, são pontos de maior estabilidade para manter um veículo espacial e ser usado como órbitas de estacionamento como citados anteriormente. O ponto L_1 do sistema binário pode ser uma boa base para observar os dois corpos ao mesmo tempo. Colocar um satélite no ponto L_2 ou L_3 também é interessante para observar um ou o outro asteroide de interesse. Pode-se, inclusive, mover o satélite entre os pontos lagrangeanos para ficar em diferentes pontos de observação. Esses pontos ficam em regiões de menor consumo para manutenção orbital. Um fenômeno que pode ocorrer é a existência de pequenas partículas nos pontos L_4 e L_5 devido à sua estabilidade. Sabendo-se a sua localização podemos apontar telescópios e eventualmente descobrir esses objetos.

Nas Equações do movimento do PRCTC, quando consideramos o achatamento dos corpos primários, novos pontos de equilíbrio foram encontrados. Além dos cinco pontos de equilíbrio clássicos, que são encontrados no problema restrito circular/elíptico de três corpos, podem surgir mais quatro novos pontos de equilíbrio coplanar (chamados aqui de L_6 , L_7 , L_8 e L_9). Isto ocorre devido à forma do achatamento dos corpos analisados. Quando consideramos os dados dos asteroide dos corpos *Alpha* e *Beta*, percebemos que o corpo *Alpha* é um corpo *oblato* (ou seja, mais alongado no eixo equatorial), já o corpo *Beta* tem um achatamento *prolate* (ou seja, é mais alongado no eixo polar). Esta forma *prolate* faz surgirem novos pontos de equilíbrio próximos ao corpo com uma elongação maior no eixo polar. Foi feito também uma análise da estabilidade de todos estes pontos encontrados (L_1 ao L_9) e os indícios mostram que apenas os pontos de equilíbrio L_4 e L_5 são linearmente estáveis, enquanto todos os outros são instáveis. Por outro lado, quando consideramos as características físicas dos corpos *Alpha* e *Gamma* do asteroide 2001Sn₂₆₃, percebemos que os dois corpos tem um formato *oblato*. Para este tipo de forma, não foi encontrada nenhuma solução para a Equação do movimento além das cinco soluções clássica. Também foi analisado a estabilidade dos pontos de equilíbrio para as características destes sistema, e as evidências mostram-nos que os pontos colineares (L_1 , L_2 e L_3 são instáveis, por outro lado, os pontos de equilíbrio L_4 e L_5 são linearmente estáveis.

Neste trabalho, também foi estudado o PRSTC usando o modelo de um dipolo de massa em rotação. Considerou-se a existência de um asteroide alongado, chamado aqui de (M_2) (modelado como um dipolo de massa) com um período de rotação em torno de seu próprio eixo igual ao seu período de translação em torno do centro de massa do sistema. Portanto, existe um sincronismo, fazendo com que os dois sistemas de referencia não inerciais (centrado no centro de massa do sistema e centrado no centro de massa do dipolo) girem com a mesma velocidade angular. Foram determinadas as coordenadas dos pontos de equilíbrio nos casos em que $y = 0$ e $y \neq 0$. Foram encontrados cinco pontos de equilíbrio, todos no plano do movimento dos primários. Os resultados mostraram que existem pequenas diferenças para os pontos que estão longe de M_2 (L_3 , L_4 , L_5) e diferenças maiores nos pontos mais próximos de M_2 (L_1 , L_2), em comparação com as situações onde os corpos são considerados como pontos de massa. Nota-se que os pontos de equilíbrio L_1 e L_2 se afastam de M_2 , quando a massa do corpo M_2 aumenta. Isto é devido ao fato de que o aumento da massa é diretamente proporcional ao aumento da força gravitacional, tornando necessária uma nova configuração para obter o equilíbrio. As regiões de fronteira da partícula de massa desprezível foram obtidas usando a *CVZ* para valores diferentes

da constante de *Jacobi*. No sistema aqui analisado, as regiões permitidas para o movimento da partícula de massa infinitesimal aumentam quando o valor da constante de *Jacobi* diminui. Finalmente, foi feita a análise da estabilidade desses pontos. A evidência numérica é obtida indicando que os pontos de equilíbrio colineares são instáveis e que os pontos de equilíbrio não-colineares são linearmente estáveis, se o parâmetro de massa estiver abaixo de 0.019328969. A análise das equações variacionais para calcular a estabilidade para ordens superiores não foi feita. Os pontos de equilíbrio do sistema de asteroides são considerados locais que recebem perturbações mínimas, portanto, eles são bons lugares para manter um veículo espacial e podem ser usados como órbitas de estacionamento.

Também foram investigadas as órbitas de uma espaçonave em torno de um sistema binário de asteroides. O asteroide mais massivo foi considerado como uma forma esférica e para o segundo asteroide (menos massivo) utilizamos o modelo de dipolo de massa em rotação. Uma série de integrações numéricas foram feitas para todos os modelos adotados, levando em consideração a força gravitacional dos dois corpos e a pressão da radiação solar. Foi estabelecida uma grade relacionando o semi-eixo maior e a excentricidade, para verificar a estabilidade e instabilidade das órbitas de uma espaçonave posicionada na proximidade de um sistema binário de asteroides. Algumas órbitas estáveis foram encontradas ao redor do sistema binário de asteroide, quando não consideramos a pressão da radiação solar. Quando 99% da massa do sistema foi alocada ao corpo esférico, encontramos algumas órbitas estáveis, para condições iniciais que começam muito próximas ao corpo que foi modelado como um dipolo de massa em rotação. No entanto, quando se leva em conta a pressão de radiação solar, para a mesma razão de massa, não foram encontradas órbitas estáveis que durassem toda a integração numérica (1000 períodos orbitais do sistema).

Após essa análise, verificamos o comportamento do sistema assumindo 95% do total da massa do sistema no corpo M_1 (mais massivo) e apenas 5% do total da massa do sistema no corpo M_2 . Nesta análise foi possível encontrar órbitas estáveis (quando a pressão da radiação solar não é levada em conta) em torno do corpo de menor massa (dipolo de massa em rotação). A região estável que foi encontrada para 1000 períodos orbitais é uma indicação de locais onde satélites poderiam ser posicionados em uma missão espacial. As órbitas instáveis também são interessantes. Um dos pontos de vista é que essas órbitas poderiam ser usadas para observar o corpo de menor massa por um período de tempo curto e, naturalmente, esta sonda se aproximará do corpo mais massivo sem a necessidade de um empuxo. Ao se aproximar do corpo de maior massa, aí sim, teria a necessidade de utilizar um propulsor para, ao invés de colidir,

orbitar o corpo de maior massa.

As órbitas que estão mais distantes dos corpos são aquelas que sofrem uma maior influência da pressão da radiação solar. À medida que nos afastamos do corpo M_2 , a força gravitacional na sonda espacial torna-se menor, aumentando a influência da pressão da radiação solar sobre a espaçonave. Embora na escala de tempo considerada para este estudo (dois anos) sejam mostradas áreas de estabilidade, não podemos garantir que os resultados serão aplicados em um horizonte de tempo mais longo, mas a colocação de espaçonaves em sistemas binários de asteroides em intervalos de tempos superiores são possibilidades a serem exploradas em pesquisas futuras sobre o assunto. Em oposição ao comportamento de áreas estáveis, as regiões instáveis são detectadas em intervalos de tempo menores do que o período analisado, e conseqüentemente, essas mesmas regiões serão instáveis num longo período de tempo. As regiões caracterizadas como estáveis, embora permaneçam neste estado dentro de um curto período de tempo (um a dois anos terrestres), e posteriormente se tornem regiões instáveis, podem ser regiões interessantes para missões espaciais que requerem até dois anos de estudo para completar seu objetivo.

Percebemos também os efeitos da forma de um corpo em uma transferência bi-impulsiva entre os pontos de equilíbrio em um sistema binário de asteroides. Os resultados indicaram que a forma não esférica de um corpo pode modificar a trajetória da espaçonave, modificando a energia necessária para as transferências. Também é uma indicação de que a espaçonave não atingiria o alvo, se fosse desconsiderada a distribuição de massa de um corpo. Notamos que nem sempre a órbita ótima é a melhor opção para realizar uma transferência, pois precisamos levar em consideração a dimensão do corpo, ou seja, pode acontecer da melhor órbita colidir com um dos primários e não alcançar o seu destino final.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman Companhia Ed, 2007. 19
- ARAÚJO, R. A. N.; WINTER, O. C.; PRADO, A. F. B. A.; SUKHANOV, A. Stability regions around the components of the triple system 2001sn263. **MNRAS**, v. 423, p. 3058–3073, 2012. 76
- BATTIN, R. **An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics**. revised edition. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1999. (AIAA Education Series). 29
- BENNETT, A. Characteristic exponents of the five equilibrium solutions in the elliptically restricted problem. **Icarus**, v. 4, p. 177–187, May 1965. 21
- BEUTLER, G. **Methods of Celestial Mechanics**. Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2005 edition, 2005. 12
- _____. **Methods of Celestial Mechanics**. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2005 edition, 2005. 35, 37, 75, 76
- BROUCKE, R. Traveling between the lagrange points and the moon. **Journal of Guidance and Control**, v. 2, n. 4, p. 257–263, 1979. 107
- BRUM, A. G. V.; A., H. J.; REGO, I. S.; FRANCISCO, C. P. F.; FENILI, A.; MADEIRA, F.; CRUZ, F. C.; ASSAFIN, M. Preliminary development plan of the alr, the laser rangefinder for the aster deep space mission to the 2001 sn263 asteroid. **Journal of Aerospace Technology and Management (Online)**., v. 3, p. 331–338, 2011. 8
- BRUM, A. G. V.; CRUZ, F. C.; JR, A. H. Alr - laser altimeter for the aster deep space mission. simulated operation above a surface with crater. **Journal of Physics. Conference Series (Online)**., v. 641, p. 012007, 2015. 8
- _____. Laser altimeter for the deep space mission aster modeling and simulation of the instrument operation above a surface with crater. **Computational & Applied Mathematics**., v. 35, p. 739–751, 2016. 8
- BRUM, A. G. V.; CRUZ, F. C.; JR, A. H.; RODRIGUES, A. P. Alr-a laser altimeter for the first brazilian deep space mission. modeling and simulation of the instrument and its operation. matemática aplicada e computacional. **Computational & Applied Mathematics**., v. 34, p. 557–569, 2015. 8

BRUM, A. G. V.; RODRIGUES, A. P. Topographic profile of a target with use of laser pulses. a survey directed to the brazilian deep space mission aster. **Journal of Physics. Conference Series (Online)**., v. 465, p. 012003, 2013. 8

CABETTE, R.; PRADO, A. F. B. A. Transfer orbits to/from the lagrangian points in the restricted four-body problem. **Acta Astronautica**, v. 63, n. 11, p. 1221–1232, 2008. 107

CHERMNYKH, S. V. On the stability of libration points in a certain gravitational field. **Vest. Leningrad Univ**, v. 2, n. 8, p. 10 pp., 1987. 28

CUI, P.; QIAO, D. The present status and prospects in the research of orbital dynamics and control near small celestial bodies. **Theoretical and Applied Mechanics Letters**, v. 4, n. 1, p. 14 pp., 2014. 27

DANTAS, M. P.; LLIBRE, J. The global phase space for the 2- and 3-dimensional kepler problems. **Qualitative Theory of Dynamical Systems**, v. 8, p. 45, Dezembro 2009. 4

DULLIN, H. R.; WORTHINGTON, J. The vanishing twist in the restricted three-body problem. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 276, p. 12–20, Maio 2014. 4, 20, 22

DUTT, P.; ANILKUMAR, A. K. Planar fly-by trajectories to moon in the restricted three-body problem. **Advances in Space Research**, v. 54, n. 10, p. 2050–2058, November 2014. 4, 13, 16, 53, 60

DUTT, P.; SHARMA, R. Evolution of periodic orbits near the lagrangian point l2. **Advances in Space Research**, v. 47, n. 10, p. 1894–1904, Junho 2011. 14, 19, 23, 63

FERRARI, F.; LAVAGNA, M.; HOWELL, K. Dynamical model of binary asteroid systems through patched three-body problems. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 125, n. 4, p. 413–433, 2016. 5, 6, 28

GOZDZIEWSKI, K.; MACIEJEWSKI, A. J. Nonlinear stability of the lagrangian libration points in the chermnykh problem. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 70, n. 1, p. 41–58, 1998. 28

_____. Unrestricted planar problem of a symmetric body and a point mass: Triangular libration points and their stability. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 75, n. 4, p. 251–285, 1999. 28

HOBSON, E. **The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics**. New York: Chelsea Publishing Company, 1955. 27

KIRPICHNIKOV, S. N.; KOKORIEV, A. A. On the stability of stationary collinear lagrangian motions in the system of two attracting bodies: an axisymmetrical, peer-like and spherically symmetric. **Vest. Leningrad Univ**, v. 3, n. 1, p. 73–83, 1988. 28

KOKORIEV, A. A.; KIRPICHNIKOV, S. N. On the stability of stationary triangular lagrangian motions in the system of two attracting bodies: an axisymmetrical, peer-like and spherically symmetric. **Vest. Leningrad Univ**, v. 1, n. 1, p. 75–84, 1988. 28

KUMARI, R.; KUSHVAH, B. S. Stability regions of equilibrium points in restricted four-body problem with oblateness effects. **Astrophysics and Space Science.**, v. 349, p. 693–704, 2014. 55

LANZANO, P. Contributions to the elliptic restricted three-body problem. **Icarus**, v. 6, p. 114–128, 1967. 21

MARGOT, J. I. et al. Binary asteroids in the near-earth object population. **Science**, v. 296, p. 1445–1448, 2002. 5

MARKEV, A. P. **Classical and Celestial Mechanics**. 1. ed. New Jersey: Princeton University Press, 2010. 21

MASAGO, B. Y. P. L. **ESTUDO DE ÓRBITAS RESSONANTES NO SISTEMA TRIPLO 2001SN263**. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), Brasil, 2014. 8

MASAGO, B. Y. P. L. et al. Developing the ω -precessing inclined bi-elliptical four-body problem with radiation pressure- to search for orbits in the triple asteroid 2001sn263. **Advances in Space Research.**, v. 57, p. 962–982, 2016. 6, 8, 27, 39, 57, 74, 75, 76

MCCUSKEY, S. W. **Introduction to Celestial Mechanics**. 1. ed. USA: Addison-Wesley Publishing Company, 1963. 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 23, 30, 33, 34, 53, 54, 60, 107

MCINNES, C. R. **Solar Sailing. Technology, Dynamics and Mission Applications**. 1. ed. Chichester, UK: Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999. 34, 35

- MERLINE, W. J. et al. **Asteroids do have Satellites**. Tucson: University of Arizona Press, 2002. 5
- MOLTON, F. R. **An Introduction to Celestial Mechanics**. 4. ed. New York: The Macmillan Company, 1960. 12, 14, 15, 16, 17, 34, 53, 54
- MONTENBRUCK, O.; GILL, E. **Satellite Orbits**. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Springer Science & Business Media., 2000. 36, 75, 76
- MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar System Dynamics**. New York: Cambridge University Press, 1999. xv, 3, 4, 11, 15, 17, 18
- NETO, J. B. S.; SANCHEZ, D. M.; PRADO, A. F. B. A.; FORMIGA, J. K. S. Using solar radiation pressure to maneuver a spacecraft in the triple asteroid 2001sn263. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 158, p. 3789–3804, 2016. 8
- OLIVEIRA, G. M. C.; GOMES, V. M.; PRADO, A. F. B. A.; SANCHEZ, D. M. Transfers between the lagrangian points and the primaries considering radiation pressure. In: . [S.l.]: Advances in the Astronautical Sciences, 2016. v. 158. 108
- OLIVEIRA, G. M. C.; PRADO, A. F. B. A.; SANCHEZ, D. M.; GOMES, V. M. Traveling between the earth-moon lagrangian points and the earth. In: . [S.l.]: SpaceOps 2016 Conference, 2016. 107, 108
- PAMELA, W.; MISRA, A. K.; KESHMIRI, M. On the planar motion in the full two-body problem with inertial symmetry. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 117, p. 263–277, 2013. 5
- PICK, E.; PICHA, J.; VYSKOCIL, V. **Theory of the Earth's Gravity Field**. New York: Elsevier Scientific Publishing Company, 1973. 27
- PINTO, D. M. C. **Estabilidade do Problema de Três Corpos Restrito**. Dissertação (Mestrado em matemática) — Universidade do Minho, Escola de Ciência (Portugal), Portugal, 2006. xv, 20
- PRADO, A. F. B. A. Traveling between the lagrangian points and the earth. **Acta Astronautica**, v. 39, n. 7, p. 48–86, 1996. 107, 109
- _____. **Trajatórias espaciais e manobras assistidas por gravidade**. 1. ed. São José dos Campos: Editora do Autor, 2001. 4, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 22, 23

_____. Orbital maneuvers between the lagrangian points and the primaries in the earth-sun system. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 28, n. 2, p. 131–139, 2006. 107

_____. Mapping orbits around the asteroid 2001sn263. **Advances in Space Research.**, v. 53, p. 877–889, 2014. xv, 6, 7, 8, 26, 39, 57, 74

PRADO, A. F. B. A.; KUGA, H. K. **Fundamentos da tecnologia espacial**. 1. ed. São José dos Campos, Brasil: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), 2001. 6

_____. **Fundamentos de Tecnologia Espacial**. São José dos Campos: INPE, 2001. 6

PRADO, A. F. B. A.; RIOS-NETO, A. Um estudo bibliográfico sobre o problema de transferências de órbita. **Revista Brasileira de Ciências Mecânicas**, v. 15, n. 1, p. 65–78, 1993. 6

RAMÍREZ, A. M.; VIDAL, C. Behavior of the binary collision in a planar restricted $(n+1)$ -body problem. **Physica D: Nonlinear Phenomena.**, v. 28, n. 2, p. 1–11, Julho 2013. 4, 14, 15

REN, Y.; SHAN, J. Low-energy lunar transfers using spatial transit orbits. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 19, n. 3, p. 554–569, March 2014. 4, 12, 13, 17, 19, 53, 61

RIBAS, F. B. et al. A ring system detected around the centaur (10199) chariklo. **Nature**, v. 508, p. 72–75, 2014. 5

ROY, A. E. **Orbital Motion**. 4. ed. Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 2005. 107

ROY, A. E.; OVENDEN, M. W. On the occurrence of commensurable mean motions in the solar system. ii. the mirror theorem. **MNRAS**, v. 115, p. 2981, 1955. 107

SCHEERES, D. J.; WILLIAMS, B. G.; MILLER, J. K. Evaluation of the dynamic environment of an asteroid: Applications to 433 eros. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 23, n. 3, p. 466–475, 2000. 6, 27, 73

SZEBEHELY, V. **Theory of Orbits**. New York and London: Academic press., 1967. 11, 12, 13, 14, 17, 19, 33, 34, 53, 56, 60, 61, 63, 65, 107

THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Classical Dynamics of Particles and Systems**. 5. ed. United States: Brooks Cole, 2011. 12

TRACY, M. B. et al. Physical modeling of triple near-earth asteroid (153591) 2001 sn263 from radar and optical light curve observations. **Icarus**, v. 248, p. 499–515, 2015. 39, 43, 57, 74

TRICARICO, P.; SYKES, M. V. The dynamical environment of dawn at vesta. **Planetary and Space Science**, v. 58, n. 12, p. 1516–1525, 2010. 27

VALTONEN, M.; KARTTUNEN, H. **The Three-Body Problem**. New York: Cambridge University Press, 2005. xv, 2, 3, 16, 17, 18, 20

WANG, X.; JIANG, Y.; GONG, S. Analysis of the potential field and equilibrium points of irregular-shaped minor celestial bodies. **Astrophysics and Space Science**, v. 353, p. 105–121, 2014. 31

WERNER, R. A. The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners. **Celest. Mech. Dyn. Astron.**, v. 59, n. 3, p. 253–278, 1994. 27

WILLIAMS, T.; ABATE, M. Capabilities of furlable solar sails for asteroid proximity operations. **Journal of Spacecraft Rockets**, v. 46, n. 5, p. 967–975, 2009. 5

WOO, P.; MISRA, A. K. Equilibrium points in the full three-body problem. **Acta Astronautica**, v. 99, p. 158–165, 2014. 6, 19

YANG, H.; GONG, S.; BAOYIN, H. Two-impulse transfer orbits connecting equilibrium points of irregular-shaped asteroids. **Astrophysics and Space Science**, v. 357, p. 1–11, 2015. 107, 108

ZENG, X.; FANG, B.; LI, J. et al. Generalized flyby trajectories around elongated minor celestial bodies as a rotating mass dipole. **Acta Mechanica Sinica.**, v. 32, n. 3, p. 535–545, 2016. 27, 28

ZENG, X.; LIU, X.; LI, J. Extension of the rotating dipole model with oblateness of both primaries. **Research in Astron. Astrophys**, 2016. First online. 28

ZENG, X. Y.; BAOYIN, H.; LI, J. Updated rotating mass dipole with oblateness of one primary (ii): Out-of-plane equilibria and their stability. **Astrophysics and Space Science.**, v. 361, n. 1, p. 15, 2016. 55

ZENG, X. Y.; GONG, S.; LI, J.; ALFRIEND, K. Equilibrium points of elongated celestial bodies as the perturbed rotating mass dipole. **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 39, n. 6, p. 1223 pp., 2016. [xv](#), [23](#), [24](#), [25](#), [26](#), [30](#), [53](#)

ZENG, X. Y.; LI, J.; BAOYIN, H. Updated rotating mass dipole with oblateness of one primary (i): Equilibria in the equator and their stability. **Astrophysics and Space Science.**, v. 361, n. 1, p. 14, 2016. [28](#)

ZENG, X. Y. et al. Study on the connection between the rotating mass dipole and natural elongated bodies. astrophysics and space science. **Astrophysics and Space Science**, v. 356, p. 29–42, 2015. [xv](#), [5](#), [27](#), [28](#), [29](#), [30](#), [31](#), [32](#)

PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE

Teses e Dissertações (TDI)

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

Manuais Técnicos (MAN)

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

Notas Técnico-Científicas (NTC)

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programas de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

Relatórios de Pesquisa (RPQ)

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

Publicações Didáticas (PUD)

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

Publicações Seriadas

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Contam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

Programas de Computador (PDC)

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. Aceitam-se tanto programas fonte quanto os executáveis.

Pré-publicações (PRE)

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.