



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21b/2016/02.29.19.18-TDI

USO DE GRÁFICO DE RECORRÊNCIA E TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA PARA CARACTERIZAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS

Barbara Maximino da Fonseca Reis

Dissertação de Mestrado do
Curso de Pós-Graduação em
Computação Aplicada, orientada
pelos Drs. Elbert Einstein Nehrer
Macau, Marcos Gonçalves Quiles,
e Margarete Oliveira Domingues,
aprovada em 04 de março de 2016.

URL do documento original:

[<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3L97U2B>](http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3L97U2B)

INPE
São José dos Campos
2016

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@inpe.br

**COMISSÃO DO CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO
DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (DE/DIR-544):****Presidente:**

Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação (CPG)

Membros:

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

Dr. André de Castro Milone - Coordenação de Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dra. Carina de Barros Melo - Coordenação de Laboratórios Associados (CTE)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação de Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Dr. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SID)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SID)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Marcelo de Castro Pazos - Serviço de Informação e Documentação (SID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21b/2016/02.29.19.18-TDI

USO DE GRÁFICO DE RECORRÊNCIA E TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA PARA CARACTERIZAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS

Barbara Maximino da Fonseca Reis

Dissertação de Mestrado do
Curso de Pós-Graduação em
Computação Aplicada, orientada
pelos Drs. Elbert Einstein Nehrer
Macau, Marcos Gonçalves Quiles,
e Margarete Oliveira Domingues,
aprovada em 04 de março de 2016.

URL do documento original:

[<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3L97U2B>](http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3L97U2B)

INPE
São José dos Campos
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Reis, Barbara Maximino da Fonseca.

R278u Uso de gráfico de recorrência e transformada wavelet discreta para caracterização de sistemas dinâmicos / Barbara Maximino da Fonseca Reis. – São José dos Campos : INPE, 2016.
xxviii + 133 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21b/2016/02.29.19.18-TDI)

Dissertação (Mestrado em Computação Aplicada) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2016.

Orientadores : Drs. Elbert Einstein Nehrer Macau, Marcos Gonçalves Quiles, e Margarete Oliveira Domingues.

1. Sistema dinâmico. 2. Gráfico de recorrência. 3. Análise de quantificação de recorrência. 4. Transformada wavelet discreta. 5. Aprendizado de máquina. I.Título.

CDU 517.938



Esta obra foi licenciada sob uma [Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](#).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](#).

Aluno (a): **Barbara Maximino da Fonseca Reis**

Título: " USO DE GRÁFICO DE RECORRÊNCIA E TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA PARA CARACTERIZAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS".

Aprovado (a) pela Banca Examinadora
em cumprimento ao requisito exigido para
obtenção do Título de **Mestre** em


Computação Aplicada

Dr. Ezzat Selim Chalhoub



Presidente / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau



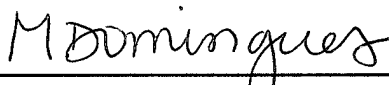
Orientador(a) / INPE / São José dos Campos - SP

Dr. Marcos Gonçalves Quiles



Orientador(a) / UNIFESP / São José dos Campos - SP

Dra. Margarete Oliveira Domingues



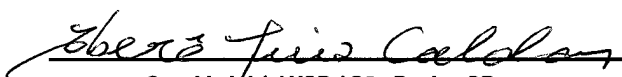
Orientador(a) / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Joaquim José Barroso de Castro



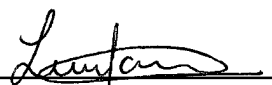
Membro da Banca / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Iberê Luiz Caldas



Convidado(a) / USP / São Paulo - SP

Dra. Laurita dos Santos



Convidado(a) / UNIVAP / São José dos Campos - SP

Este trabalho foi aprovado por:

() maioria simples

☒ unanimidade

São José dos Campos, 04 de Março de 2016

*“A verdadeira viagem de descobrimento não consiste em procurar
novas paisagens, mas em ter novos olhos”.*

MARCEL PROUST

*A meus pais, **Luiz e Rosana**, e a meu noivo **Cristiano***

AGRADECIMENTOS

Ao INPE pela oportunidade de estudo e pelos recursos físicos concedidos.

À CAPES e ao CNPq pelo suporte financeiro.

Aos meus orientadores Dr. Elbert Macau, Dr. Marcos Quiles e Dra. Margarete Domingues pela disponibilidade, incentivo, paciência e amizade.

Aos colaboradores Dra. Laurita Santos, Dr. Odin Mendes, Dr. Luiz Vieira, Dr. Alisson Dal Lago, Dra. Tereza Satiko, Me. Jenny Gomez, Me. Tardelli Stekel, Me. Luciano Magrini e Eng. Varlei Menconi pela disponibilidade dos dados de intervalos RR e de campo magnético solar e pelas discussões científicas que foram fundamentais para o desenvolvimento desta dissertação.

Aos professores do curso de Computação Aplicada pelo conhecimento compartilhado.

A minha família, especialmente meus pais, pelo carinho e apoio em todos os momentos importantes e decisivos na minha vida.

Ao meu noivo, pelo amor, companheirismo, paciência e compreensão.

Aos amigos pela amizade e incentivo.

RESUMO

A compreensão do mundo físico depende de observações, medidas, análise e predição de padrões expressos na natureza. Grande quantidade de sistemas possuem dinâmicas complexas, não-lineares e não-estacionárias, que dificultam a sua compreensão efetiva. Nas últimas décadas, o gráfico de recorrência e a análise de quantificação de recorrência tornaram-se uma alternativa para o estudo de sistemas complexos, pois permitem tanto visualizar as estruturas da série temporal, quanto estimar os invariantes presentes no sistema. Contudo, essas técnicas possuem algumas desvantagens como alto custo computacional, alteração de resultados devido a presença de ruído e dificuldade para distinguir séries temporais com comportamentos semelhantes. Nessa dissertação, o objetivo é analisar como a transformada *wavelet* discreta pode ser utilizada para mitigar as desvantagens do gráfico de recorrência. Para isso, são realizados três abordagens. A primeira abordagem visa utilizar a transformada *wavelet* discreta para gerar séries suavizadas, com menor quantidade de pontos, que preserva a dinâmica do sistema e possibilita diminuir o tempo computacional do cálculo do gráfico de recorrência e da análise de quantificação de recorrência. A segunda abordagem visa distinguir séries com comportamentos semelhantes. Como nesse cenário os comportamentos se diferenciam a nível de detalhes, utiliza-se a transformada *wavelet* discreta para decompor a série em diversas escalas e, assim, possibilitar a distinção das dinâmicas ao combinar os quantificadores de recorrência obtidos em diferentes escalas. A terceira abordagem visa remover o ruído não-linear, por meio da filtragem dos coeficientes *wavelet*, para melhorar a identificação dos invariantes do sistema. Essas abordagens são utilizadas para a análise de dados provenientes do mapa logístico, do sistema de Rössler, de sistemas cardíacos e de campo magnético solar.

Palavras-chave: Sistema dinâmico. Gráfico de recorrência. Análise de quantificação de recorrência. Transformada *wavelet* discreta. Aprendizado de máquina.

USE OF RECURRENCE PLOT AND DISCRETE WAVELET TRANSFORM FOR CHARACTERIZATION OF DYNAMICAL SYSTEMS

ABSTRACT

In order to understand the physical world observations, measurement, analysis and predictions of patterns expressed by nature are required. However, many systems have complex, non-linear and non-stationary dynamics, hampering an effective understanding of the system. In recent decades, the recurrence plot and recurrence quantification analysis have become an alternative for the study of complex systems because they allow viewing the structure of the time series and estimating the invariants present in the system dynamics. However, these techniques have some disadvantages such as high computational cost, results change due to the presence of noise and trouble distinguishing time series with similar behaviors. In this dissertation, the main objective is to analyze how the discrete wavelet transform can be used to mitigate the disadvantages of recurrence plot. For this, three strategies are conducted. The first strategy aims to use the discrete wavelet transform to generate smoothed series, with fewer points, which preserves the system dynamics and allows reducing the computational time of recurrence plot calculation and the recurrence quantification analysis. The second strategy aims to distinguish series with similar behaviors using recurrence quantifiers of different scales. The third strategy aims to remove the non-linear noise by filtering the wavelet coefficients. These strategies are used for data analysis from the logistic map, Rössler system, cardiac systems and solar magnetic field.

Keywords: Dynamical system. Recurrence plot. Recurrence quantification analysis. Discrete wavelet transform. Machine learning.

LISTA DE FIGURAS

| | <u>Pág.</u> |
|---|-------------|
| 2.1 Evolução das variáveis de estado do sistema de Lorenz. | 3 |
| 2.2 Evolução das variáveis de estado do mapa de Henón. | 4 |
| 2.3 Exemplos de espaço de fase. | 5 |
| 2.4 Influência do tempo de atraso na reconstrução do atrator de Lorenz. | 6 |
| 2.5 Exemplo de sensibilidade às condições iniciais. | 9 |
| 2.6 Diferentes dinâmicas presentes no mapa logístico. | 11 |
| 2.7 Gráfico de bifurcação do mapa logístico. | 12 |
| 2.8 Gráfico do expoente de Lyapunov do mapa logístico. | 12 |
| 2.9 Diferentes dinâmicas presentes no sistema de Rössler. | 14 |
| 2.10 Gráfico de bifurcação do sistema de Rössler. | 14 |
| 2.11 Gráfico do expoente de Lyapunov do sistema de Rössler. | 15 |
| 3.1 Exemplo de recorrência em um sistema bidimensional arbitrário, no qual o estado \vec{x}_j está na vizinhança do estado \vec{x}_i | 17 |
| 3.2 Exemplos de gráficos de recorrência do sistema de Rössler. | 18 |
| 3.3 Tipos de padrões de larga escala de um gráfico de recorrência. | 20 |
| 4.1 Exemplo de dilatação de uma função <i>wavelet</i> -analisadora. | 24 |
| 4.2 Exemplo de deslocamento de uma função <i>wavelet</i> -analisadora. | 24 |
| 4.3 Relação entre os espaços V_j e <i>wavelets</i> W_j | 27 |
| 4.4 Decomposição e reconstrução do sinal utilizando o banco de filtros espe- cular na quadratura. | 28 |
| 4.5 Algoritmo de Mallat - decomposição em vários níveis. | 29 |
| 4.6 Algoritmo de Mallat - reconstrução em vários níveis. | 29 |
| 4.7 Funções escala e <i>wavelet</i> da db1 também conhecida como função de Haar. | 30 |
| 4.8 Funções escala e <i>wavelet</i> da db4. | 31 |
| 4.9 Exemplo de operação de truncamento. | 33 |
| 4.10 Exemplo de filtragem não-linear utilizando <i>wavelet</i> | 37 |
| 5.1 Exemplo de arquitetura de uma árvore de decisão. | 40 |
| 5.2 Exemplo geral de árvore de decisão. | 44 |
| 5.3 Exemplo de separação de duas classes de um conjunto pelo SVM. | 45 |
| 5.4 Exemplos de retas capazes de separar as classes -1 e +1. | 45 |
| 5.5 Representação de uma máquina de vetores de suporte. | 47 |
| 5.6 Exemplo de mapeamento para um espaço de maior dimensão. | 48 |
| 6.1 Ondas de um eletrocardiograma. | 50 |

| | | |
|------|---|----|
| 6.2 | Exemplos de séries temporais de intervalos \mathcal{RR} para os grupos clínicos RNN, RNP, VOL e PC. | 51 |
| 6.3 | Exemplo da dinâmica do campo magnético solar ao longo do tempo. . . . | 53 |
| 6.4 | Exemplo de série temporal do campo magnético solar. | 54 |
| 7.1 | Fluxo do enfoque empreendido, no qual utiliza-se a transformada <i>wavelet</i> discreta para reduzir a complexidade computacional do cálculo do gráfico de recorrência. | 56 |
| 7.2 | Aplicação da transformada <i>wavelet</i> discreta, usando a <i>wavelet db1</i> , em uma série temporal do mapa logístico com $r = 4,00$ | 57 |
| 7.3 | Exemplos dos gráficos de recorrência dos quatro níveis de decomposição da série temporal do mapa logístico com $r = 4$ | 58 |
| 7.4 | Variação dos parâmetros do RQA ao longo dos níveis de decomposição do mapa logístico. | 59 |
| 7.5 | Localização das regiões caóticas e não caóticas do mapa logístico. . . . | 60 |
| 7.6 | Localização de quatro regiões caóticas do mapa logístico. | 60 |
| 7.7 | Acurácias do Experimentos 1 do mapa logístico quando as sete medidas são apresentadas de uma vez como padrões de entrada. | 61 |
| 7.8 | Acurácias do Experimento 2 do mapa logístico quando as sete medidas são apresentadas de uma vez como padrões de entrada. | 62 |
| 7.9 | Acurácias do Experimento 1 quando cada um dos grupos de quantificadores do mapa logístico são fornecidos como padrões de entrada. | 63 |
| 7.10 | Acurácias do Experimento 2 quando cada um dos grupos de quantificadores do mapa logístico são fornecidos como padrões de entrada. | 64 |
| 7.11 | Acurácias do Experimentos 1 quando os quantificadores do mapa logístico são fornecidos individualmente como padrão de entrada. | 65 |
| 7.12 | Acurácias do Experimentos 2 quando os quantificadores do mapa logístico são fornecidos individualmente como padrão de entrada. | 66 |
| 7.13 | Aplicação da transformada <i>wavelet</i> discreta, usando a <i>wavelet db4</i> , em uma série temporal do sistema de Rössler com $a = 0,3$ | 68 |
| 7.14 | Variação dos parâmetros do RQA ao longo dos níveis de decomposição do sistema de Rössler. | 69 |
| 7.15 | Localização das regiões caóticas e não caóticas do sistema de Rössler. . . | 70 |
| 7.16 | Localização das regiões não caóticas, caóticas fase-coerentes e caóticas fase-não coerentes do sistema de Rössler. | 70 |
| 7.17 | Acurácias do Experimento 1 do sistema de Rössler quando as sete medidas são apresentadas de uma vez como padrões de entrada. | 71 |
| 7.18 | Acurácias do Experimento 2 do sistema de Rössler quando as sete medidas são apresentadas de uma vez como padrões de entrada. | 72 |

| | | |
|------|---|----|
| 7.19 | Acurácias do Experimento 1 do sistema de Rössler quando cada um dos grupos de quantificadores são fornecidos como padrões de entrada. | 73 |
| 7.20 | Acurácias do Experimento 2 do sistema de Rössler quando cada um dos grupos de quantificadores são fornecidos como padrões de entrada. | 74 |
| 7.21 | Acurácias do Experimento 1 do sistema de Rössler quando os quantificadores são fornecidos individualmente como padrão de entrada. | 75 |
| 7.22 | Acurácias do Experimento 2 do sistema de Rössler quando os quantificadores são fornecidos individualmente como padrão de entrada. | 76 |
| 7.23 | Variação dos parâmetros do RQA ao longo dos níveis de decomposição das séries de intervalos \mathcal{RR} do grupo RNN. | 78 |
| 7.24 | Variação dos parâmetros do RQA ao longo dos níveis de decomposição das séries de intervalos \mathcal{RR} do grupo RNP. | 79 |
| 7.25 | Variação dos parâmetros do RQA ao longo dos níveis de decomposição das séries de intervalos \mathcal{RR} do grupo VOL. | 80 |
| 7.26 | Variação dos parâmetros do RQA ao longo dos níveis de decomposição das séries de intervalos \mathcal{RR} do grupo PC. | 81 |
| 7.27 | Acurácias das comparações entre os grupos PC-VOL quando as sete medidas são apresentadas de uma vez como padrões de entrada. | 82 |
| 7.28 | Acurácias das comparações entre os grupos RNN-RNP quando as sete medidas são apresentadas de uma vez como padrões de entrada. | 83 |
| 7.29 | Acurácias das comparações entre os grupos RNN-PC quando as sete medidas são apresentadas de uma vez como padrões de entrada. | 83 |
| 7.30 | Acurácias das comparações entre os grupos RNN-VOL quando as sete medidas são apresentadas de uma vez como padrões de entrada. | 84 |
| 7.31 | Acurácias das comparações entre os grupos RNP-PC quando as sete medidas são apresentadas de uma vez como padrões de entrada. | 84 |
| 7.32 | Acurácias das comparações entre os grupos RNP-VOL quando as sete medidas são apresentadas de uma vez como padrões de entrada. | 85 |
| 7.33 | Acurácias da comparação entre os grupos PC-VOL quando cada um dos grupos de quantificadores são fornecidos como padrões de entrada. | 86 |
| 7.34 | Acurácias da comparação entre os grupos RNN-RNP quando cada um dos grupos de quantificadores são fornecidos como padrões de entrada. | 87 |
| 7.35 | Acurácias da comparação entre os grupos RNN-PC quando cada um dos grupos de quantificadores são fornecidos como padrões de entrada. | 88 |
| 7.36 | Acurácias da comparação entre os grupos RNN-VOL quando cada um dos grupos de quantificadores são fornecidos como padrões de entrada. | 89 |
| 7.37 | Acurácias da comparação entre os grupos RNP-PC quando cada um dos grupos de quantificadores são fornecidos como padrões de entrada. | 90 |

| | | |
|------|--|-----|
| 7.38 | Acurácias da comparação entre os grupos RNP-VOL quando cada um dos grupos de quantificadores são fornecidos como padrões de entrada. | 91 |
| 7.39 | Acurácias da comparação entre os grupos PC-VOL quando os quantificadores são fornecidos individualmente como padrão de entrada. | 92 |
| 7.40 | Acurácias da comparação entre os grupos RNN-RNP quando os quantificadores são fornecidos individualmente como padrão de entrada. | 93 |
| 7.41 | Acurácias da comparação entre os grupos RNN-PC quando os quantificadores são fornecidos individualmente como padrão de entrada. | 94 |
| 7.42 | Acurácias da comparação entre os grupos RNN-VOL quando os quantificadores são fornecidos individualmente como padrão de entrada. | 95 |
| 7.43 | Acurácias da comparação entre os grupos RNP-PC quando os quantificadores são fornecidos individualmente como padrão de entrada. | 96 |
| 7.44 | Acurácias da comparação entre os grupos RNP-VOL quando os quantificadores são fornecidos individualmente como padrão de entrada. | 97 |
| 8.1 | Localização das regiões do mapa logístico. | 101 |
| 8.2 | Exemplo de séries temporais e gráficos de recorrência de quatro regiões do mapa logístico. | 102 |
| 8.3 | Acurácias quando se combina os quantificadores dos diversos níveis de decomposição do mapa logístico. | 103 |
| 8.4 | Localização das regiões do sistema de Rössler. | 104 |
| 8.5 | Exemplo de séries temporais e gráficos de recorrência de quatro regiões do sistema de Rössler. | 106 |
| 8.6 | Acurácias quando combina-se os quantificadores dos diversos níveis de decomposição do sistema de Rössler. | 107 |
| 8.7 | Acurácias da metodologia WRA quando compara-se os grupos PC-VOL. | 109 |
| 8.8 | Acurácias da metodologia WRA quando compara-se os grupos RNN-RNP. | 110 |
| 8.9 | Acurácias da metodologia WRA quando compara-se os grupos RNN-PC. | 111 |
| 8.10 | Acurácias da metodologia WRA quando compara-se os grupos RNN-VOL. | 112 |
| 8.11 | Acurácias da metodologia WRA quando compara-se os grupos RNP-PC. | 113 |
| 8.12 | Acurácias da metodologia WRA quando compara-se os grupos RNP-VOL. | 114 |
| 9.1 | Fluxo da metodologia na qual utiliza-se a remoção de coeficientes <i>wavelets</i> para a redução de ruído não-linear. | 115 |
| 9.2 | Séries temporais do sistema de Rössler com ruído aditivo gaussiano. | 116 |
| 9.3 | Erro médio quadrático das técnicas de filtragem não-linear. | 117 |
| 9.4 | Porcentagem de acerto de classificação das técnicas de filtragem para diversos valores de ruído gaussiano. | 118 |
| 9.5 | Regiões de perturbações do campo magnético solar. | 119 |

| | | |
|-----|--|-----|
| 9.6 | Identificação das principais perturbações do campo magnético solar sem a utilização de filtro. | 121 |
| 9.7 | Identificação das principais perturbações do campo magnético solar quando utiliza-se a filtragem dos coeficientes <i>wavelet</i> | 123 |

LISTA DE TABELAS

| | <u>Pág.</u> |
|---|-------------|
| 4.1 Coeficientes de decomposição da transformada <i>wavelet</i> discreta. | 31 |
| 4.2 Coeficientes de reconstrução da transformada <i>wavelet</i> discreta. | 32 |
| 5.1 Possibilidade de jogar a partir dos dados sobre o tempo. | 42 |
| 7.1 Tempo para calcular a DWT e o RQA do mapa logístico. | 67 |
| 7.2 Parâmetros para calcular o gráfico de recorrência e análise de quantificação de recorrência do sistema de Rössler. | 68 |
| 7.3 Tempo para calcular a DWT e o RQA do sistema de Rössler. | 77 |
| 7.4 Parâmetros para calcular o gráfico de recorrência e análise de quantificação de recorrência de cada nível de decomposição das séries de intervalos \mathcal{RR} | 77 |
| 7.5 Comparações realizadas com os grupos de pacientes e suas respectivas quantidade de registros do conjunto de entrada. | 82 |
| 7.6 Tempo para calcular a DWT e o RQA das séries de intervalos \mathcal{RR} | 98 |
| 8.1 Testes utilizados para identificar regiões de comportamento semelhante. . | 100 |
| 8.2 Parâmetros para calcular o gráfico de recorrência e análise de quantificação de recorrência do sistema de Rössler. | 105 |
| 8.3 Parâmetros para calcular o gráfico de recorrência e análise de quantificação de recorrência das séries de intervalos \mathcal{RR} | 108 |
| 8.4 Comparações realizadas com os grupos de pacientes e suas respectivas quantidade de registros do conjunto de entrada. | 108 |
| 9.1 Configuração de seleção para as regiões perturbada e não perturbada. . . | 120 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|------------------|---|
| CWT | – Transformada <i>wavelet</i> contínua |
| db1 | – <i>Wavelet</i> de Daubechies com ordem 1 de aproximação local |
| db4 | – <i>Wavelet</i> de Daubechies com ordem 4 de aproximação local |
| DET | – Determinismo |
| DIV | – Divergência |
| DWT | – Transformada <i>wavelet</i> discreta |
| ENTR | – Entropia de recorrência |
| FIR | – Filtros de resposta a impulso finita |
| FNN | – Método falso vizinho próximo |
| IDWT | – Transformada <i>wavelet</i> discreta inversa |
| L | – Comprimento médio das linhas diagonais |
| L _{MAX} | – Tamanho da maior linha diagonal |
| LAM | – Laminaridade |
| MR | – Análise multiresolução |
| NUTECC | – Núcleo Transdisciplinar de Estudos de Complexidade e Caos |
| PC | – Grupo de adultos em observação pré-operatória |
| RNN | – Grupo de recém-nascidos normais |
| RNP | – Grupo de recém-nascidos prematuros |
| RP | – Gráfico de recorrência |
| RQA | – Análise de quantificação de recorrência |
| RR | – Taxa de recorrência |
| SVM | – Máquinas de Vetores de Suporte |
| TT | – Comprimento médio das linhas verticais |
| VFC | – Variabilidade da frequência cardíaca |
| V _{MAX} | – Tamanho da maior linha vertical |
| VOL | – Grupo de jovens adultos saudáveis |
| WRA | – <i>Wavelet-Recurrence Analysis</i> |
| WT | – Transformada <i>wavelet</i> |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | | |
|--------------------------------|---|--|
| B | – | Campo magnético |
| m | – | Dimensão de imersão |
| n | – | Fator de deslocamento da função <i>wavelet</i> |
| p | – | Número de momentos nulos da <i>wavelet</i> de Daubechies |
| P | – | Ordem da <i>wavelet</i> de Daubechies |
| s | – | Fator de escala da função <i>wavelet</i> |
| Th_H | – | Regra de truncamento <i>hard threshold</i> |
| Th_S | – | Regra de truncamento <i>soft threshold</i> |
| V | – | Espaço das funções escala |
| W | – | Espaço das funções wavelet |
| δ | – | Limiar de corte da regra de truncamento |
| θ | – | Função de Heaviside |
| ρ | – | Raio de vizinhança |
| σ | – | Desvio padrão |
| σ^2 | – | Variância |
| τ | – | Tempo de atraso |
| ψ | – | Função <i>wavelet</i> |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle$ | – | Produto interno |

SUMÁRIO

| | <u>Pág.</u> |
|--|-------------|
| 1 INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 Organização do trabalho | 2 |
| 2 SISTEMAS DINÂMICOS | 3 |
| 2.1 Representação do espaço de fases | 4 |
| 2.1.1 A reconstrução do espaço de fase | 5 |
| 2.1.1.1 A escolha do tempo de atraso | 6 |
| 2.1.1.2 A escolha da dimensão de imersão | 7 |
| 2.2 Sistemas dinâmicos caóticos | 9 |
| 2.2.1 Exemplos de sistemas dinâmicos caóticos | 10 |
| 2.2.1.1 Mapa logístico | 10 |
| 2.2.1.2 Sistema de Rössler | 13 |
| 3 RECORRÊNCIA | 17 |
| 3.1 Gráfico de recorrência | 18 |
| 3.1.1 Categorias do gráfico de recorrência | 19 |
| 3.2 Análise de quantificação de recorrência | 21 |
| 3.2.1 Medida baseada na densidade de recorrência | 21 |
| 3.2.2 Medidas baseadas nas linhas diagonais | 21 |
| 3.2.3 Medidas baseadas nas linhas verticais | 22 |
| 4 TRANSFORMADA <i>WAVELET</i> | 23 |
| 4.1 Análise multiresolução | 26 |
| 4.1.1 <i>Wavelets</i> ortogonais de Daubechies | 30 |
| 4.2 Filtragem não-linear usando <i>wavelet</i> | 32 |
| 5 APRENDIZADO DE MÁQUINA | 39 |
| 5.1 Árvore de decisão | 40 |
| 5.2 Máquinas de Vetores de Suporte | 44 |
| 6 DADOS EXPERIMENTAIS | 49 |
| 6.1 O coração e seus sinais \mathcal{RR} | 49 |
| 6.2 Dinâmica do campo magnético do Sol | 52 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 7 | USO COMBINADO DE <i>WAVELET</i> PARA REDUÇÃO DO TEMPO DE CÁLCULO DO GRÁFICO DE RECORRÊNCIA . | 55 |
| 7.1 | Explorando a <i>wavelet</i> em diferentes escalas | 55 |
| 7.2 | Resultados | 56 |
| 7.2.1 | Mapa logístico | 57 |
| 7.2.2 | Sistema de Rossler | 67 |
| 7.3 | Exemplo de aplicação: Séries temporais de intervalos \mathcal{RR} | 77 |
| 7.4 | Conclusões parciais | 98 |
| 8 | USO COMBINADO DA TRANSFORMADA <i>WAVELET</i> E DO GRÁFICO DE RECORRÊNCIA PARA A CARACTERIZAÇÃO DA DINÂMICA DE SISTEMAS | 99 |
| 8.1 | Metodologia | 99 |
| 8.2 | Explorando a metodologia proposta | 100 |
| 8.2.1 | Mapa logístico | 100 |
| 8.2.2 | Sistema de Rössler | 103 |
| 8.3 | Aplicando à metodologia para análise discriminação de doenças | 107 |
| 8.4 | Conclusões parciais | 114 |
| 9 | USO DE <i>WAVELETS</i> PARA REDUÇÃO DE RUÍDO NÃO-LINEAR | 115 |
| 9.1 | Metodologia | 115 |
| 9.2 | Aplicação da metodologia | 116 |
| 9.3 | Exemplo de aplicação: campo magnético solar | 119 |
| 9.4 | Conclusões parciais | 124 |
| 10 | CONCLUSÕES | 125 |
| 10.1 | Sugestões para trabalhos futuros | 126 |
| | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 127 |

1 INTRODUÇÃO

A compreensão do mundo físico depende de observações, medidas, análise e predição de padrões expressos na natureza (RILEY et al., 2005). Grande quantidade de sistemas possuem dinâmicas complexas, não-lineares e não-estacionárias, que dificultam sua compreensão efetiva. Para tentar compreendê-los, utilizam-se métodos como cálculo de dimensão fractal, expoente de Lyapunov, entropia, entre outros (ECKMANN et al., 1987). Porém, tais métodos possuem desvantagens, como a necessidade de séries temporais longas, alteração dos resultados devido a presença de ruídos, dificuldade para analisar sistemas não-estacionários.

Nas últimas décadas, os gráficos de recorrência tornaram-se uma alternativa para o estudo de sistemas complexos. Esse fato pode ser constatado diante do seu uso na análise de sinais cardíacos (ZBILUT et al., 2002), análise de imagens de tomografia computadorizada quantitativa periférica (MARWAN et al., 2007a), caracterização de regimes de fluidização gás-sólido (LLOP et al., 2015), detecção de crises financeiras (ADDO et al., 2013), análise de tráfego em redes-IP (MASUGI, 2009), etc. Um gráfico de recorrência é uma matriz binária simétrica que indica o quão próximo dois estados estão, a partir de uma determinada definição de proximidade. Dessa forma, o gráfico de recorrência permite tanto visualizar as estruturas da série temporal, quanto estimar invariantes presentes no sistema (THIEL et al., 2004). Além disso, Marwan et al. (2007a) enfatiza que o uso de técnicas baseadas em gráficos de recorrência são úteis para a análise de dados reais curtos e não-estacionários que apresentam determinadas particularidades.

Para extrair as informações presentes no gráfico de recorrência, Webber e Zbilut (1994) desenvolveram a *Análise de Quantificação de Recorrência* (*Recurrence quantification analysis* - RQA). Essa análise gera quantificações estatísticas baseadas na ocorrência de pontos e de linhas (diagonais e verticais) no gráfico de recorrência.

Contudo, a quantidade de pontos de um gráfico de recorrência pode ser alta, demandando um elevado tempo computacional para calcular as medidas de quantificação de recorrência. Para mitigar esse fato, buscaram-se métodos que sejam mais eficientes e que preservem os invariantes do sistema. Costa (2014a) propõe um método de suavização do gráfico de recorrência capaz de capturar as principais estruturas do gráfico de recorrência. Antoniou e Vorlow (2004) propõem utilizar a transformada *wavelet packet* para obter detalhes de diferentes escalas e, em seguida, utilizar a análise de quantificação de recorrência para detectar os invariantes do sistema. Baseando-se no uso da transformada *wavelet*, esse trabalho propõe utilizar a transformada *wavelet*

discreta na série temporal para obter uma série transformada com um número menor de pontos, mas que preserve as principais características do sistema. Em seguida, as medidas de quantificação obtidas pelo RQA são utilizadas para classificar a dinâmica presente no sistema. Esta classificação será realizada por meio de técnicas de aprendizado de máquina, como a árvore de decisão e máquinas de vetores de suporte.

Além do problema de complexidade computacional, outra dificuldade encontrada é presença de ruídos nas séries temporais. Isso é, dependendo da magnitude do ruído presente nas séries, o RQA resulta em valores indevidos. Para tentar minorar essa questão, este trabalho propõe utilizar a técnica de filtragem de coeficientes *wavelets*, propostos por Donoho e Johnstone (1994), Azzalini et al. (2005) e Perin e Kozakevicius (2013), para a redução do ruído não-linear.

1.1 Organização do trabalho

A Dissertação encontra-se organizada da seguinte forma:

- Capítulo 2: apresenta os principais conceitos relacionados a sistemas dinâmicos.
- Capítulo 3: explica as técnicas gráfico de recorrência e análise de quantificação de recorrência.
- Capítulo 4: apresenta os principais conceitos relacionados à teoria *wavelet*.
- Capítulo 5: descreve as técnicas de aprendizado de máquina árvore de decisão e máquinas de vetores de suporte.
- Capítulo 6: caracteriza os dados experimentais de intervalos \mathcal{RR} e de campo magnético solar.
- Capítulo 7: apresenta uma metodologia que utiliza a transformada *wavelet* discreta para reduzir o tempo de cálculo do gráfico de recorrência.
- Capítulo 8: apresenta uma metodologia que combina a transformada *wavelet* discreta e o gráfico de recorrência para caracterizar sistemas com dinâmica semelhante.
- Capítulo 9: descreve como a transformada *wavelet* discreta pode ser utilizada para reduzir o ruído não-linear das séries temporais.
- Capítulo 10: expõe as conclusões e as sugestões para trabalhos futuros.

2 SISTEMAS DINÂMICOS

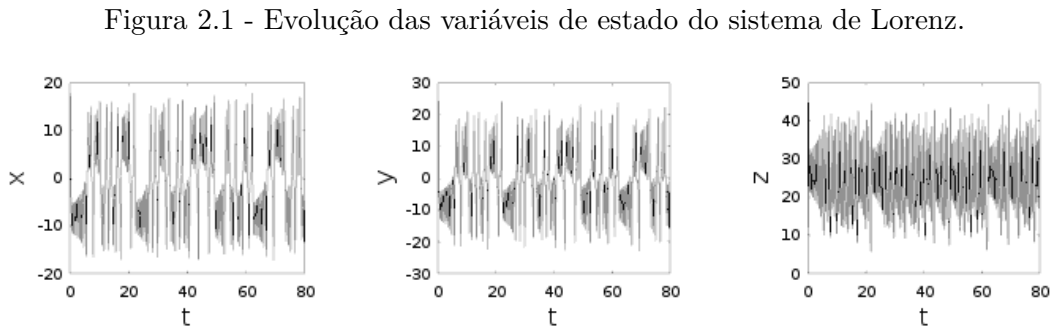
Segundo [Monteiro \(2011\)](#), um sistema é um conjunto de objetos agrupados por uma interação de modo que exista relação de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos deste conjunto. Um sistema é dinâmico quando ele possui grandezas que variam no tempo. Dessa forma, pode-se definir um sistema dinâmico como um modelo matemático determinístico no qual evoluímos ao longo do tempo suas variáveis.

Um sistema dinâmico pode ser classificado de acordo com certas características, como evolução temporal, tipo de modelo, parâmetros do modelo e memória. Em relação a evolução temporal, o sistema pode ser classificado em sistema de tempo contínuo (fluxo) ou sistema de tempo discreto (mapa).

No sistema de tempo contínuo, o tempo é uma variável contínua ($t \in \mathbb{R}_+$). Esse sistema é descrito por uma ou mais equações diferenciais ordinárias (EDOs) ou parciais (EDPs). A evolução do sistema, obtida por meio da integração das equações diferenciais, fornece uma solução para todos os instantes de tempo. Um exemplo de sistema de tempo contínuo é o sistema de Lorenz proposto em ([LORENZ, 1963](#)):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde x , y e z são as variáveis de estado e σ , b e r são os parâmetros de controle. A Figura 2.1 ilustra a evolução das variáveis de estado ao longo do tempo do sistema de Lorenz:

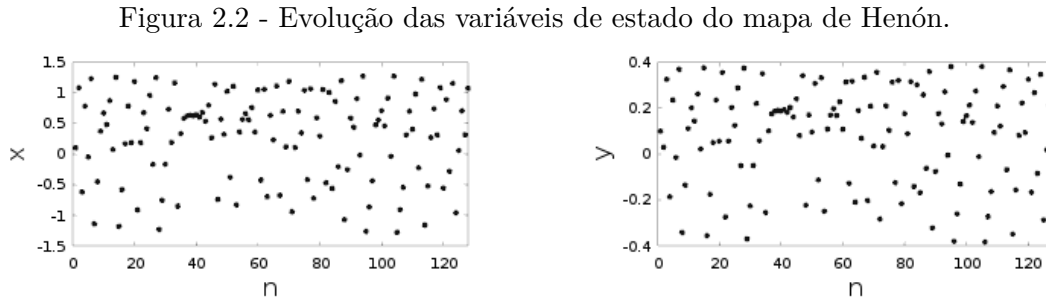


Fonte: Produção do autor.

No sistema de tempo discreto, o tempo é uma variável discreta ($n \in \mathbb{Z}_+$). Esse tipo de sistema é representado por meio de uma ou mais equações de diferenças que fornecem informações de um estado presente n em função de um estado passado $n - 1$. Um exemplo de sistema de tempo discreto é o mapa de Hénon proposto em (HÉNON, 1976):

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} &= bx_n \end{aligned} \quad (2.2)$$

em que x e y são as variáveis de estado e a e b são parâmetros de controle. A Figura 2.2 ilustra a evolução das variáveis de estado do mapa de Hénon.



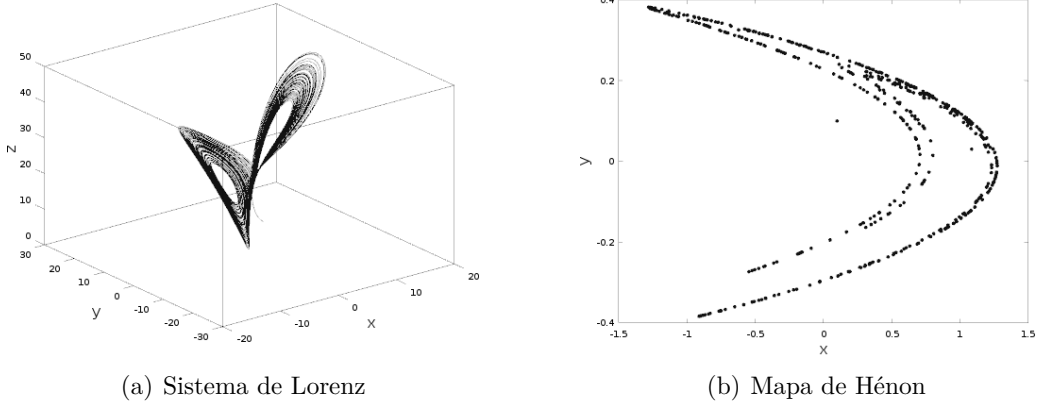
Fonte: Produção do autor.

2.1 Representação do espaço de fases

O estudo qualitativo de equações visa identificar características importantes de suas soluções sem resolvê-las. Por meio dessa técnica, é possível identificar e compreender o modo qualitativo dos possíveis movimentos do sistema utilizando o espaço de fases (HIRSCH et al., 2003).

O espaço de fases é um espaço matemático formado por coordenadas que representam cada uma das variáveis necessárias para especificar o estado instantâneo do sistema (MONTEIRO, 2011). Conforme uma variável altera o seu estado, um ponto é traçado no espaço de fase. Em um sistema de tempo contínuo, esses pontos formam uma curva contínua (Figura 2.3a), enquanto em um sistema de tempo discreto, formam uma sequência de pontos (Figura 2.3b).

Figura 2.3 - Exemplos de espaço de fase.



Fonte: Produção do autor.

2.1.1 A reconstrução do espaço de fase

A reconstrução do espaço de fases é a operação que permite a obtenção da geometria que a trajetória do sistema percorre em seu espaço de fases a partir de uma série temporal monovariável. As metodologias conhecidas que a facultam baseiam-se no fato de que uma única série temporal é afetada por todas as variáveis dinâmicas relevantes, e, portanto, ela contém um registro relativamente completo da dinâmica do sistema (BAKER; GOLLUB, 1996). Por meio do *Teorema da Imersão de Takens* (TAKENS, 1981), é possível reconstruir o espaço de fase m-dimensional a partir de coordenadas com atraso

$$y(t) = (x(t), x(t + \tau), x(t + 2\tau), \dots, x(t + (m - 1)\tau)) \quad (2.3)$$

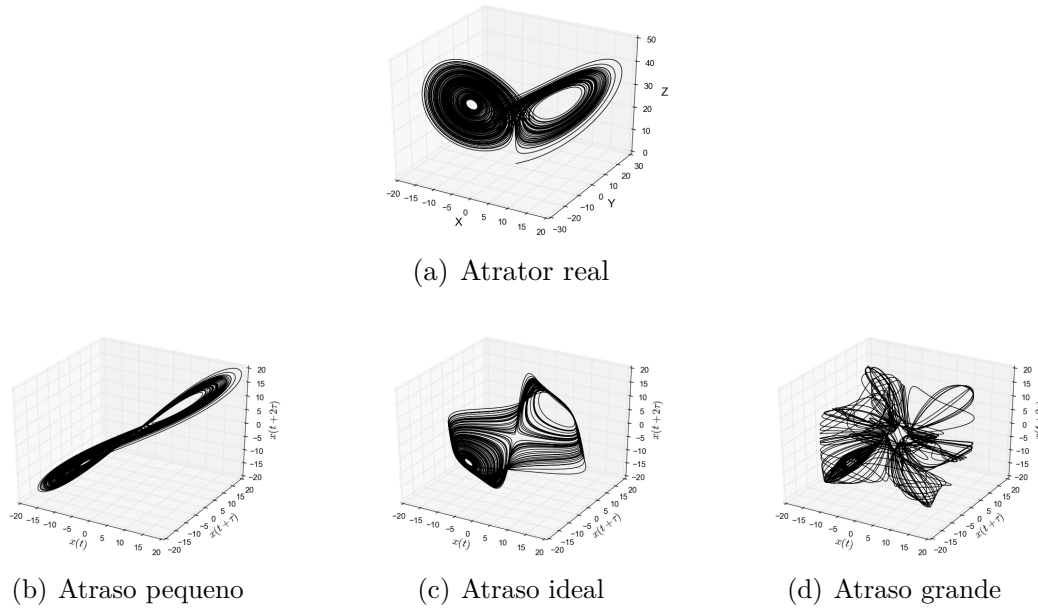
em que τ é o tempo de atraso e m é a dimensão de imersão. Com a determinação eficiente do tempo de atraso e da dimensão de imersão, o espaço reconstruído (geometria que a trajetória do sistema percorre em seu espaço de fases) apresenta uma suave variação de coordenadas em relação ao espaço original, mas preserva os invariantes geométricos do sistema, como a dimensão do atrator ¹ no qual a trajetória do sistema está contida e os expoentes de Lyapunov (SAVI, 2006).

¹Figura geométrica que representa o comportamento assintótico do sistema em um espaço de fase.

2.1.1.1 A escolha do tempo de atraso

A escolha apropriada do tempo de atraso é importante para o sucesso da reconstrução do atrator. Se o atraso for muito pequeno, os pontos amostrados estarão muito próximos para prover informações adequadas sobre a dinâmica do sistema e o atrator reconstruído ficará preso na diagonal principal do espaço de imersão. Por outro lado, se o tempo de atraso for muito grande, os pontos amostrados estarão muito distantes para se mostrarem correlacionados e o atrator reconstruído cobrirá grande parte do espaço de fase. Quando o atraso é ideal, obtém-se uma reconstrução que preserva os invariantes geométricos do atrator real, porém com uma pequena variação de coordenadas. A Figura 2.4 ilustra o efeito do tempo de atraso na reconstrução do atrator de Lorenz.

Figura 2.4 - Influência do tempo de atraso na reconstrução do atrator de Lorenz.



Fonte: Produção do autor.

Diversos métodos têm sido propostos para determinar a escolha do tempo de atraso ideal. Desses, os mais populares estão centrados em utilizar medidas de autocorrelação ou de informação mútua.

O método baseado em autocorrelação mede a dependência linear entre os valores da série temporal $x(t)$ em diferentes pontos no tempo. Segundo [Baker e Gollub \(1996\)](#), a correlação entre pares de pontos da série temporal $x(t)$ é definida como:

$$f(\tau) = \frac{\langle x(t)x(t+\tau) \rangle}{\langle x(t)^2 \rangle} \quad (2.4)$$

no qual $\langle \rangle$ denota a média de todos os pontos de dados em uma série temporal. Entretanto, não há um consenso sobre como obter o valor do tempo de atraso ideal. Oprisan et al. (2015) relata que o tempo de atraso ideal é aquele no qual a função de autocorrelação decai para e^{-1} ou quando a função de autocorrelação não é significativamente diferente de zero. Além disso, o atraso ideal pode ser o primeiro zero da função de autocorrelação ou a primeira vez que a função de autocorrelação atinge um mínimo.

O método baseado em informação mútua, desenvolvida por Fraser e Swinney (1986), mede o grau em que diferentes partes da série temporal $x(t)$ são dependentes uns dos outros. Nessa abordagem, deve-se criar um histograma, com n intervalos, para estimar a distribuição de probabilidade dos dados da série temporal $x(t)$. Assim, a informação mútua entre $x(t)$ e $x(t + \tau)$ é obtida por:

$$I(\tau) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{i,j}(x(t), x(t + \tau)) \log \frac{P_{i,j}(x(t), x(t + \tau))}{P_i(x(t))P_j(x(t + \tau))} \quad (2.5)$$

no qual $P_i(x(t))$ e $P_j(x(t + \tau))$ são distribuições de probabilidade distintas de que $x(t)$ assumam, respectivamente, o valor dentro do i -ésimo e do j -ésimo intervalo do histograma. $P_{i,j}(x(t), x(t + \tau))$ é a distribuição conjunta de probabilidade de que, simultaneamente, o sinal de $x(t)$ e $x(t + \tau)$ estejam no i -ésimo e no j -ésimo intervalo do histograma. Nessa abordagem, o tempo de atraso ideal corresponde ao primeiro mínimo local da função de informação mútua $I(\tau)$.

2.1.1.2 A escolha da dimensão de imersão

Na reconstrução de um atrator é importante que ela ocorra em um espaço de dimensão suficientemente grande para representar a dinâmica completamente. Takens (1981) sugeriu que a dimensão de imersão (m) seja maior do que a dimensão do atrator (d) de acordo com a relação

$$m \geq 2d + 1 \quad (2.6)$$

No entanto, a dimensão do atrator é geralmente desconhecida para os dados experi-

mentais e, assim, a dimensão de imersão é desconhecida. Na literatura, os métodos *dimensão de correlação* e *falso vizinho próximo* são os mais utilizados para determinar a dimensão de imersão ideal.

O método de dimensão de correlação, proposto por Grassberger e Procaccia (1983), descreve o quanto dois pontos de uma mesma trajetória estão correlacionados. Nesse método, a probabilidade de encontrar dois pontos do atrator dentro de um volume ρ é aproximado pela probabilidade de que a distância entre esses dois pontos seja menor do que ρ . Como descrito por Baker e Gollub (1996), o método de dimensão de correlação pode ser realizado em quatro etapas:

- Reconstruir o atrator em uma baixa dimensão de imersão ($m = 1$).
- Calcular a função de correlação para diversos valores de raio (ρ).

$$C(\rho) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \theta(\rho - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|), \quad (2.7)$$

em que \vec{x} é a trajetória do sistema, N é quantidade de pontos da trajetória e $\theta(\cdot)$ é a função de Heavside.

- Calcular a dimensão de correlação.

$$m = \frac{\log(C(\rho))}{\log(\rho)} \quad (2.8)$$

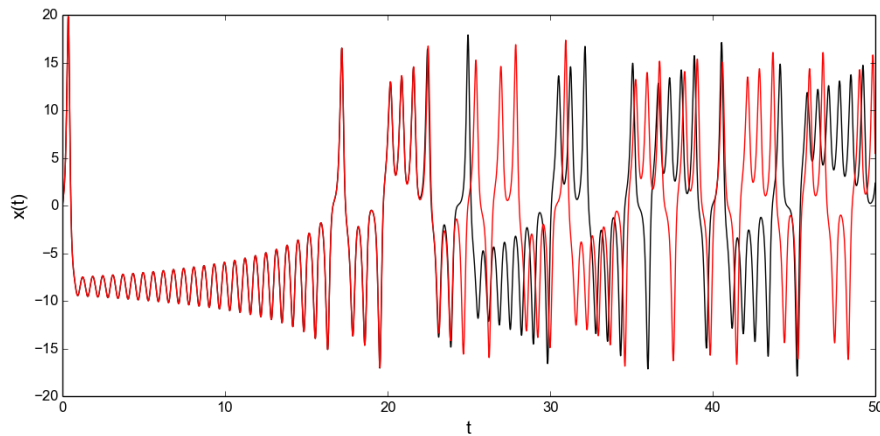
- Incrementar a dimensão de imersão, reconstruir o atrator e recalcular a dimensão de correlação até que se obtenha um valor limite da dimensão de correlação, onde ocorre um comportamento de saturação.

O método falso vizinho próximo (*False Nearest Neighbors* - FNN), introduzido por Kennel et al. (1992), visa obter a dimensão de imersão ótima. A ideia principal deste método é analisar como o número de vizinhos de um ponto ao longo de uma trajetória varia com o aumento da dimensão de imersão. Em uma dimensão de imersão pequena, pontos distantes no espaço de fase original ficam indevidamente muito próximos no espaço de fase reconstruído. Porém, ao incrementar a dimensão de imersão, diminui-se o número de falsos vizinhos, permanecendo apenas os que são de fato vizinhos. Assim, a dimensão de imersão ideal é obtida quando o número de vizinhos diminui abruptamente ou tende à saturação.

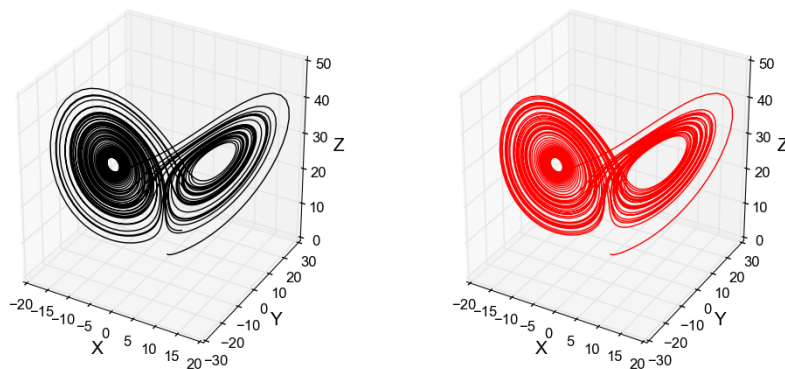
2.2 Sistemas dinâmicos caóticos

Um sistema dinâmico caótico, embora seja descrito por leis determinísticas e por equações diferenciais não lineares sem componentes estocásticos, apresenta comportamentos que implicam em sensibilidade exponencial em média à variação das condições iniciais. Como neste tipo de sistema, o erro cresce rapidamente à medida que o cálculo prossegue, o conhecimento aproximado de um estado não permite prever a sua evolução para qualquer tempo futuro. Tal comportamento está relacionado tanto a sensibilidade às condições iniciais quanto à dificuldade de não se ter uma precisão infinita do valor real do estado. Como mostra a Figura 2.5, duas condições iniciais próximas conduzem o sistema de Lorenz a órbitas completamente distintas após poucas iterações.

Figura 2.5 - Exemplo de sensibilidade às condições iniciais.



(a) Série temporal



(b) Espaço de fase

Em preto e em vermelho representam, respectivamente, as soluções das condições iniciais $(0,000; 2,000; 0,000)$ e $(0,000; 2,001; 0,000)$.

Fonte: Produção do autor.

O comportamento dinâmico de um sistema pode ser caracterizado com o uso do expoente de Lyapunov (λ). Esse expoente mede a taxa média com que duas órbitas, com condições iniciais próximas, se distanciam (ALLIGOOD et al., 1996). Para um sistema contínuo n -dimensional, tem-se uma esfera de condições iniciais centrada no ponto \vec{x}_0 com um raio inicial $\xi(t_0)$. Com o passar do tempo, o fluxo do sistema deforma a esfera em um objeto elipsoidal. Assim, ao longo da j -ésima dimensão, o raio inicial varia exponencialmente no tempo segundo a equação:

$$\xi_j(t) = \xi_j(t_0)e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

Essa relação pode ser reescrita como:

$$\lambda_j = \frac{\ln[d_j(t)/d_j(t_0)]}{t - t_0} \quad (2.10)$$

no qual o número λ_j é o expoente de Lyapunov associado a j -ésima dimensão. Quando $\lambda_j < 0$, a distância entre os pontos é atenuada exponencialmente e, assim, a trajetória age de forma estacionária ou periódica. Quando $\lambda_j > 0$, a distância entre os pontos cresce em média exponencialmente e, conseqüentemente, a trajetória do sistema age de forma caótica.

2.2.1 Exemplos de sistemas dinâmicos caóticos

Neste trabalho, o mapa logístico e o sistema de Rössler são usados como exemplos de sistemas dinâmicos caóticos.

2.2.1.1 Mapa logístico

Popularizado por May (1976), o mapa logístico é um modelo ecológico para estudar a variação populacional de insetos descrito por:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (2.11)$$

no qual

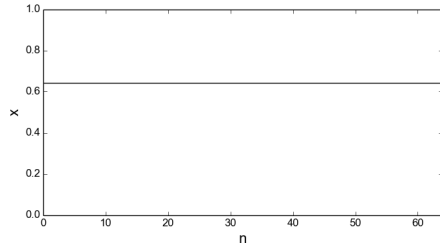
- x_n é um número entre 0 e 1 que representa a quantidade de indivíduos na n -ésima geração.
- r é um número positivo que age como uma normalização entre a taxa de

crescimento e a taxa de mortalidade da população.

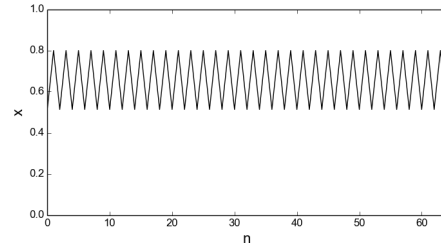
Esse mapa é um sistema dinâmico autônomo, discreto e unidimensional, caracterizado por única variável de estado $x \in \mathbb{R}$. O parâmetro de controle r define a dinâmica do sistema, que pode apresentar soluções periódicas ou caóticas (Figura 2.6).

Para visualizar as diversas dinâmicas presentes no mapa, aqui gerou-se um conjunto de trajetórias constituído por 4801 séries temporais, com 4096 pontos cada, no qual o parâmetro r varia entre 2,80 e 4,00, com passo 0,00025. Para a obtenção de cada série temporal, desprezam-se os primeiros 1024 pontos de transiente e utiliza-se a condição inicial $x_0 = 0,20$.

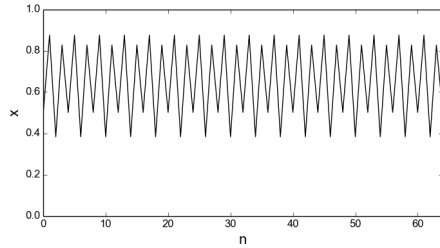
Figura 2.6 - Diferentes dinâmicas presentes no mapa logístico.



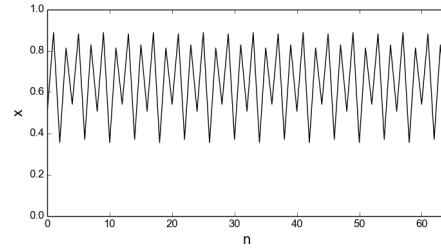
(a) Período 1 ($r = 2,80$)



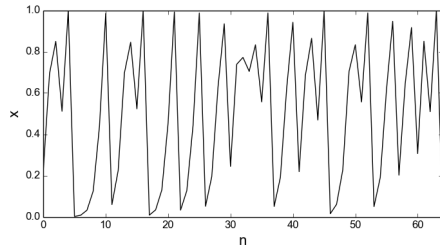
(b) Período 2 ($r = 3,20$)



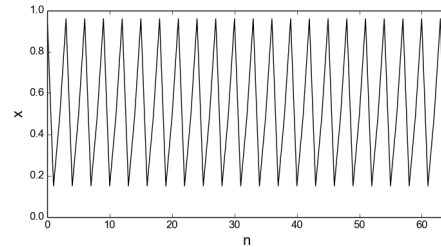
(c) Período 4 ($r = 3,50$)



(d) Período 8 ($r = 3,55$)



(e) Caos ($r = 4,00$)



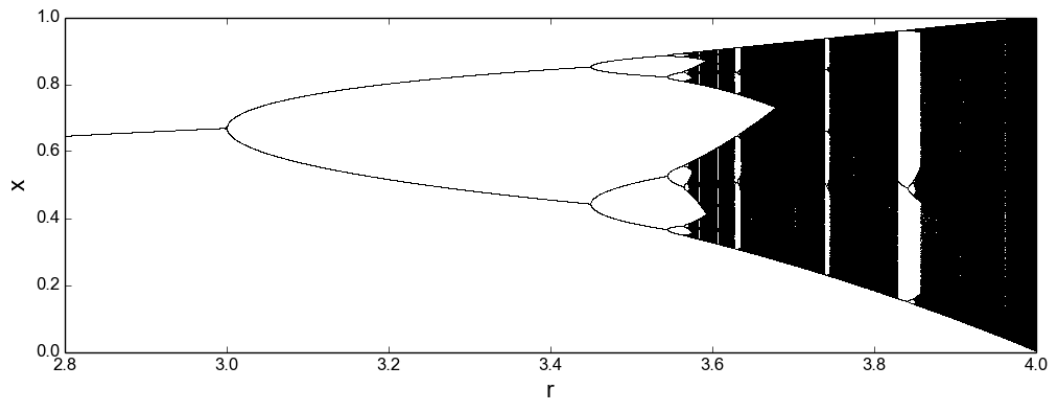
(f) Período 3 ($r = 3,84$)

Fonte: Produção do autor.

Quando a variação do parâmetro de controle altera qualitativamente a dinâmica do sistema, diz-se que houve uma bifurcação (HIRSCH et al., 2003). O gráfico de

bifurcação permite visualizar quando essas bifurcações ocorrem e, assim, possibilita identificar quais valores do parâmetro de controle geram trajetórias periódicas ou caóticas. A Figura 2.7 apresenta o gráfico de bifurcação do mapa logístico para os valores $2,8 \leq r \leq 4,0$.

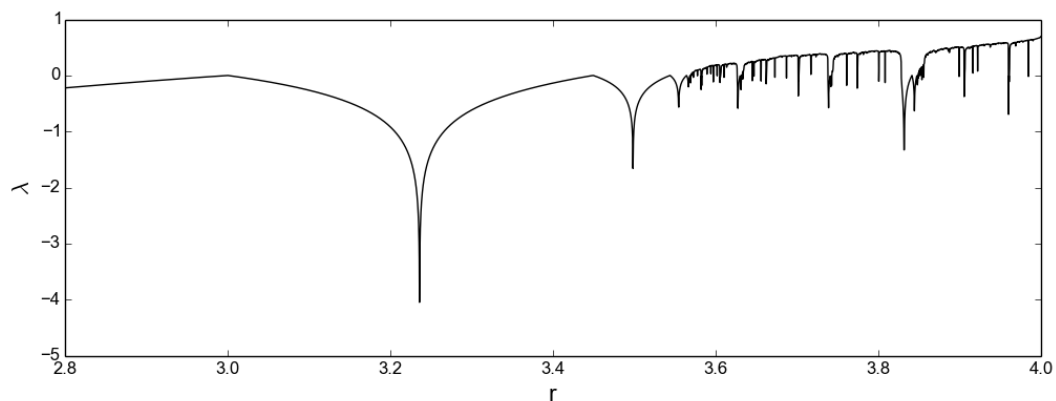
Figura 2.7 - Gráfico de bifurcação do mapa logístico.



Fonte: Produção do autor.

Para medir a taxa de divergência de trajetórias e, assim, quantificar a dependência sensível às condições iniciais utilizam-se os expoentes de Lyapunov. Quando $\lambda < 0$, a distância entre os pontos é atenuada e, assim, a trajetória age de forma estacionária ou periódica. Quando $\lambda > 0$, a distância entre os pontos aumenta e, conseqüentemente, a trajetória age de forma caótica. A Figura 2.8 apresenta expoente de Lyapunov do mapa logístico para os valores $2,8 \leq r \leq 4,0$.

Figura 2.8 - Gráfico do expoente de Lyapunov do mapa logístico.



Fonte: Produção do autor.

2.2.1.2 Sistema de Rössler

O sistema de [Rössler \(1976\)](#) surgiu a partir das equações de Lorenz na tentativa de criar um modelo simples que apresentasse um comportamento caótico. Matematicamente, este sistema é um modelo não-linear, tridimensional e determinístico definido pelas equações diferenciais:

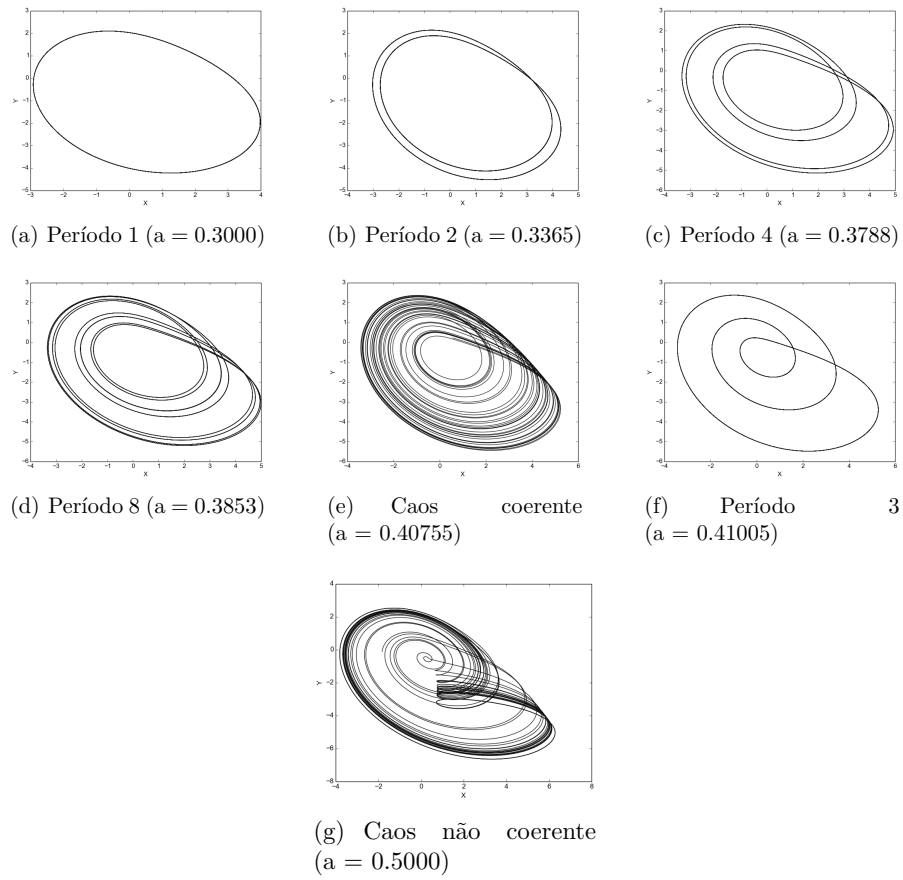
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - c)\end{aligned}\tag{2.12}$$

nos quais x , y e z são as variáveis dinâmicas que definem o espaço de fase e a , b e c são os parâmetros responsáveis por regular a dinâmica do sistema. Dependendo dos valores dos parâmetros de controle, o sistema de Rössler alterna entre soluções periódicas e caóticas (Figura 2.9).

Em relação a dinâmica caótica, quando é possível definir no espaço de fases um ponto de referência ao redor do qual as trajetórias rotacionam, tem-se um regime de “fase coerente” (Figura 2.9e), para o qual é possível definir de forma direta o conceito de fase. Por outro lado, quando não for possível a definição desse ponto de referência, tem-se um regime de “fase não coerente” e o atrator apresenta um espaço de fase chamado de funil (Figura 2.9g).

Para visualizar os diversos comportamentos existentes no sistema, utiliza-se um conjunto de trajetórias com a seguinte configuração: $b = 2$, $c = 4$ e a variando entre 0,3 e 0,5 com passo 0,00005. No total, geram-se 4001 trajetórias utilizando o método Runge-Kutta de quarta ordem com passo de integração $h = 0,05$ e condição inicial $(x_0; y_0; z_0) = (1, 0; 2, 0; 3, 0)$. Nesse trabalho, analisa-se apenas o componente $y(t)$.

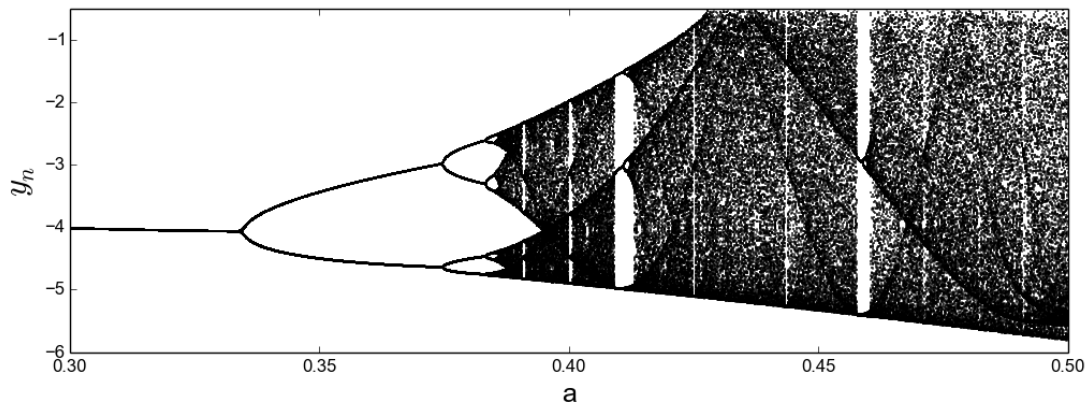
Figura 2.9 - Diferentes dinâmicas presentes no sistema de Rössler.



Fonte: Produção do autor.

A Figura 2.10, que representa o gráfico de bifurcação do sistema de Rössler, permite identificar quais soluções estão presentes no sistema conforme altera-se o valor do parâmetro a .

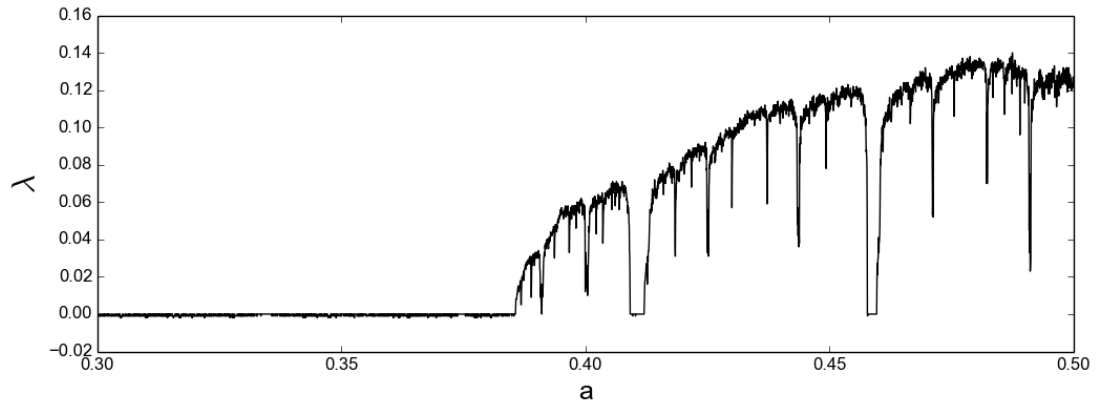
Figura 2.10 - Gráfico de bifurcação do sistema de Rössler.



Fonte: Produção do autor.

A Figura 2.11, que representa o expoente de Lyapunov do sistema de Rössler, indica quais valores do parâmetro a geram trajetórias periódicas ou caóticas.

Figura 2.11 - Gráfico do expoente de Lyapunov do sistema de Rössler.



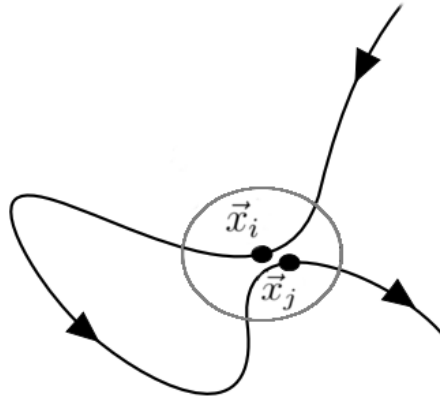
Fonte: Produção do autor.

3 RECORRÊNCIA

Existem diversas técnicas não lineares que podem ser utilizadas para analisar o comportamento dos sistemas dinâmicos, como a dimensão de correlação, o expoente de Lyapunov, o gráfico de Poincaré e a entropia. Porém, tais métodos possuem desvantagens, como a necessidade de séries temporais longas, alteração dos resultados devido a presença de ruídos e dificuldade para analisar sistemas não-estacionários (MARWAN et al., 2007b).

Nas últimas décadas, têm-se desenvolvido técnicas que utilizam a *recorrência dos sistemas dinâmicos* para extrair quantificadores capazes de caracterizar o comportamento do sistema. A recorrência está associada ao Teorema da Recorrência de Poincaré (POINCARÉ, 1890), no qual certifica que para uma grande classe de sistemas dinâmicos, os estados do sistema ao longo de uma trajetória retornam infinitas vezes arbitrariamente próximos a quase todos os estados anteriormente percorridos. Em relação à séries temporais, diz-se que dois estados são recorrentes quando pertencem a uma mesma trajetória e se encontram a uma distância menor do que um determinado valor limite em seu espaço de fases. (Figura 3.1).

Figura 3.1 - Exemplo de recorrência em um sistema bidimensional arbitrário, no qual o estado \vec{x}_j está na vizinhança do estado \vec{x}_i .



Fonte: Adaptada de Vieira et al. (2012).

As técnicas gráfico de recorrência e análise de quantificação de recorrência têm sido amplamente utilizadas para a análise não-linear de sistemas dinâmicos.

3.1 Gráfico de recorrência

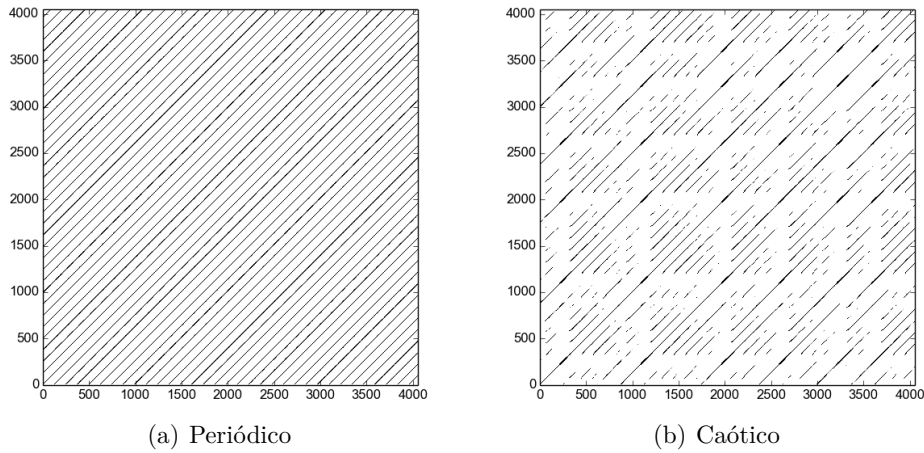
Baseado no Teorema de Recorrência de Poincaré, Eckmann et al. (1987) desenvolveram uma ferramenta, denominada gráfico de recorrência (*Recurrence Plot* - RP), para visualizar a dinâmica dos sistemas recorrentes. Como abordado por Marwan (2003), dada uma trajetória x_i de um determinado sistema dinâmico, o gráfico de recorrência é definido pela expressão matemática:

$$\vec{R}_{i,j}^{m\rho} = \theta(\rho - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|); \vec{x}_i \in \mathbb{R}^m; i, j = 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

no qual N é o número de estados x_i presentes na trajetória, m é a dimensão de imersão, ρ é o raio de vizinhança no ponto x_i , $\theta(\cdot)$ é a função de Heaviside e $\|\cdot\|$ é a norma de vizinhança.

Assim, o gráfico de recorrência de uma série temporal constituída por N pontos é uma matriz binária $N \times N$. Essa matriz é construída a partir da função de Heaviside que mapeia os pontos recorrentes do sistema da seguinte forma: se $\vec{R}_{i,j}^{m\rho} = 1$, o ponto é considerado recorrente (está dentro de uma vizinhança ρ) e um ponto preto é atribuído na posição (i, j) do gráfico; se $\vec{R}_{i,j}^{m\rho} = 0$, o estado não é considerado recorrente e um ponto branco é atribuído na posição (i, j) do gráfico. A Figura 3.2 apresenta exemplos de gráficos de recorrência do sistema de Rössler.

Figura 3.2 - Exemplos de gráficos de recorrência do sistema de Rössler.



Fonte: Produção do autor.

A forma do gráfico de recorrência pode variar significativamente dependendo do raio de vizinhança adotado. Se for usado um valor muito pequeno, poucos pontos

recorrentes são detectados e, conseqüentemente, há pouca informação a respeito da estrutura do sistema. Se for adotado um valor muito grande, falsas recorrências podem ser detectadas. Como mencionado por [Vieira \(2014\)](#), existem diversas abordagens que possibilitam determinar o raio de vizinhança ideal:

- Em relação ao diâmetro do atrator: o raio de vizinhança é escolhido como um pequeno percentual do diâmetro do atrator.
- Em relação à taxa de recorrência: o raio de vizinhança é escolhido como aquele que mantém a taxa de recorrência fixa.
- Em relação ao desvio padrão do ruído: o raio de vizinhança deve ser, pelo menos, cinco vezes o valor do desvio padrão do ruído observado.

3.1.1 Categorias do gráfico de recorrência

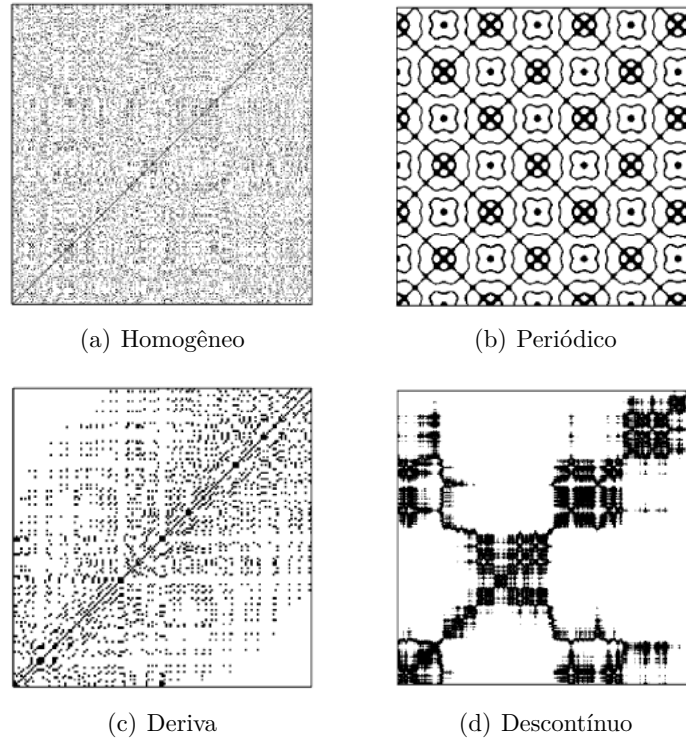
O gráfico de recorrência apresenta diferentes padrões visuais que podem fornecer informações sobre a série analisada. Segundo [Eckmann et al. \(1987\)](#), esses padrões visuais podem ser divididos em duas categorias: de *larga escala* (tipológicos) e de *pequena escala* (textura). Os padrões de larga escala fornecem uma visão global do comportamento do sistema (ruidoso, periódico, etc) enquanto os padrões de pequena escala fornecem as estruturas do gráfico ([MARWAN; KURTHS, 2005](#)).

Os padrões de larga escala são classificados em:

- *Homogêneo* (Figura 3.3a): neste caso, o tempo característico de cada linha é pequeno em relação ao tempo total de exposição do sistema, dificultando a identificação de quaisquer padrões na disposição das observações. Esse gráfico é característico de séries puramente estocásticas.
- *Periódico* (Figura 3.3b): tem como característica a presença tanto de linhas diagonais totalmente preenchidas e paralelas a diagonal principal, quanto as estruturas de blocos recorrentes. Esse gráfico é característico de sistemas periódicos.
- *Deriva* (Figura 3.3c): tem como característica a ausência de pontos recorrentes, tanto no canto superior esquerdo, quanto no canto inferior direito. Esse gráfico é característico de sistemas em que os parâmetros variam lentamente.

- *Descontínuo* (Figura 3.3d): caracteriza-se por apresentar tanto períodos estáveis quanto períodos turbulentos. Esse gráfico é característico de sistema em que a descontinuidade é causada por mudanças abruptas na dinâmica ou pela ocorrência de eventos raros.

Figura 3.3 - Tipos de padrões de larga escala de um gráfico de recorrência.



Fonte: Adaptada de [Marwan et al. \(2007b\)](#).

Os padrões de pequena escala são classificados em:

- *Ponto*: representa um estado recorrente. Se um ponto estiver isolado, significa que esse é um estado raro no sistema.
- *Linha diagonal*: ocorre quando uma parte da trajetória evolui de forma paralela a outro segmento de trajetória, ou seja, indica que a trajetória visita a mesma região do espaço de fase em tempos diferentes. O comprimento dessa estrutura é determinado pela duração da evolução similar.
- *Linha vertical (e horizontal)*: mostra que o estado do sistema permanece estacionário durante a evolução temporal.

3.2 Análise de quantificação de recorrência

A análise de quantificação de recorrência (*Recurrence Quantification Analysis* - RQA), desenvolvida por [Webber e Zbilut \(1994\)](#), é uma técnica capaz de quantificar a dinâmica de um sistema dinâmico a partir de estruturas presentes no gráfico de recorrência. Para isso, esta análise utiliza tanto a densidade de pontos de recorrência quanto as estruturas de linhas diagonais e verticais do gráfico para calcular os valores de seus quantificadores ([MARWAN et al., 2007b](#)).

3.2.1 Medida baseada na densidade de recorrência

A taxa de recorrência (RR) mede a densidade dos pontos recorrentes de um gráfico de recorrência. Essa taxa é obtida por:

$$RR = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N R_{i,j}^{m,\rho} \quad (3.2)$$

sendo N o número de pontos e ρ o raio de vizinhança.

A taxa de recorrência varia entre 0 (quando não há pontos de recorrência) e 1 (quando todos os pontos são recorrentes).

3.2.2 Medidas baseadas nas linhas diagonais

O determinismo (DET) é a fração de pontos recorrentes que formam linhas diagonais. É definido como:

$$DET = \frac{\sum_{l=l_{min}}^N lP(l)}{\sum_{l=1}^N lP(l)} \quad (3.3)$$

em que l é o comprimento da linha diagonal e $P(l)$ é a probabilidade de existência de linhas diagonais com comprimento l . O determinismo está relacionado com a previsibilidade do sistema, sendo pequeno para um sistema estocástico e grande para um sistema periódico.

O tamanho médio das linhas diagonais (L) determina o tempo médio em que dois segmentos de trajetória permanecem evoluindo de forma similar. Este tamanho é obtido por:

$$L = \frac{\sum_{l=l_{min}}^N lP(l)}{\sum_{l=l_{min}}^N P(l)} \quad (3.4)$$

sendo l_{min} o comprimento mínimo da linha diagonal.

O tamanho da maior linha diagonal (L_{max}) indica o tempo máximo em que dois segmentos de trajetória evoluíram de forma similar. Esta quantificação é definida como:

$$L_{max} = \max \left(\{l_i\}_{i=1}^{N_l} \right) \quad (3.5)$$

em que $N_l = \sum_{l \geq l_{min}} P(l)$ é o número total de linhas diagonais.

A entropia de recorrência ($ENTR$) refere-se a entropia de Shannon (SHANNON, 1948) da probabilidade de encontrar uma linha diagonal acima de um determinado comprimento l_{min} . Essa entropia é obtida por:

$$ENTR = - \sum_{l=l_{min}}^N p(l) \ln(p(l)) \quad (3.6)$$

3.2.3 Medidas baseadas nas linhas verticais

A laminaridade (LAM) é a fração de pontos que formam linhas verticais, ou seja, quantifica a ocorrência de estados recorrentes que não mudam com o tempo. Ela é definida como:

$$LAM = \frac{\sum_{\nu=\nu_{min}}^N \nu P(\nu)}{\sum_{\nu=1}^N \nu P(\nu)} \quad (3.7)$$

no qual $P(\nu)$ é o número total de linhas verticais de tamanho ν e ν_{min} é o tamanho mínimo da linha vertical a ser considerado.

O tamanho médio das linhas verticais, ou tempo de aprisionamento (TT), estima o tempo médio que o sistema permanecerá em um determinado estado. Assim, esta quantificação é descrita por:

$$TT = \frac{\sum_{\nu=\nu_{min}}^N \nu P(\nu)}{\sum_{\nu=\nu_{min}}^N P(\nu)} \quad (3.8)$$

4 TRANSFORMADA *WAVELET*

A análise de sinais tem à sua disposição uma impressionante quantidade de ferramentas. Dentre elas, destacam-se as transformadas integrais. Uma transformada integral visa mapear um sinal de um domínio para outro destacando determinadas características do sinal no domínio transformado.

Uma transformada integral bastante conhecida é a *Transformada de Fourier*. Nela, um sinal é representado por meio de uma soma infinita de funções bases senoidais em diferentes frequências. Assim, é possível representar no domínio da frequência um sinal expresso no domínio do tempo. Para muitos sinais, a transformada de Fourier é extremamente útil, pois o conteúdo de frequência do sinal é importante. Porém, nessa transformada a representação se dá no domínio da frequência e a informação temporal fica indisponível. Assim, com a transformada de Fourier não é possível dizer quando a partir do sinal transformado no domínio da frequência um determinado evento ocorreu, dificultando a análise de sinais com características transitórias ou não estacionárias (RIOUL; VETTERLI, 1991).

Na tentativa de ampliar as aplicações da transformada de Fourier é criada a *Transformada Janela de Fourier* em que pequenos intervalos do sinal são analisados de cada vez. Essa nova técnica, possibilita o fornecimento de informações sobre quando e quais frequências ocorrem no sinal. No entanto, essas informações só podem ser obtidas com determinada precisão, que está diretamente ligada ao tamanho da janela. A largura fixa da janela independentemente da frequência que está sendo analisada é outra característica da transformada janelada de Fourier. Muitos sinais requerem uma técnica mais flexível, no qual seja possível variar o tamanho da janela com melhor precisão tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência.

Assim surge a *Transformada Wavelet* (*Wavelet Transform* - WT). Essa transformada utiliza janelas com regiões de tamanhos variáveis, ou seja, emprega uma janela dilatada para a extração de informação de baixa-frequência e uma janela comprimida para a extração de informação de alta-frequência (CHUI, 1992). Dessa forma, é possível realizar a extração de informações em frequência além da detecção de estruturas localizadas no tempo.

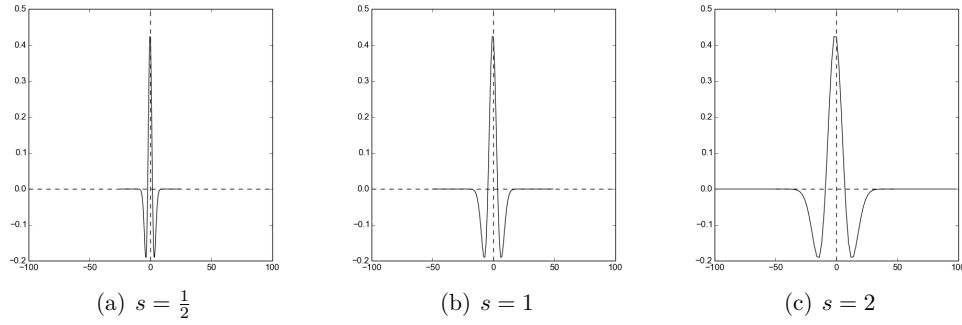
Uma *wavelet* é uma função com forma de uma pequena onda gerada por deslocamentos e escalonamentos de uma função *wavelet*-analisadora ψ . Normalmente usa-se a seguinte nomenclatura:

$$\psi(s, n, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-n}{s}\right) ; \quad s, n \in \mathbb{R} ; \quad s > 0 \quad (4.1)$$

no qual n é o fator de deslocamento, s é o fator escala e $(\sqrt{s})^{-1}$ é a constante de normalização do $L^2(\mathbb{R})$, que visa manter a mesma energia da *wavelet*-analisadora independente da escala utilizada.

Em relação ao fator de escala s , a *wavelet*-analisadora sofre dilatação ($s > 1$) ou contração ($0 < s < 1$). Assim, é possível analisar, respectivamente, aspectos de longo ou de curto período no sinal. A Figura 4.1, apresenta a contração e a dilatação de uma função *wavelet*-analisadora.

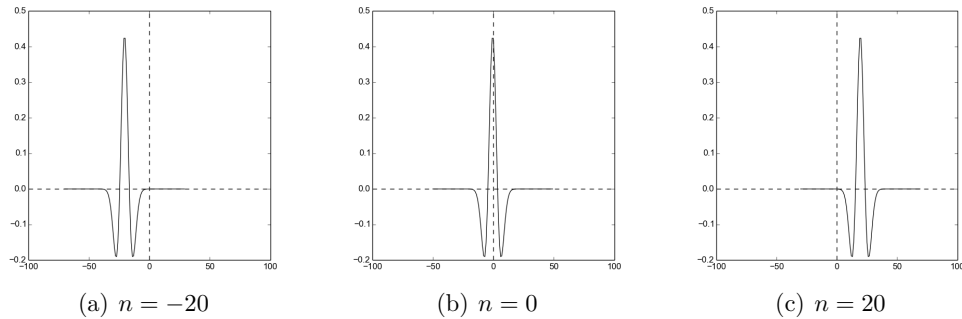
Figura 4.1 - Exemplo de dilatação de uma função *wavelet*-analisadora.



Fonte: Produção do autor.

Deslocar uma *wavelet* significa deslocá-la no eixo do tempo. À medida que o fator de deslocamento n varia, o sinal é analisado localmente em torno desse ponto. A Figura 4.2 apresenta um exemplo de deslocamento da *wavelet*-analisadora.

Figura 4.2 - Exemplo de deslocamento de uma função *wavelet*-analisadora.



Fonte: Produção do autor.

Desta forma, a função *wavelet* possui a propriedade de dupla localização, em tempo

e em frequência, com uma relação intrínseca entre elas, arbitrada pelo princípio da incerteza de Heisenberg (MALLAT, 2009). Devido a tal propriedade, a WT permite uma análise espectral local de características do sinal, sendo útil para avaliação de transientes, aperiodicidade e não-estacionaridade, em que súbitas alterações na morfologia podem ser enfatizadas em as escalas de interesse (DAUBECHIES, 1992).

A variedade de funções *wavelet* disponíveis permite escolher uma função que seja adequada para o sinal sob análise (DOMINGUES et al., 2005). As funções *wavelets* podem ser complexas ou reais, simétricas ou assimétricas, com funções definidas explicitamente ou não, mas devem satisfazer a dois requisitos:

- A integral da função *wavelet* deve ser zero, garantindo que a função *wavelet* tenha uma forma oscilatória com média zero.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (4.2)$$

- A energia da função *wavelet* deve ser unitária para garantir um suporte compacto.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1 \quad (4.3)$$

A *Transformada Wavelet Contínua* (*Continuous Wavelet Transform* - CWT) é uma ferramenta que permite decompor o sinal em diferentes componentes de frequências. Na CWT os parâmetros de escala s e de deslocamento n são contínuos e a transformada é obtida por:

$$\mathcal{W}(s, n) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t-n}{s} \right) dt \quad (4.4)$$

em que $f(t)$ é a série temporal e ψ^* é o complexo conjugado. A saída da CWT é um escalograma que representa o módulo ao quadrado das amplitudes dos coeficientes *wavelet*. Com o escalograma é possível verificar como a energia do sinal varia no tempo t e na escala s . Porém os padrões obtidos pelo escalograma dependem da família *wavelet* empregada e são altamente redundantes. Para tentar minimizar a redundância, surge a *Transformada Wavelet Discreta* (*Discrete Wavelet Transform* - DWT).

Na DWT, os parâmetros de escala e de deslocamento assumem valores discretos.

Assim, um número discreto de *wavelets* é gerado quando os fatores s e n são restritos aos valores $s = s_0^j$ e $n = ks_0^j n_0$, no qual $s_0 > 1$, $n_0 > 0$ e $j, k \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, é possível construir funções *wavelets* $\psi_{j,k}(t)$ ortonormais dadas por:

$$\psi(k, j, t) = s_0^{-j/2} \psi(s_0^{-j} t - kn_0) \quad (4.5)$$

Para facilitar os cálculos computacionais, adota-se dilatações binárias ($s_0 = 2$) e deslocamentos unitários ($n_0 = 1$). Com isso, algumas funções *wavelets* constituem uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$ e são obtidas por:

$$\psi(k, j, t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j} t - k) \quad (4.6)$$

Dentre as principais características da DWT, podem-se citar: boa compressão da energia do sinal, reconstrução perfeita com filtros de suporte pequeno, pouca redundância e baixo custo computacional ($O(N)$) (DAUBECHIES, 1992). Além disso, as informações da DWT podem ser organizadas em um esquema hierárquico de espaços aninhados denominado, *análise de multiresolução*.

4.1 Análise multiresolução

A Análise Multiresolução (MR), desenvolvida por Mallat (1989), é uma ferramenta capaz de representar um sinal em diferentes escalas ou resoluções ¹, utilizando um *banco de filtros* ² especializados em extrair informações do sinal. Nesta representação, cada nível de resolução corresponde a um espaço V_j de funções de $L^2(\mathbb{R})$ que satisfazem a condição:

$$V_j \supset V_{j+1} \quad , \quad j \in \mathbb{Z} \quad (4.7)$$

e que

- a) A união dos espaços é dada por $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$.
- b) A intersecção dos espaços é dada por $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.
- c) Uma função $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$, $\forall j \in \mathbb{Z}$.

¹Níveis de detalhamento em um domínio.

²Arranjo de filtros passa-banda para decompor um sinal de entrada em diferentes sub-bandas de frequência ou para combinar várias sub-bandas de frequência para reconstruir um sinal de saída.

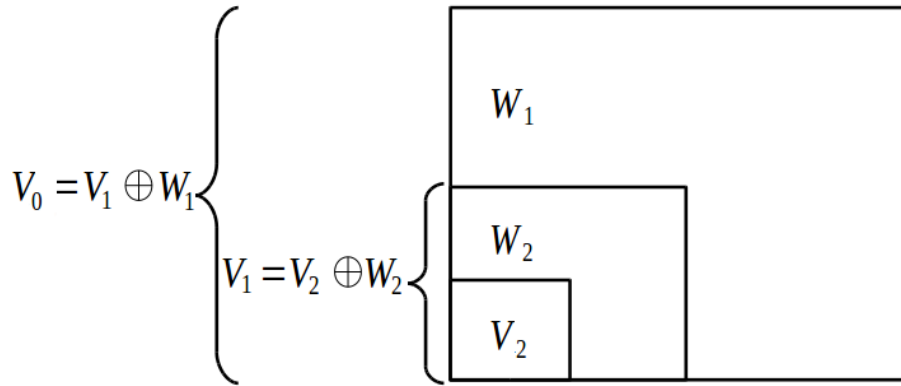
d) Uma função $f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t - n) \in V_0 \forall j \in \mathbb{Z}$.

Nesta representação, o espaço V_{j+1} apresenta uma resolução menor do que o espaço V_j . Assim, quanto menor a escala j , maior a resolução. Além disso, a diferença entre dois espaços V_j e V_{j+1} é denominado espaço de detalhe W_{j+1} . Este espaço de detalhe contém todas as informações necessárias para passar do nível $j + 1$ para o nível j . Assim,

$$V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1} \quad (4.8)$$

A Figura 4.3 apresenta a relação entre os espaços escala V e os espaços das funções *wavelet* W , este último também conhecido como espaço de detalhes.

Figura 4.3 - Relação entre os espaços V_j e *wavelets* W_j .



Fonte: Produção do autor.

Na análise multiresolução, as funções base para o espaço V_j são denominadas funções escala (ϕ), enquanto as funções base para o espaço W_j são denominadas funções *wavelet* (ψ). Assim, um sinal $f(t)$ pode ser representado de uma forma multiescala dado por:

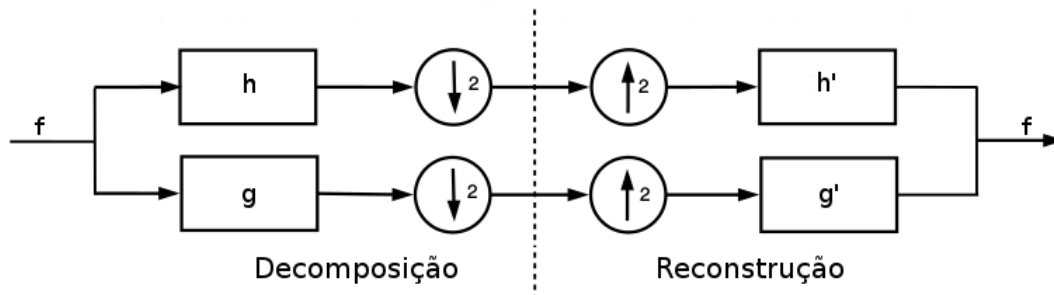
$$f(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \phi_{j,k}(t) + \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (4.9)$$

em que $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$ são, respectivamente, os coeficientes escala e *wavelet*. Uma forma

eficiente de calcular tais coeficientes é obtida utilizando o algoritmo de Mallat (MALLAT, 1989).

O algoritmo de Mallat obtém a transformada discreta por meio da utilização de *banco de filtros especular na quadratura* (Quadrature Mirror Filter - QMF) descrito na Figura 4.4. Esta abordagem é realizada em duas etapas: decomposição e reconstrução do sinal.

Figura 4.4 - Decomposição e reconstrução do sinal utilizando o banco de filtros especular na quadratura.



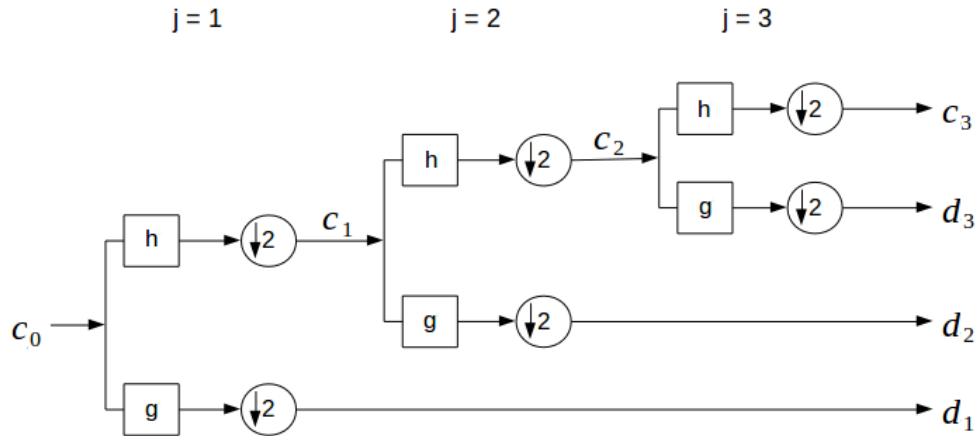
Nesta representação, h e h' são filtros passa-baixa, g e g' são filtros passa-alta, $\downarrow 2$ é um subamostrador de fator 2 e $\uparrow 2$ é sobreamostrador de fator 2.

Fonte: Produção do autor.

A fase de decomposição consiste em aplicar um par de filtros de resposta a impulso finita (*Finite Impulse Response* - FIR) para decompor um sinal unidimensional discreto f (ou c_0). O filtro passa-baixa (h) é responsável por remover as altas frequências e, assim, gerar uma forma suavizada do sinal original. O filtro passa-alta (g) é responsável por remover as baixas frequências e, assim, gerar uma versão com as informações residuais do sinal de entrada. Em seguida, os sinais filtrados são subamostrados ³ (ou decimados) por um fator de dois e os resultados são chamados de, respectivamente, coeficiente escala (c) e coeficiente *wavelet* (d). A DWT com um único nível de decomposição é capaz de dividir o sinal original em duas faixas de frequência. Caso seja necessário explorar outras faixas de frequência, deve-se realizar sucessivas decomposições, ou seja, deve-se aplicar sucessivamente o par de filtro nos coeficientes escala (Figura 4.5). Teoricamente, a decomposição pode seguir indefinidamente até que haja suficiente coeficientes escala e *wavelets* para definir essas funções. Na prática, o nível de decomposição é baseado na natureza do sinal ou nas faixas de escala de interesse.

³Redução da frequência de amostragem do sinal no qual todos os pontos de índices ímpares são eliminados.

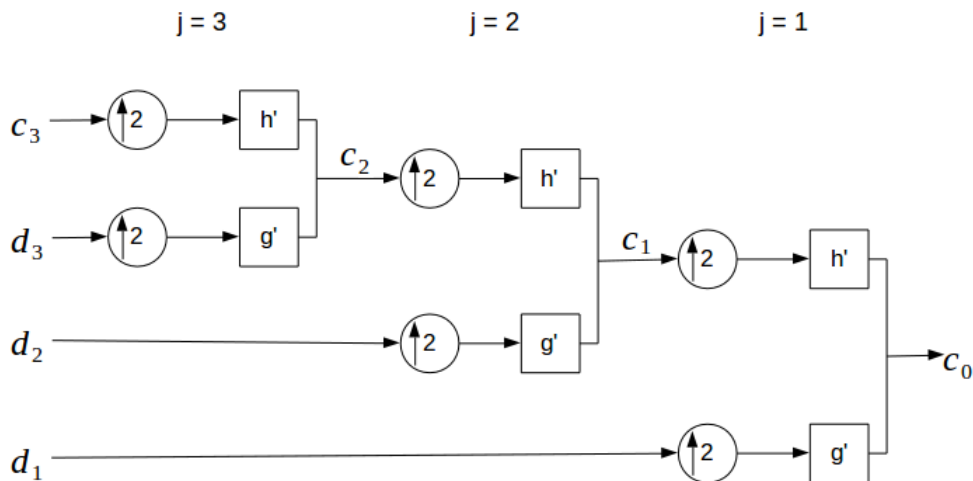
Figura 4.5 - Algoritmo de Mallat - decomposição em vários níveis.



Fonte: Produção do autor.

A fase de reconstrução recupera o sinal original por meio da *Transformada Wavelet Discreta Inversa* (*Inverse Discrete Wavelet Transform* - IDWT). Primeiramente, os coeficientes escala e *wavelet* passam pelo processo de *upsampling* ($\uparrow 2$), que recupera o tamanho do sinal original por meio de inserção de zeros entre as amostras consecutivas. Em seguida, estes sinais são filtrados pelos filtros de reconstrução passa-baixa h' e passa-alta g' para reconstruir o sinal original. Se o sinal é decomposto em mais de um nível, este processo deve iniciar no último nível de decomposição e ser repetido até recuperar o sinal original (Figura 4.6).

Figura 4.6 - Algoritmo de Mallat - reconstrução em vários níveis.



Fonte: Produção do autor.

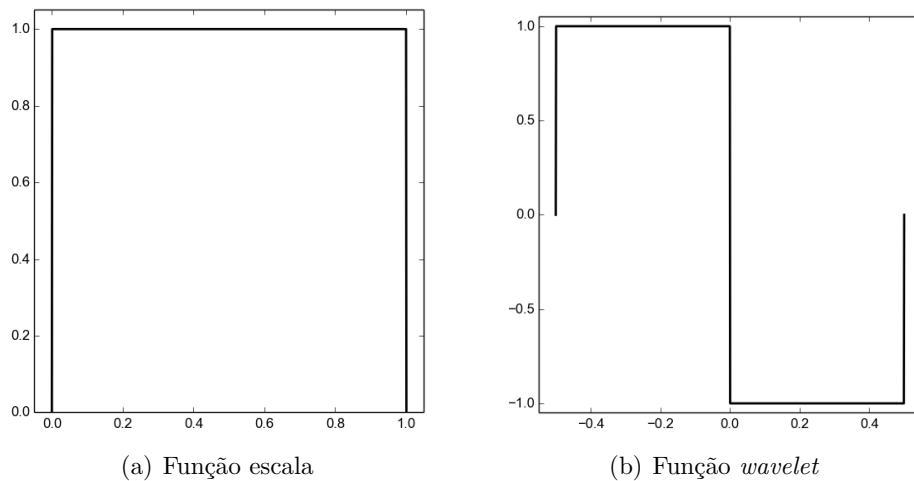
4.1.1 Wavelets ortogonais de Daubechies

As *wavelets* de Daubechies constituem uma família de *wavelets* ortogonais de $L^2(\mathbb{R})$ criadas por Daubechies (1992). Esta família possui as seguintes características:

- A maioria das funções são assimétricas.
- A função *wavelet* possui p momentos nulos e suporte compacto⁴ de tamanho $[-p + 1, p]$.
- A função escala possui suporte compacto de tamanho $[0, 2p - 1]$.
- As funções escala e *wavelet* tem o mesmo número de coeficientes.

As *wavelets* são nomeadas por dbP , no qual P é a ordem da aproximação local. Neste trabalho, são utilizadas as wavelets $db1$ e $db4$ representadas, respectivamente, pelas Figuras 4.7 e 4.8.

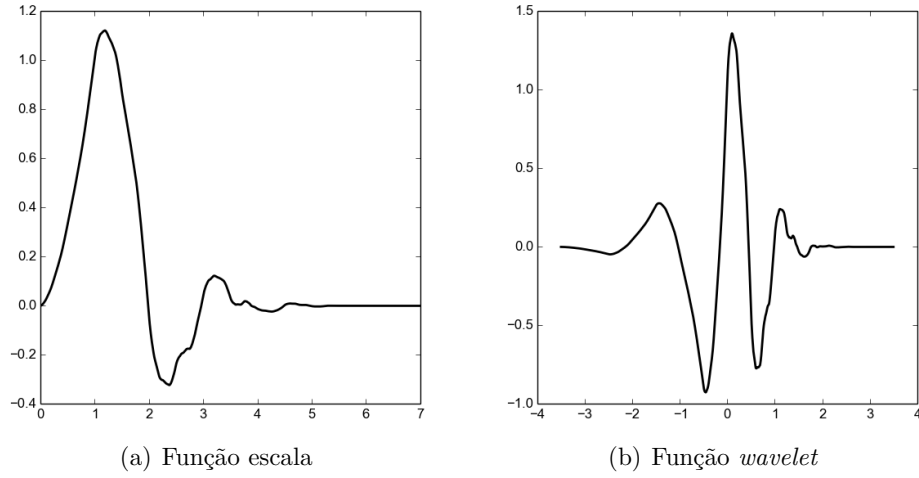
Figura 4.7 - Funções escala e *wavelet* da $db1$ também conhecida como função de Haar.



Fonte: Produção do autor.

⁴Anula-se completamente fora de um intervalo finito de tempo.

Figura 4.8 - Funções escala e *wavelet* da db4.



Fonte: Produção do autor.

A transformada *wavelet* discreta, usando as *wavelets* de Daubechies, é obtida pela biblioteca *open source* PyWavelets ([WASILEWSKI, 2012](#)). As Tabelas 4.1 e 4.2 apresentam, respectivamente, os coeficientes de decomposição e de reconstrução das *wavelets* db1 e db4.

Tabela 4.1 - Coeficientes de decomposição da transformada *wavelet* discreta.

| Wavelet | Filtro de decomposição passa-baixa | Filtro de decomposição passa-alta |
|---------|------------------------------------|-----------------------------------|
| db1 | 0.707106781186547600 | -0.707106781186547600 |
| | 0.707106781186547600 | 0.707106781186547600 |
| db4 | -0.010597401784997278 | -0.230377813308855230 |
| | 0.032883011666982945 | 0.714846570552541500 |
| | 0.030841381835986965 | -0.630880767929590400 |
| | -0.187034811718881140 | -0.027983769416983850 |
| | -0.027983769416983850 | 0.187034811718881140 |
| | 0.630880767929590400 | 0.030841381835986965 |
| | 0.714846570552541500 | 0.032883011666982945 |
| | 0.230377813308855230 | -0.010597401784997278 |
| | | |

Tabela 4.2 - Coeficientes de reconstrução da transformada *wavelet* discreta.

| Wavelet | Filtro de reconstrução passa-baixa | Filtro de reconstrução passa-alta |
|---------|------------------------------------|-----------------------------------|
| db1 | 0.707106781186547600 | 0.707106781186547600 |
| | 0.707106781186547600 | -0.707106781186547600 |
| db4 | 0.230377813308855230 | -0.010597401784997278 |
| | 0.714846570552541500 | -0.032883011666982945 |
| | 0.630880767929590400 | 0.030841381835986965 |
| | -0.027983769416983850 | 0.187034811718881140 |
| | -0.187034811718881140 | -0.027983769416983850 |
| | 0.030841381835986965 | -0.630880767929590400 |
| | 0.032883011666982945 | 0.714846570552541500 |
| | -0.010597401784997278 | -0.230377813308855230 |

4.2 Filtragem não-linear usando *wavelet*

A propriedade de possuir p momentos nulos das *wavelets* de Daubechies tem como consequência, para uma função suave, o fato dos coeficientes *wavelets* decrescem rapidamente (DAUBECHIES, 1992). Além disso, se a função possuir descontinuidades em uma de suas derivadas, os coeficientes *wavelets* decrescem lentamente apenas na vizinhança destas descontinuidades, permanecendo com o decaimento rápido nas demais regiões (MALLAT, 2009). Com tais características é possível descartar todos os coeficientes *wavelets* que sejam menores do que um determinado limiar de corte (δ), sem a perda significativa da qualidade do sinal em relação a sua recuperação pela IDWT.

Assim, o processo de filtragem não-linear usando *wavelet* pode ser resumido em três etapas:

- 1 Decompor o sinal utilizando a DWT em j escalas.
- 2 Realizar a operação de truncamento, com um limiar de corte (δ), nos coeficientes *wavelets*.
- 3 Obter o sinal filtrado utilizando a IDWT.

Em relação a operação de truncamento, destacam-se duas regras: *hard* e *soft threshold*. No *hard threshold* (Th_H), o truncamento é obtido segundo a regra:

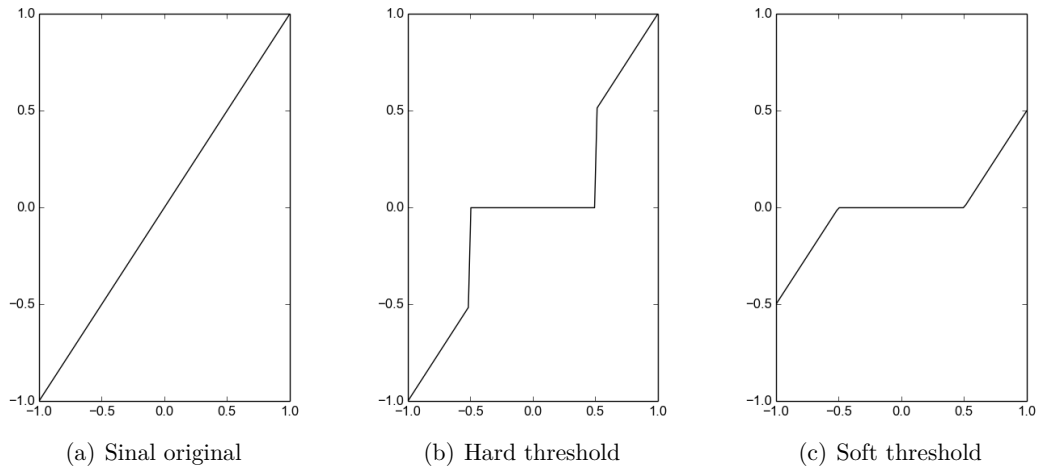
$$Th_H(x) = \begin{cases} x, & \text{se } |x| > \delta \\ 0, & \text{se } |x| \leq \delta \end{cases} \quad (4.10)$$

enquanto no *soft threshold* (Th_S) o truncamento é obtido por:

$$Th_S(x) = \begin{cases} x - \delta, & \text{se } x > \delta \\ 0, & \text{se } -\delta \leq x \leq \delta \\ x + \delta, & \text{se } x < -\delta \end{cases} \quad (4.11)$$

A Figura 4.9 apresenta exemplos de operações de truncamento utilizando as regras *hard* e *soft thresholding*.

Figura 4.9 - Exemplo de operação de truncamento.



Neste exemplo, utiliza-se o limiar de corte $\delta = 0,5$.

Fonte: Produção do autor.

Ambas as regras de truncamento precisam de um valor de limiar de corte previamente estabelecido. Para determiná-lo, este trabalho utiliza-se de três técnicas: (1) Algoritmo DJ, (2) Algoritmo AFS e (3) Algoritmo PK.

O Algoritmo DJ, proposto por [Donoho e Johnstone \(1994\)](#), proporciona uma forma fácil, rápida e automática para a obtenção de um limiar de corte universal (δ_u). Este algoritmo baseia-se no fato de que o sinal com ruído y é gerado por:

$$y = f + e \quad (4.12)$$

em que f é o sinal sem ruído e e é o ruído gaussiano. Para obter o valor do limiar de corte universal, o Algoritmo DJ realiza duas etapas descritas a seguir.

Algoritmo 1: Algoritmo DJ

Etapas 1: Inicialização

- 1.1 $(c_1, d_1) \leftarrow DWT(c_0)$: Aplicar um nível de decomposição da DWT ao sinal original $f = c_0$, de tamanho N . Nesta etapa, obtém-se dois vetores, de tamanho $N/2$, denominados coeficiente escala (c_1) e coeficiente *wavelet* (d_1).
- 1.2 σ_{d_1} : Calcular o desvio padrão do coeficiente *wavelet* d_1 dado por $\sigma_{d_1} = \frac{\text{mediana}(|d_1|)}{0,6745}$.
- 1.3 δ_u : Calcular o limiar de corte universal $\delta_u = \sigma_{d_1} \sqrt{2 \ln(N)}$.

Etapas 2: Filtragem

- 2.1 $(c_n, d_n, \dots, d_2) \leftarrow DWT(c_1)$: Aplicar DWT para n escalas ao vetor c_1 . Cada vetor d_j tem metade dos elementos de d_{j-1} .
- 2.2 $(\tilde{d}_n, \dots, \tilde{d}_1) \leftarrow Th_H(d_n, \dots, d_1)$: Aplicar a regra de truncamento *soft threshold* com limiar de corte δ_u nos coeficientes *wavelet* d_1, \dots, d_n .

Etapas 3: Finalização

- 3.1 $c_0^{filtro} \leftarrow IDWT(c_n, \tilde{d}_n, \dots, \tilde{d}_1)$: Aplicar a transformada inversa utilizando os coeficientes *wavelet* filtrados $\tilde{d}_n, \dots, \tilde{d}_1$ e o coeficiente escala c_n para obter o sinal filtrado $f^{filtro} = c_0^{filtro}$.
-

O Algoritmo AFS, proposto por [Azzalini et al. \(2005\)](#), é uma técnica adaptativa para determinar um limiar de corte que minimize o erro da operação de truncamento. Esse algoritmo é composto pelas três etapas apresentadas abaixo.

Algoritmo 2: Algoritmo AFS

Etapa 1: Inicialização

- 1.1 $i \leftarrow 0$: Considerar a iteração inicial com $i = 0$.
- 1.2 $(c_n, d_n, \dots, d_1) \leftarrow DWT(c_0)$: Aplicar a DWT ao sinal original $f = c_0$, com N pontos, para n escalas, obtendo os coeficientes *wavelet* d_1, \dots, d_n e o coeficiente escala c_n .
- 1.3 σ_0^2 : Calcular a variância dos coeficientes *wavelet* $\sigma_0^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n |d_j|^2$.
- 1.4 δ_0 : Calcular o limiar de corte $\delta_0 = \sqrt{2 \ln(N) \sigma_0^2}$.
- 1.5 k_0 : Armazenar em uma variável k_0 a quantidade de coeficientes *wavelet* que foram considerados como ruído. Inicialmente

Etapa 2: Laço Principal para a correção do limiar de corte

- 2.1 $(\tilde{d}_n, \dots, \tilde{d}_1) \leftarrow Th_H(d_n, \dots, d_1)$: Aplicar a regra de truncamento *hard threshold* com limiar de corte δ_i nos coeficientes *wavelet* d_1, \dots, d_n obtidos a partir da DWT de c_0 .
- 2.2 k_{i+1} : Armazenar na variável k_{i+1} o número de coeficientes *wavelet* descartados no passo 2.1.
- 2.3 σ_{i+1} : Calcular o desvio padrão σ_{i+1} de todos os coeficientes *wavelet* descartados no passo 2.1.
- 2.4 δ_{i+1} : Calcular o limiar de corte $\delta_{i+1} = \sigma_{i+1} \sqrt{2 \ln(N)}$.
- 2.5 Se $k_i = k_{i+1}$, passar para a etapa final. Caso contrário, $i = i + 1$ e retornar ao passo 2.1.

Etapa 3: Finalização

- 3.1 $(\tilde{d}_n, \dots, \tilde{d}_1) \leftarrow Th_H(d_n, \dots, d_1)$: Aplicar a regra de truncamento *hard threshold* com δ_{i+1} nos coeficientes *wavelet* d_1, \dots, d_n obtidos a partir da DWT de c_0 .
 - 3.2 $c_0^{filtro} = IDWT(c_n, \tilde{d}_n, \dots, \tilde{d}_1)$: Aplicar a transformada inversa utilizando os coeficientes *wavelet* filtrados $\tilde{d}_n, \dots, \tilde{d}_1$ e o coeficiente escala c_n para obter o sinal filtrado $f^{filtro} = c_0^{filtro}$.
-

O Algoritmo PK, proposto por Perin e Kozakevicius (2013), é outra técnica adaptativa que visa estimar um limiar de corte coerente com o sinal. Nesse algoritmo, a operação de filtragem é composta pelas duas etapas apresentadas a seguir.

Algoritmo 3: Algoritmo PK

Etapas 1: Inicialização

- 1.1 $(c_1, d_1) \leftarrow DWT(c_0)$: Aplicar um nível de decomposição da DWT ao sinal original $f = c_0$, de tamanho N . Nesta etapa, obtém-se dois vetores, de tamanho $N/2$, denominados coeficiente escala (c_1) e coeficiente *wavelet* (d_1).
- 1.2 σ_{d_1} : Calcular o desvio padrão (σ_{d_1}) do coeficiente *wavelet* d_1 .
- 1.3 δ_{d_1} : Calcular o limiar de corte $\delta_{d_1} = \frac{1}{2} \sigma_{d_1} \sqrt{2 \log(N/2)}$.

Etapas 2: Filtragem

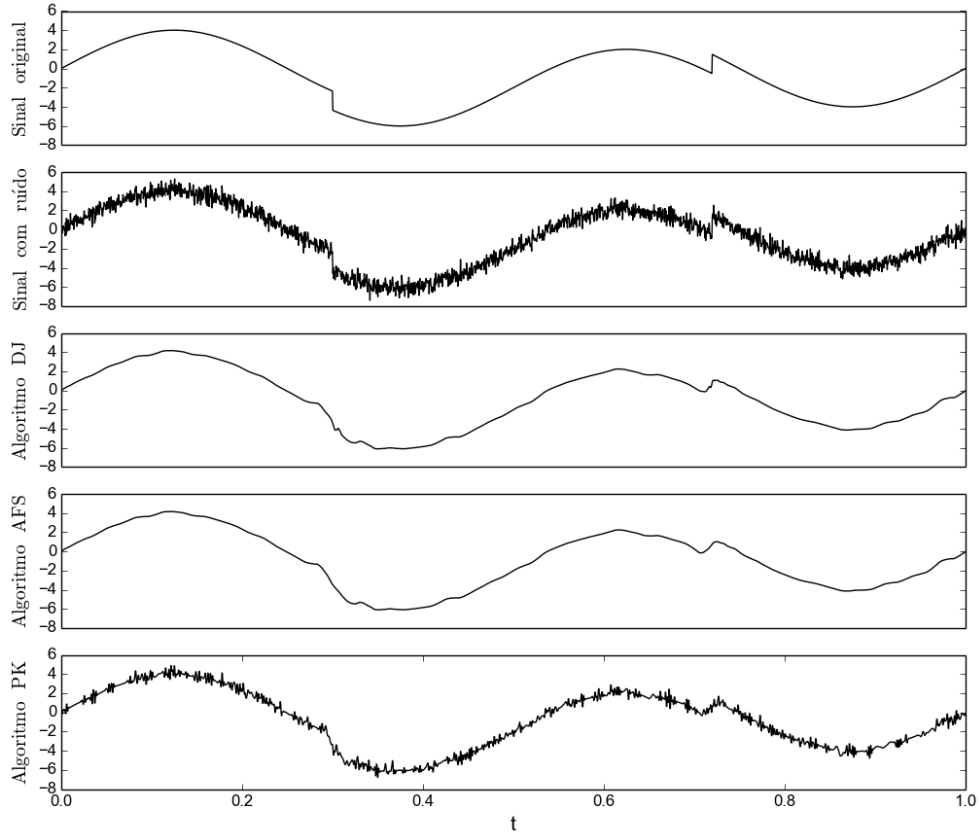
- 2.1 $(c_n, d_n, \dots, d_2) \leftarrow DWT(c_1)$: Aplicar DWT para n escalas ao vetor c_1 . Cada vetor d_j tem metade dos elementos de d_{j-1} .
- 2.2 $\tilde{d}_1 \leftarrow (0, \dots, 0)$ e $(\tilde{d}_n, \dots, \tilde{d}_2) \leftarrow Th_H(d_n, \dots, d_2)$: Descartar todos o coeficiente *wavelet* d_1 e aplicar a regra de truncamento *hard threshold* com limiar de corte δ_{d_1} aos coeficientes *wavelet* d_2, \dots, d_n .

Etapas 3: Finalização

- 3.1 $c_0^{filtro} \leftarrow IDWT(c_n, \tilde{d}_n, \dots, \tilde{d}_1)$: Aplicar a transformada inversa utilizando os coeficientes *wavelet* filtrados $\tilde{d}_n, \dots, \tilde{d}_1$ e o coeficiente escala c_n para obter o sinal filtrado $f^{filtro} = c_0^{filtro}$.
-

A Figura 4.10 apresenta um exemplo de cada algoritmo de filtragem apresentado nesta seção.

Figura 4.10 - Exemplo de filtragem não-linear utilizando *wavelet*.



O sinal original é obtido por $f(t) = 4 \sin(4\pi t) - \text{sign}(t-0,3) - \text{sign}(0,72-t)$. O sinal com ruído é gerado ao adicionar um ruído gaussiano com média 0 e desvio padrão $\sigma = 0,5$. Nos algoritmos de filtragem, adotou-se a função *wavelet* db4 e 5 níveis de decomposição.

Fonte: Produção do autor.

Para determinar o desempenho de cada algoritmo, utiliza-se o valor do erro quadrático médio (ϵ), definido por:

$$\epsilon = \frac{\sum (f^{filtro} - f)^2}{N} \quad (4.13)$$

no qual f representa o sinal original, f^{filtro} representa o sinal filtrado e N representa a quantidade de pontos do sinal. Desta forma, quanto menor o valor de ϵ , melhor é o processo de filtragem.

5 APRENDIZADO DE MÁQUINA

O aprendizado de máquina (*Machine Learning* - AM) é um campo do conhecimento que se situa na interseção da inteligência artificial, da estatística e da ciência da computação teórica (RUSSELL; NORVIG, 2004). O aprendizado de máquina é responsável pelo desenvolvimento de teorias computacionais focadas na criação do conhecimento artificial. Softwares desenvolvidos em seu âmbito usam informações do passado para melhorar o desempenho ou para fazer previsões precisas (MOHRI et al., 2012). Existem diversas aplicações para o aprendizado de máquina, tais como classificação de texto (SEBASTIANI, 2002), diagnósticos médicos (KONONENKO, 2001) ou reconhecimento de padrões (ZANONI et al., 2015).

Segundo Russell e Norvig (2004), os estudos sobre aprendizado de máquina dividem-se em três grupos de aprendizagem: *supervisionada*, *não-supervisionada* e *por reforço*.

No aprendizado supervisionado, é fornecido ao algoritmo de aprendizado, um conjunto de exemplos de treinamento para os quais o rótulo da classe associada é conhecido. Desta forma, o objetivo do algoritmo é construir um classificador que mapeie entradas e saídas e, assim, possa determinar corretamente a classe de novos exemplos ainda não rotulados. Exemplo de algoritmos supervisionados são as *árvores de decisão* e as *máquinas de vetores de suporte*.

O aprendizado não-supervisionado visa extrair informações de dados não rotulados (HAYKIN, 2001). Para isso, o sistema analisa os dados e tenta desvendar a organização dos padrões existentes neles por meio de *clusters* (ou agrupamentos). Após a determinação dos agrupamentos, necessita-se de uma análise para determinar o que cada agrupamento significa no contexto do problema que está sendo analisado. Como exemplo dessa categoria, pode-se citar os algoritmos *k-médias* e *mapas de Kohonen*.

No aprendizado por reforço, não existem pares de entrada e saída para serem usados como treinamento. O aprendizado acontece por meio de interações de tentativa e erro. Se o sistema acertar a execução de uma ação, ele será recompensado; se ele falhar, será punido (HARMON; HARMON, 1996; KAEHLING et al., 1996). Assim, o sistema deve ser capaz de aprender uma política de ações que maximize as suas recompensas futuras (RAJU et al., 2015). Como exemplo deste modelo, pode-se citar o algoritmo *Q Learning*.

Neste trabalho, são descritos algoritmos de aprendizado supervisionado, tais como

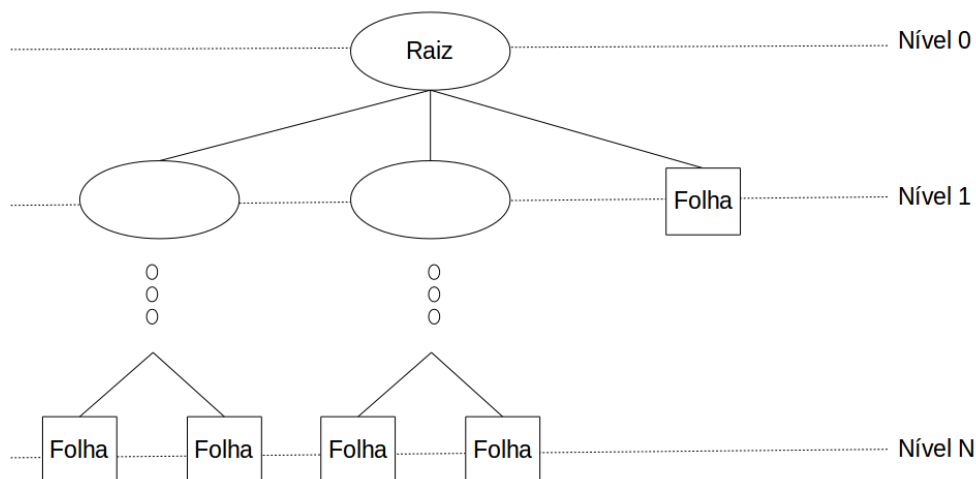
árvore de decisão e máquinas de vetores de suporte.

5.1 Árvore de decisão

Árvore de decisão é um método de inferência indutiva que visa prever a classe de uma instância baseada no conhecimento adquirido em um treinamento prévio (MITCHELL, 1997).

Na representação de uma árvore de decisão, cada nó interno contém um teste em um atributo e, conseqüentemente, cada ramo descendente corresponde a um valor deste atributo. Além disso, cada nó folha está associado a uma classe e, assim, todas as instâncias pertencentes ao nó folha são associados a mesma classe. Cada percurso da árvore, partindo do nó raiz até o nó folha, corresponde a uma regra de classificação (HOLSHEIMER; SIEBES, 1994). A Figura 5.1 ilustra um exemplo genérico da arquitetura de uma árvore de decisão.

Figura 5.1 - Exemplo de arquitetura de uma árvore de decisão.



Fonte: Produção do autor.

Um algoritmo para indução de árvores utiliza a estratégia dividir-para-conquistar, ou seja, um problema complexo é decomposto em sub-problemas mais simples e, recursivamente, a mesma estratégia é aplicada a cada sub-problema (SALZBERG, 1994). A ideia básica do algoritmo de indução é:

1. Escolher um atributo de previsão, associando-o a um nó interno.
2. Estender a árvore adicionando um ramo para cada valor do atributo.
3. Passar as instâncias para os nós folhas de acordo com o valor do atributo.

4. Para cada nó folha, verificar se todas as instâncias pertencem a mesma classe. Se isso ocorrer, associar esta classe ao nó folha. Caso contrário, repetir o passo 1.

Desta forma, o processo de indução de árvore é claro, rápido e intuitivo, tornando o modelo de classificação fácil de ser interpretado (MCCAULEY; GOETZ, 2004). O ponto principal desse algoritmo de indução é identificar os atributos que possuem o maior poder de discriminação entre as classes das instâncias em análise. Essa identificação ocorre a partir de um critério de seleção, como o ganho de informação, que utiliza a entropia como medida para caracterizar a impureza de uma coleção arbitrária de amostras (QUINLAN, 1986).

Para um conjunto de treinamento A , que possui n valores distintos de classe, a *Entropia* é calculada por:

$$Entropia(A) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.1)$$

no qual p_i é a probabilidade do conjunto arbitrário de amostras pertencer à classe n_i .

Utilizando o atributo B , que possui k valores distintos ($b_1 \dots, b_k$), é possível dividir o conjunto A em k partições no qual A_j representa as instâncias de A que possuem o valor b_j . Assim, o *valor esperado de entropia* em A , quando particionado pelo atributo B , é:

$$Entropia(B, A) = \sum_{j=1}^k \frac{|A_j|}{|A|} Entropia(A_j) \quad (5.2)$$

no qual $|\cdot|$ representa o operador módulo. Por conseguinte, o *ganho de informação* do atributo B corresponde a:

$$Ganho(B) = Entropia(A) - Entropia(B, A) \quad (5.3)$$

Assim, o atributo que tiver o maior valor de ganho de informação é escolhido como o atributo de particionamento no nó da árvore. Porém, o ganho de informação favorece atributos com muitos valores distintos. Para contornar essa situação, Quinlan (1993)

propôs o algoritmo de indução de árvore C4.5, no qual utiliza-se a *razão de ganho*, equivalente ao ganho de informação ponderado, como critério de avaliação. Essa razão é dada por:

$$\text{Razão de ganho}(A) = \frac{\text{Ganho}(B)}{\text{Entropia de particionamento}(B, A)} \quad (5.4)$$

em que a *entropia de particionamento* comporta-se de forma análoga à Entropia(B, A), mas penaliza os atributos com um número grande de partições. A entropia de particionamento é obtida:

$$\text{Entropia de particionamento}(B, A) = \sum_{j=1}^k \frac{|A_j|}{|A|} \log_2 \left(\frac{|A_j|}{|A|} \right) \quad (5.5)$$

Portanto, no C4.5 o atributo que contém o maior valor de razão de ganho será o utilizado para o particionar o conjunto A . Para ilustrar o processo de criação da árvore de decisão, considere o conjunto de treinamento da Tabela 5.1. Nesse conjunto, cada instância possui 4 atributos, referentes a condições do tempo, e uma classe, que indica quando deve-se ou não jogar.

Tabela 5.1 - Possibilidade de jogar a partir dos dados sobre o tempo.

| Instância | Atributos | | | | Jogar |
|-----------|------------|-------------|---------|------------|-------|
| | Previsão | Temperatura | Umidade | Vento | |
| 1 | Ensolarado | Quente | Alta | Falso | Não |
| 2 | Ensolarado | Quente | Alta | Verdadeiro | Não |
| 3 | Nublado | Quente | Alta | Falso | Sim |
| 4 | Chuvoso | Média | Alta | Falso | Sim |
| 5 | Chuvoso | Fria | Normal | Falso | Sim |
| 6 | Chuvoso | Fria | Normal | Verdadeiro | Não |
| 7 | Nublado | Fria | Normal | Verdadeiro | Sim |
| 8 | Ensolarado | Média | Alta | Falso | Não |
| 9 | Ensolarado | Fria | Normal | Falso | Sim |
| 10 | Chuvoso | Média | Normal | Falso | Sim |
| 11 | Ensolarado | Média | Normal | Verdadeiro | Sim |
| 12 | Nublado | Média | Alta | Verdadeiro | Sim |
| 13 | Nublado | Quente | Normal | Falso | Sim |
| 14 | Chuvoso | Média | Alta | Verdadeiro | Não |

Fonte: Adaptada de [Witten e Frank \(2005\)](#)

Seja a classe n_1 equivalente a “Sim” e a classe n_2 equivalente a “Não”, pode-se calcular a entropia do conjunto A por:

$$Entropia(A) = -\frac{9}{14} \log_2 \left(\frac{9}{14} \right) - \frac{5}{14} \log_2 \left(\frac{5}{14} \right) = 0,940 \quad (5.6)$$

Em seguida, calcula-se a entropia esperada de cada atributo. Por exemplo, para o atributo *previsão*, tem-se:

$$\begin{aligned} Entropia(previsão, A) &= \frac{5}{14} \left(-\frac{2}{5} \log_2 \left(\frac{2}{5} \right) - \frac{3}{5} \log_2 \left(\frac{3}{5} \right) \right) \\ &\quad + \frac{4}{14} \left(-\frac{4}{4} \log_2 \left(\frac{4}{4} \right) - \frac{0}{4} \log_2 \left(\frac{0}{4} \right) \right) \\ &\quad + \frac{5}{14} \left(-\frac{3}{5} \log_2 \left(\frac{3}{5} \right) - \frac{2}{5} \log_2 \left(\frac{2}{5} \right) \right) \\ &= 0,694 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Assim, o ganho de informação para o atributo *previsão* é:

$$G(previsão) = Entropia(A) - E(previsão, A) = 0,940 - 0,694 = 0,246 \quad (5.8)$$

Analogamente, calcula-se o ganho de informação para os demais atributos: $G(temperatura) = 0,029$, $G(umidade) = 0,151$ e $G(vento) = 0,048$. Em seguida, calcula-se a entropia de particionamento de cada atributo. Por exemplo, a entropia de particionamento do atributo *previsão* é:

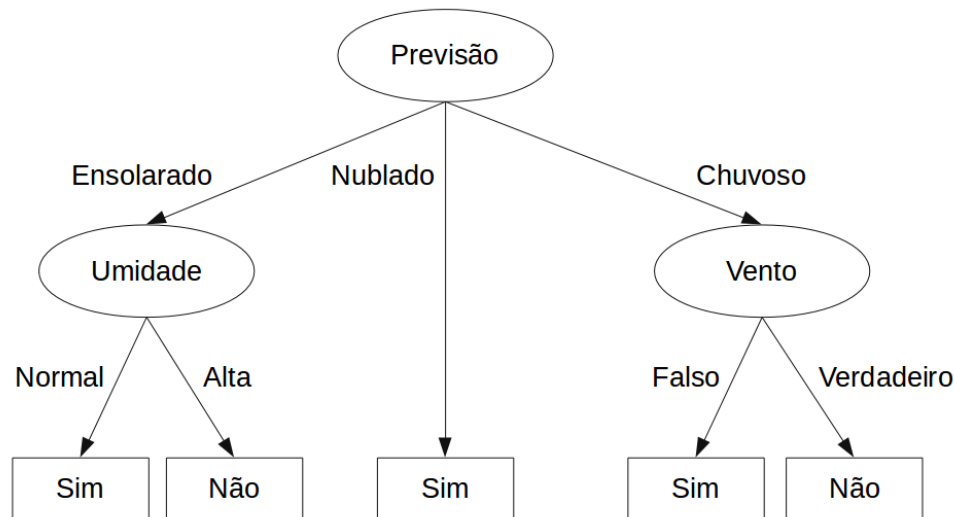
$$\begin{aligned} Entropia \text{ de particionamento}(previsão, A) &= -\frac{5}{14} \log_2 \left(\frac{5}{14} \right) - \frac{4}{14} \log_2 \left(\frac{4}{14} \right) \\ &\quad - \frac{5}{14} \log_2 \left(\frac{5}{14} \right) \\ &= 1,576 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Pode-se, então, obter:

$$\begin{aligned} Razão \text{ de ganho}(previsão) &= \frac{Ganho(previsão)}{Entropia \text{ de particionamento}(previsão, A)} \\ &= \frac{0,246}{1,576} \\ &= 0,156 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Calculando a razão de ganho dos atributos temperatura, umidade e vento tem-se os valores 0,019, 0,151 e 0,048, respectivamente. Como o atributo *previsão* possui o maior valor de razão de ganho, ele é escolhido como nó raiz da árvore. O processo ocorre recursivamente para os demais nós da árvore. Assim, a Figura 5.2 apresenta a árvore de decisão para os dados da Tabela 5.1.

Figura 5.2 - Exemplo geral de árvore de decisão.



Fonte: Produção do autor.

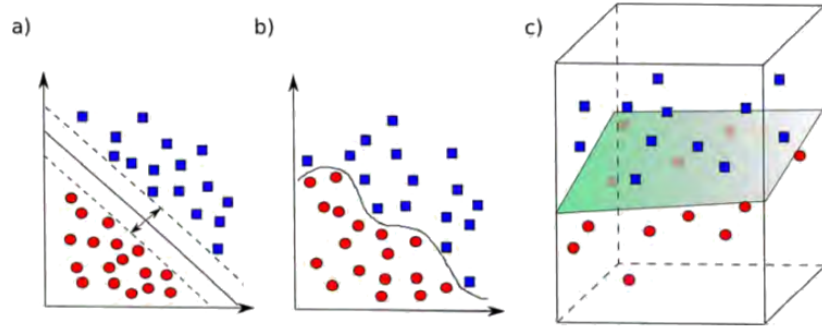
Nessa dissertação, utiliza-se o J48 que é uma implementação do WEKA (HALL et al., 2009) para o algoritmo de indução de árvore C4.5.

5.2 Máquinas de Vetores de Suporte

As máquinas de vetores de suporte (*Support Vector Machine* - SVM), propostas por Cortes e Vapnik (1995), são técnicas de aprendizado supervisionado capazes de classificar dados lineares e não-lineares (XU et al., 2013). Essa técnica tem sido utilizada na solução de diversos tipos de problemas relacionados à classificação, como reconhecimento de padrões, mineração de dados e bioinformática (RUFINO, 2011).

O objetivo do SVM é encontrar um hiperplano com a máxima margem de separação entre as diferentes classes de dados. Se os dados não são lineares, o SVM realiza um mapeamento não-linear do conjunto de dados original para uma dimensão superior no espaço de características, onde a separação por um hiperplano é viável (WANG, 2002; HAN; KAMBER, 2006). A Figura 2.14 ilustra os dois tipos de separação de dados.

Figura 5.3 - Exemplo de separação de duas classes de um conjunto pelo SVM.

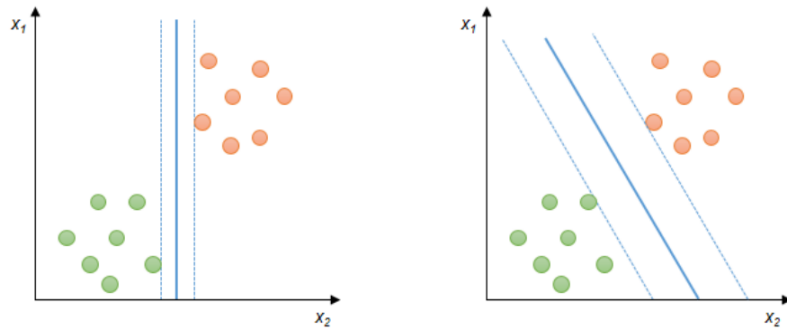


(a) Formação da quando duas classes são linearmente separáveis. (b) Duas classes que não são linearmente separáveis. (c) Dimensão mais elevada possibilita a construção de um hiperplano para separação das duas classes.

Fonte: Santos (2013)

Seja A um conjunto de treinamento com n dados $x_i \in X$ e seus respectivos rótulos $y_i \in Y$, em que X representa o espaço de características e $Y = \{-1, +1\}$. O conjunto A é linearmente separável se é possível separar os dados das classes -1 e +1 por um hiperplano. Porém, como mostra a Figura 5.4, existem diversos hiperplanos capazes de separar as duas classes.

Figura 5.4 - Exemplos de retas capazes de separar as classes -1 e +1.



Fonte: Costa (2014b).

Assim, o objetivo do SVM é encontrar uma reta que minimize o erro de classificação. Para isso, o SVM constrói um hiperplano de máxima margem de separação, em que a margem corresponde à distância mais curta do hiperplano para as instâncias de treinamento mais próximas de cada classe. O hiperplano de separação é definido como:

$$f(x) = \langle w, x \rangle + b = 0 \quad (5.11)$$

no quais w é o vetor ortogonal ao hiperplano de separação, b é um escalar tal que $|b|/||w||$ corresponde à distância do hiperplano à origem do espaço de características, $||\cdot||$ é a norma vetorial e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno. Como essa equação divide o espaço de características X em duas regiões, $\langle w, x \rangle + b > 0$ e $\langle w, x \rangle + b < 0$, é possível utilizar uma função sinal $g(x) = \text{sgn}(f(x))$ para obter as classificações:

$$g(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } \langle w, x \rangle + b > 0 \\ -1 & \text{se } \langle w, x \rangle + b < 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

Para obter o hiperplano de margem máxima de separação deve-se garantir que os dados mais próximos a ele satisfaçam a condição:

$$|\langle w, x_i \rangle + b| = 1 \quad (5.13)$$

o que implica as inequações:

$$f(x_i) = \begin{cases} \langle w, x_i \rangle + b \geq +1 & \text{se } y_i = +1 \\ \langle w, x_i \rangle + b \leq -1 & \text{se } y_i = -1 \end{cases} \quad (5.14)$$

Essas inequações podem ser combinadas em:

$$y_i(\langle w, x_i \rangle + b) \geq 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.15)$$

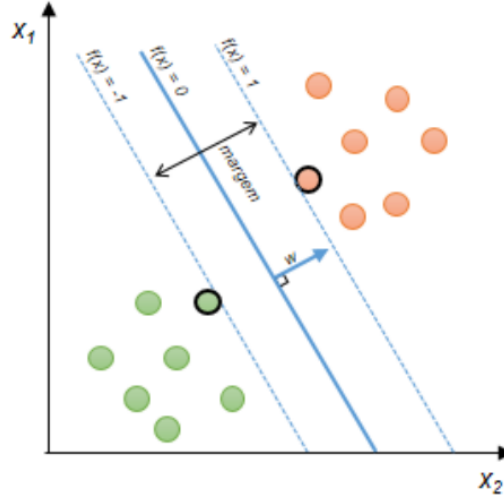
Pelas considerações anteriores, verifica-se que a margem de separação possui largura de $2/||w||$ e que a minimização de $||w||$ leva a maximização da margem (BURGES, 1998). Dessa forma, o SVM encontra o hiperplano por meio da determinação dos parâmetros w e b , modelados pelo problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \min_{w,b} \frac{1}{2} ||w||^2 \\ & \text{sujeito a : } y_i(\langle w, x_i \rangle + b) \geq 1, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5.16)$$

Essas restrições são impostas para assegurar que não haja dados de treinamento entre as margens de separação das classes (LORENA; CARVALHO, 2007). O problema de otimização pode ser solucionado com a introdução de uma função lagrangiana, que adiciona as restrições à função objetivo, associadas aos parâmetros denominados

multiplicadores de Langrange (α_i) (COSTA, 2014b). Uma vez que os vetores de suportes e o hiperplano de margem máxima de separação são encontrados, constrói-se a máquina de vetores de suporte (Figura 5.5).

Figura 5.5 - Representação de uma máquina de vetores de suporte.



Nessa representação, o hiperplano de seleção ótimo é representado pela linha contínua enquanto os vetores de suporte são representados pelas linhas tracejadas.

Fonte: Costa (2014b).

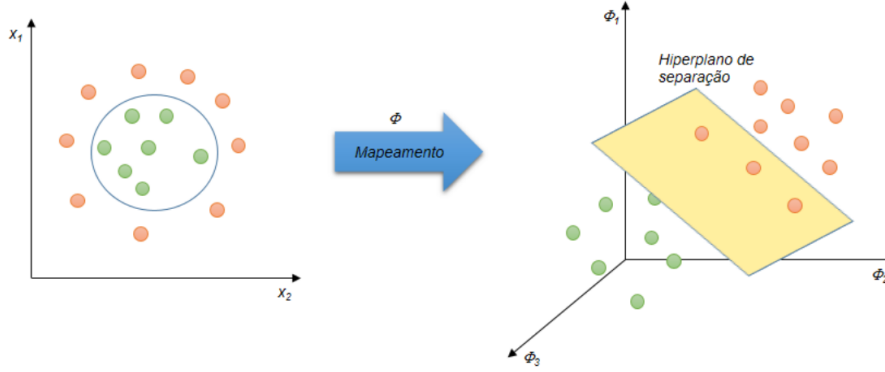
Assim, o hiperplano de margem máxima de separação é definido por:

$$g(x_{teste}) = \text{sgn} \left(\sum_{i=1}^l y_i \alpha_i^* < x_i, x_{teste} > + b^* \right) \quad (5.17)$$

nos quais y_i é a classe associado ao x_i , x_{teste} é o dado de teste a ser rotulado, α_i^* e b^* são os parâmetros obtidos pela otimização e l é a quantidade de vetores de suporte. Assim, se o sinal de $g(x_{teste})$ for positivo, o dado x_{teste} é rotulado como classe +1, caso contrário, é rotulado como -1.

Na prática, a maioria dos problemas não são linearmente separáveis. Para resolver esse problema, o SVM realiza uma transformação não linear do espaço de características original em um espaço de características de dimensão superior. Com os dados transformados, o algoritmo procura um hiperplano que separe os dados no novo espaço de atributos (HAN; KAMBER, 2006). A Figura 5.6 ilustra esse processo.

Figura 5.6 - Exemplo de mapeamento para um espaço de maior dimensão.



Fonte: Costa (2014b).

No caso não-linear, a determinação dos parâmetros do hiperplano na nova dimensão também corresponde a um problema de otimização quadrática lagrangiana. No novo espaço dimensional, os dados de treinamento aparecem na forma de produtos internos $\langle \Phi(x_1), \Phi(x_j) \rangle$, no qual $\Phi(x)$ é a função de mapeamento não-linear. Para resolver essa situação, substitui-se o produto interno por uma função Kernel K , tal que:

$$K(x_i, x_j) = \langle \Phi(x_i), \Phi(x_j) \rangle \quad (5.18)$$

Assim, todos os cálculos são realizados nos dados originais, reduzindo o custo computacional. Com a seleção do Kernel, realiza-se o processo de decisão de forma similar ao processo de predição linear. Porém, insere-se um termo de penalidade C , responsável pela regularização associada à quantidade de dados classificados incorretamente.

Originalmente o SVM foi esquematizado para a classificação binária, porém é possível compor várias SVMs para tratar problemas multi-classes. Para isso, decompõem-se o problema multi-classe em subproblemas binários e, em seguida, faz-se a reconstrução do problema por meio da combinação dos resultados dos subproblemas (COSTA, 2014b). Nessa dissertação, utiliza-se a biblioteca LIBSVM (UNIVERSITY, 2012) que possibilita tanto a classificação de duas classes quanto a classificação multi-classes.

6 DADOS EXPERIMENTAIS

As metodologias propostas nesta dissertação serão usadas para analisar a dinâmica de dois sistemas reais: o coração e o Sol. Ambos são descritos a seguir.

6.1 O coração e seus sinais \mathcal{RR}

O sistema nervoso autônomo desempenha um papel importante no controle do sistema cardiovascular, tanto em condições normais quanto em condições patológicas. Por meio de uma complexa interação de estímulo e de inibição, respostas das vias simpática e parassimpática são formuladas e modificam a frequência cardíaca, adaptando-a às necessidades de cada momento. Nesse cenário, a atuação simpática está relacionada ao aumento da frequência cardíaca, enquanto a atuação parassimpática está relacionada a sua redução (LOPES et al., 2014).

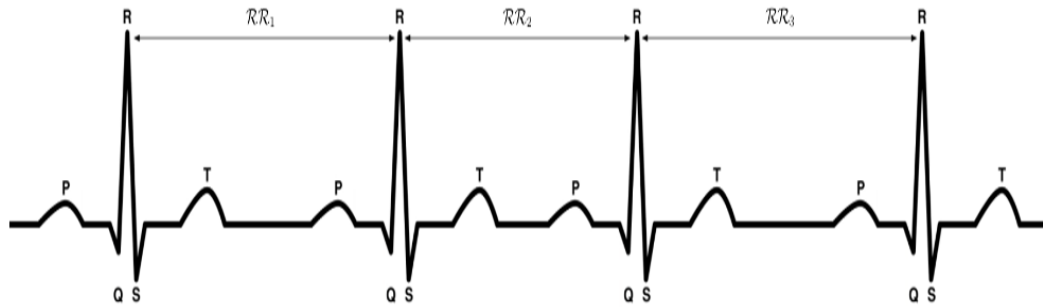
Dentre as técnicas utilizadas para a avaliação do comportamento do sistema nervoso autônomo, uma de grande destaque é a Variabilidade da Frequência Cardíaca (VFC). Essa técnica é uma medida simples e não-invasiva dos impulsos autonômicos, que descrevem as oscilações entre batimentos cardíacos consecutivos (denominados intervalos \mathcal{RR}). Assim, a VFC indica a habilidade do coração em responder aos múltiplos estímulos fisiológicos e ambientais, no qual uma alta variabilidade é sinal de boa adaptação, caracterizando um indivíduo saudável com mecanismos autonômicos eficientes, enquanto uma baixa variabilidade é um indicador de adaptabilidade anormal ou de insuficiência do sistema nervoso autônomo, caracterizando um possível mau funcionamento fisiológico (VANDERLEI et al., 2009; SANTOS, 2013).

As séries temporais de intervalos \mathcal{RR} , ou tacogramas, são obtidas por meio da medição do intervalo de tempo entre picos R-R presentes em um eletrocardiograma (Figura 6.1). O eletrocardiograma é um exame que registra a variação dos potenciais elétricos gerados pela atividade cardíaca. A saída deste exame é um sinal constituído por diferentes tipos de onda, sendo elas:

- Onda P: indica o início do batimento cardíaco. Essa onda é originada por um estímulo na região do átrio direito denominado nódulo sino-atrial. Como é um estímulo de contração, indica a despolarização atrial.
- Onda Q: marca o início da despolarização dos ventrículos. Isso ocorre quando a onda P atinge o nódulo átrio-ventricular e, através das fibras de Purkinge, o estímulo passa pelos ventrículos.

- Onda R: possui a maior amplitude do batimento cardíaco, por isso é utilizada para detecção do batimento cardíaco.
- Onda S: representa o fim da despolarização ventricular.
- Onda T: indica a repolarização ventricular. Nesta fase, os músculos cardíacos voltam ao seu estado de repouso.

Figura 6.1 - Ondas de um eletrocardiograma.



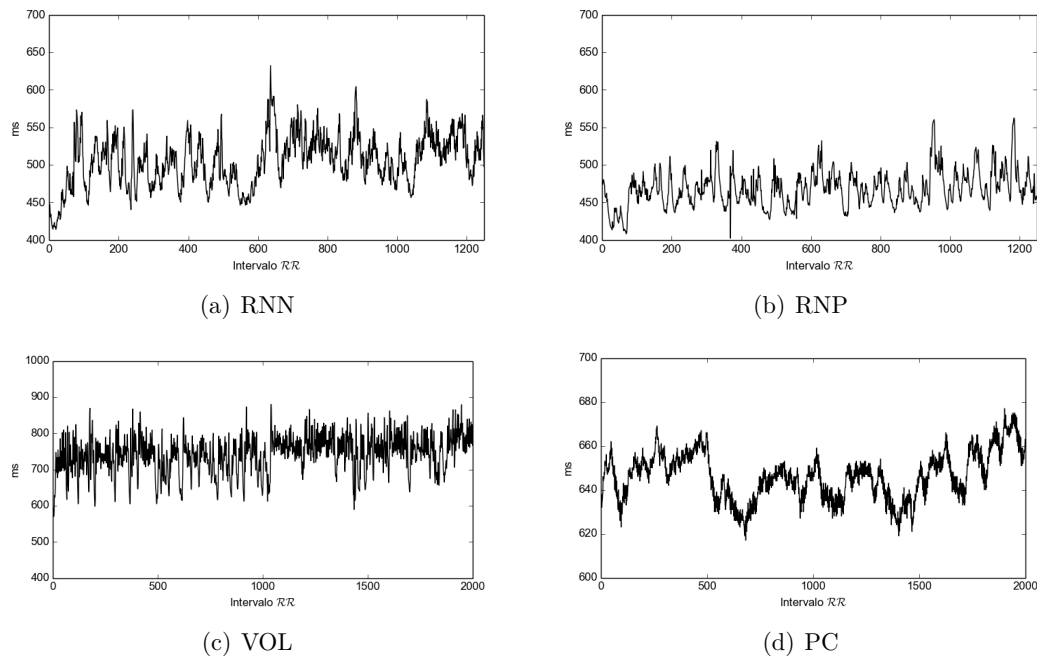
Fonte: Produção do autor.

Neste trabalho, o conjunto de séries temporais de intervalos \mathcal{RR} é proveniente do Núcleo Transdisciplinar de Estudos de Complexidade e Caos (NUTECC), sediado na Faculdade de Medicina de São José dos Rio Preto, e está dividido em quatro grupos de pacientes:

- RNN: 24 recém-nascidos normais.
- RNP: 53 recém-nascidos prematuros internados em unidades de terapia intensiva visando estabilização até a aquisição de condição de alta hospitalar.
- VOL: 61 jovens adultos saudáveis em boas condições de saúde e praticantes de atividade física regular.
- PC: 61 adultos em observação pré-operatória para revascularização cirúrgica do miocárdio por coronariopatia obstrutiva grave.

A Figura 6.2, apresenta séries temporais típicas de cada grupo.

Figura 6.2 - Exemplos de séries temporais de intervalos \mathcal{RR} para os grupos clínicos RNN, RNP, VOL e PC.



Fonte: Produção do autor.

As séries temporais são obtidas por meio do cinto polar (S810i ou RS800), que são eletrodos ligados a uma tira elástica colocada em torno do tórax do paciente, com uma taxa de amostragem de 1000Hz. Para remover os artefatos e arritmias presentes nas séries, realiza-se um pré-processamento com o filtro adaptativo proposto por Santos (2013).

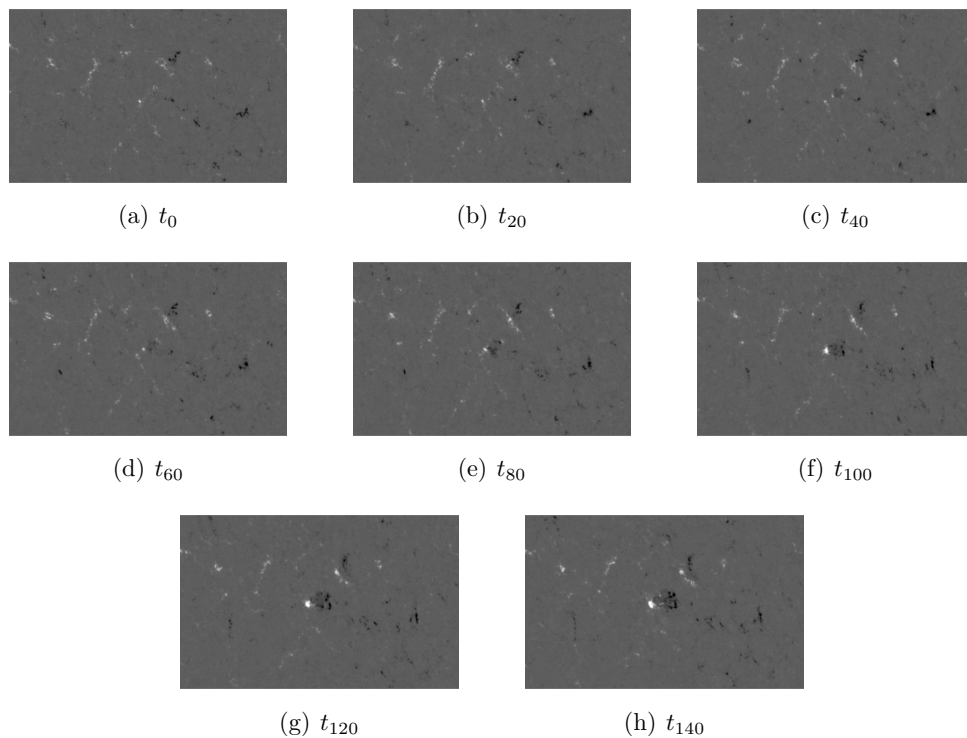
Para esse conjunto de dados, busca-se analisar como as técnicas de sistemas dinâmicos, análise *wavelet* e aprendizado de máquina podem ser utilizados para obter e identificar quantificadores capazes de discriminar os diferentes grupos de pacientes. Essa análise é detalhada na Seção 7.3.

6.2 Dinâmica do campo magnético do Sol

Nesse conjunto de dados experimentais explora-se a análise do campo magnético da superfície solar obtidas pelo instrumento *Helioseismic and Magnetic Imager* (SCHOU et al., 2012) a bordo do satélite *Solar Dynamics Observatory*. As imagens desse conjunto são obtidas por meio de espectropolarimetria, que consta de observações da fotosfera solar em diferentes polarizações e comprimentos de onda próximas a uma linha de observação que seja sensível ao efeito Zeeman (nesse caso, linha do Fe I em 6173 Å). Nestas imagens, o campo magnético é medido em gauss e as regiões brancas representam o campo magnético saindo do plano enquanto as regiões pretas representam o campo magnético entrando.

No total, são utilizadas 167 imagens do dia 29/09/2013 com cadência de 4,5 minutos e tamanho 309×496 , no qual há uma emergência de fluxo magnético, levando a formação de uma mancha solar. A Figura 6.3 apresenta a evolução da dinâmica do campo magnético solar ao longo do tempo. Observa-se que no início não existe a formação de mancha solar. Com o decorrer do tempo, surge uma mancha solar no centro da imagem.

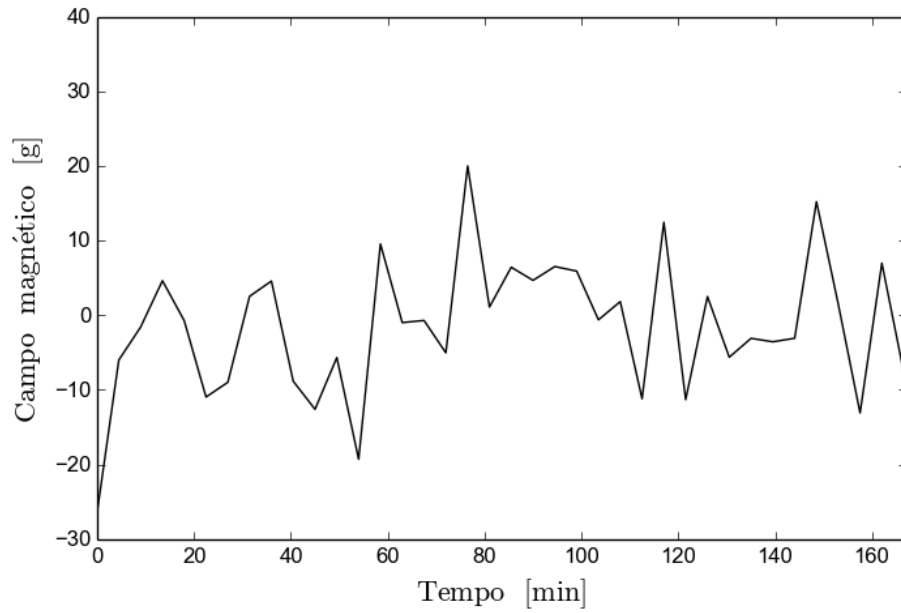
Figura 6.3 - Exemplo da dinâmica do campo magnético solar ao longo do tempo.



Fonte: Adaptada de Schou et al. (2012).

A partir desse conjunto de observações, obtém-se 153264 séries temporais, de 167 pontos cada, que representam a evolução temporal do pixel de posição (x, y) . Dessa forma, é possível analisar a dinâmica em uma determinada região do Sol. A Figura 6.4 apresenta um exemplo de série temporal obtida.

Figura 6.4 - Exemplo de série temporal do campo magnético solar.



Fonte: Adaptada de Schou et al. (2012).

7 USO COMBINADO DE *WAVELET* PARA REDUÇÃO DO TEMPO DE CÁLCULO DO GRÁFICO DE RECORRÊNCIA

Este capítulo apresenta a descrição de uma metodologia na qual utiliza-se a transformada *wavelet* discreta para gerar uma série suavizada, com menor quantidade de pontos. Essa série com menor número de pontos é usada para gerar o gráfico de recorrência. Desta forma, a metodologia proposta preserva a dinâmica do sistema além de reduzir a complexidade computacional do cálculo do gráfico de recorrência e da análise de quantificação de recorrência. As Seções 7.2 e 7.3 apresentam, respectivamente, os resultados da aplicação da metodologia em dados simulados e em dados experimentais.

7.1 Explorando a *wavelet* em diferentes escalas

O desenvolvimento aqui considerado envolve quatro etapas. A etapa inicial tem o objetivo de criar bases de dados constituídas por séries temporais não-lineares. Para isso, geram-se três bases distintas, provenientes do mapa logístico e do sistema de Rössler (descritos no Capítulo 2), e por dados experimentais reais de intervalos \mathcal{RR} (descrito na Seção 6.1).

A segunda etapa visa utilizar a transformada *wavelet* discreta para gerar séries suavizadas que reduzem a quantidade de pontos das séries temporais. Nesta etapa, utilizam-se as *wavelets* de Daubechies (descritas na Seção 4.1.1) para obter três níveis de decomposição. Ao final dessa etapa, cada base dados é dividida em quatro grupos:

- Nível 0: séries temporais originais.
- Nível 1: coeficientes escala do primeiro nível de decomposição.
- Nível 2: coeficientes escala do segundo nível de decomposição.
- Nível 3: coeficientes escala do terceiro nível de decomposição.

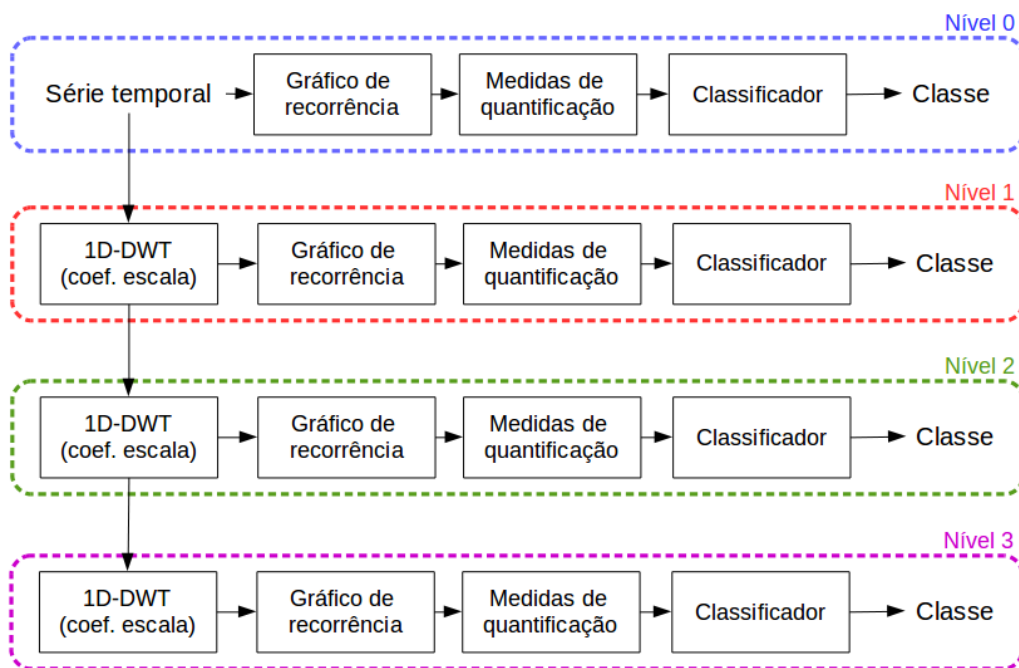
A terceira etapa compreende a análise dos dados usando o gráfico de recorrência e seus quantificadores. Para cada nível de decomposição, obtém-se os gráficos de recorrência e extraem-se sete medidas de quantificação de recorrência, sendo elas: taxa de recorrência, determinismo, tamanho da maior linha diagonal, tamanho médio das linhas diagonais, entropia de recorrência, laminaridade e tamanho médio das linhas

verticais. Essas medidas de quantificação são obtidas pelo *software Commandline Recurrence Plots*, disponibilizado por Marwan et al. (2007b).

A última etapa utiliza técnicas de aprendizado de máquina para identificar o quanto cada nível de decomposição é eficiente na caracterização da dinâmica presente no sistema. Para isso, treinam-se os classificadores com as medidas extraídas na etapa anterior e avalia-se quantos registros são classificados corretamente. Assim, a acurácia de cada nível de decomposição é a porcentagem de acerto do classificador. Neste trabalho, utiliza-se os classificadores árvore de decisão J48 e máquinas de vetores de suporte disponíveis no *software* WEKA (HALL et al., 2009).

Para resumir, esse procedimento pode ser visualizado de forma esquemática na Figura 7.1.

Figura 7.1 - Fluxo do enfoque empreendido, no qual utiliza-se a transformada *wavelet* discreta para reduzir a complexidade computacional do cálculo do gráfico de recorrência.



Fonte: Produção do autor.

7.2 Resultados

Nessa seção, apresentam-se os resultados da aplicação da metodologia em dados provenientes do mapa logístico e do sistema de Rössler.

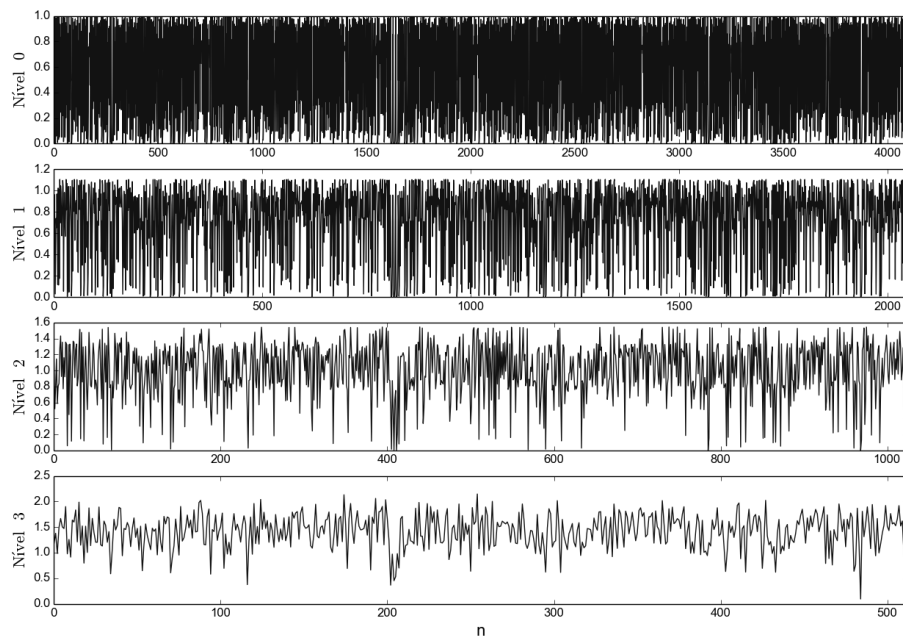
7.2.1 Mapa logístico

Nesse experimento, o conjunto de dados é constituída por séries temporais do mapa logístico, conforme descrito na Subseção 2.2.1.1. Assim, tem-se 4801 séries temporais, com 4096 pontos cada, no qual o parâmetro r varia entre 2,80 e 4,00. Aplicando a transformada *wavelet* discreta, usando a *wavelet db1* em três níveis de decomposição, obtém-se quatro grupos de dados:

- Nível 0: 4801 séries temporais do mapa logístico com 4096 pontos cada.
- Nível 1: 4801 coeficientes escala do primeiro nível de decomposição com 2048 pontos cada.
- Nível 2: 4801 coeficientes escala do segundo nível de decomposição com 1024 pontos cada.
- Nível 3: 4801 coeficientes escala do terceiro nível de decomposição com 512 pontos cada.

A Figura 7.2 apresenta um exemplo de série temporal obtido em cada nível de decomposição.

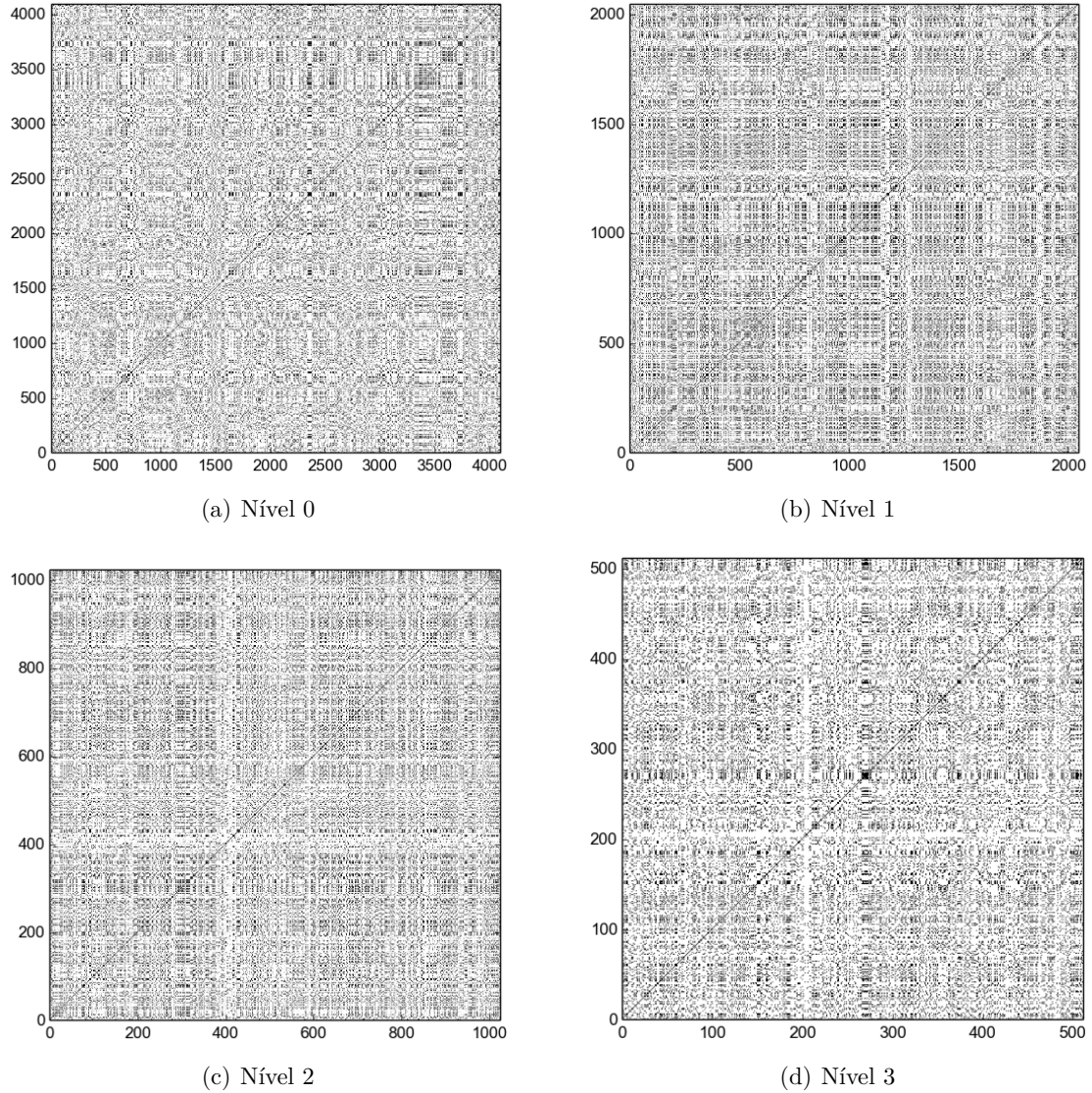
Figura 7.2 - Aplicação da transformada *wavelet* discreta, usando a *wavelet db1*, em uma série temporal do mapa logístico com $r = 4,00$.



Fonte: Produção do autor.

Para cada registro obtido, gera-se o gráfico de recorrência e extrai-se as medidas de quantificação utilizando a configuração $m = 1$, $\tau = 1$ e $\rho = 0,1$. A Figura 7.3 apresenta exemplos de gráfico de recorrência obtidos em cada nível de decomposição.

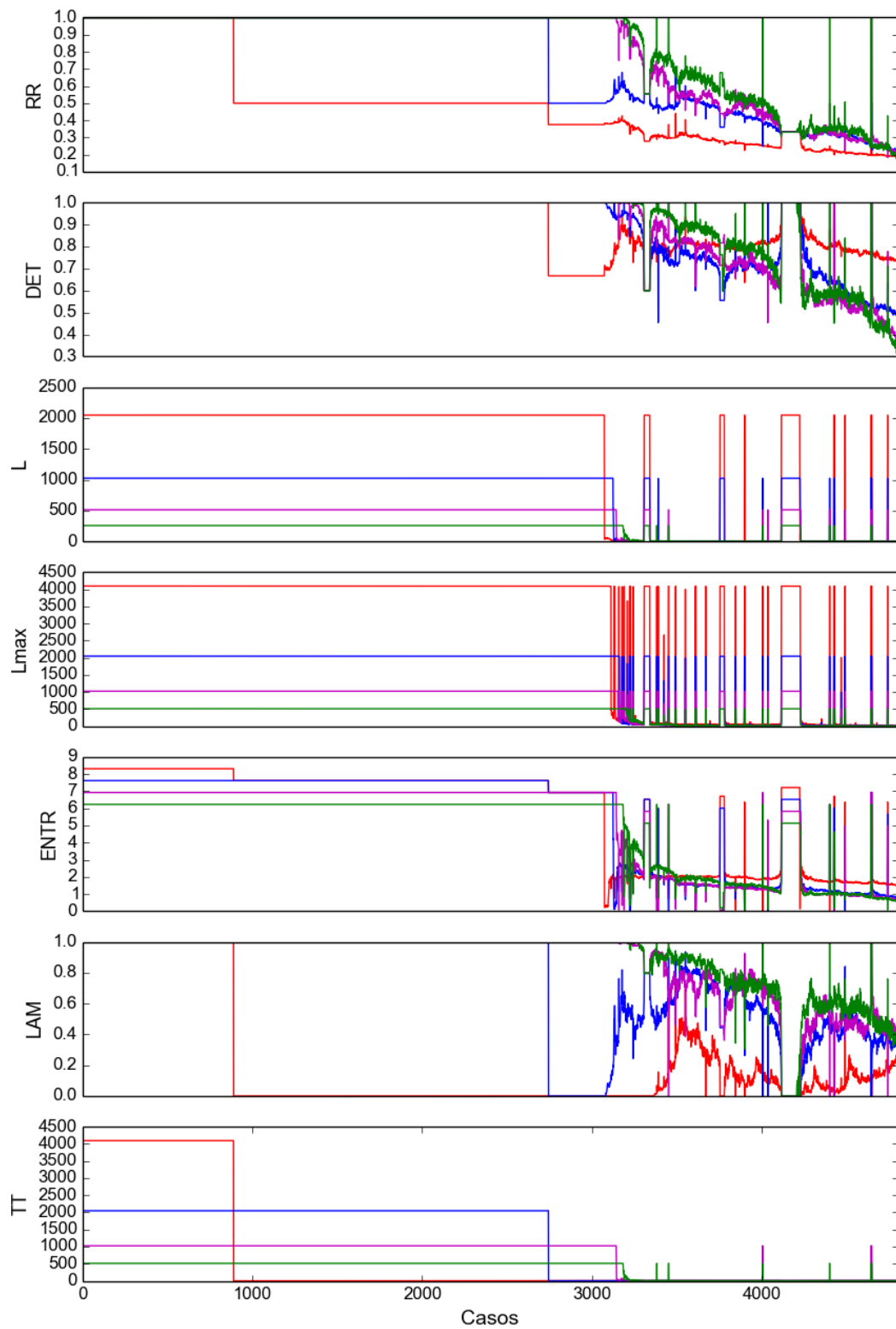
Figura 7.3 - Exemplos dos gráficos de recorrência dos quatro níveis de decomposição da série temporal do mapa logístico com $r = 4$.



Fonte: Produção do autor.

Dessa forma, para cada nível de decomposição, obtém-se um conjunto de dados formado por 4801 registros com sete características cada. A Figura 7.4 apresenta a variação dos parâmetros do RQA ao longo de cada nível de decomposição.

Figura 7.4 - Variação dos parâmetros do RQA ao longo dos níveis de decomposição do mapa logístico.

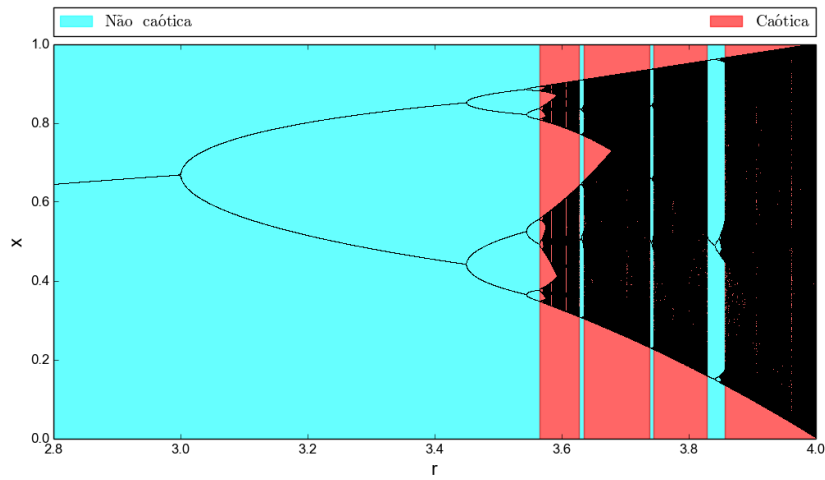


As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

Para avaliar o quanto os quantificadores, obtidos a partir dos 4 níveis de decomposição, são capazes de identificar diferenças na dinâmica do mapa logístico, são realizados dois experimentos. O *Experimento 1* visa identificar a ausência ou a presença de caos no conjunto de dados. Para isso, a rotulação de cada registro baseia-se no valor do expoente de Lyapunov (λ) das séries temporais do nível 0 de decomposição. Assim, se $\lambda \leq 0$, indica-se que o registro não possui comportamento caótico; se $\lambda > 0$, indica-se que o registro possui comportamento caótico. Como indicado na Figura 7.5, ao final do processo de rotulação, o conjunto de dados é dividido em duas regiões: não caótica e caótica.

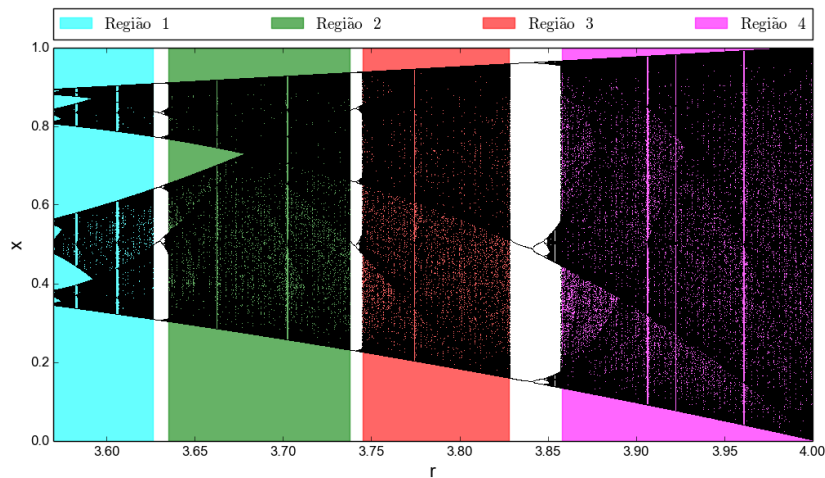
Figura 7.5 - Localização das regiões caóticas e não caóticas do mapa logístico.



Fonte: Produção do autor.

O *Experimento 2* tem por objetivo analisar a capacidade dos quantificadores em distinguir quatro regiões caóticas do mapa logístico apresentadas na Figura 7.6.

Figura 7.6 - Localização de quatro regiões caóticas do mapa logístico.



Fonte: Produção do autor.

Para a análise do mapa logístico são adotadas três abordagens diferentes. A *primeira abordagem* utiliza todos os quantificadores para treinar o classificador e, assim, obter a acurácia do nível de decomposição.

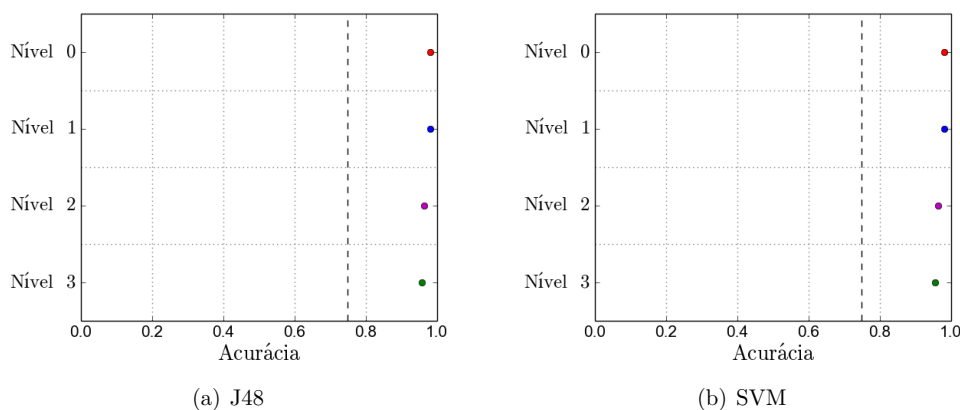
Como o RQA possui medidas baseadas na densidade de recorrência, nas linhas diagonais e nas linhas verticais, a *segunda abordagem* visa estudar o quanto cada um desses grupo é capaz de distinguir as diferenças na dinâmica do sistema. Nessa análise, calcula-se tanto a acurácia de cada grupo individualmente quanto a acurácia dos grupos combinados dois a dois.

Na *terceira abordagem*, apresenta-se apenas uma medida por vez ao classificador, o que possibilita identificar quais medidas são capazes ou não de detectar diferenças na dinâmica do sistema.

Primeira abordagem

Na primeira abordagem, as Figuras 7.7 e 7.8 apresentam, respectivamente, as acurácias médias obtidas nos Experimentos 1 e 2 quando todos os sete quantificadores são apresentados como entrada para o J48 e para o SVM. Na análise dos resultados, adota-se, empiricamente, que valores superiores a 0,75 (linha tracejada) indicam que o nível de decomposição é capaz de identificar as diferenças na dinâmica do conjunto de dados.

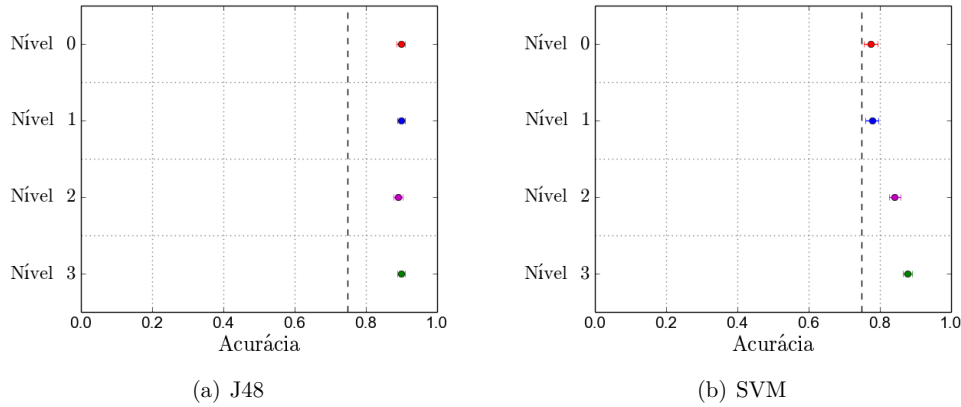
Figura 7.7 - Acurácias do Experimentos 1 do mapa logístico quando as sete medidas são apresentadas de uma vez como padrões de entrada.



As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.8 - Acurácias do Experimento 2 do mapa logístico quando as sete medidas são apresentadas de uma vez como padrões de entrada.



As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

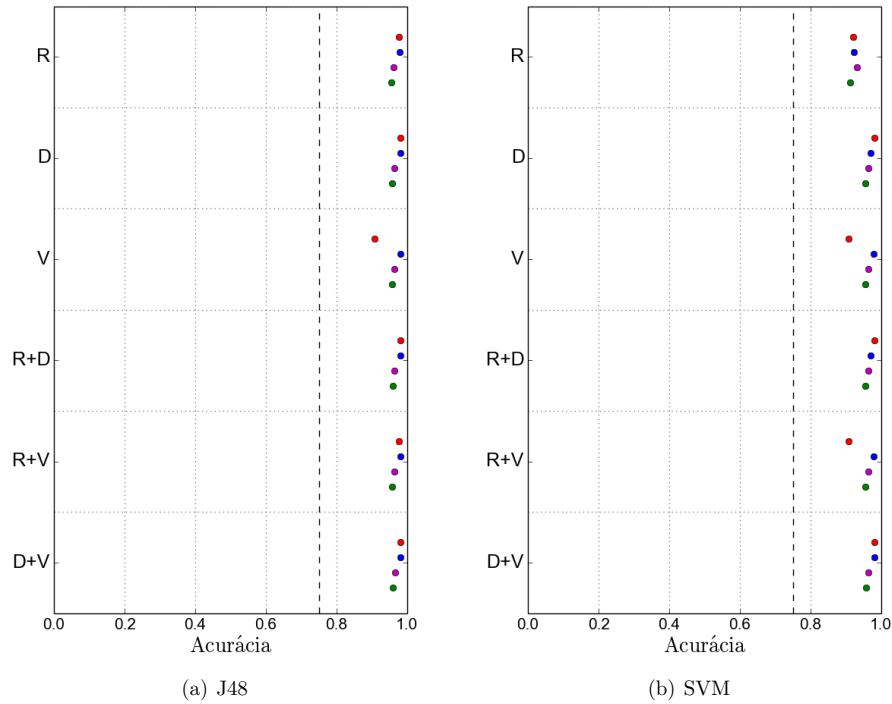
Fonte: Produção do autor.

Observa-se que, em ambos os experimentos, os quantificadores de todos os níveis de decomposição possuem acurácias superiores a 0,75. Isso indica fortemente a capacidade dos quantificadores em distinguir os diferentes comportamentos presentes no mapa logístico.

Segunda abordagem

Nessa abordagem o objetivo é estudar o quanto cada um grupo de quantificação é capaz de identificar diferenças na dinâmica do sistema. Para isso, são realizados 6 testes nos quais analisa-se tanto a acurácia individual de cada grupo, quanto a acurácia dos grupos combinados dois a dois. Nessa análise, adota-se que o grupo de quantificação que possuir acurácia superior a 0,75 (linha tracejada) é capaz de discriminar os diversos comportamentos presente no sistema. As Figuras 7.9 e 7.10 apresentam, respectivamente, os resultados obtidos nos Experimentos 1 e 2.

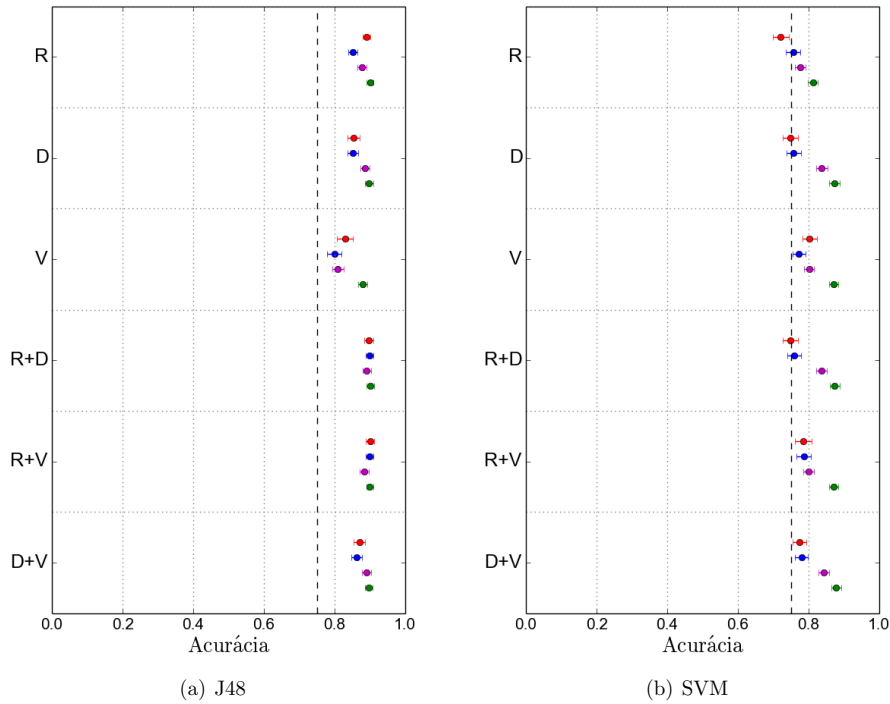
Figura 7.9 - Acurácias do Experimento 1 quando cada um dos grupos de quantificadores do mapa logístico são fornecidos como padrões de entrada.



As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3. As siglas R, D e V representam, respectivamente, as medidas baseadas na densidade de recorrência (RR), nas linhas diagonais (DET, L, Lmax, ENTR) e nas linhas verticais (LAM, TT).

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.10 - Acurácias do Experimento 2 quando cada um dos grupos de quantificadores do mapa logístico são fornecidos como padrões de entrada.



As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3. As siglas R, D e V representam, respectivamente, as medidas baseadas na densidade de recorrência (RR), nas linhas diagonais (DET, L, Lmax, ENTR) e nas linhas verticais (LAM, TT).

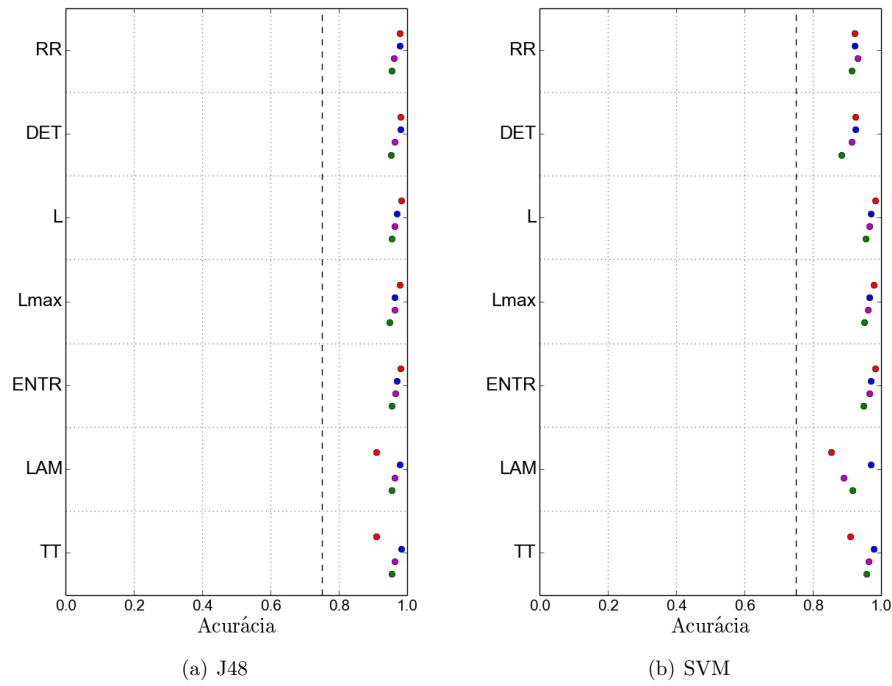
Fonte: Produção do autor.

Nessa abordagem observa-se que, em ambos os experimentos, os grupos de quantificadores de todos os níveis de decomposição possuem acurácias superiores a 0,75. Isso indica que os grupos de quantificação são capazes de reconhecer diferenças na dinâmica do mapa logístico.

Terceira abordagem

Nessa abordagem, analisa-se a capacidade individual do quantificador em distinguir as diferenças na dinâmica do mapa logístico. Convenciona-se, empiricamente, que o quantificador que possuir acurácia superior a 0,75 (linha tracejada) é capaz de discriminar as diferenças na dinâmica do sistema. As Figuras 7.11 e 7.12 apresentam, respectivamente, os resultados obtidos nos Experimentos 1 e 2.

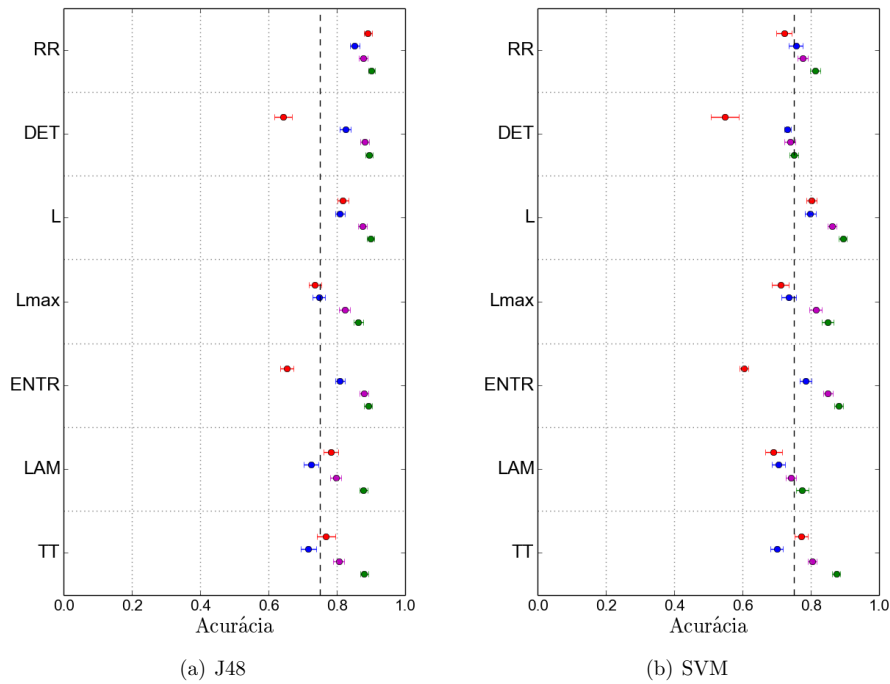
Figura 7.11 - Acurácias do Experimentos 1 quando os quantificadores do mapa logístico são fornecidos individualmente como padrão de entrada.



As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.12 - Acurácias do Experimentos 2 quando os quantificadores do mapa logístico são fornecidos individualmente como padrão de entrada.



As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

No Experimento 1, todos os quantificadores, em todos os níveis de decomposição, são capazes de distinguir a região caótica da região não caótica. Isso indica fortemente que a separação caos - não caos é uma tarefa simples que pode ser realizada com um único quantificador.

Porém, no Experimento 2, os classificadores J48 e SVM atingem acurácias superiores a 0,75 em apenas 78% e 57% dos testes. Isso mostra que a distinção das regiões caóticas é uma tarefa complexa que necessita de maiores informações para realizar a distinção.

Síntese de resultados

Nas três abordagens realizadas, os quantificadores obtidos são capazes de distinguir diferenças na dinâmica do mapa logístico. Dentre os níveis de decomposição utilizados, os quantificadores dos níveis 1 e 3 apresentam os melhores resultados nos Experimentos 1 e 2, respectivamente.

Como mostra a Tabela 7.1, ao utilizar as séries temporais dos níveis de decomposição 1 e 3, obtém-se uma redução de 76% e 96%, respectivamente, do custo computacional para extração de quantificadores RQA. Assim, pode-se afirmar que a transformada *wavelet* discreta possibilita a redução do custo computacional para a extração de quantificadores ao gerar séries suavizadas, com menor quantidade de pontos, que preservam a dinâmica do sistema.

Tabela 7.1 - Tempo para calcular a DWT e o RQA do mapa logístico.

| Nível de decomposição | Número de pontos | Tempo de cálculo [s] | | | % Tempo |
|-----------------------|------------------|----------------------|------|-------|---------|
| | | DWT | RQA | Total | |
| 0 | 4096 | - | 2524 | 2524 | 100 |
| 1 | 2048 | 27 | 582 | 609 | 24 |
| 2 | 1024 | 41 | 164 | 205 | 8 |
| 3 | 512 | 48 | 51 | 99 | 4 |

Tempo referente ao processamento em um Intel Core i7-4790 @ 3.60GHz e 8Gb de RAM.

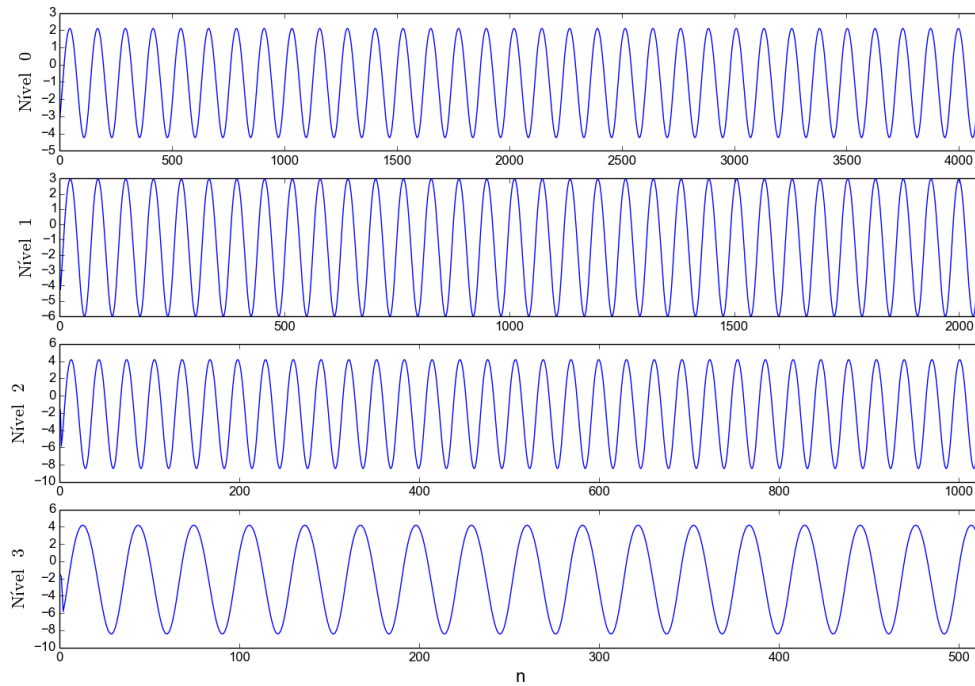
7.2.2 Sistema de Rossler

Nesse experimento, o conjunto de dados é constituída por séries temporais do sistema de Rössler, conforme descrito na Subseção 2.2.1.2. Assim, tem-se 4001 séries temporais, com 4096 pontos cada, no qual o parâmetros a varia entre 0,3 e 0,5. Aplicando a transformada *wavelet* discreta, usando a *wavelet db4* em três níveis de decomposição, obtém-se quatro grupos de dados:

- Nível 0: 4001 séries temporais do sistema de Rössler com 4096 pontos cada.
- Nível 1: 4001 coeficientes escala do primeiro nível de decomposição com 2048 pontos cada.
- Nível 2: 4001 coeficientes escala do segundo nível de decomposição com 1024 pontos cada.
- Nível 3: 4001 coeficientes escala do terceiro nível de decomposição com 512 pontos cada.

A Figura 7.13 apresenta um exemplo de série temporal obtido em cada nível de decomposição.

Figura 7.13 - Aplicação da transformada *wavelet* discreta, usando a *wavelet db4*, em uma série temporal do sistema de Rössler com $a = 0,3$.



Fonte: Produção do autor.

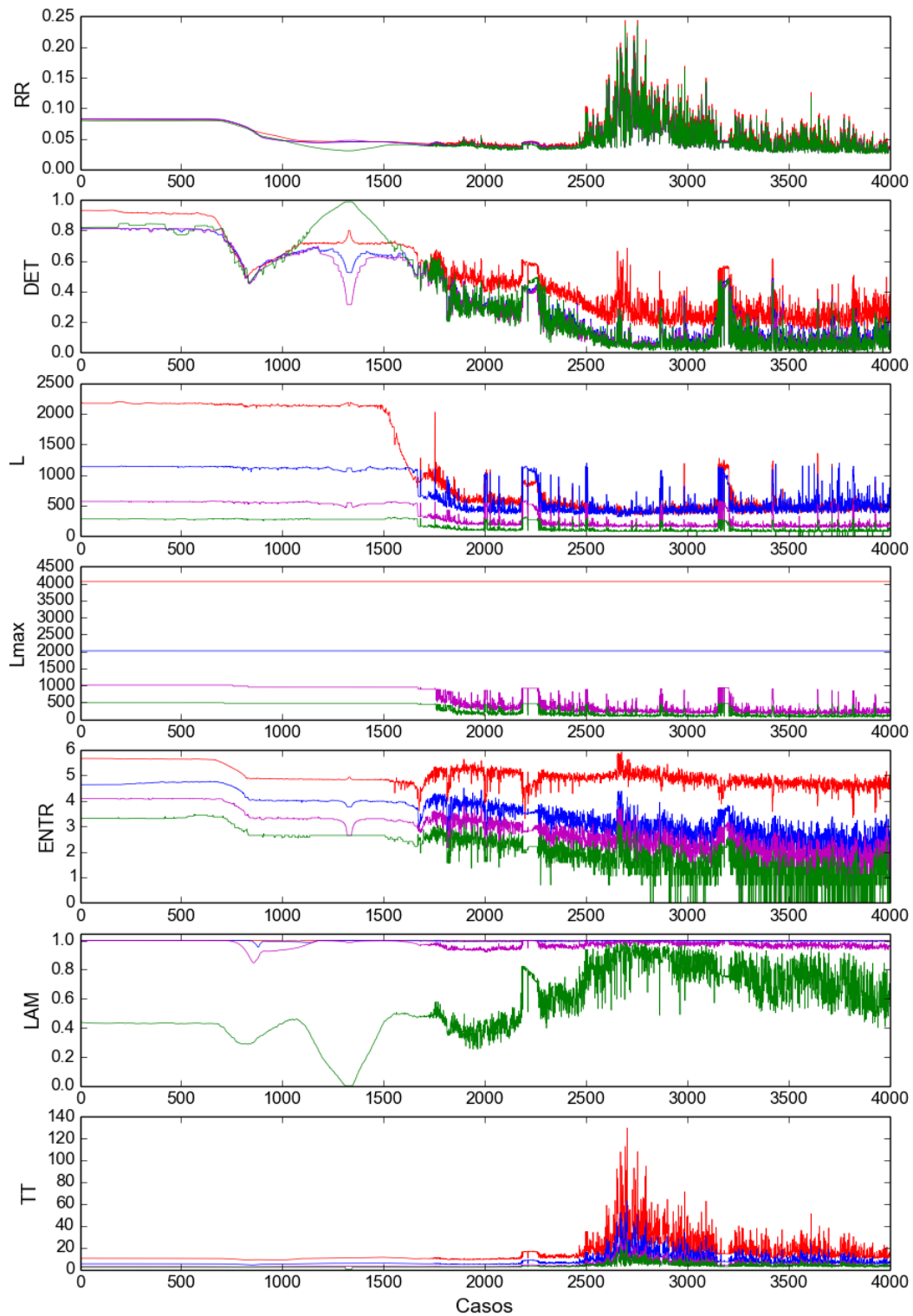
Para cada registro obtido gera-se o gráfico de recorrência e extrai-se as respectivas medidas de quantificação utilizando as configurações definidas na Tabela 7.2, no qual m é a dimensão de imersão, τ é o atraso, ρ é o raio de vizinhança e l é o tamanho mínimo da linha diagonal.

Tabela 7.2 - Parâmetros para calcular o gráfico de recorrência e análise de quantificação de recorrência do sistema de Rössler.

| Nível de decomposição | Configuração do RP e RQA | | | | % Tempo |
|-----------------------|--------------------------|--------|-------------|-----|---------|
| | m | τ | ρ | l | |
| 0 | 3 | 20 | 1 | 512 | 100 |
| 1 | 3 | 14 | $\sqrt{2}$ | 256 | 24 |
| 2 | 3 | 7 | 2 | 128 | 8 |
| 3 | 3 | 3 | $2\sqrt{2}$ | 64 | 4 |

Desta forma, para cada nível de decomposição, obtém-se um conjunto de dados formado por 4001 registros com sete características cada. A Figura 7.14 apresenta a variação dos parâmetros do RQA ao longo de cada nível de decomposição.

Figura 7.14 - Variação dos parâmetros do RQA ao longo dos níveis de decomposição do sistema de Rössler.

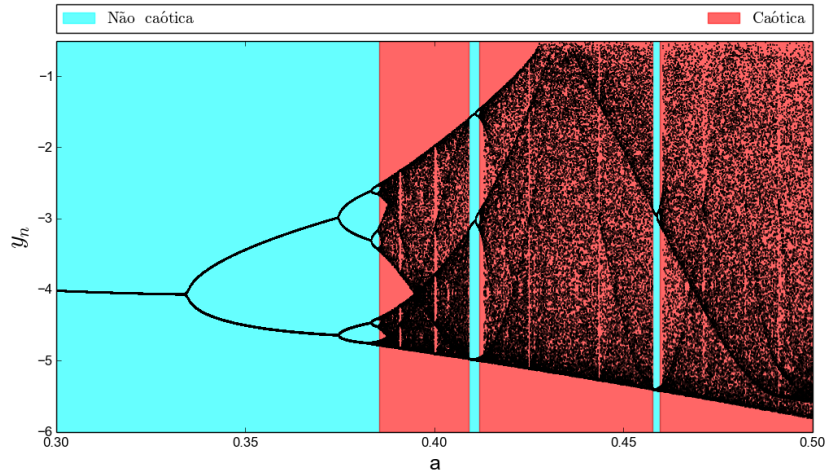


As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

Para avaliar o quanto os quantificadores, obtidos a partir dos 4 níveis de decomposição, são capazes de identificar diferenças na dinâmica do sistema de Rössler, são realizados dois experimentos. O *Experimento 1* visa identificar a ausência ou a presença de caos nas séries temporais. Para isso, a rotulação dos registros é baseada no valor do expoente de Lyapunov (λ) das séries do nível 0 de decomposição. Assim, obtém-se as regiões destacadas na Figura 7.15.

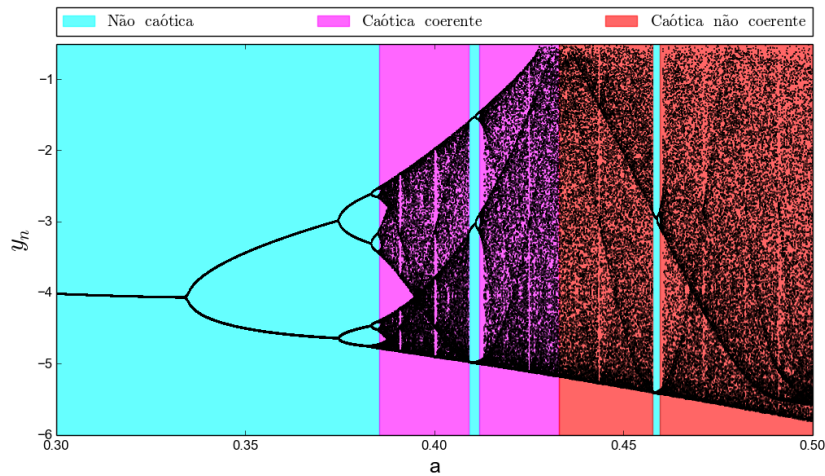
Figura 7.15 - Localização das regiões caóticas e não caóticas do sistema de Rössler.



Fonte: Produção do autor.

Como mencionado na Subseção 2.2.1.2, o sistema de Rössler possui dois tipos de comportamento caótico: coerente e não coerente. Assim, o *Experimento 2* tem por objetivo analisar a capacidade de distinguir três comportamentos: não caótico, caótico coerente e caótico não coerente. Essas regiões estão destacadas na Figura 7.16.

Figura 7.16 - Localização das regiões não caóticas, caóticas fase-coerentes e caóticas fase-não coerentes do sistema de Rössler.



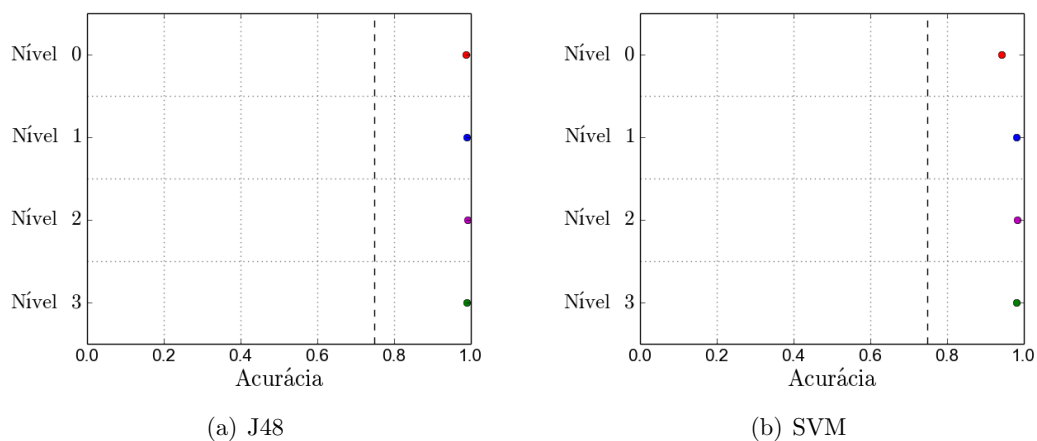
Fonte: Produção do autor.

Para a análise de cada experimento, são realizadas as três abordagens descritas na Subseção 7.2.1.

Primeira abordagem

Na primeira abordagem, as Figuras 7.17 e 7.18 apresentam, respectivamente, as acurácias médias obtidas nos Experimentos 1 e 2 quando todos os sete quantificadores são apresentados como entrada para os classificadores J48 e SVM. Nessa análise, adota-se, empiricamente, que valores superiores a 0,75 (linha tracejada) indicam que o nível de decomposição é capaz de identificar as diferenças na dinâmica do conjunto de dados.

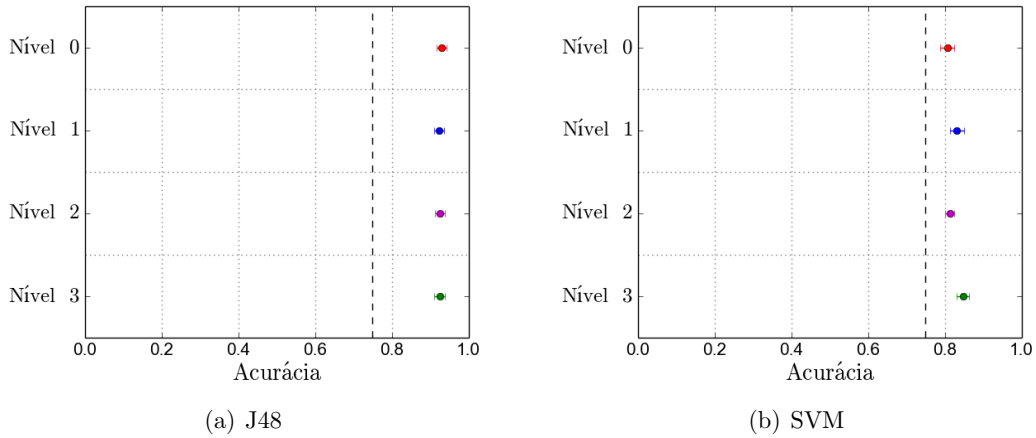
Figura 7.17 - Acurácias do Experimento 1 do sistema de Rössler quando as sete medidas são apresentadas de uma vez como padrões de entrada.



As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.18 - Acurácias do Experimento 2 do sistema de Rössler quando as sete medidas são apresentadas de uma vez como padrões de entrada.



As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

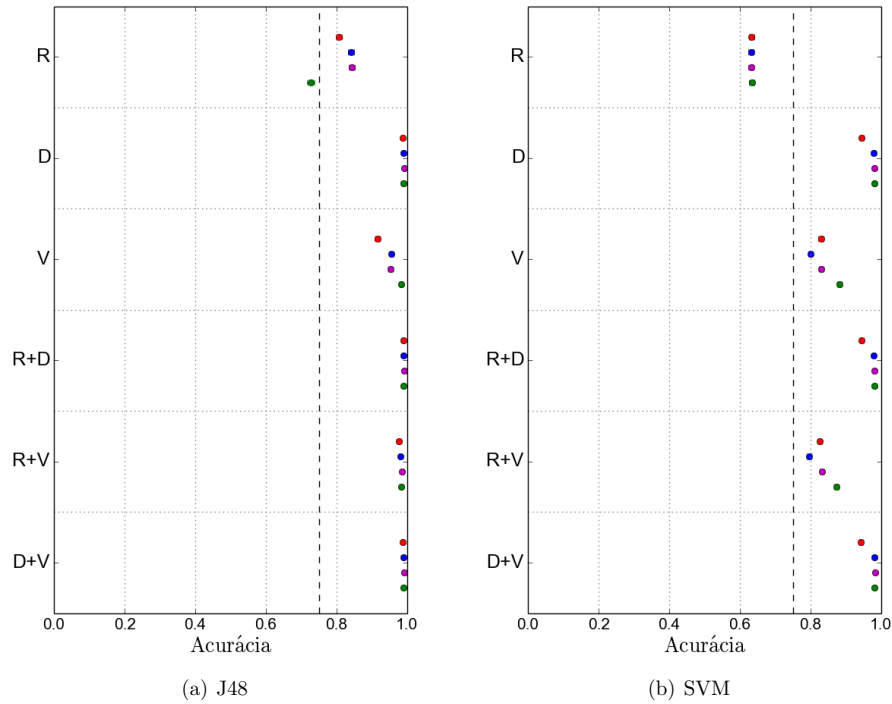
Fonte: Produção do autor.

Observa-se que, em ambos os experimentos, os quantificadores de todos os níveis de decomposição possuem acurácias superiores a 0,75. Isso indica fortemente a capacidade dos quantificadores em distinguir os diferentes comportamentos presentes no sistema de Rössler.

Segunda abordagem

Na segunda abordagem, o objetivo é analisar o quanto cada um grupo de quantificação é capaz de identificar as diferenças na dinâmica do sistema de Rössler. Para isso, são realizados 6 testes nos quais analisam-se tanto a acurácia individual de cada grupo, quanto a acurácia dos grupos combinados dois a dois. Novamente, determina-se, empiricamente, que o teste com acurácia superior a 0,75 (linha tracejada) é capaz de identificar diferenças na dinâmica do sistema. As Figuras 7.19 e 7.20 apresentam os resultados obtidos nos Experimentos 1 e 2, respectivamente.

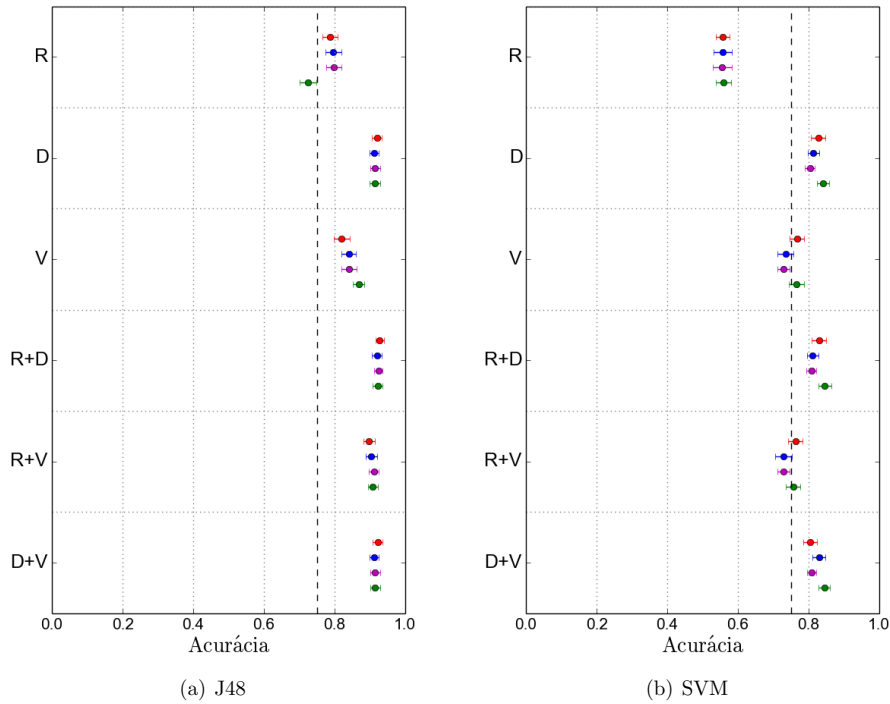
Figura 7.19 - Acurácias do Experimento 1 do sistema de Rössler quando cada um dos grupos de quantificadores são fornecidos como padrões de entrada.



As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3. As siglas R, D e V representam, respectivamente, as medidas baseadas na densidade de recorrência (RR), nas linhas diagonais (DET, L, Lmax, ENTR) e nas linhas verticais (LAM, TT).

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.20 - Acurácias do Experimento 2 do sistema de Rössler quando cada um dos grupos de quantificadores são fornecidos como padrões de entrada.



As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3. As siglas R, D e V representam, respectivamente, as medidas baseadas na densidade de recorrência (RR), nas linhas diagonais (DET, L, Lmax, ENTR) e nas linhas verticais (LAM, TT).

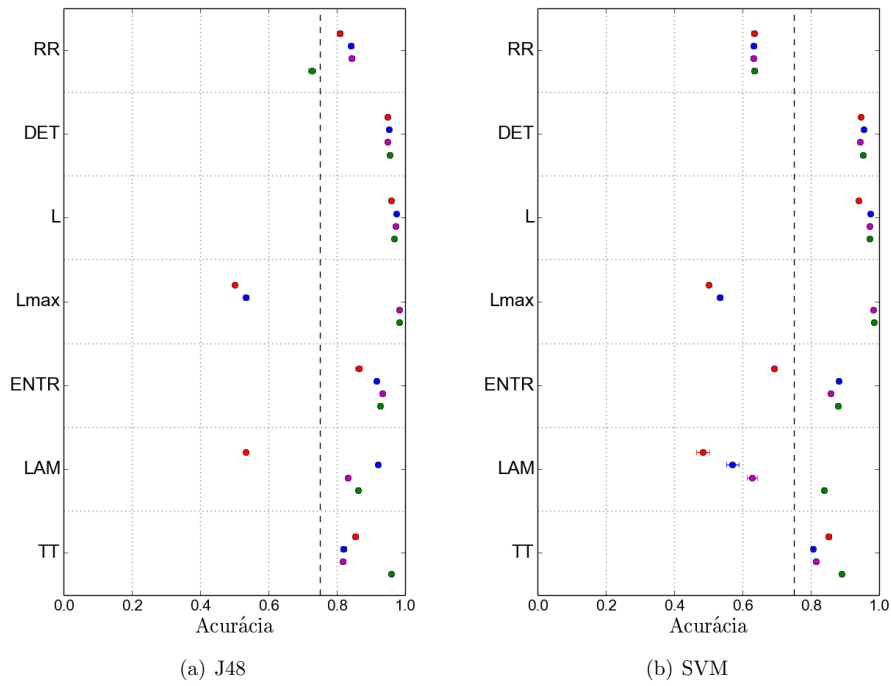
Fonte: Produção do autor.

Nessa abordagem, a maioria dos grupos de quantificadores possuem acurácias superiores a 0,75 em todos os níveis de decomposição. Isso indica que os grupos são capazes de discriminar os comportamentos presentes no sistema de Rössler.

Terceira abordagem

Na terceira abordagem, calcula-se a acurácia para cada quantificador fornecido individualmente como entrada para os classificadores J48 e SVM. Novamente, convencionou-se, empiricamente, que o quantificador que possuir acurácia superior a 0,75 (linha tracejada) é capaz de discriminar os diversos comportamentos presente no conjunto de dados. As Figuras 7.21 e 7.22 apresentam, respectivamente, as acurácias dos Experimentos 1 e 2.

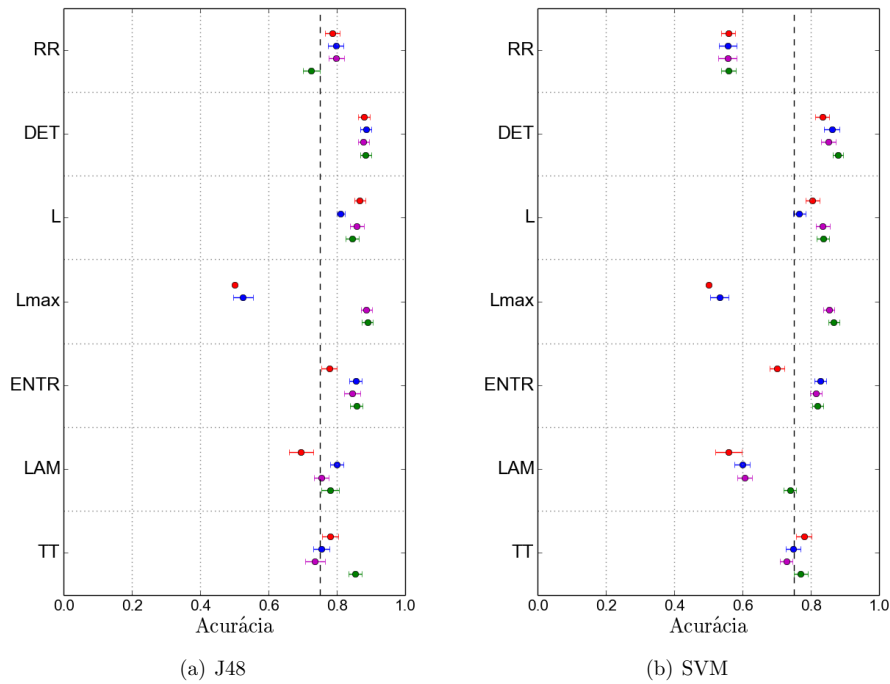
Figura 7.21 - Acurácias do Experimento 1 do sistema de Rössler quando os quantificadores são fornecidos individualmente como padrão de entrada.



As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.22 - Acurácias do Experimento 2 do sistema de Rössler quando os quantificadores são fornecidos individualmente como padrão de entrada.



As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

Nessa abordagem, ao utilizar o classificador J48, 80% dos quantificadores possuem acurácias superiores a 0,75 em ambos os Experimentos. Porém, os valores obtidos nessa abordagem são inferiores aos obtidos nas etapas anteriores. Isso indica que um único quantificador não contém informação suficiente para discriminar os diversos comportamentos presentes no sistema de Rössler.

Síntese de resultados

Nas três abordagens realizadas, os quantificadores obtidos são capazes de distinguir diferenças na dinâmica do sistema de Rössler. Dentre os níveis de decomposição utilizados, os quantificadores do nível 3 apresentam os melhores resultados em ambos os Experimentos.

Como mostra a Tabela 7.3, ao utilizar as séries temporais do nível 3 de decomposição, obtém-se uma redução de 96% do custo computacional para extração de quantificadores RQA. Assim, pode-se afirmar que a transformada *wavelet* discreta possibilita a redução do custo computacional para a extração de quantificadores ao gerar séries suavizadas, com menor quantidade de pontos, que preservam a dinâmica

do sistema.

Tabela 7.3 - Tempo para calcular a DWT e o RQA do sistema de Rössler.

| Nível de decomposição | Número de pontos | Tempo de cálculo [s] | | | % Tempo |
|-----------------------|------------------|----------------------|------|-------|---------|
| | | DWT | RQA | Total | |
| 0 | 4096 | - | 2103 | 2103 | 100 |
| 1 | 2048 | 23 | 475 | 498 | 24 |
| 2 | 1024 | 35 | 126 | 161 | 8 |
| 3 | 512 | 41 | 36 | 77 | 4 |

Tempo referente ao processamento em um Intel Core i7-4790 @ 3.60GHz e 8Gb de RAM.

7.3 Exemplo de aplicação: Séries temporais de intervalos \mathcal{RR}

Este experimento tem por objetivo utilizar técnicas de sistemas dinâmicos, análise *wavelet* e aprendizado de máquina para obter quantificadores capazes de discriminar os diferentes grupos de intervalos \mathcal{RR} descritos na Seção 6.1. Assim, o conjunto de dados é constituído por 199 séries temporais de intervalos \mathcal{RR} que representam os quatro grupos distintos de voluntários. Aplicando a transformada *wavelet* discreta, usando a *wavelet db4* em três níveis de decomposição, obtém-se quatro grupos de dados:

- Nível 0: 199 séries temporais de intervalo \mathcal{RR} .
- Nível 1: 199 coeficientes escala do primeiro nível de decomposição.
- Nível 2: 199 coeficientes escala do segundo nível de decomposição.
- Nível 3: 199 coeficientes escala do terceiro nível de decomposição.

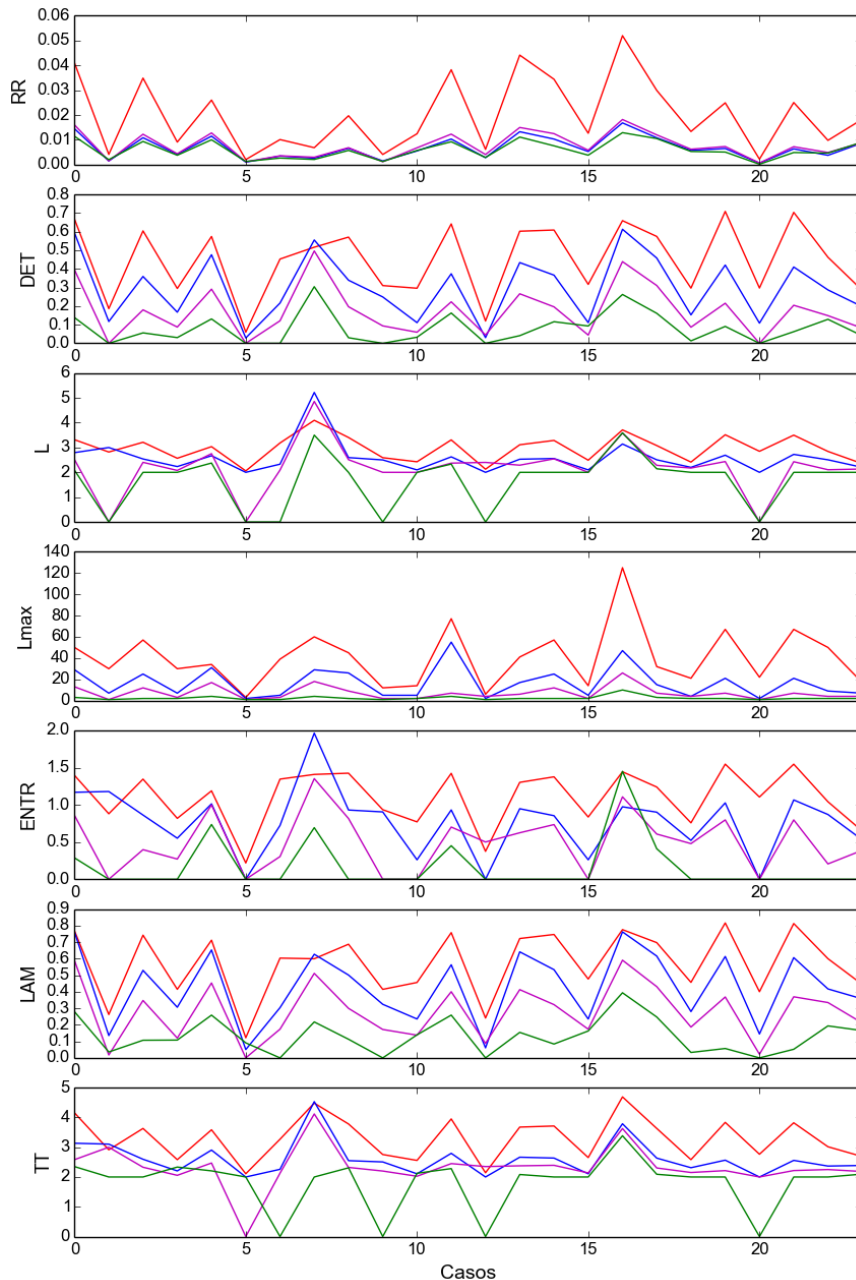
Assim, para cada registro obtido, gera-se o gráfico de recorrência e extrai-se sete medidas de quantificação (taxa de recorrência, determinismo, tamanho da maior linha diagonal, tamanho médio das linhas diagonais, entropia, laminaridade e tamanho médio das linhas verticais) utilizando as configurações definidas na Tabela 7.4.

Tabela 7.4 - Parâmetros para calcular o gráfico de recorrência e análise de quantificação de recorrência de cada nível de decomposição das séries de intervalos \mathcal{RR} .

| Nível de decomposição | Configuração RP e RQA | | |
|-----------------------|-----------------------|--------|--------------|
| | m | τ | ρ |
| 0 | 3 | 3 | 8 |
| 1 | 3 | 9 | $8\sqrt{2}$ |
| 2 | 3 | 3 | 16 |
| 3 | 3 | 3 | $16\sqrt{2}$ |

Para cada nível de decomposição, obtém-se um conjunto de dados constituído por 199 registros com sete características cada. As Figuras 7.23, 7.24, 7.25 e 7.26 mostram como os parâmetros do RQA variam nos níveis de decomposição de cada grupo de voluntário.

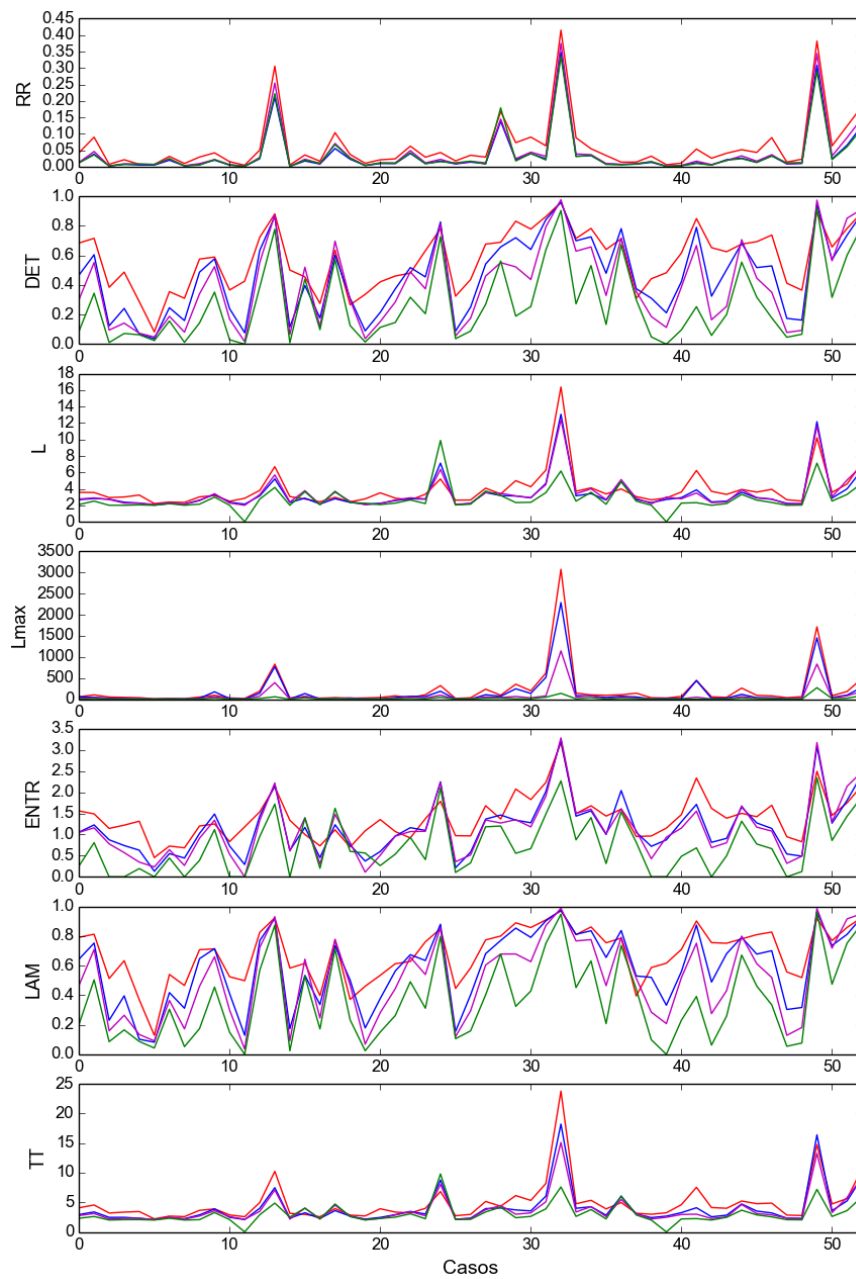
Figura 7.23 - Variação dos parâmetros do RQA ao longo dos níveis de decomposição das séries de intervalos \mathcal{RR} do grupo RNN.



As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

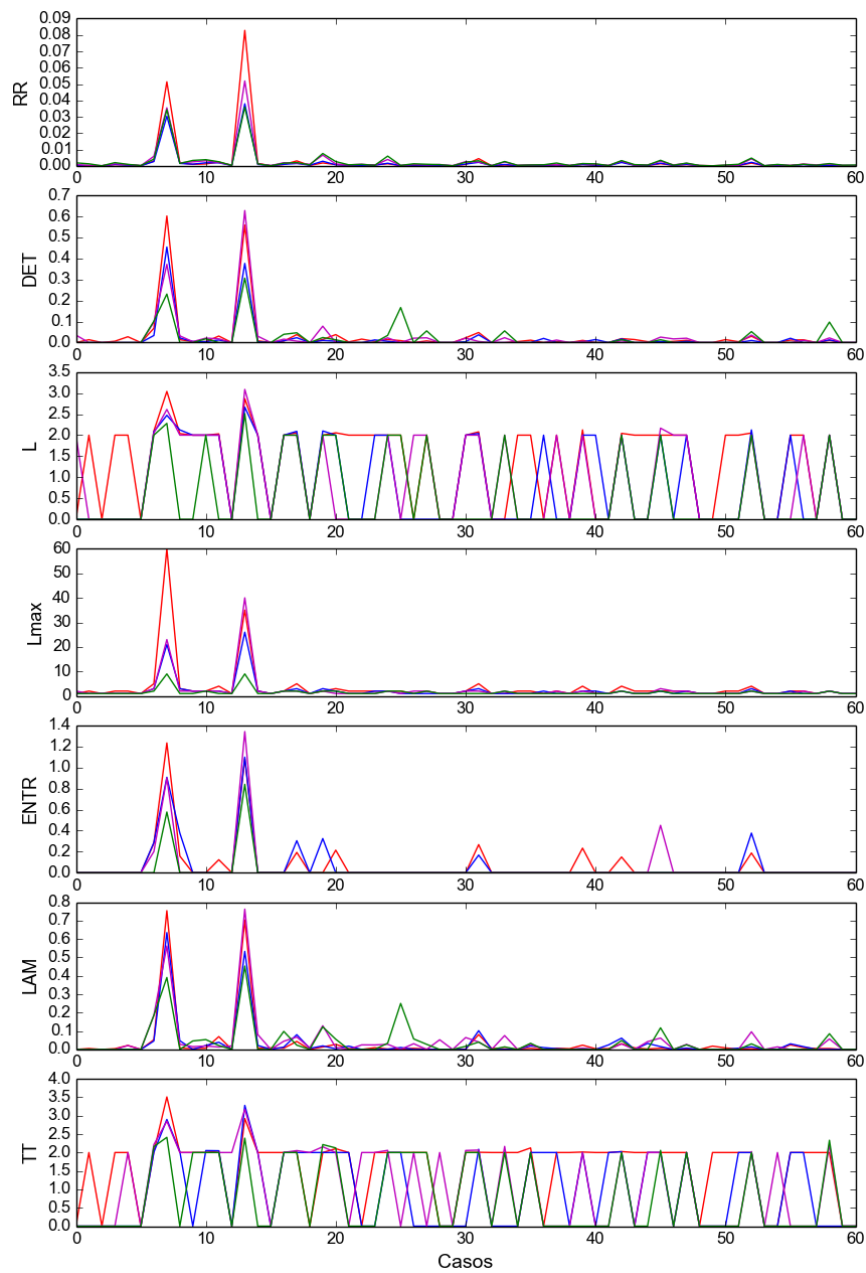
Figura 7.24 - Variação dos parâmetros do RQA ao longo dos níveis de decomposição das séries de intervalos \mathcal{RR} do grupo RNP.



As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

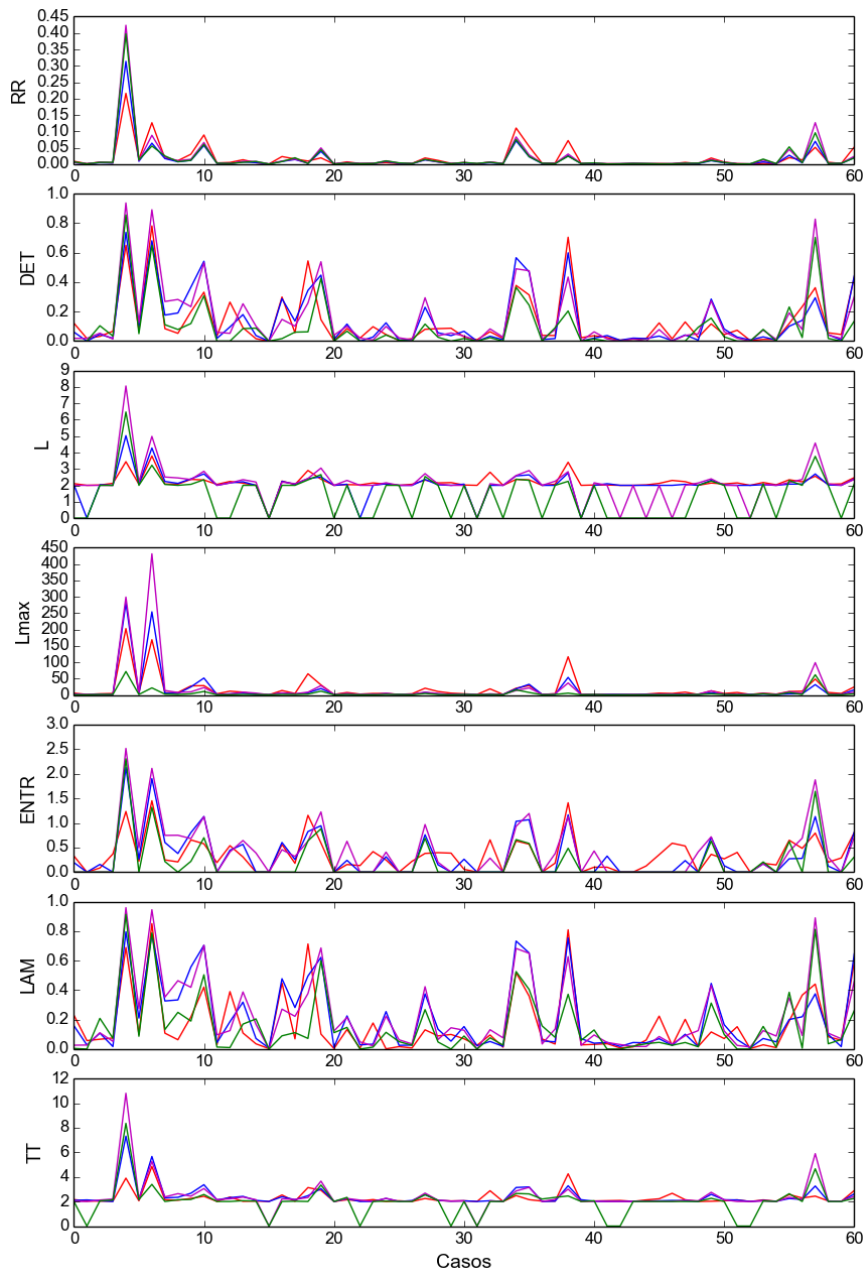
Figura 7.25 - Variação dos parâmetros do RQA ao longo dos níveis de decomposição das séries de intervalos \mathcal{RR} do grupo VOL.



As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.26 - Variação dos parâmetros do RQA ao longo dos níveis de decomposição das séries de intervalos \mathcal{RR} do grupo PC.



As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

Para cada análise realizada com os classificadores, usam-se apenas dois grupos de pacientes. Para uniformizar a comparação, opta-se por utilizar o mesmo número de casos de cada grupo, conforme especificado na Tabela 7.5.

Tabela 7.5 - Comparações realizadas com os grupos de pacientes e suas respectivas quantidade de registros do conjunto de entrada.

| Grupos | Quantidade de registros do conjunto de entrada |
|---------|--|
| PC-VOL | 45 |
| RNN-PC | 17 |
| RNN-RNP | 17 |
| RNN-VOL | 17 |
| RNP-PC | 30 |
| RNP-VOL | 30 |

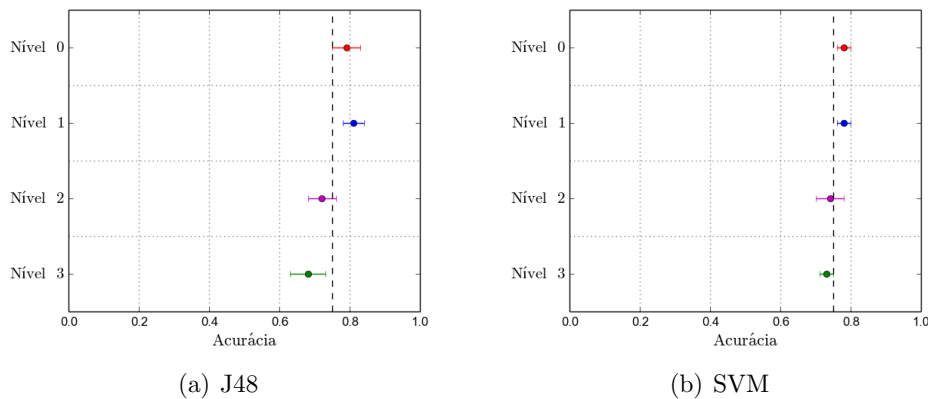
RNP - Recém nascido prematuro, RNN - Recém nascido normal, VOL - adulto jovem saudável, PC - Adulto coronariopata

Para as comparações entre grupos, são realizadas as três abordagens definidas na Subseção 7.2.1.

Primeira abordagem

A primeira abordagem tem por objetivo analisar a capacidade dos níveis de decomposição em identificar os diferentes grupos de voluntários. Para isso, os sete quantificadores são usados para treinar os classificadores J48 e SVM. No processo de treinamento, para cada comparação entre grupos e para cada nível de decomposição, o classificador é executado 100 vezes para obter a acurácia média do nível de decomposição. As Figuras 7.27, 7.28, 7.29, 7.30, 7.31 e 7.32 apresentam, respectivamente, as acurácias obtidas pelo J48 e pelo SVM nas comparações entre os grupos PC-VOL, RNN-RNP, RNN-PC, RNN-VOL, RNP-PC e RNP-VOL.

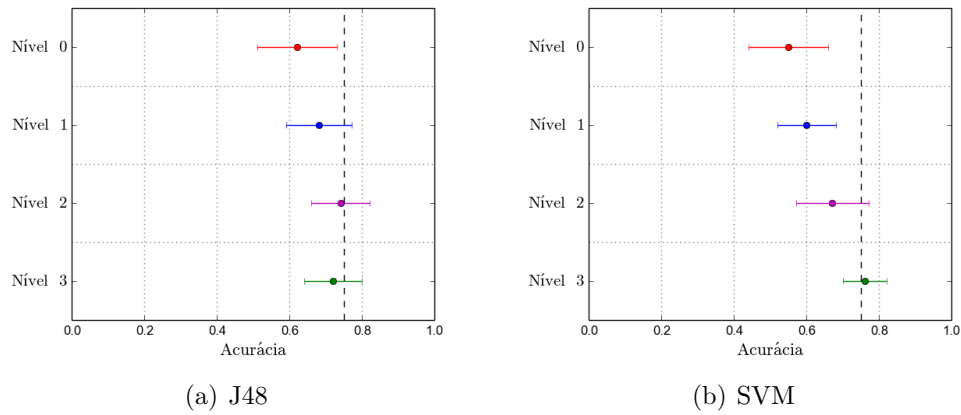
Figura 7.27 - Acurácias das comparações entre os grupos PC-VOL quando as sete medidas são apresentadas de uma vez como padrões de entrada.



As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

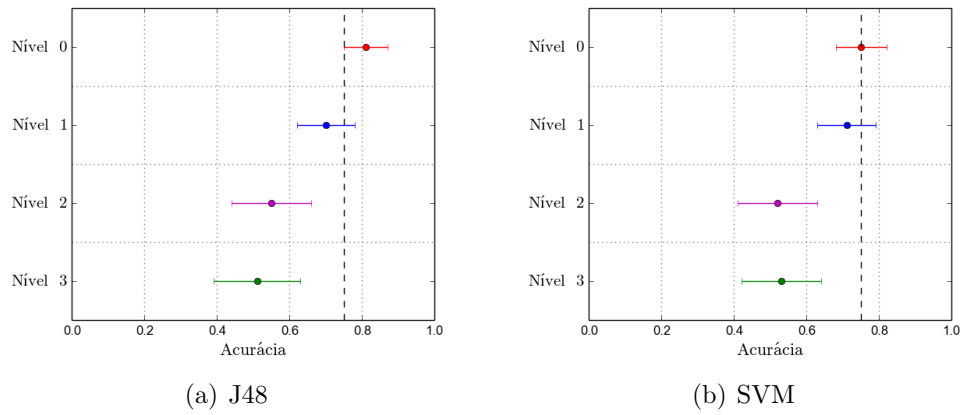
Figura 7.28 - Acurácias das comparações entre os grupos RNN-RNP quando as sete medidas são apresentadas de uma vez como padrões de entrada.



As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

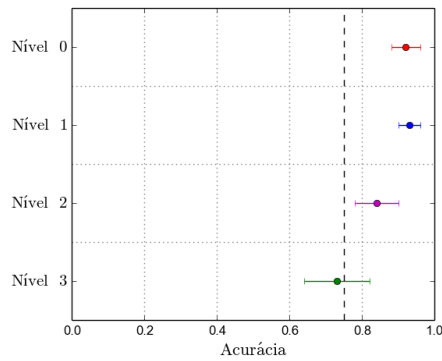
Figura 7.29 - Acurácias das comparações entre os grupos RNN-PC quando as sete medidas são apresentadas de uma vez como padrões de entrada.



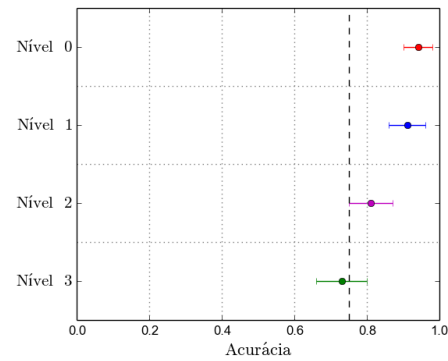
As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.30 - Acurácias das comparações entre os grupos RNN-VOL quando as sete medidas são apresentadas de uma vez como padrões de entrada.



(a) J48

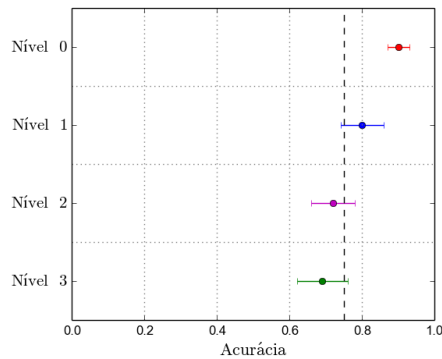


(b) SVM

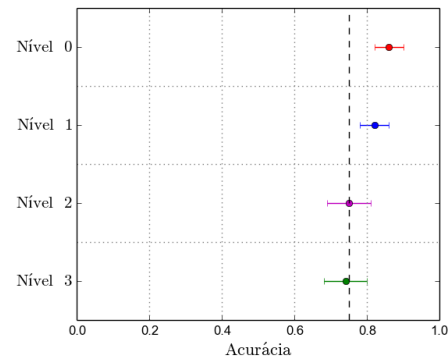
As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.31 - Acurácias das comparações entre os grupos RNP-PC quando as sete medidas são apresentadas de uma vez como padrões de entrada.



(a) J48

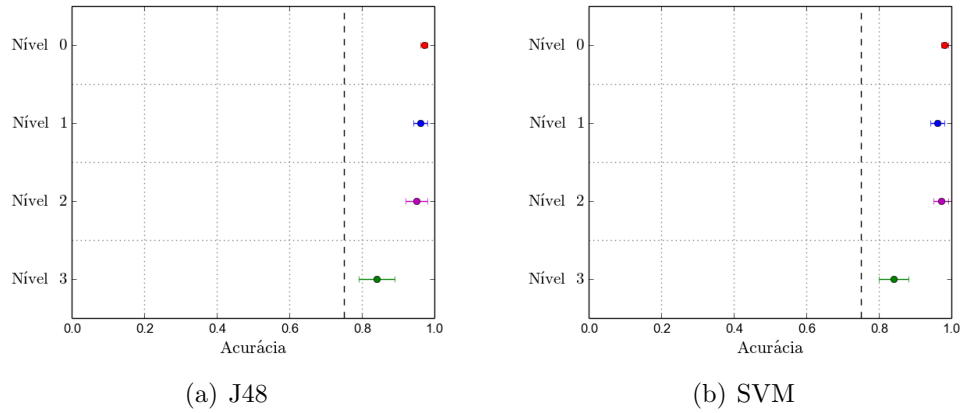


(b) SVM

As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.32 - Acurácias das comparações entre os grupos RNP-VOL quando as sete medidas são apresentadas de uma vez como padrões de entrada.



As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

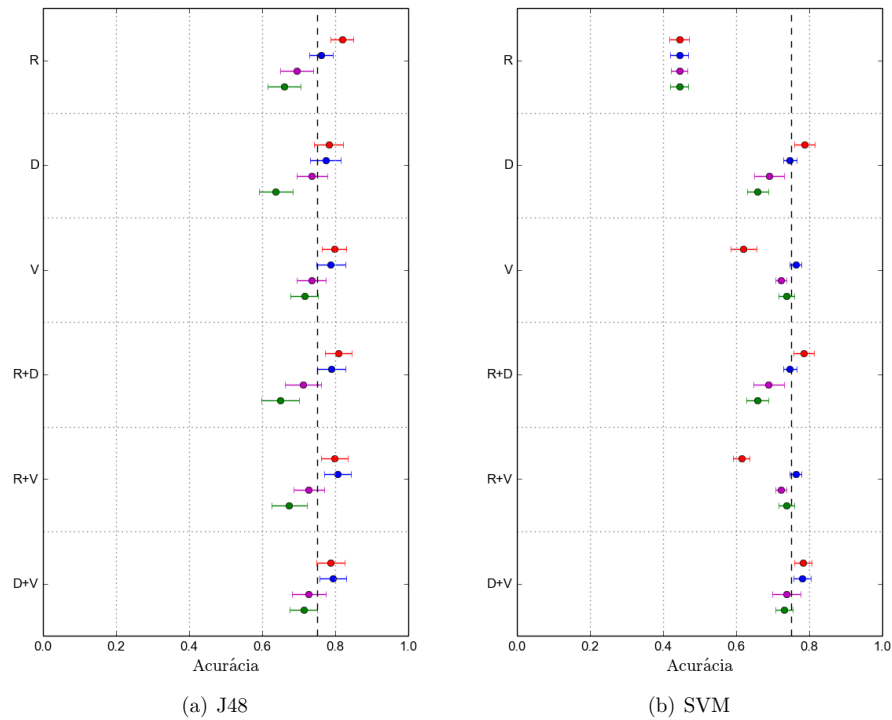
Baseando-se em Santos (2013), se a acurácia média do nível de decomposição for superior a 0,75, diz-se que esse tem a capacidade de gerar quantificadores que discriminam os grupos de paciente. Assim, os grupos PC-VOL, RNN-VOL, RNP-PC e RNP-VOL apresentam acurácia média acima de 0,75 em pelo menos um nível de decomposição. No grupo RNN-RNP, os coeficientes escala melhoram a média de acerto da classificação. Mas, no grupo RNN-PC, a abordagem proposta não melhora o resultado de classificação.

Segunda abordagem

Na segunda abordagem, o objetivo é analisar o quanto cada um grupo de quantificação é capaz de identificar as diferenças na dinâmica das séries de intervalo \mathcal{RR} . Para isso, são realizados 6 testes nos quais analisam-se tanto a acurácia individual de cada grupo, quanto a acurácia dos grupos combinados dois a dois. Novamente, determina-se, empiricamente, que o teste com acurácia superior a 0,75 (linha tracejada) é capaz de identificar diferenças na dinâmica do sistema. As Figuras 7.33, 7.34, 7.35, 7.36, 7.37 e 7.38 apresentam, respectivamente, as acurácias obtidas pelo J48 e pelo SVM nas comparações entre os grupos PC-VOL, RNN-RNP, RNN-PC, RNN-VOL, RNP-PC e RNP-VOL.

Ao comparar os grupos PC e VOL (Figura 7.33), observa-se que as medidas dos níveis de decomposição 0 e 1, quando fornecidas como padrão de entrada para o J48, são capazes de identificar as diferenças na dinâmica dos grupos.

Figura 7.33 - Acurácias da comparação entre os grupos PC-VOL quando cada um dos grupos de quantificadores são fornecidos como padrões de entrada.

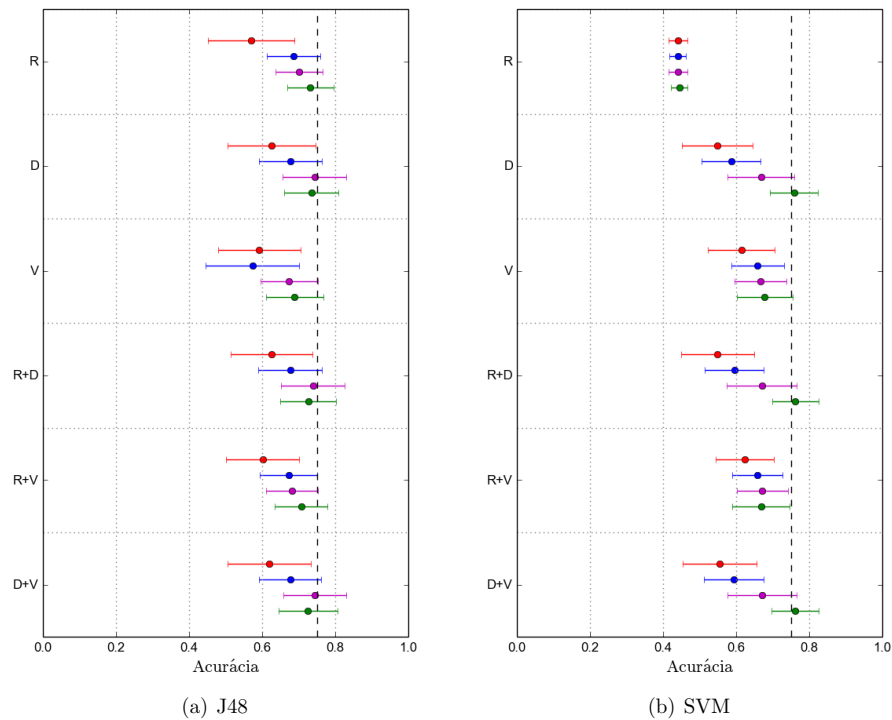


As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3. As siglas R, D e V representam, respectivamente, as medidas baseadas na densidade de recorrência (RR), nas linhas diagonais (DET, L, Lmax, ENTR) e nas linhas verticais (LAM, TT).

Fonte: Produção do autor.

Quando compara-se os grupos RNN e RNP (Figura 7.34) somente cinco medidas, duas do nível de decomposição 2 e três do nível de decomposição 3, são capazes de distinguir as diferenças na dinâmica dos grupos. Isso indica que os grupos RNN e RNP possuem dinâmica semelhante e, por isso, são difíceis de distingui-los.

Figura 7.34 - Acurácias da comparação entre os grupos RNN-RNP quando cada um dos grupos de quantificadores são fornecidos como padrões de entrada.

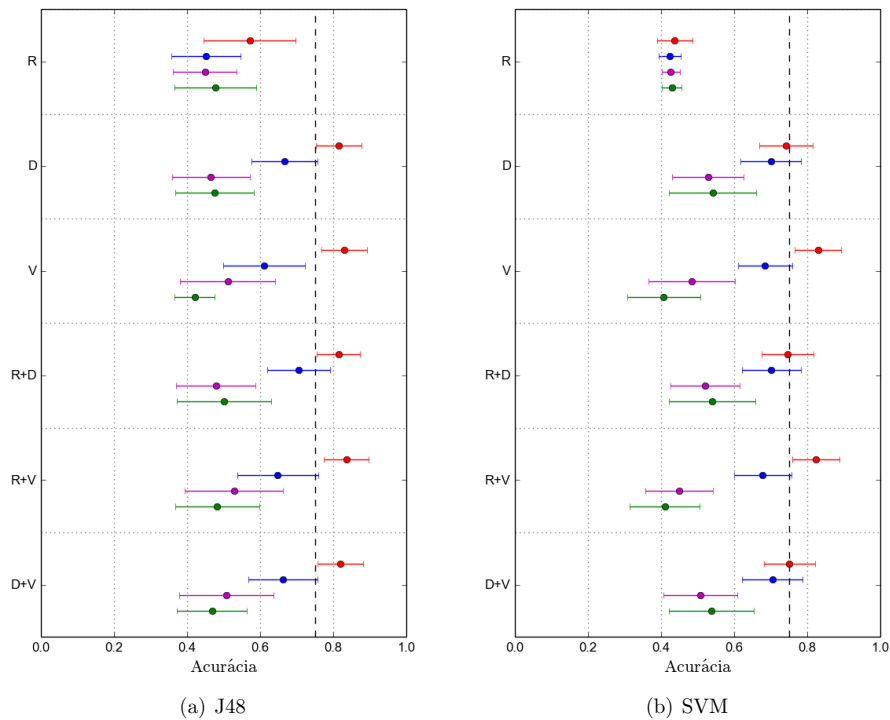


As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3. As siglas R, D e V representam, respectivamente, as medidas baseadas na densidade de recorrência (RR), nas linhas diagonais (DET, L, Lmax, ENTR) e nas linhas verticais (LAM, TT).

Fonte: Produção do autor.

Na comparação entre os grupos RNN e PC (Figura 7.35) somente alguns grupos de quantificadores do nível de decomposição 0 são capazes de realizar a distinção entre os grupos. Isso indica fortemente que os grupos possuem dinâmica semelhantes e, por isso, são difíceis de diferenciar.

Figura 7.35 - Acurácias da comparação entre os grupos RNN-PC quando cada um dos grupos de quantificadores são fornecidos como padrões de entrada.

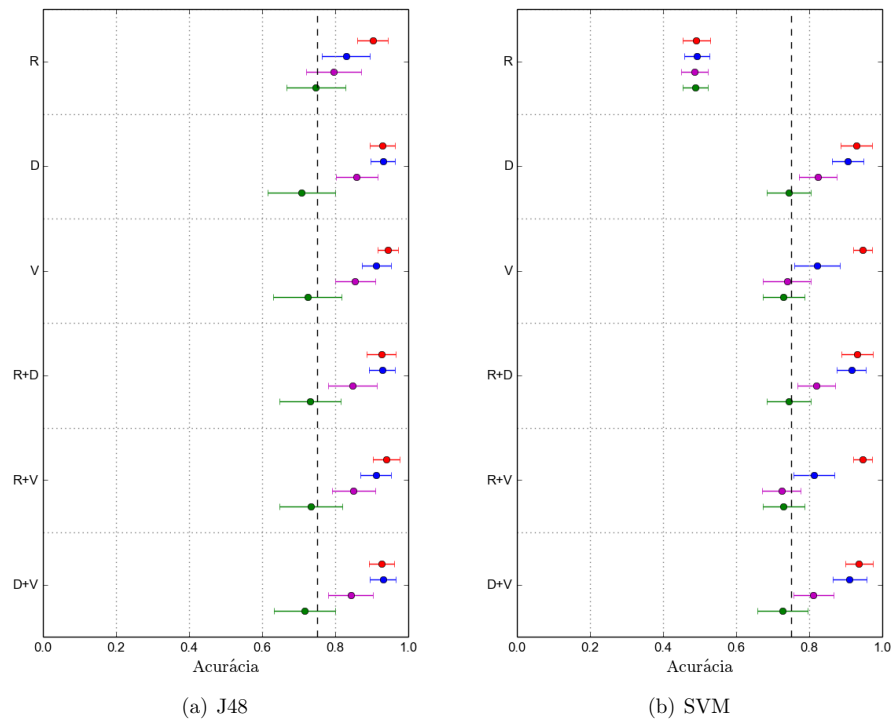


As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3. As siglas R, D e V representam, respectivamente, as medidas baseadas na densidade de recorrência (RR), nas linhas diagonais (DET, L, Lmax, ENTR) e nas linhas verticais (LAM, TT).

Fonte: Produção do autor.

Entre os grupos RNN e VOL (Figura 7.36) observa-se que a maioria dos grupos de quantificação dos níveis de decomposição 0, 1 e 2 são capazes de identificar as diferenças na dinâmica dos grupos. Isso indica que os grupos possuem comportamentos distintos e, por isso, são fáceis de serem diferenciados.

Figura 7.36 - Acurácias da comparação entre os grupos RNN-VOL quando cada um dos grupos de quantificadores são fornecidos como padrões de entrada.

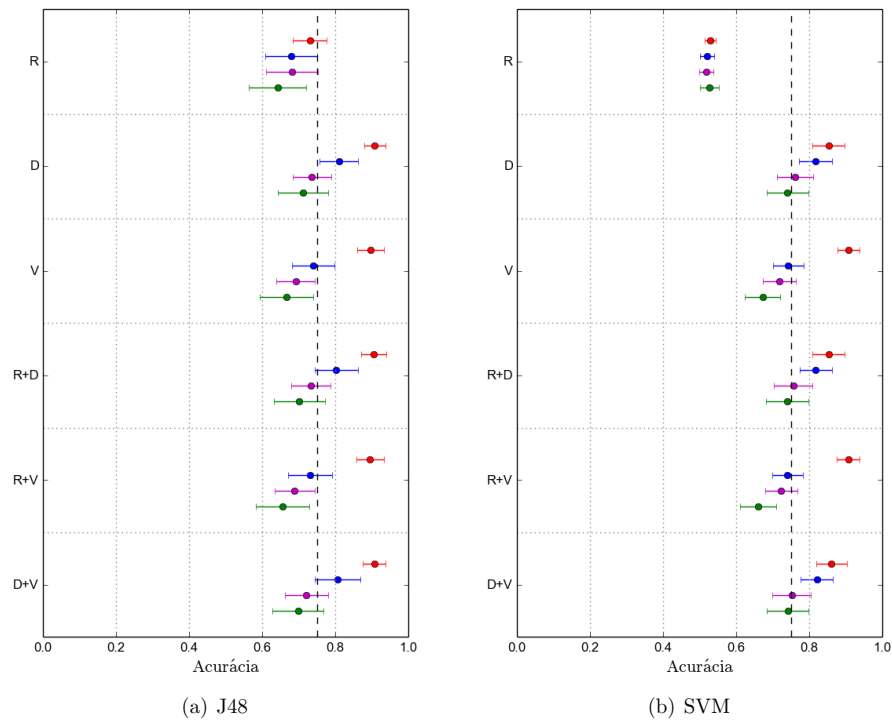


As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3. As siglas R, D e V representam, respectivamente, as medidas baseadas na densidade de recorrência (RR), nas linhas diagonais (DET, L, Lmax, ENTR) e nas linhas verticais (LAM, TT).

Fonte: Produção do autor.

Na comparação entre os grupos RNP e PC (Figura 7.37) somente alguns grupos de quantificadores dos níveis de decomposição 0 e 1 são capazes de realizar a distinção entre os grupos. Portanto, há uma forte indicação de que esses grupos possuam dinâmica semelhantes e, por isso, são difíceis de diferenciar.

Figura 7.37 - Acurácias da comparação entre os grupos RNP-PC quando cada um dos grupos de quantificadores são fornecidos como padrões de entrada.

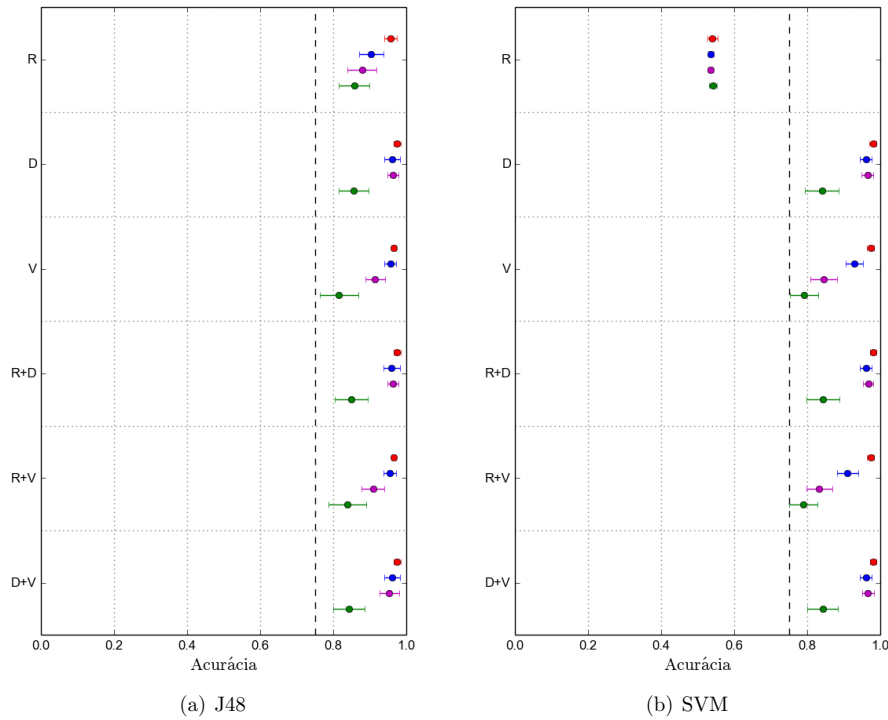


As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3. As siglas R, D e V representam, respectivamente, as medidas baseadas na densidade de recorrência (RR), nas linhas diagonais (DET, L, Lmax, ENTR) e nas linhas verticais (LAM, TT).

Fonte: Produção do autor.

Entre os grupos RNP e VOL (Figura 7.38) observa-se que a maioria dos grupos de quantificação dos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3 são capazes de identificar as diferenças na dinâmica dos grupos. Isso indica fortemente que os grupos possuem dinâmicas distintas e, conseqüentemente, são fáceis de serem diferenciadas.

Figura 7.38 - Acurácias da comparação entre os grupos RNP-VOL quando cada um dos grupos de quantificadores são fornecidos como padrões de entrada.



As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3. As siglas R, D e V representam, respectivamente, as medidas baseadas na densidade de recorrência (RR), nas linhas diagonais (DET, L, Lmax, ENTR) e nas linhas verticais (LAM, TT).

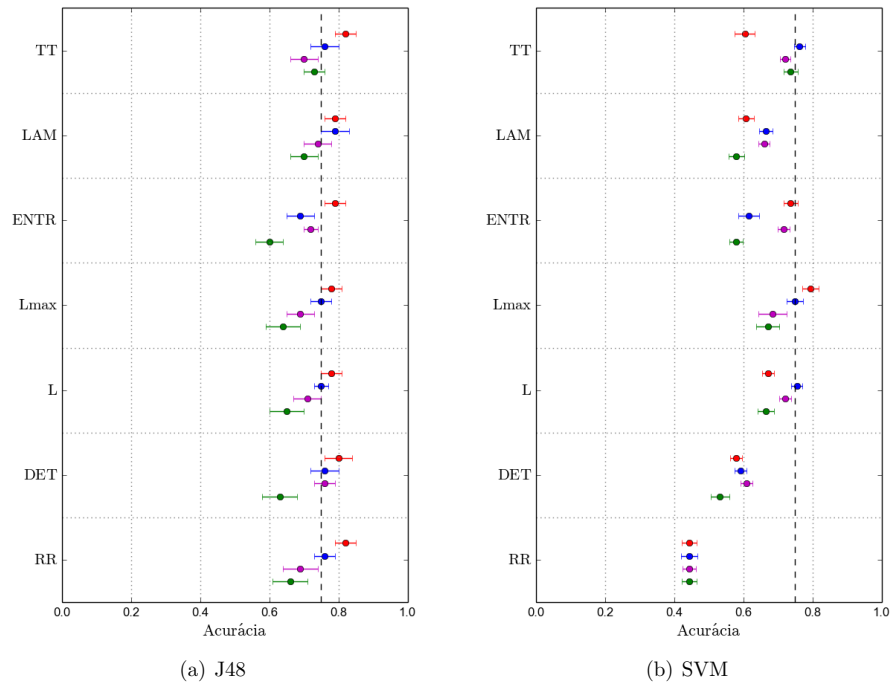
Fonte: Produção do autor.

Terceira abordagem

Na terceira abordagem, calcula-se a acurácia para cada quantificador fornecido individualmente como entrada para os classificadores J48 e SVM. Convenciona-se, empiricamente, que o quantificador que possuir acurácia superior a 0,75 (linha tracejada) é capaz de discriminar os diversos comportamentos presente no conjunto de dados. As Figuras 7.39, 7.40, 7.41, 7.42, 7.43 e 7.44 apresentam, respectivamente, as acurácias obtidas pelo J48 e pelo SVM nas comparações entre os grupos PC-VOL, RNN-RNP, RNN-PC, RNN-VOL, RNP-PC e RNP-VOL.

Entre os grupos PC e VOL (Figura 7.39) observa-se que algumas medidas dos níveis de decomposição 0 e 1 são capazes de identificar as diferenças na dinâmica dos grupos.

Figura 7.39 - Acurácias da comparação entre os grupos PC-VOL quando os quantificadores são fornecidos individualmente como padrão de entrada.

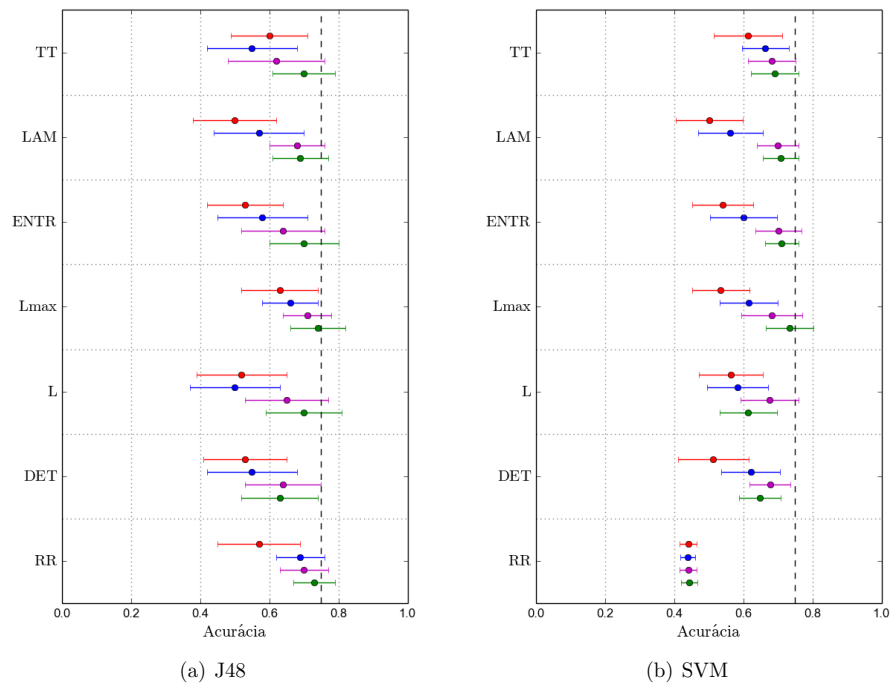


As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

Para a comparação entre os grupos RNN e RNP (Figura 7.40) apenas a medida Lmax, do terceiro nível de decomposição, detecta as diferenças entre os grupos. Isso indica fortemente que os dois grupos possuem dinâmicas semelhantes e, consequentemente, um único quantificador não tem informação suficiente para distinguir os grupos.

Figura 7.40 - Acurácias da comparação entre os grupos RNN-RNP quando os quantificadores são fornecidos individualmente como padrão de entrada.

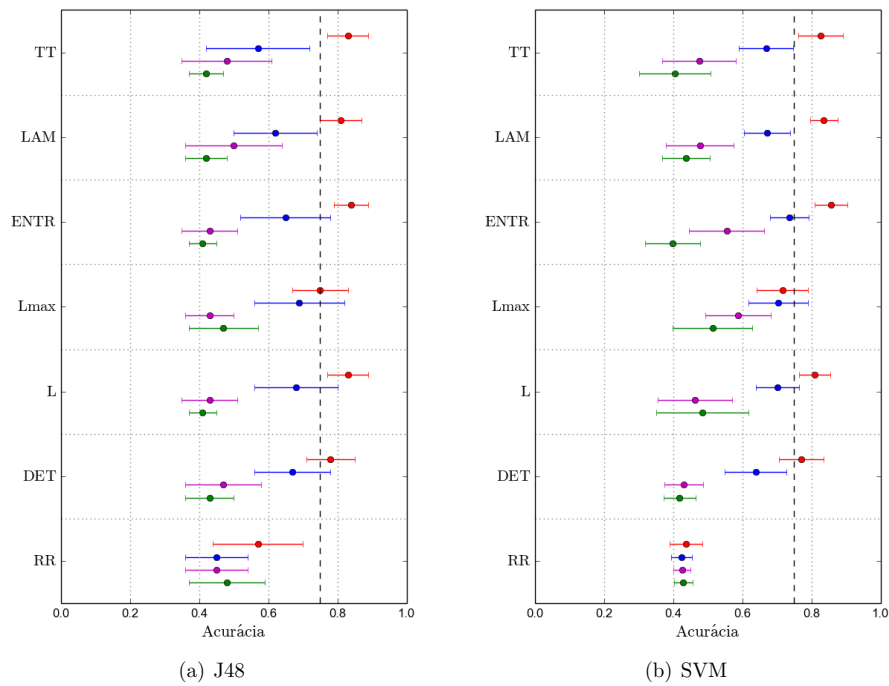


As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

Quando se compara os grupos RNN e PC (Figura 7.41), os quantificadores dos níveis de decomposição 1, 2 e 3 não são capazes de distinguir a dinâmica do sistema. Isso indica fortemente que esses quantificadores, ao serem apresentados individualmente como padrão de entrada para os classificadores, não possuem informações suficientes para distinguir a dinâmica dos grupos,

Figura 7.41 - Acurácias da comparação entre os grupos RNN-PC quando os quantificadores são fornecidos individualmente como padrão de entrada.

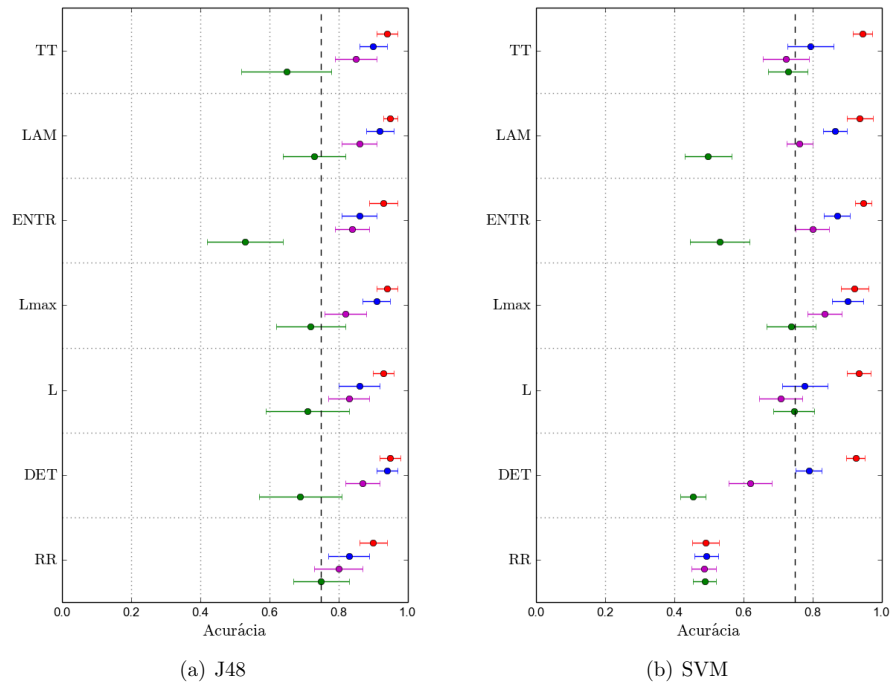


As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

Entre os grupos RNN e VOL (Figura 7.42) observa-se que todas as medidas dos níveis de decomposição 0, 1 e 2, quando fornecidas como padrão de entrada para o J48, são capazes de identificar as diferenças na dinâmica dos grupos.

Figura 7.42 - Acurácias da comparação entre os grupos RNN-VOL quando os quantificadores são fornecidos individualmente como padrão de entrada.

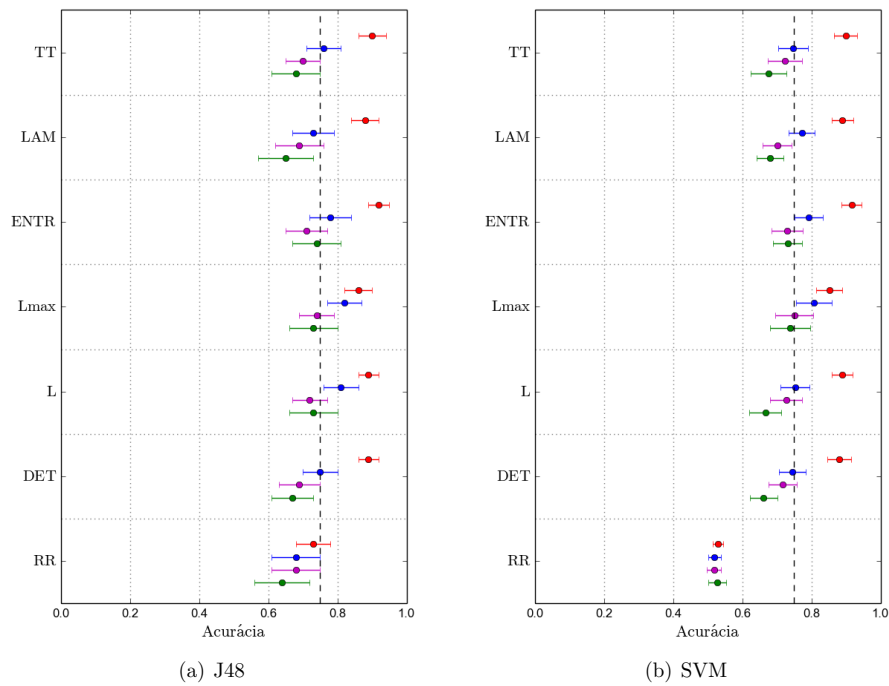


As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

Quando se compara os grupos RNN e PC (Figura 7.43), os quantificadores dos níveis de decomposição 2 e 3 não são capazes de distinguir a dinâmica do sistema. Isso indica que tais quantificadores, ao serem apresentados individualmente como padrão de entrada para os classificadores, não possuem informações suficientes para distinguir a dinâmica dos grupos.

Figura 7.43 - Acurácias da comparação entre os grupos RNP-PC quando os quantificadores são fornecidos individualmente como padrão de entrada.

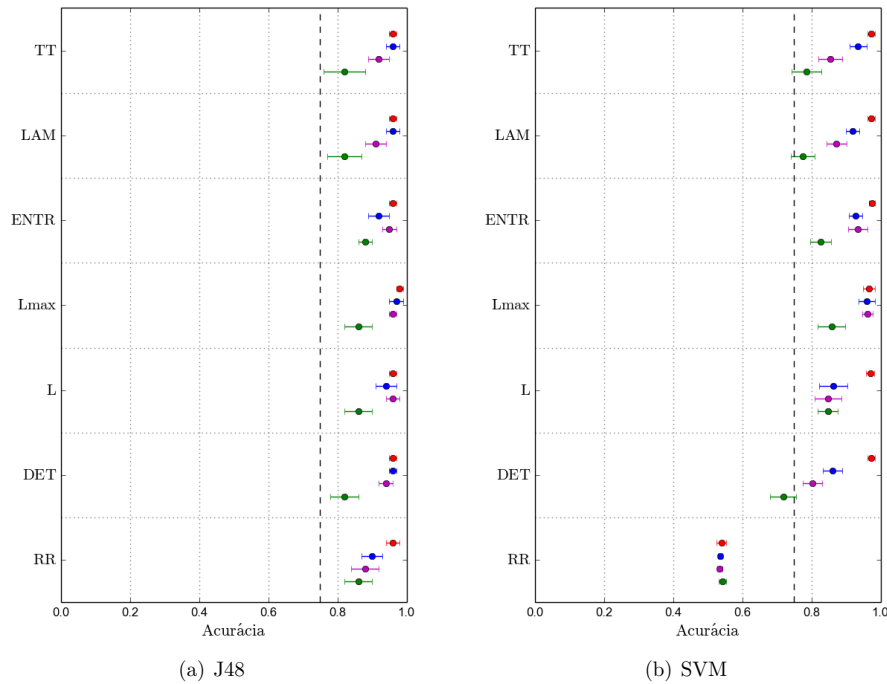


As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

Entre os grupos RNP e VOL (Figura 7.44) observa-se que todas as medidas dos níveis de decomposição 0, 1 e 2, quando fornecidas como padrão de entrada para o J48, são capazes de identificar as diferenças na dinâmica dos grupos.

Figura 7.44 - Acurácias da comparação entre os grupos RNP-VOL quando os quantificadores são fornecidos individualmente como padrão de entrada.



As cores vermelha, azul, magenta e verde representam, respectivamente, os resultados obtidos pelos níveis de decomposição 0, 1, 2 e 3.

Fonte: Produção do autor.

Síntese de resultados

Como os voluntários dos grupos PC, RNN e RNP não possuem o sistema autônomo em perfeito funcionamento, eles apresentam uma baixa variabilidade da frequência cardíaca. Por outro lado, os voluntários do grupo VOL possuem o sistema autônomo em perfeito funcionamento e, conseqüentemente, apresentam uma alta variabilidade da frequência cardíaca e uma boa capacidade de adaptação. Assim, ao se comparar os grupos PC-VOL, RNN-VOL e RNP-VOL, tem-se um grupo com alta variabilidade contra um grupo com baixa variabilidade de frequência cardíaca, o que facilita o processo de classificação nas três abordagens realizadas. Em contrapartida, ao comparar RNN-RNP, RNN-PC e RNP-PC, ambos os grupos possuem uma baixa variabilidade de frequência cardíaca, o que dificulta a distinção entre os grupos.

Além disso, pode-se afirmar que ao utilizar os quantificadores do nível 1 de decomposição, tem-se uma boa acurácia nas três abordagens além de uma redução de % no custo computacional do cálculo dos quantificadores (Tabela 7.6).

Tabela 7.6 - Tempo para calcular a DWT e o RQA das séries de intervalos \mathcal{RR} .

| Nível de decomposição | Tempo de cálculo [s] | | | % Tempo |
|-----------------------|----------------------|-----|-------|---------|
| | DWT | RQA | Total | |
| 0 | - | 42 | 42 | 100 |
| 1 | 1 | 14 | 15 | 36 |
| 2 | 2 | 6 | 8 | 19 |
| 3 | 3 | 5 | 8 | 19 |

Tempo referente ao processamento em um Intel Core i7-4510U CPU @ 2.00GHz e 16Gb de RAM.

7.4 Conclusões parciais

Esse capítulo apresenta uma metodologia que combina as técnicas gráfico de recorrência, transformada *wavelet* discreta e mineração de dados para classificar os diversos comportamentos presentes em um conjunto de dados.

Para o mapa logístico, essa abordagem é capaz de distinguir:

- Regiões caóticas e não caóticas.
- Diferentes tipos de região caótica.

Para o sistema de Rössler, a abordagem é capaz de distinguir:

- Regiões caóticas e não caóticas.
- Regiões não caóticas, caóticas coerente e caóticas não coerente.

Para os dados experimentais de intervalo \mathcal{RR} , a metodologia proposta tem facilidade em distinguir os grupos PC-VOL, RNN-VOL e RNP-VOL. Porém há dificuldade na distinção dos grupos RNN-RNP, RNN-PC e RNP-PC.

8 USO COMBINADO DA TRANSFORMADA *WAVELET* E DO GRÁFICO DE RECORRÊNCIA PARA A CARACTERIZAÇÃO DA DINÂMICA DE SISTEMAS

Neste capítulo é introduzido um método de análise de séries temporais intitulado *Wavelet-Recurrence Analysis* (WRA), no qual o enfoque da transformada *wavelet* e do gráfico de recorrência são usados de forma combinada para resultar em um método eficiente de caracterização de sistemas dinâmicos. Com esse método espera-se distinguir sistemas com dinâmicas próximas usando recursos computacionais modernos.

8.1 Metodologia

Dado uma série temporal, o gráfico de recorrência constitui uma ferramenta extremamente eficiente para caracterizar a dinâmica presente no sistema que originou a série temporal. Embora o gráfico de recorrência seja uma estrutura gráfica complexa e rica em detalhes, ele apresenta uma “estrutura principal”, que por si só é suficiente para caracterizar a dinâmica do sistema considerado. Os quantificadores de recorrência, vistos na Seção 3.2, são construídos para quantificar a estrutura principal do gráfico.

Sejam dois sistemas dinâmicos, A e B , cujas dinâmicas sejam *muito próximas*. Ao gerar o gráfico de recorrência a partir de séries temporais $x_a(t)$ e $x_b(t)$, pode-se supor que as suas estruturas principais se diferenciem a nível de detalhes. Nesse cenário, o uso dos quantificadores de recorrência, obtidos pelos gráficos de recorrência gerados a partir das séries temporais, podem não ser capazes de diferenciar a dinâmica dos sistemas. Faz-se necessário ter-se um método com sensibilidade apropriada para capturar os detalhes de cada estrutura principal.

A transformada *wavelet* discreta, aplicada a uma série temporal $x(t)$, pode agir como uma ferramenta que acentua ou atenua detalhes presentes no sinal. Como abordado na Seção 4.1, a análise de multiresolução permite decompor um sinal em diferentes escalas (ou níveis de decomposição). Nessa análise, cada escala é composta por dois sinais: *coeficientes escala* que representam as informações próprias da escala e *coeficientes wavelet* que capturam as informações remanescentes em relação ao sinal original. Assim, o gráfico de recorrência obtido pelos coeficientes escala tem, em sua “estrutura principal”, apenas as informações referentes a escala j , que pode ser quantificado com o uso dos quantificadores de recorrência.

O método aqui proposto, visa utilizar os quantificadores gerados por diferentes escalas como entrada para um método de classificação. Ao término do processo, tem-se como resultado um enfoque que permite discriminar séries temporais provenientes de sistemas com dinâmicas muito próximas. Nesse trabalho, a metodologia WRA é testada por meio de 15 combinações de quantificadores conforme descrito na Tabela 8.1.

Tabela 8.1 - Testes utilizados para identificar regiões de comportamento semelhante.

| Teste | Níveis utilizados | Número de quantificadores |
|-------|-------------------|---------------------------|
| 1 | 0 | 7 |
| 2 | 1 | 7 |
| 3 | 2 | 7 |
| 4 | 3 | 7 |
| 5 | 0 e 1 | 14 |
| 6 | 0 e 2 | 14 |
| 7 | 0 e 3 | 14 |
| 8 | 1 e 2 | 14 |
| 9 | 1 e 3 | 14 |
| 10 | 2 e 3 | 14 |
| 11 | 0, 1 e 2 | 21 |
| 12 | 0, 1, e 3 | 21 |
| 13 | 0, 2 e 3 | 21 |
| 14 | 1, 2 e 3 | 21 |
| 15 | 0, 1, 2 e 3 | 28 |

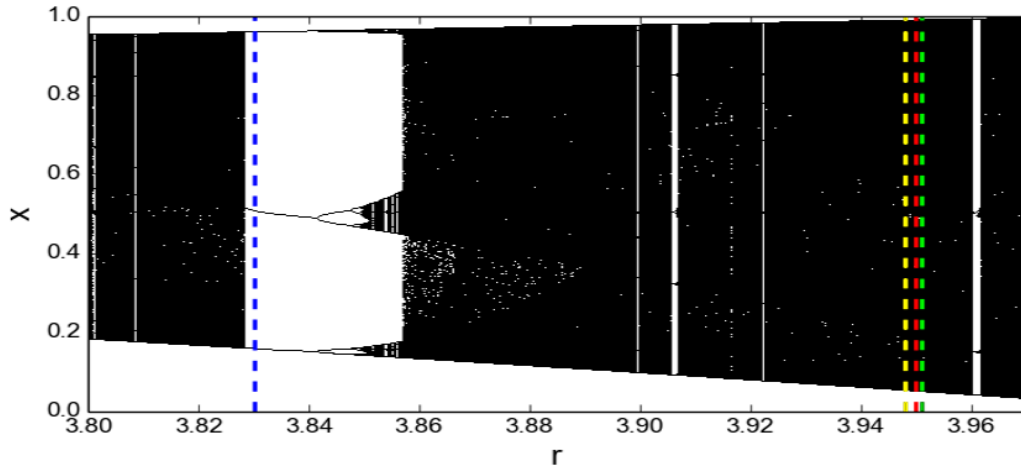
8.2 Explorando a metodologia proposta

Nesta seção, apresenta-se os resultados da aplicação da metodologia em dados provenientes do mapa logístico e do sistema de Rössler.

8.2.1 Mapa logístico

Nesse experimento, o objetivo é combinar os quantificadores, de diversos níveis de decomposição, para distinguir regiões do mapa logístico que possuem comportamentos semelhantes. Para isso, escolhe-se quatro regiões, sendo uma da região de período 3 ($r = [3,830]$) e três da região caótica ($r = [3,948; 3,950; 3,951]$). A Figura 8.1 apresenta a localização das regiões escolhidas.

Figura 8.1 - Localização das regiões do mapa logístico.



As cores azul, amarelo, vermelho e verde representam os seguintes valores de r : 3,830; 3,948; 3,950 e 3,951.

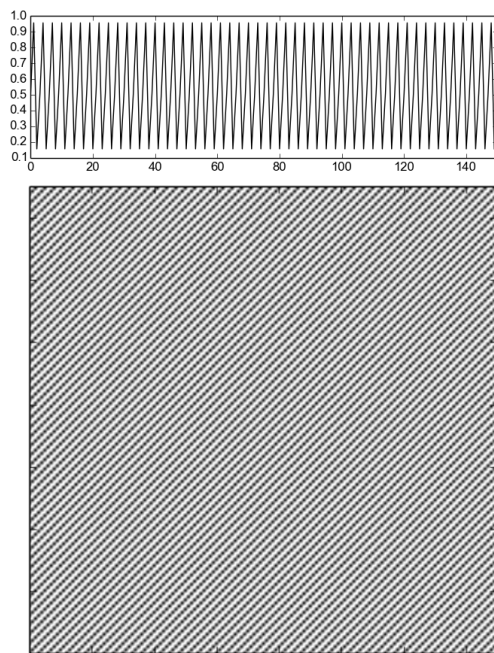
Fonte: Produção do autor.

Para cada uma das regiões, gera-se 98 séries temporais, com 4096 pontos cada, com condições iniciais aleatórias. Aplicando a transformada *wavelet* discreta, usando a *wavelet db1* em três níveis de decomposição, obtém-se quatro grupos de dados:

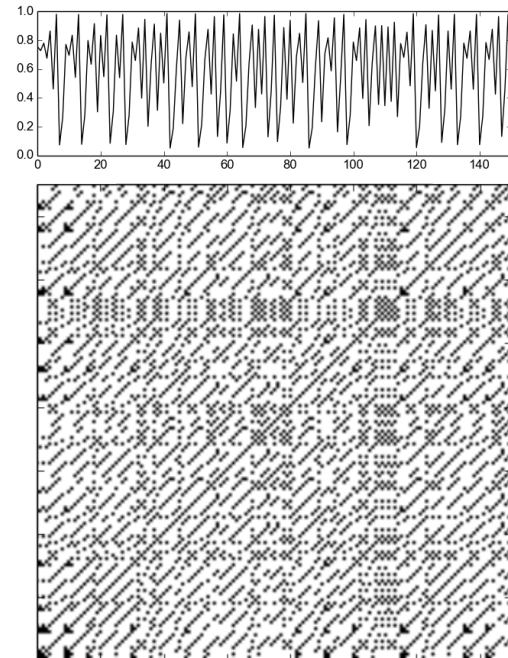
- Nível 0: 392 séries temporais do mapa logístico com 4096 pontos cada.
- Nível 1: 392 coeficientes escala do primeiro nível de decomposição com 2048 pontos cada.
- Nível 2: 392 coeficientes escala do segundo nível de decomposição com 1024 pontos cada.
- Nível 3: 392 coeficientes escala do terceiro nível de decomposição com 512 pontos cada.

Para cada registro obtido, gera-se o gráfico de recorrência e extrai-se as medidas de quantificação utilizando a configuração $m = 1$, $\tau = 1$ e $\rho = 0,1$. A Figura 8.2 apresenta um exemplo de série temporal e seu respectivo gráfico de recorrência de cada uma das quatro regiões.

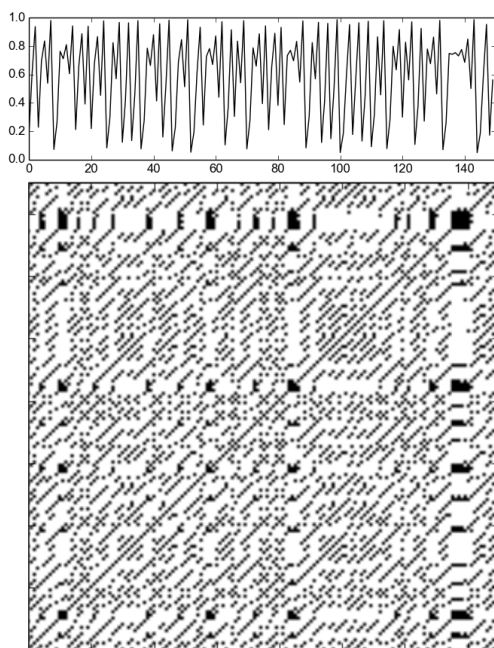
Figura 8.2 - Exemplo de séries temporais e gráficos de recorrência de quatro regiões do mapa logístico.



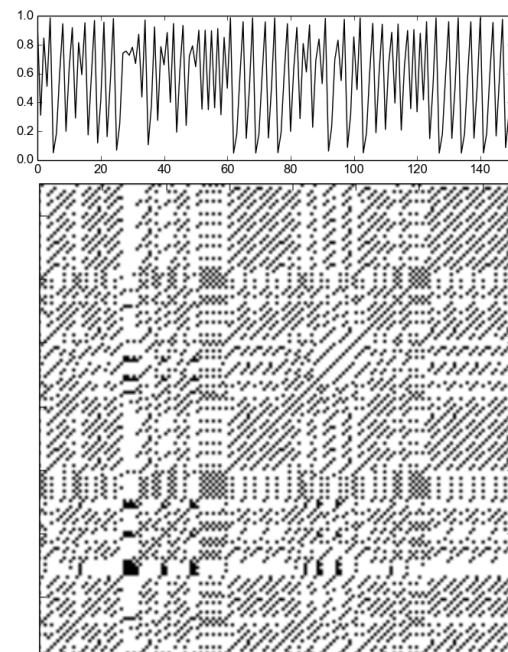
(a) $r = 3,830$



(b) $r = 3,948$



(c) $r = 3,950$

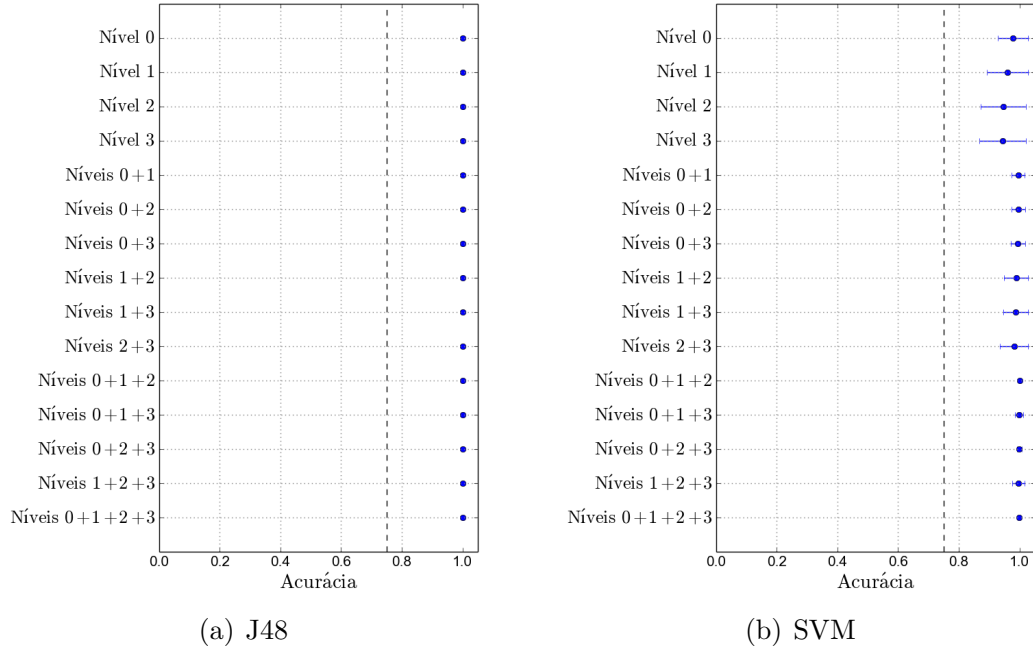


(d) $r = 3,951$

Fonte: Produção do autor.

Em cada um dos testes especificados na Tabela 8.1, utiliza-se 100 casos com 180 registros cada. A Figura 8.3 apresenta as acurácias médias obtidas.

Figura 8.3 - Acurácias quando se combina os quantificadores dos diversos níveis de decomposição do mapa logístico.



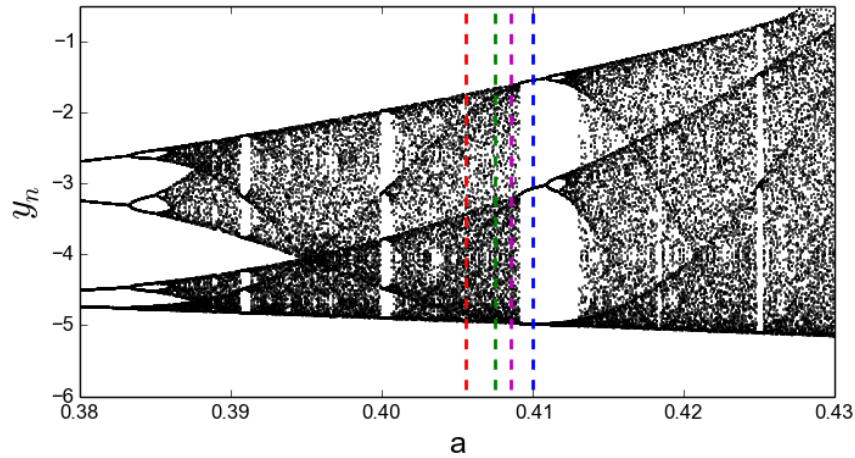
Fonte: Produção do autor.

Nessa análise, para ambos os classificadores, a melhor acurácia é obtida ao combinar os quantificadores dos níveis 0, 1 e 2.

8.2.2 Sistema de Rössler

Para o sistema de Rössler, fixando os parâmetros $b = 2$ e $c = 4$, escolhe-se quatro regiões, sendo uma da região periódica ($a = 0,41005$) e três da região caótica ($a = [0,40555; 0,40755; 0,40855]$). A Figura 8.4 apresenta a localização das regiões adotadas.

Figura 8.4 - Localização das regiões do sistema de Rössler.



As cores vermelho, verde, magenta e azul representam os seguintes valores de a : 0,40555; 0,40755; 0,40855 e 0,41005.

Fonte: Produção do autor.

Para cada uma das regiões, gera-se 100 trajetórias por meio do método Runge-Kutta de quarta ordem com passo de integração $h = 0,05$ e com condições iniciais aleatórias. Nesse experimento, analisam-se as séries temporais do componente y . Aplicando a transformada *wavelet* discreta, usando a *wavelet db4* em três níveis de decomposição, obtém-se quatro grupos de dados:

- Nível 0: 400 séries temporais do sistema de Rössler com 4096 pontos cada.
- Nível 1: 400 coeficientes escala do primeiro nível de decomposição com 2048 pontos cada.
- Nível 2: 400 coeficientes escala do segundo nível de decomposição com 1024 pontos cada.
- Nível 3: 400 coeficientes escala do terceiro nível de decomposição com 512 pontos cada.

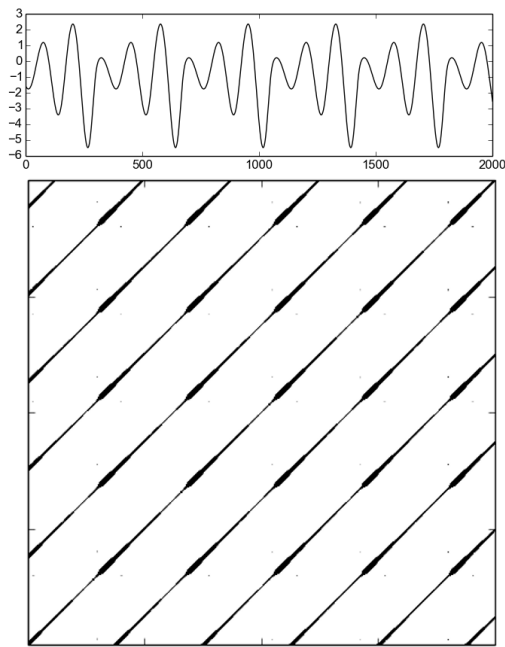
Para cada registro obtido, gera-se o gráfico de recorrência e extrai-se as medidas de quantificação seguindo as especificações da Tabela 8.2.

Tabela 8.2 - Parâmetros para calcular o gráfico de recorrência e análise de quantificação de recorrência do sistema de Rössler.

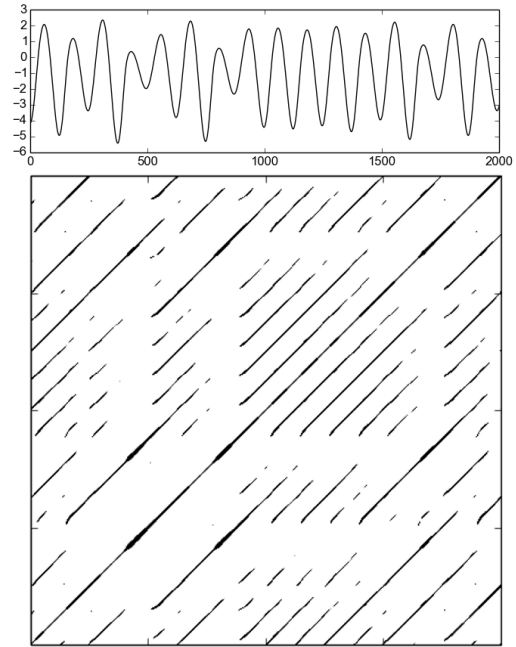
| Nível de decomposição | Configuração do RP e RQA | | | |
|-----------------------|--------------------------|--------|-------------|-----|
| | m | τ | ρ | l |
| 0 | 3 | 20 | 1 | 512 |
| 1 | 3 | 14 | $\sqrt{2}$ | 256 |
| 2 | 3 | 7 | 2 | 128 |
| 3 | 3 | 3 | $2\sqrt{2}$ | 64 |

A Figura 8.5 apresenta um exemplo de série temporal e seu respectivo gráfico de recorrência de cada uma das quatro regiões.

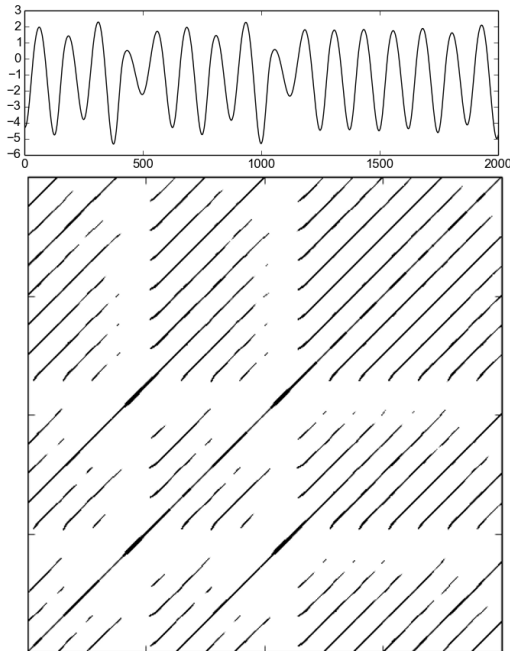
Figura 8.5 - Exemplo de séries temporais e gráficos de recorrência de quatro regiões do sistema de Rössler.



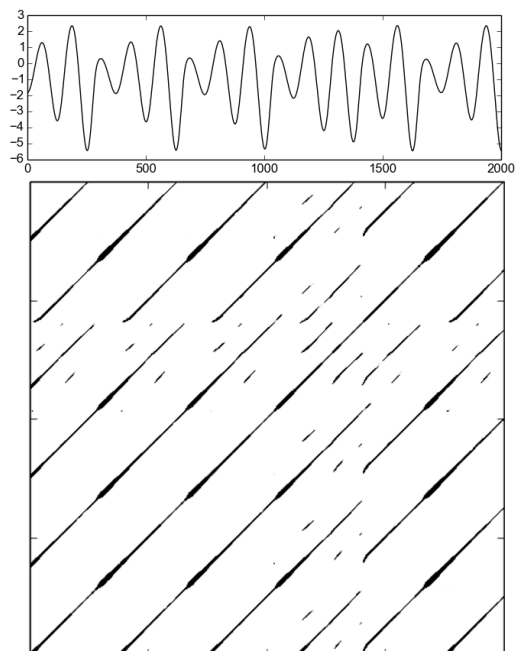
(a) $a = 0,41005$



(b) $a = 0,40555$



(c) $a = 0,40755$

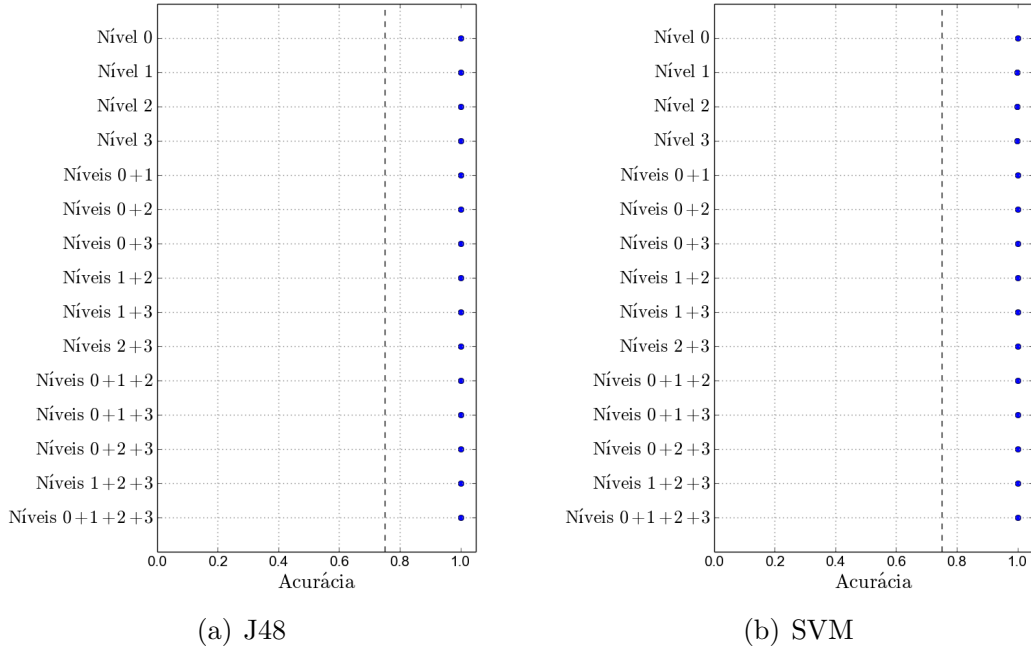


(d) $a = 0,40855$

Fonte: Produção do autor.

Em cada um dos testes especificados na Tabela 8.1, utiliza-se 100 casos com 210 registros cada. A Figura 8.6 apresenta as acurácias médias obtidas.

Figura 8.6 - Acurácias quando combina-se os quantificadores dos diversos níveis de decomposição do sistema de Rössler.



Fonte: Produção do autor.

Nessa análise, todos os testes realizados possuem valores semelhantes de acurácia. Assim, somente um nível de decomposição é necessário para distinguir as regiões.

8.3 Aplicando à metodologia para análise discriminação de doenças

O objetivo desse experimento é analisar o quanto a metodologia WRA auxilia na identificação de doenças. Para isso, ela será utilizada para discriminar os diferentes grupos de intervalos \mathcal{RR} descritos na Seção 6.1. Assim, o conjunto de dados é constituído por 199 séries temporais de intervalos \mathcal{RR} que representam os quatro grupos distintos de voluntários. Aplicando a transformada *wavelet* discreta, usando a *wavelet db4* em três níveis de decomposição, obtém-se quatro grupos de dados:

- Nível 0: 199 séries temporais de intervalo \mathcal{RR} .
- Nível 1: 199 coeficientes escala do primeiro nível de decomposição.
- Nível 2: 199 coeficientes escala do segundo nível de decomposição.
- Nível 3: 199 coeficientes escala do terceiro nível de decomposição.

Para cada registro, gera-se o gráfico de recorrência e extrai-se as sete medidas de quantificação utilizando as configurações definidas na Tabela 8.3.

Tabela 8.3 - Parâmetros para calcular o gráfico de recorrência e análise de quantificação de recorrência das séries de intervalos \mathcal{RR} .

| Nível de decomposição | Configuração RP e RQA | | |
|-----------------------|-----------------------|--------|--------------|
| | m | τ | ρ |
| 0 | 3 | 3 | 8 |
| 1 | 3 | 9 | $8\sqrt{2}$ |
| 2 | 3 | 3 | 16 |
| 3 | 3 | 3 | $16\sqrt{2}$ |

Em cada análise realizada com os classificadores, usam-se apenas dois grupos de pacientes. Visando uniformizar a comparação, opta-se por utilizar o mesmo número de casos em cada grupo, conforme especificado na Tabela 8.4.

Tabela 8.4 - Comparações realizadas com os grupos de pacientes e suas respectivas quantidade de registros do conjunto de entrada.

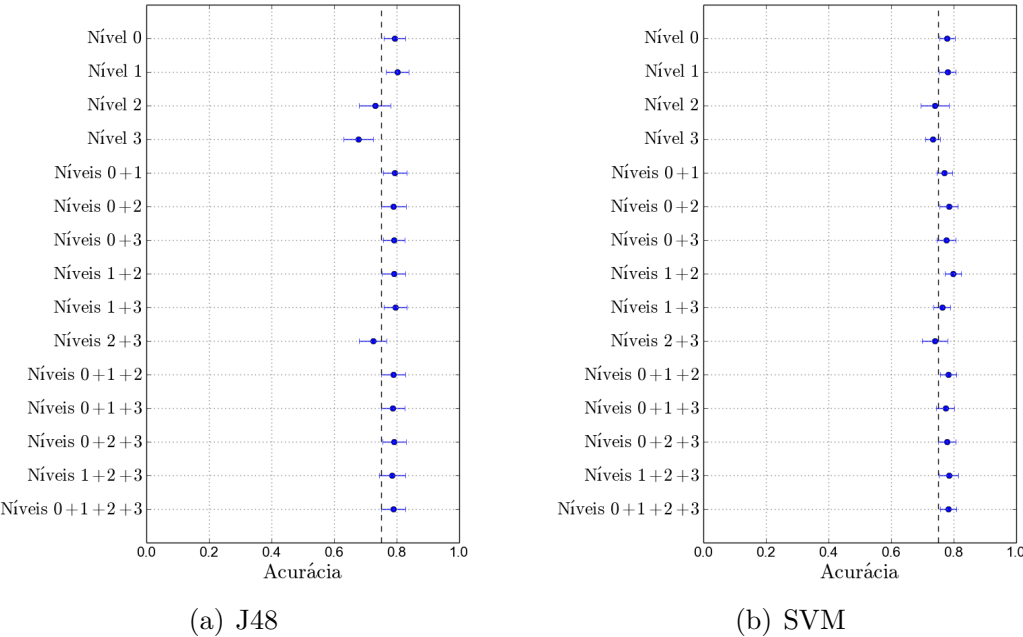
| Grupos | Quantidade de registros do conjunto de entrada |
|---------|--|
| PC-VOL | 45 |
| RNN-PC | 17 |
| RNN-RNP | 17 |
| RNN-VOL | 17 |
| RNP-PC | 30 |
| RNP-VOL | 30 |

RNP - Recém nascido prematuro, RNN - Recém nascido normal, VOL - adulto jovem saudável, PC - Adulto coronariopata

Para avaliar a eficácia da metodologia WRA, aplicam-se os 15 testes, descritos na Tabela 8.1, utilizando os classificadores J48 e SVM. As Figuras 8.7, 8.8, 8.9, 8.10, 8.11 e 8.12 apresentam os resultados obtidos.

Como mostra a Figura 8.7, ao utilizar a metodologia para distinguir os grupos PC e VOL, o SVM obtém a melhor acurácia ao combinar os níveis 1 e 2, enquanto o J48 obtém a melhor acurácia utilizando somente o nível 1.

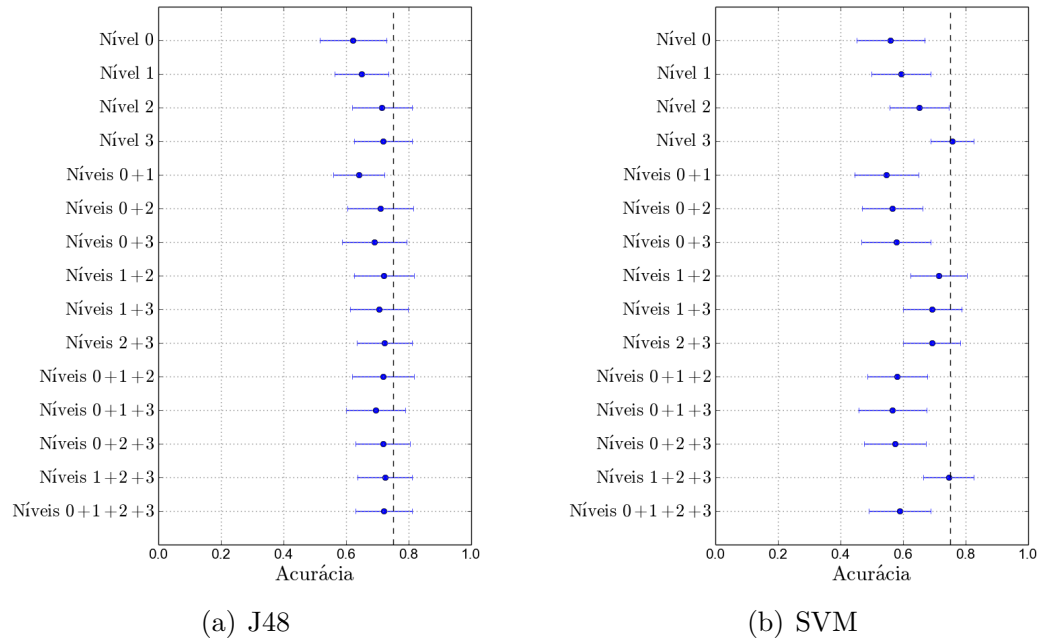
Figura 8.7 - Acurácias da metodologia WRA quando compara-se os grupos PC-VOL.



Fonte: Produção do autor.

Em relação aos resultados dos grupos RNN e RNP (Figura 8.8), em ambos os classificadores a melhor acurácia é obtida pelos quantificadores do nível 3 de decomposição.

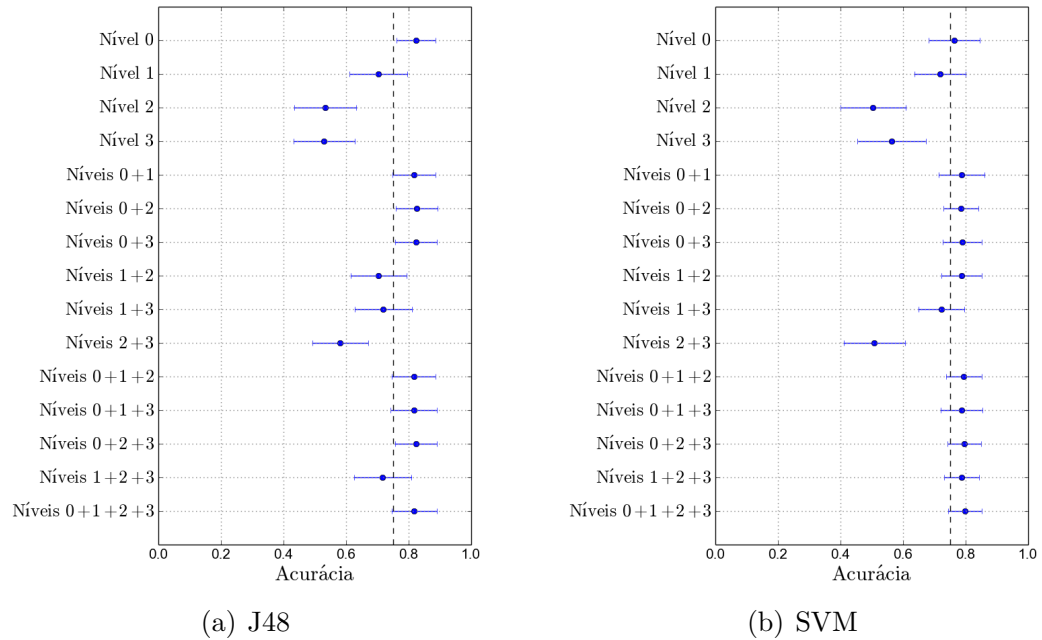
Figura 8.8 - Acurácias da metodologia WRA quando compara-se os grupos RNN-RNP.



Fonte: Produção do autor.

Como ilustrado na Figura 8.9, ao tentar distinguir os voluntários dos grupos RNN e PC, a melhor acurácia é obtida ao combinar os quantificadores dos níveis 0, 2 e 3.

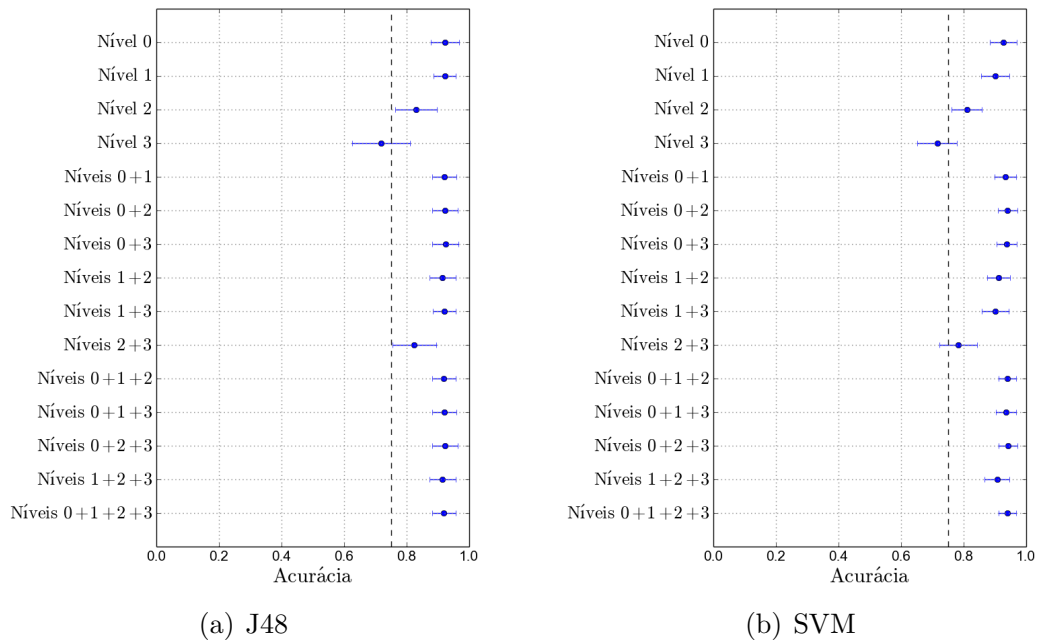
Figura 8.9 - Acurácias da metodologia WRA quando compara-se os grupos RNN-PC.



Fonte: Produção do autor.

Conforme os resultados apresentados na Figura 8.10, a combinação dos quantificadores dos níveis 0 e 2 geram a melhor acurácia para a distinção entre os grupos RNN e VOL.

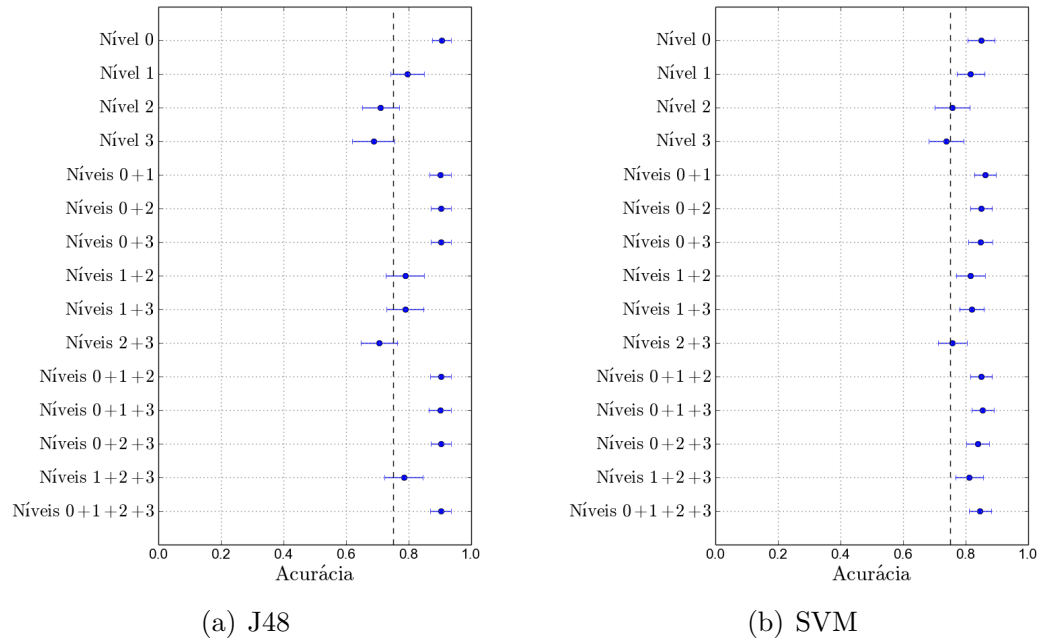
Figura 8.10 - Acurácias da metodologia WRA quando compara-se os grupos RNN-VOL.



Fonte: Produção do autor.

Como mostra a Figura 8.11, utilizando o WRA para distinguir os grupos RNP e PC, a melhor acurácia é obtida ao combinar os quantificadores dos níveis 0 e 1.

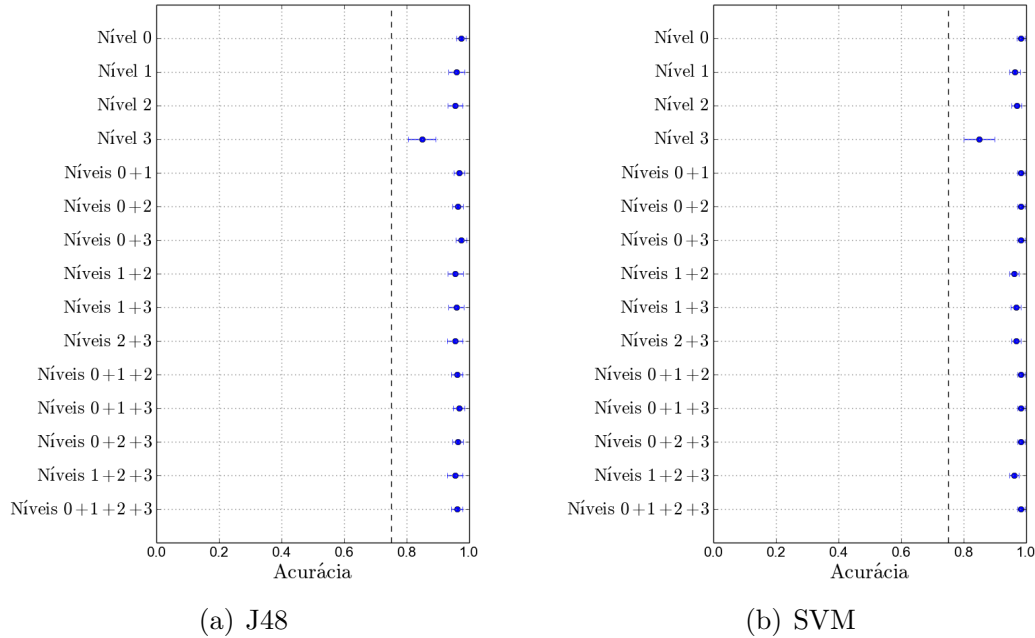
Figura 8.11 - Acurácias da metodologia WRA quando compara-se os grupos RNP-PC.



Fonte: Produção do autor.

Como pode ser observado na Figura 8.12, a melhor acurácia para a distinção entre os grupos RNP-VOL é obtida ao combinar os quantificadores dos níveis 0 e 3.

Figura 8.12 - Acurácias da metodologia WRA quando compara-se os grupos RNP-VOL.



Fonte: Produção do autor.

8.4 Conclusões parciais

Nesse capítulo, apresenta-se a metodologia *Wavelet-Recurrence Analysis* (WRA). Essa metodologia tem por objetivo combinar quantificadores, de diferentes nível de decomposição, para melhorar a acurácia dos classificadores J48 e SVM.

Quando se tenta distinguir regiões de dinâmica semelhantes do mapa logístico, o WRA proporciona uma sutil melhora da acurácia. Porém, essa metodologia não melhora a acurácia quando se tenta distinguir regiões de dinâmicas semelhantes do sistema de Rössler.

Para os dados experimentais de intervalo \mathcal{RR} , o WRA possibilita o aumento da acurácia nos casos RNN-PC, RNN-VOL, RNP-PC e RNP-VOL.

9 USO DE *WAVELETS* PARA REDUÇÃO DE RUÍDO NÃO-LINEAR

Esse capítulo apresenta a descrição de uma metodologia na qual realiza-se a filtragem dos coeficientes *wavelets* para remover ruído não-linear presente no sinal e, assim, melhorar a eficiência na classificação. As Seções 9.2 e 9.3 apresentam, respectivamente, os resultados da aplicação da metodologia em dados sintéticos do sistema de Rössler e em dados reais de atividades solares.

9.1 Metodologia

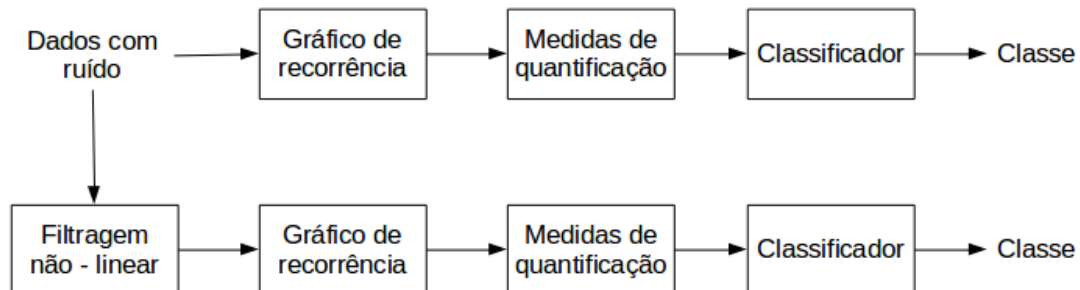
A metodologia proposta visa analisar o quanto a filtragem dos coeficientes *wavelets*, para remoção de ruído não-linear, auxilia no processo de classificação de sinais. Para isso, a metodologia é dividida em três etapas.

A primeira etapa tem por objetivo gerar os gráficos de recorrência e suas respectivas medidas de quantificação (taxa de recorrência, determinismo, tamanho da maior linha diagonal, tamanho médio das linhas diagonais, entropia de recorrência, laminaridade e tamanho médio das linhas verticais) das séries temporais com ruído.

A segunda etapa inicial com a aplicação da técnica de remoção de ruído por meio da filtragem de coeficientes *wavelets* (definida na Seção 4.2). Após a filtragem, geram-se os gráficos de recorrências e obtém-se seus respectivos quantificadores das séries temporais filtradas.

A terceira etapa apresenta os quantificadores obtidos a um classificador para avaliar o quanto a técnica de filtragem auxilia no processo de classificação de sinais ruidosos.

Figura 9.1 - Fluxo da metodologia na qual utiliza-se a remoção de coeficientes *wavelets* para a redução de ruído não-linear.



Fonte: Produção do autor.

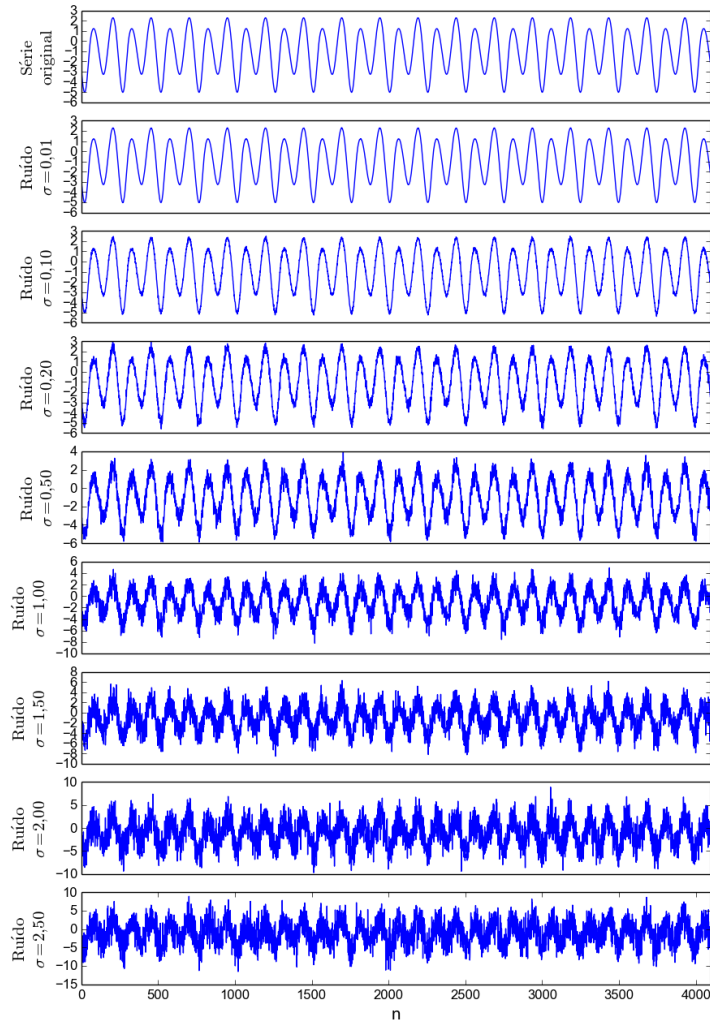
9.2 Aplicação da metodologia

A partir do conjunto de dados descrita na Seção 2.2.1.2, geram-se séries ruidosas por meio da equação:

$$g(t) = y(t) + \text{gauss}(0, \sigma), \quad (9.1)$$

no qual $g(t)$ é a série com ruído, $y(t)$ é a série sem ruído e $\text{gauss}()$ é uma função aleatória com distribuição gaussiana de média zero e desvio padrão σ . Dessa forma, obtiveram-se oito novas bases de dados contendo 4001 séries cada, nos quais o desvio padrão assume os valores 0,01; 0,10; 0,20; 0,50; 1,00; 1,50; 2,00 e 2,50. A Figura 9.2 apresenta uma amostra das séries ruidosas obtidas neste processo.

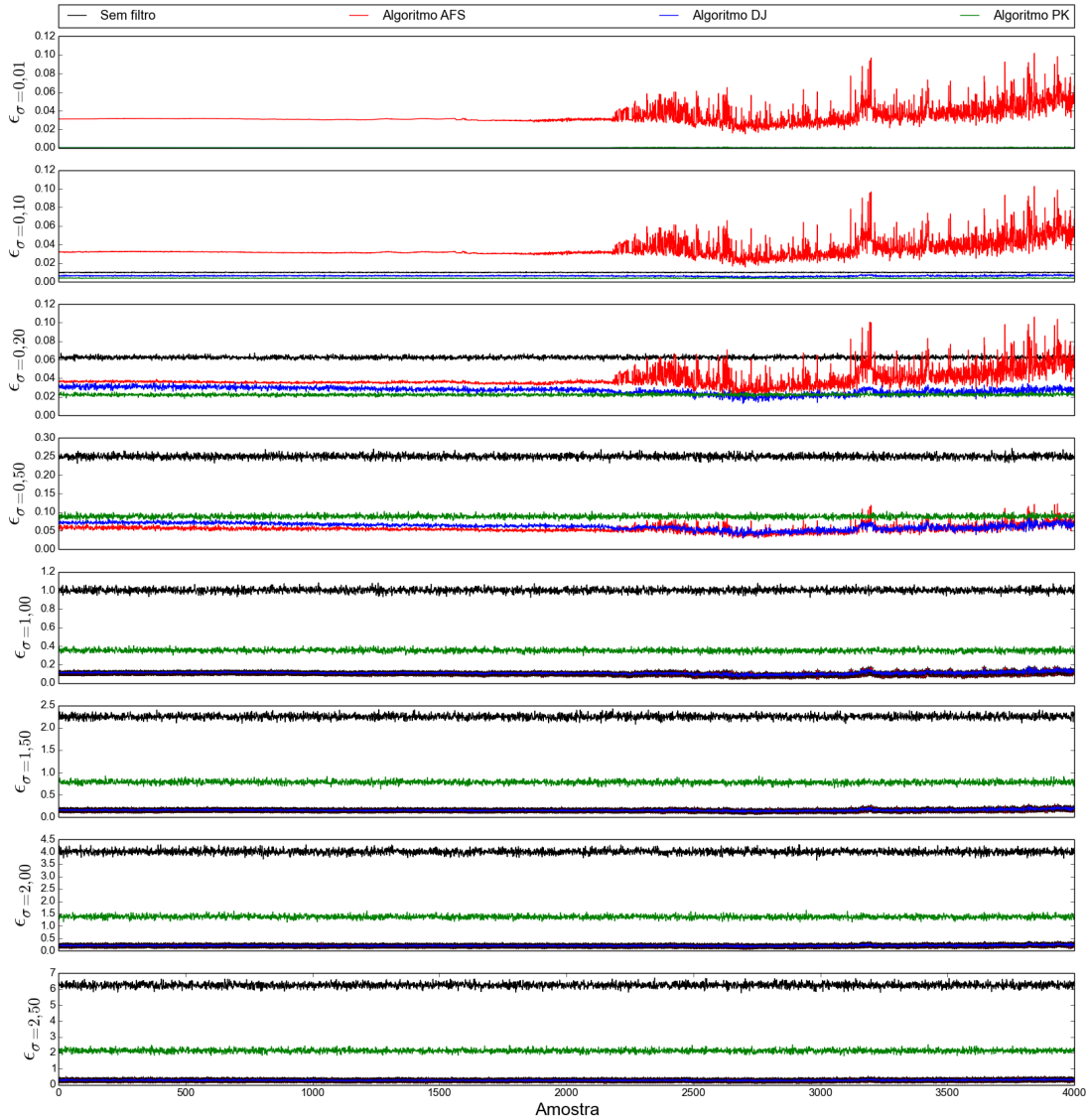
Figura 9.2 - Séries temporais do sistema de Rössler com ruído aditivo gaussiano.



Fonte: Produção do autor.

Para a remoção do ruído não-linear, aplica-se as técnicas descritas na Seção 4.2, utilizando a *wavelet db4* com 5 níveis de decomposição. A Figura 9.3 apresenta o erro quadrático médio entre o sinal sem ruído e o sinal filtrado. Observa-se que o Algoritmo PK é eficiente para pequenos valores de ruído enquanto que os Algoritmos AFS e DJ são eficientes para os valores maiores de ruído.

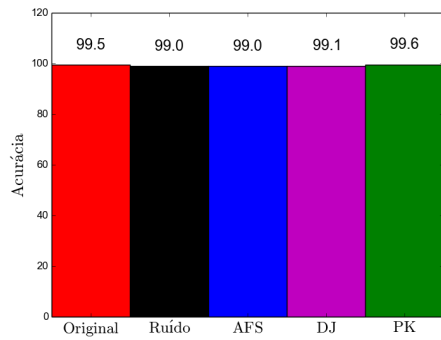
Figura 9.3 - Erro médio quadrático das técnicas de filtragem não-linear.



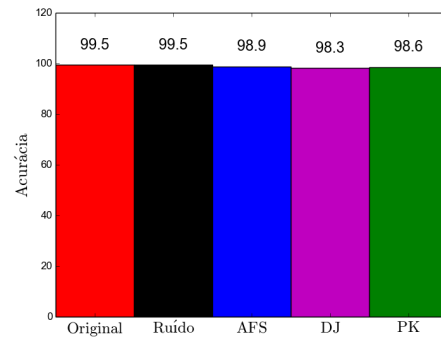
Fonte: Produção do autor.

Após realizar a filtragem, geram-se os gráficos de recorrência e seus respectivos quantificadores utilizando a configuração $m = 3$, $\tau = 20$, $\rho = 1,00$ e $l = 512$. Para identificar as regiões caóticas e não caóticas do sistema de Rössler, apresenta-se os sete quantificadores como padrões de entrada para a árvore de decisão J48. A Figura 9.4 apresenta as porcentagens de acerto de classificação obtidas nesse experimento.

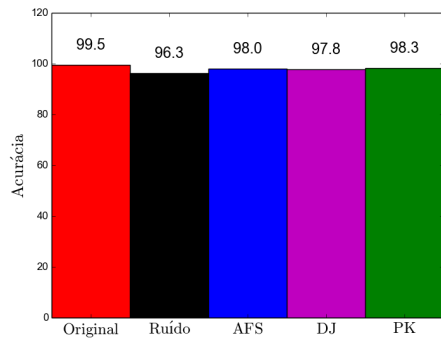
Figura 9.4 - Porcentagem de acerto de classificação das técnicas de filtragem para diversos valores de ruído gaussiano.



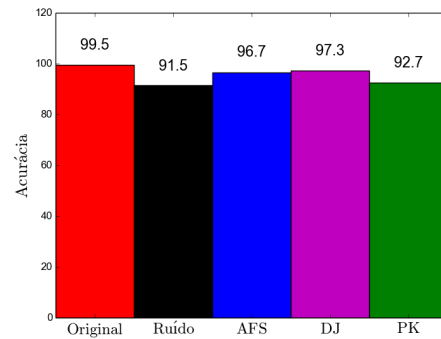
(a) $\sigma = 0,01$



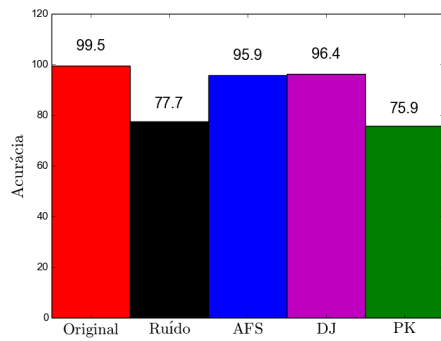
(b) $\sigma = 0,10$



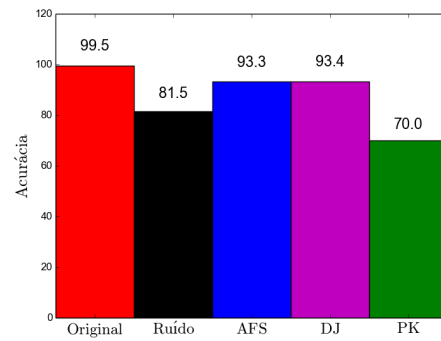
(c) $\sigma = 0,20$



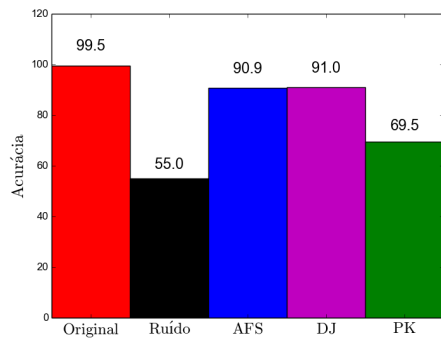
(d) $\sigma = 0,50$



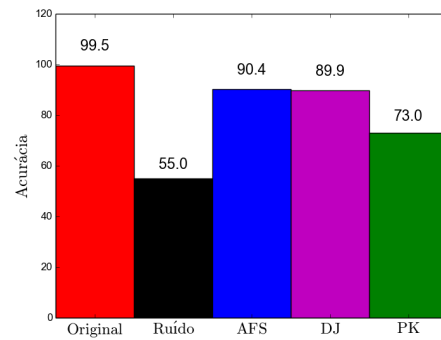
(e) $\sigma = 1,00$



(f) $\sigma = 1,50$



(g) $\sigma = 2,00$



(h) $\sigma = 2,50$

Fonte: Produção do autor.

Como pode ser observado na Figura 9.4 (a), (b) e (c), pequenos valores de ruído não influenciam o resultado da classificação. Porém, conforme o nível de ruído aumenta, diminui-se consideravelmente a porcentagem de acerto do classificador. A utilização das técnicas de filtragem, em especial os Algoritmos AFS e DJ, possibilitam uma boa redução do ruído e, conseqüentemente, proporcionam porcentagens de acerto superiores a 90%.

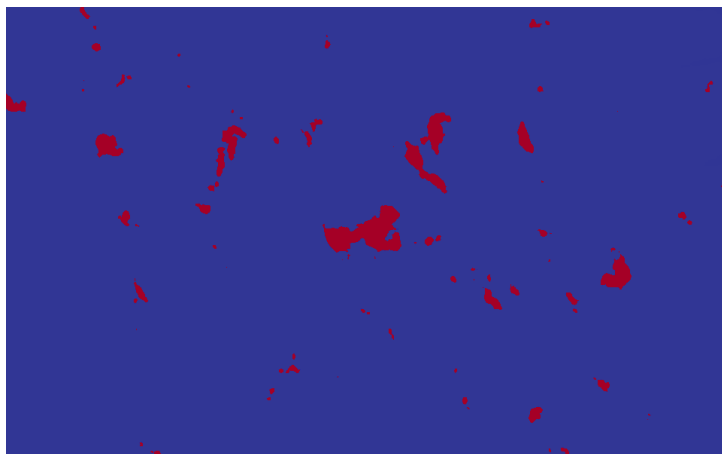
9.3 Exemplo de aplicação: campo magnético solar

O objetivo desse experimento é localizar as principais perturbações do campo magnético solar, descrito na Seção 6.2, utilizando os quantificadores do RQA. Nesse conjunto de dados, define-se que:

- Não há perturbação quando $-75 \leq B \leq 75$.
- Há perturbação quando $B < -75$ ou $B > 75$.

Dessa forma, A Figura 9.5 mostra quais são as regiões de perturbação do campo magnético.

Figura 9.5 - Regiões de perturbações do campo magnético solar.



Nessa representação, as cores azul e vermelha representam, respectivamente, as regiões não perturbada e perturbada.

Fonte: Produção do autor

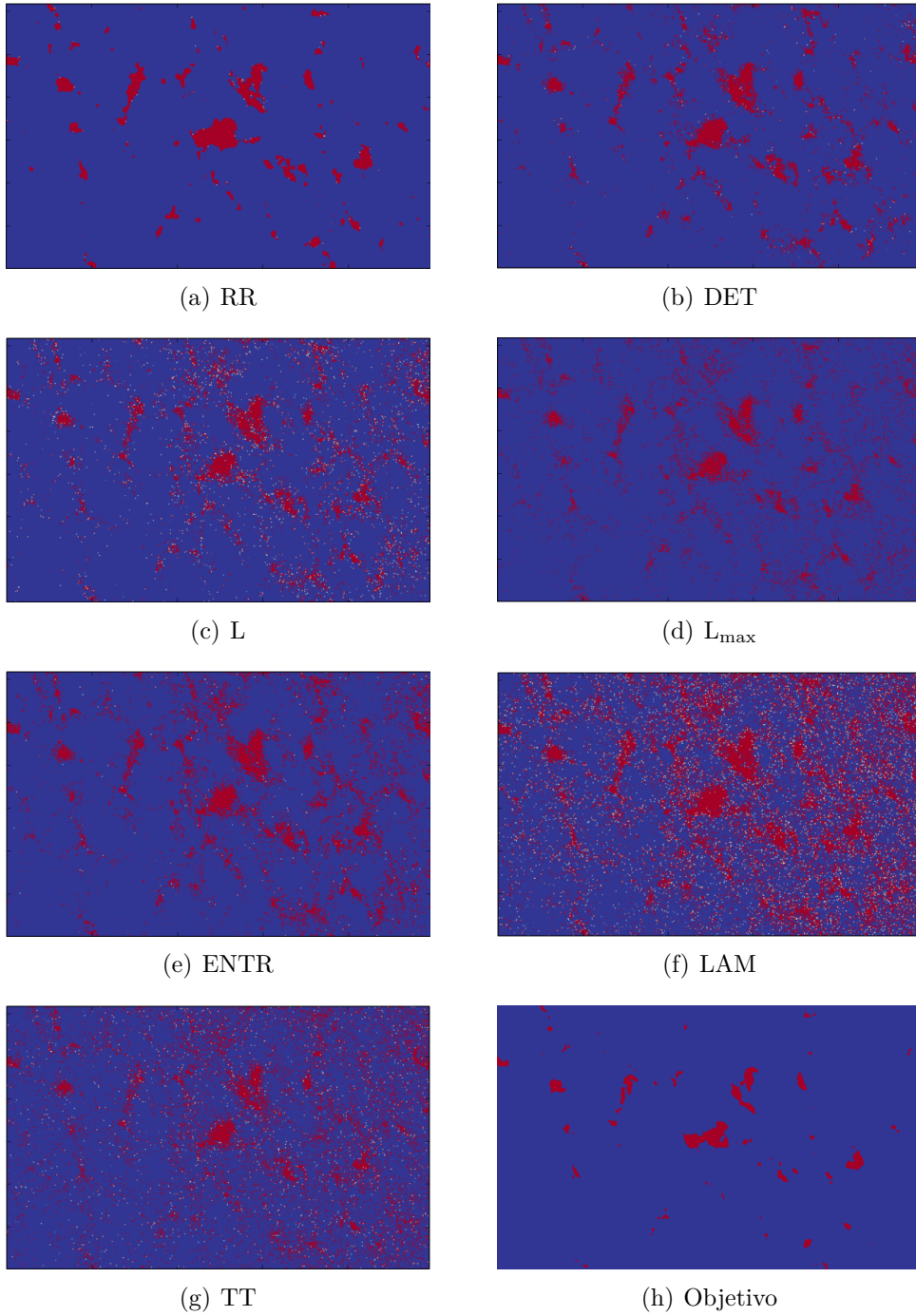
Para cada série temporal extraída das imagens do campo magnético solar, calcula-se os quantificadores do RQA utilizando a configuração $m = 1$ e $\rho = 5$. Por meio de testes realizados, determina-se que a distinção entre as regiões perturbada e não perturbada segue a configuração apresentada na Tabela 9.1.

Tabela 9.1 - Configuração de seleção para as regiões perturbada e não perturbada.

| Quantificador | Região | |
|---------------|----------------|------------|
| | Não perturbada | Perturbada |
| RR | $\geq 0,15$ | $< 0,15$ |
| DET | $\geq 0,47$ | $< 0,47$ |
| L | ≥ 2.40 | < 2.40 |
| Lmax | ≥ 6.00 | < 6.00 |
| ENTR | ≥ 0.85 | < 0.85 |
| LAM | $\geq 0,60$ | < 0.60 |
| TT | $\geq 2,60$ | < 2.60 |

A Figura 9.6 apresenta os resultados obtidos sem o processo de filtragem.

Figura 9.6 - Identificação das principais perturbações do campo magnético solar sem a utilização de filtro.

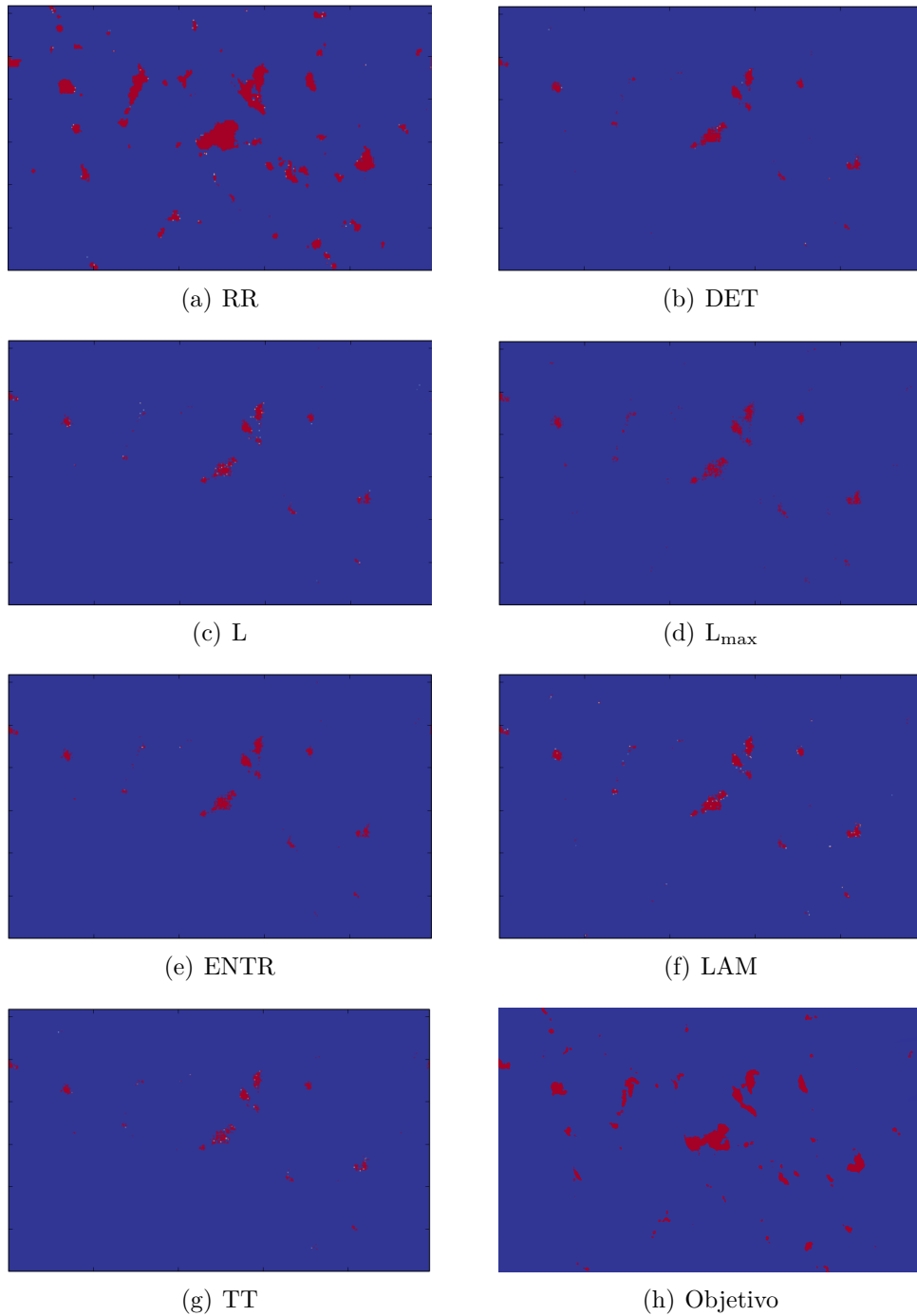


Fonte: Produção do autor

Observa-se que os quantificadores, obtidos a partir das séries originais, localizam as regiões perturbadas, mas também localizam pequenas estruturas que não são consideradas como perturbações. Essas pequenas estruturas são consideradas como ruído. Para tentar resolver este problema, aplica-se o Algoritmo DJ (com *db4* e 2

níveis de decomposição) para filtrar o ruído não-linear presente nas séries. Após o processo filtragem, calculam-se os quantificadores do RQA utilizando a configuração $m = 1$ e $\rho = 5$. A Figura 9.7 apresenta os resultados obtidos com o processo de filtragem.

Figura 9.7 - Identificação das principais perturbações do campo magnético solar quando utiliza-se a filtragem dos coeficientes *wavelet*.



Fonte: Produção do autor

Como pode ser observado na Figura 9.7, o processo de filtragem remove as pequenas estruturas de ruído e, conseqüentemente, facilita a localização das regiões onde ocorreram grandes perturbações do campo magnético solar.

9.4 Conclusões parciais

Nesse capítulo, é apresentado uma metodologia que utiliza a técnica de filtragem de coeficientes *wavelet* para reduzir o ruído presente nas séries temporais e, assim, facilitar a caracterização da dinâmica por meio dos quantificadores do RQA.

Para o sistema de Rössler, a metodologia proposta, utilizando os Algoritmos AFS e DJ, é capaz de reduzir o ruído presente no sistema. Assim, é possível gerar quantificadores do RQA que proporcionam acerto de classificação superior a 90%.

Para os dados reais provenientes do campo magnético solar, embora seja uma análise simplista da dinâmica solar, observa-se que a filtragem não-linear facilita a identificação das principais regiões de perturbação.

10 CONCLUSÕES

Diversos métodos são utilizados para distinguir diferentes dinâmicas presentes em um sistema. Dentre estes métodos, destacam-se o métodos cálculo de dimensão fractal, expoente de Lyapunov, mapas de Poincaré e entropia. Porém, tais métodos possuem desvantagens como a necessidade de séries temporais longas, alteração dos resultados devido a presença de ruídos e dificuldade para analisar sistemas não-estacionários. Tentando solucionar estas dificuldades, tem-se utilizado as técnicas gráfico de recorrência e análise de quantificação de recorrência para extrair atributos que caracterizem a dinâmica do sistema em análise.

Porém, o tamanho da série temporal influencia o tempo de processamento das medidas, sendo a redução deste tempo um dos objetivos deste trabalho. No Capítulo 7, apresenta-se uma metodologia que utiliza a transformada *wavelet* discreta para obter séries suavizadas, com menores quantidades de pontos, que preservam a dinâmica do sistema. Desta forma, os quantificadores são extraídos das séries suavizadas e, conseqüentemente, há uma redução no tempo computacional para calculá-los. Os experimentos realizados neste capítulo, confirmam que a metodologia proposta é capaz de distinguir diversas dinâmicas quando aplicada aos dados sintéticos, provenientes do mapa logístico e do sistema de Rössler, assim como alguns dados reais provenientes da análise da variabilidade da frequência cardíaca.

Além do problema relacionado ao tamanho da série temporal, a extração de quantificadores do RQA é dificultada pela presença de ruídos nas séries temporais. Assim, o Capítulo 9 apresenta uma metodologia que remove ruído por meio da filtragem dos coeficientes *wavelets* e, assim, gera séries filtradas cujos quantificadores do RQA que distinguem as diversas dinâmicas presentes no sistema. Naquele capítulo, os experimentos realizados demonstram que a metodologia é viável tanto para dados sintéticos do sistema de Rössler quanto para dados reais de imagens do campo magnético solar.

Para realizar a distinção entre sistemas de dinâmica semelhante, utiliza-se o método WRA descrito no Capítulo 8. Esse método busca combinar quantificadores de diferentes níveis de decomposição para facilitar o processo de distinção da dinâmica. Para o mapa logístico, essa metodologia proporciona um sutil aumento da acurácia dos classificadores, enquanto para os dados de intervalo \mathcal{RR} aumenta-se a acurácia das comparações entre grupos os grupos RNN-PC, RNN-VOL, RNP-PC e RNP-VOL.

Em suma, dentro da proposta dessa dissertação buscou-se corroborar que a transformada *wavelet* discreta pode ser utilizada para reduzir a complexidade computacional do cálculo do gráfico de recorrência, para remover o ruído não-linear presente no conjunto de dados e para distinguir sistemas com dinâmica semelhante.

10.1 Sugestões para trabalhos futuros

Como proposta de trabalhos futuros, dois pontos podem ser explorados: a utilização de outras funções *wavelets* para a decomposição do sinal e a análise da capacidade que cada quantificador do RQA possui em caracterizar a dinâmica do sistema.

Um ponto a ser explorado é a utilização da *wavelet packet tree* para a decomposição do sinal. Nesta abordagem, a decomposição *wavelet* é aplicada tanto aos coeficientes escala quanto aos coeficientes *wavelet*. Assim, os quantificadores do RQA são extraídos de ambos os coeficientes, aumentando o número de características que representa a dinâmica do sistema.

Outra sugestão é utilizar a transformada *wavelet* discreta 2D para gerar gráficos de recorrência suavizados, que diminuem a quantidade de pontos, mas preservam a essência do sistema. Nesta abordagem, os quantificadores podem ser obtidos, por exemplo, por técnicas de processamento de imagens ou de redes complexas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADDO, P. M.; BILLIO, M.; GUÉGAN, D. Nonlinear dynamics and recurrence plots for detecting financial crisis. **The North American Journal of Economics and Finance**, v. 26, n. 0, p. 416–435, 2013. [1](#)
- ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos: an introduction to dynamical systems**. New York: Springer, 1996. (Textbooks in mathematical sciences). [10](#)
- ANTONIOU, A.; VORLOW, C. E. Recurrence quantification analysis of wavelet pre-filtered index returns. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 344, n. 1-2, p. 257–262, 2004. [1](#)
- AZZALINI, A.; F., M.; SCHNEIDER, K. Nonlinear wavelet thresholding: A recursive method to determine the optimal denoising threshold. **Applied and Computational Harmonic Analysis**, v. 18, n. 2, p. 177–185, 2005. [2](#), [34](#)
- BAKER, G. L.; GOLLUB, J. P. **Chaotic dynamics: an introduction**. 2. ed. New York: Cambridge University Press, 1996. [5](#), [6](#), [8](#)
- BURGES, C. J. C. A tutorial on support vector machines for pattern recognition. **Knowledge Discovery and Data Mining**, v. 2, n. 2, p. 1–43, 1998. [46](#)
- CHUI, C. K. **An introduction to wavelets**. San Diego: Academic Press, 1992. [23](#)
- CORTES, C.; VAPNIK, V. Support-vector networks. **Machine Learning**, v. 20, p. 273–297, 1995. [44](#)
- COSTA, D. G. B. **Uso de gráfico de recorrência e redes complexas para caracterização de sistemas complexos de baixa dimensão**. Dissertação (Mestrado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2014. [1](#)
- COSTA, W. S. **Mapeamento de formações campestres nativas e de pastagens cultivadas no cerrado brasileiro utilizando mineração de dados**. Dissertação (Mestrado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2014. [45](#), [47](#), [48](#)
- DAUBECHIES, I. **Ten Lectures on Wavelets**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. [25](#), [26](#), [30](#), [32](#)

DOMINGUES, M. O.; MENDES JUNIOR, O.; COSTA, A. M. da. On wavelet techniques in atmospheric sciences. **Advances in Space Research**, v. 35, n. 5, p. 831–842, 2005. [25](#)

DONOHO, D.; JOHNSTONE, I. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. **Biometrika**, v. 81, p. 425–455, 1994. [2](#), [33](#)

ECKMANN, J. P.; KAMPHORST, S. O.; RUELLE, D. Recurrence plots of dynamical systems. **Europhysics Letters**, p. 973–977, 1987. [1](#), [19](#)

FRASER, A. M.; SWINNEY, H. L. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 33, p. 1134–1140, 1986. [7](#)

GRASSBERGER, P.; PROCACCIA, I. Characterization of strange attractors. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 50, p. 346–349, 1983. [8](#)

HALL, M.; FRANK, E.; HOLMES, G.; PFAHRINGER, B.; REUTEMANN, P.; WITTEN, I. H. The weka data mining software: An update. **ACM SIGKDD Explorations Newsletter**, v. 11, n. 1, p. 10–18, 2009. [44](#), [56](#)

HAN, J.; KAMBER, M. **Data mining: concepts and techniques**. [S.l.]: Morgan Kaufmann Publishers, 2006. [44](#), [47](#)

HARMON, M. E.; HARMON, S. S. **Reinforcement learning: A tutorial**. 1996. [39](#)

HAYKIN, S. **Redes neurais: princípios e práticas**. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001. [39](#)

HÉNON, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. **Communications in Mathematical Physics**, Springer-Verlag, v. 50, n. 1, p. 69–77, 1976. [4](#)

HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. **Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos**. 2. ed. Amsterdam: Academic Press, 2003. (Pure and applied mathematics). [4](#), [11](#)

HOLSHEIMER, M.; SIEBES, A. P. J. M. **Data mining: the search for knowledge in databases**. Amsterdam: Centre for Mathematics and Computer Science, 1994. [40](#)

KAEHLING, L. P.; LITTMAN, M. L.; MOORE, A. W. Reinforcement learning: A survey. **Journal of Artificial Intelligence Research**, p. 237–285, 1996. [39](#)

KENNEL, M. B.; BROWN, R.; ABARBANEL, H. D. I. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction.

Physical Review A, American Physical Society, v. 45, p. 3403–3411, 1992. [8](#)

KONONENKO, I. Machine learning for medical diagnosis: history, state of the art and perspective. **Artificial Intelligence in Medicine**, v. 23, n. 1, p. 89–109, 2001. [39](#)

LLOP, M. F.; GASCONS, N.; LLAURÓ, F. X. Recurrence plots to characterize gas-solid fluidization regimes. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 73, n. 0, p. 43–56, 2015. [1](#)

LOPES, P. F. F.; OLIVEIRA, M. I. B.; ANDRE, S. M. S.; NASCIMENTO, D. L. A.; SILVA, C. S. S.; REBOUCAS, G. M.; FELIPE, T. R.; FILHO, N. J. B. A.; MEDEIROS, H. J. Aplicabilidade clínica da variabilidade da frequência cardíaca. **Revista Neurociências**, v. 21, p. 600–603, 2014. [49](#)

LORENA, A. C.; CARVALHO, A. C. P. L. F. de. Uma introdução às support vector machines. **Revista de Informática Teórica e Aplicada**, v. 14, n. 2, p. 1–43, 2007. [46](#)

LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 20, p. 130–141, 1963. [3](#)

MALLAT, S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v. 11, n. 7, p. 674–693, 1989. [26](#), [28](#)

MALLAT, S. G. **A wavelet tour of signal processing: the sparse way**. 3. ed. Boston: Academic Press, 2009. (Electronics & Electrical). [25](#), [32](#)

MARWAN, N. **Encounters with neighbours : current developments of concepts based on recurrence plots and their applications**. Tese (Doutorado), 2003. [18](#)

MARWAN, N.; KURTHS, J. Line structures in recurrence plots. **Physics Letters A**, v. 336, n. 4-5, p. 349–357, 2005. [19](#)

MARWAN, N.; KURTHS, J.; SAPARIN, P. Generalised recurrence plot analysis for spatial data. **Physics Letters A**, v. 360, n. 4-5, p. 545–551, 2007. [1](#)

- MARWAN, N.; ROMANO, M. C.; THIEL, M.; KURTHS, J. Recurrence plots for the analysis of complex systems. **Physics Reports**, v. 438, n. 5-6, p. 237–329, 2007. [17](#), [20](#), [21](#), [56](#)
- MASUGI, M. Applying a recurrence plot scheme to analyze non-stationary transition patterns of ip-network traffic. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 14, n. 4, p. 1418–1430, 2009. [1](#)
- MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. **Nature**, v. 261, p. 459–467, 1976. [10](#)
- MCCAULEY, S.; GOETZ, S. Mapping residential density pattern using multitempora landsat data and a decision-tree classifier. **International Journal of Remote Sensing**, v. 25, n. 6, p. 1077–1094, 2004. [41](#)
- MITCHELL, T. M. **Machine learning**. New York: McGraw-Hill, 1997. [40](#)
- MOHRI, M.; ROSTAMIZADEH, A.; TALWALKAR, A. **Foundations of machine learning**. Cambridge: MIT Press, 2012. (Adaptive computation and machine learning series). [39](#)
- MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. 3. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011. [3](#), [4](#)
- OPRISAN, S. A.; LYNN, P. E.; TOMPA, T.; LAVIN, A. Low-dimensional attractor for neural activity from local field potentials in optogenetic mice. **Frontiers in Computational Neuroscience**, v. 9, n. 125, 2015. [7](#)
- PERIN, G.; KOZAKEVICIUS, A. J. Filtragem wavelet de sinais cardíacos através de algoritmos adaptativos. **Revista de Informática Teórica e Aplicada**, Instituto de Informática UFRGS, v. 20, n. 3, p. 95–111, 2013. [2](#), [36](#)
- POINCARÉ, H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. **Acta mathematica**, v. 13, p. 1–270, 1890. [17](#)
- QUINLAN, J. R. Induction of decision trees. **Machine Learning**, v. 1, n. 1, p. 81–106, 1986. [41](#)
- QUINLAN, R. **C4.5: Programs for Machine Learning**. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann Publishers, 1993. [41](#)
- RAJU, L.; MILTON, R. S.; SURESH, S.; SANKAR, S. Reinforcement learning in adaptive control of power system generation. **Procedia Computer Science**, v. 46, n. 0, p. 202–209, 2015. [39](#)

RILEY, M. A.; ORDEN, G. C. V.; (U.S.), N. S. F. **Tutorials in Contemporary Nonlinear Methods for the Behavioral Sciences**. [S.l.]: National Science Foundation, 2005. [1](#)

RIOUL, O.; VETTERLI, M. Wavelets and signal processing. **IEEE Signal Processing Magazine**, v. 8, n. 4, p. 14–38, 1991. [23](#)

RÖSSLER, O. E. An equation for continuous chaos. **Physics Letters A**, v. 57, n. 5, p. 397–398, 1976. [13](#)

RUFINO, H. L. P. **Algoritmo de aprendizado supervisionado - baseado em máquinas de vetores de suporte - uma contribuição para o reconhecimento de dados desbalanceados**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2011. [44](#)

RUSSELL, S.; NORVIG, P. **Inteligência artificial**. [S.l.]: CAMPUS - RJ, 2004. [39](#)

SALZBERG, S. L. C4.5: Programs for machine learning by j. ross quinlan. morgan kaufmann publishers, inc., 1993. **Machine Learning**, Kluwer Academic Publishers, v. 16, n. 3, p. 235–240, 1994. [40](#)

SANTOS, L. dos. **Métodos de sistemas dinâmicos e mineração de dados para interpretação de sinais não lineares**. Tese (Doutorado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2013. [45](#), [49](#), [51](#), [85](#)

SAVI, M. A. **Dinâmica não-linear e caos**. Rio de Janeiro: E-papers, 2006. [5](#)

SCHOU, J.; SCHERRER, P.; BUSH, R.; WACHTER, R.; COUVIDAT, S.; RABELLO-SOARES, M.; BOGART, R.; HOEKSEMA, J.; LIU, Y.; DUVAL T.L., J.; AKIN, D.; ALLARD, B.; MILES, J.; RAIRDEN, R.; SHINE, R.; TARBELL, T.; TITLE, A.; WOLFSON, C.; ELMORE, D.; NORTON, A.; TOMCZYK, S. Design and ground calibration of the helioseismic and magnetic imager (hmi) instrument on the solar dynamics observatory (sdo). In: **The Solar Dynamics Observatory**. [S.l.]: Springer US, 2012. p. 229–259. [52](#), [53](#), [54](#)

SEBASTIANI, F. Machine learning in automated text categorization. **ACM Computing Surveys**, v. 34, p. 1–47, 2002. [39](#)

SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. **The Bell System Technical Journal**, v. 27, p. 379–423, 1948. [22](#)

TAKENS, F. Detecting strange attractors in turbulence. In: **Dynamical Systems and Turbulence**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1981. v. 898, p. 366–381. 5, 7

THIEL, M.; ROMANO, M. C.; KURTHS, J. How much information is contained in a recurrence plot? **Physics Letters A**, v. 330, n. 5, p. 343–349, 2004. 1

UNIVERSITY, N. T. **LIBSVM: A Library for Support Vector Machines**. 2012. Disponível em: <<http://www.csie.ntu.edu.tw/~cjlin/libsvm/>>. 48

VANDERLEI, L. C. M.; PASTRE, C. M.; HOSHI, R. A.; CARVALHO, T. D.; GODOY, M. F. Noções básicas de variabilidade da frequência cardíaca e sua aplicabilidade clínica. **Revista Brasileira de Cirurgia Cardiovascular**, Scielo, v. 24, p. 205–217, 2009. 49

VIEIRA, V. J. D. **Avaliação de Distúrbios da Voz por meio de Análise de Quantificação de Recorrência**. Dissertação (Mestrado) — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, João Pessoa, 2014. 19

VIEIRA, V. J. D.; COSTA, S. C.; COSTA, W. C. de A. Análise de quantificação de recorrência e análise discriminante aplicadas à classificação de sinais de vozes saudáveis e sinais de vozes patológicas. **Congresso Norte Nordeste de Pesquisa e Inovação**, 2012. 17

WANG, J. Y. **Application of Support Vector Machines in Bioinformatics**. Master of Science (Computer Science and Information Engineering) — National Taiwan University, Taiwan, 2002. 44

WASILEWSKI, F. **PyWavelets - Discrete Wavelet Transform in Python**. 2012. <http://wavelets.pybytes.com/>. 31

WEBBER, C. L.; ZBILUT, J. P. Dynamical assessment of physiological systems and states using recurrence plot strategies. **Journal of Applied Physiology**, American Physiological Society, v. 76, n. 2, p. 965–973, 1994. 1, 21

WITTEN, I. H.; FRANK, E. **Data Mining: practical machine learning tools and techniques**. [S.l.]: Elsevier, 2005. 42

XU, G.; ZONG, Y.; YANG, Z. **Applied Data Mining**. [S.l.]: CRC Press, 2013. 44

ZANONI, M.; FONTANA, F. A.; STELLA, F. On applying machine learning techniques for design pattern detection. **Journal of Systems and Software**, v. 103, n. 0, p. 102–117, 2015. 39

ZBILUT, J. P.; THOMASSON, N.; WEBBER, C. L. Recurrence quantification analysis as a tool for nonlinear exploration of nonstationary cardiac signals. **Medical Engineering & Physics**, v. 24, n. 1, p. 53–60, 2002. [1](#)

