

## CONTROLADOR PID POR POSICIONAMENTO DE POLOS

Julio Cesar Batista  
 Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais -C.P.515  
 12.100 - São José dos Campos - SP  
 Luis Gimeno Latre  
 Centro Tecnológico para Informática / IA - C.P.6162  
 13.100 - Campinas - SP  
 Wagner Caradori do Amaral  
 UNICAMP - Faculdade de Engenharia - C.P. 6122  
 13.100 - Campinas - SP

**RESUMO:** O trabalho apresenta um algoritmo de controle adaptativo com estrutura PID. O algoritmo de controle é obtido por técnicas de posicionamento de polos da malha fechada. Para tanto são definidos pelo usuário a posição dos polos para a resposta ao sinal de referência e o algoritmo calcula os parâmetros ainda livres de uma forma interactiva com o operador para atingir compromisso entre as variâncias da saída e do controle.

### 1. INTRODUÇÃO

O regulador PID é utilizado satisfatoriamente no controle da maioria dos processos existentes na indústria. Contudo, são observadas dificuldades no ajuste dos parâmetros deste controlador, se os sistemas ou os pontos de operação são variantes no tempo. Nestes casos, tornam necessários algoritmos mais complexos ou técnicas de sintonia automática do controlador PID.

Este trabalho apresenta um controlador adaptativo PID sintonizado através do posicionamento dos polos em malha fechada. A alocação de polos é realizada de forma a garantir, para um modelo de segunda ordem do processo: i) a resposta especificada para mudanças no sinal de referência e ii) a redução do efeito das perturbações nas variáveis de saída e controle.

A seção 2 coloca o problema de posicionamento de polos para o caso específico considerado. Nas seções 3 e 4 discute-se o posicionamento dos polos para os dois objetivos pretendidos. A seção 5 apresenta resultados de simulação.

### 2. POSICIONAMENTO DE POLOS

Considera-se um sistema representado por um modelo de segunda ordem sem atraso de transporte sujeito a perturbações, dado pelo esquema de blocos da figura 2.1.

onde:

$$\begin{aligned} B(z^{-1}) &= b_0 + b_1 z^{-1} \\ A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \\ C(z^{-1}) &= 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} \end{aligned} \quad [1]$$

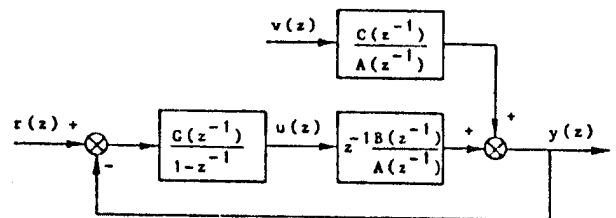


FIGURA 2.1: REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA

$u(k)$  e  $y(k)$  são as variáveis de controle e saída respectivamente,  $v(k)$  representa um ruído branco e  $r(z)$  a referência.

Supõe-se um controlador PID com a estrutura indicada na figura onde:

$$G(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} \quad [2]$$

Este controlador é obtido através da discretização do controlador PID contínuo dado pela equação 3 [1,2].

$$F(s) = K \left( 1 + T_D S + \frac{1}{T_I S} \right) \quad [3]$$

Em Wittenmark [1], são discutidas diferentes implementações da lei de controle PID, levando em consideração aspectos como os de aplicação da ação derivativa apenas sobre o sinal de saída, decomposição da ação integral em dois termos, atuando sobre o sinal de erro e sinal de saída, etc. As diferentes implementações resultam em dois zeros e um polo em  $z=1$ .

Da figura 2.1 podem ser deduzidas as funções de transferência em malha fechada dadas pelas equações 4 e 5.

$$\frac{y(z)}{r(z)} = \frac{z^{-1}B(z^{-1})G(z^{-1})}{A(z^{-1})(1-z^{-1})+z^{-1}B(z^{-1})G(z^{-1})} \quad [4]$$

$$\frac{y(z)}{v(z)} = \frac{C(z^{-1})(1-z^{-1})}{A(z^{-1})(1-z^{-1})+z^{-1}B(z^{-1})G(z^{-1})} \quad [5]$$

Tem-se então quatro polos em malha fechada que serão determinados pela escolha dos parâmetros do controlador  $\xi_0, \xi_1, \xi_2$ . Dado que se dispõe de três graus de liberdade, os quatro polos não são inteiramente livres.

Com o objetivo de posicionar os polos para um comportamento adequado frente a mudanças no sinal de referência e com uma rejeição adequada das perturbações os parâmetros de  $G(z^{-1})$  são determinados de forma a satisfazer a equação 6.

$$A(z^{-1})(1-z^{-1})+z^{-1}B(z^{-1})G(z^{-1}) = D(z^{-1})E(z^{-1}) \quad [6]$$

onde

$$D(z^{-1}) = 1+d_1z^{-1}+d_2z^{-2}$$

$$E(z^{-1}) = 1+e_1z^{-1}+e_2z^{-2}$$

O polinômio  $D(z^{-1})$  por convenção define os dois polos dominantes que determinam o comportamento tipo servomecanismo em malha fechada, quando se aproxima o comportamento em malha fechada pelo de um sistema de segunda ordem.

Os dois polinômios  $D(z^{-1})$  e  $E(z^{-1})$  definem conjuntamente as características de rejeição de perturbações.

### 3. DETERMINAÇÃO DOS POLOS PARA O PROBLEMA SERVOMECANISMO

Supõe-se que o comportamento especificado pelo usuário possa ser representado como o de um sistema de segunda ordem. Portanto o polinômio  $D(z^{-1})$  poderá ser definido através de especificações técnicas, tais como a sobre-elevação e tempo de estabilização,

que possam ser transformadas [3] em especificações sobre coeficiente de amortecimento e frequência natural e finalmente em polos de  $D(z^{-1})$ . Dada a existência de zeros introduzidos pelo processo ( $B(z^{-1})$ ) e pelo controlador ( $G(z^{-1})$ ), o comportamento não dependerá exclusivamente dos polos de  $D(z^{-1})$ , mas esta influência poderá ser corrigida numa segunda intervenção por parte do operador. O cancelamento dos zeros do processo [4] implicaria num aumento da ordem do controlador, que não corresponderia mais a uma lei tipo PID.

Definido o polinômio  $D(z^{-1})$ , deve-se determinar o polinômio  $E(z^{-1})$  de forma que a resposta servo não seja alterada significativamente. Para tanto é necessário, inicialmente, estabelecer a relação de dependência entre os coeficientes do polinômio  $E(z^{-1})$  dado que a equação 6 origina quatro equações e três graus de liberdade. Esta relação é obtida a partir da equação de alocação de polos [3] e dada pela equação 7

$$e_2 = k_1 e_1 + k_2 \quad [7]$$

onde

$$k_1 = \frac{b_1}{b_0}$$

$$k_2 = - \frac{a_2 - a_1 + \frac{b_0 a_2}{b_1} + \frac{b_1}{b_0} (d_1 - a_1 + 1) - d_2}{\frac{b_0 d_1}{b_1} + \frac{b_0^2 d_2}{b_1^2} - 1}$$

A equação 6 pode ser representada graficamente no plano de parâmetros  $(e_1, e_2)$  por uma reta como indicado na figura 3.1.

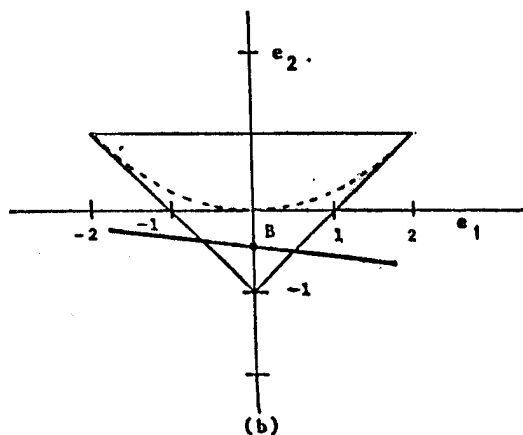
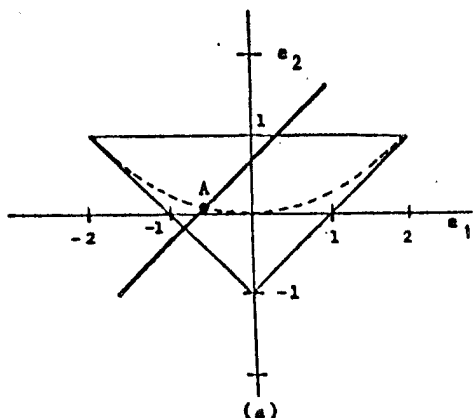


FIGURA 3.1 : REPRESENTAÇÃO DA EQUAÇÃO 7

As soluções possíveis são as contidas dentro do triângulo que define a região de estabilidade.

Com o objetivo de minimizar a influência do polinômio  $E(z^{-1})$  sobre a resposta, no algoritmo proposto a escolha de  $E(z^{-1})$  é feita como segue:

Caso 1: Fig. 3.1a - A reta definida pela equação 7 corta a parábola que separa polos reais de polos complexos conjugados.

Escolhe-se a solução indicada pelo ponto A dado que a distância a origem no caso de polos complexos conjugados será mínima. Em relação a situação de polos reais a escolha implica em minimizar a maior das distâncias à origem dos dois polos reais [3].

Caso 2: Fig. 3.1b - A reta não corta a parábola.

Escolhe-se a solução indicada pelo ponto B que representa minimizar a maior das distâncias à origem [3].

Nota-se que em ambos os casos o cálculo de  $e_1, e_2$  através da equação 7 é simples.

A escolha do polinômio  $E(z^{-1})$  como indicado implica em minimizar a sua influência sobre a resposta mas, mesmo assim, pode não ser desprezível dada a escolha de  $D(z^{-1})$  feita a partir das especificações do usuário. Nesta situação, propõe-se a utilização de um filtro sobre o sinal de referência que cancele o polinômio  $E(z^{-1})$ .

#### 4. DETERMINAÇÃO DOS POLOS PARA O PROBLEMA MIXTO SERVOMECANISMO-REGULADOR

Supõe-se nesta situação que o usuário especifica, como no caso anterior, o comportamento desejado frente a mudanças no sinal de referência, mas que o usuário tem também especificações sobre as variâncias aceitáveis para os sinais de saída e o sinal de controle.

Uma vez definido  $D(z^{-1})$  do ponto de vista servomecanismo o problema é agora de determinar  $E(z^{-1})$  de forma a minimizar as variâncias de saída  $y(k)$  e entrada  $u(k)$ . As expressões para estas duas variáveis em malha fechada são as indicadas nas equações 8 e 9.

$$y(z) = \frac{C(z^{-1})(1-z^{-1})}{D(z^{-1})E(z^{-1})} v(z) \Delta H_1(z^{-1}) v(z) \quad [8]$$

$$u(z) = -\frac{C(z^{-1})G(z^{-1})}{D(z^{-1})E(z^{-1})} v(z) \Delta H_2(z^{-1}) u(z) \quad [9]$$

As variâncias respectivas são dadas por:

$$\text{var } y(k) = \left[ \frac{1}{2\pi j} \oint H_1(z) H_1(z^{-1}) \frac{dz}{z} \right] \text{var } v(k)$$

$$\text{var } u(k) = \left[ \frac{1}{2\pi j} \oint H_2(z) H_2(z^{-1}) \frac{dz}{z} \right] \text{var } v(k)$$

A determinação da lei de controle de forma a minimizar um critério que pondere as variâncias da saída e do controle pode ser resolvido através da lei de controle da variância mínima generalizada [5]. A principal dificuldade prática na utilização de um controlador deste tipo reside na definição da estrutura dos parâmetros do critério que fornecerá o desempenho para o sistema. Em [10] é apresentada uma abordagem em que estes parâmetros são obtidos a partir dos polos do sistema em malha fechada. Contudo, esta abordagem poderá resultar em valores excessivos para a variância do sinal de controle, o que é indesejável. Em [6] é apresentada uma solução que implica no aumento da ordem do controlador e portanto impossibilitando a implementação tipo PID.

O algoritmo proposto neste trabalho consiste simplesmente no cálculo das variâncias dos dois sinais para um conjunto de valores de  $e_1, e_2$  dentro da região admissível (Fig. 3.1). A situação em análise, sistema aproximado por modelo de segunda ordem e controlador PID, é suficientemente simples para se determinar analiticamente a expressão destas variâncias em função dos parâmetros do processo e do regulador [3]. A apresentação ao operador destes valores deve poder permitir ao mesmo a determinação da situação de  $e_1, e_2$  sobre a reta (através de um único ajuste) que represente o melhor compromisso entre as variâncias para a aplicação particular. Outras variâncias podem ser imaginadas tais como o ajuste automático através da sinalização de (dos) valores máximo permitido(s) para a(s) variância(s).

#### 5. RESULTADOS SOBRE SIMULAÇÕES

Nesta seção são apresentados dois exemplos de simulação que ilustram o comportamento do controlador proposto.

##### 5.1. Problema Servomecanismo [3]

Sistema:

$$(1 - 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2})y(z) = z^{-1}(0.2 + 0.02z^{-1})u(z) + (1 - z^{-1} + 0.13z^{-2})v(z)$$

$$v(k) \sim N(0; 0.12); \text{ Intervalo de amostra } T = 0.5 \text{ seg.}$$

O sistema em malha aberta apresenta um tempo de estabilização ( $t_e$ ) de oito segundos e uma sobre-elevação ( $p_m$ ) de 30% na resposta a um degrau na referência.

O comportamento especificado para o sistema em malha fechada é dado por:

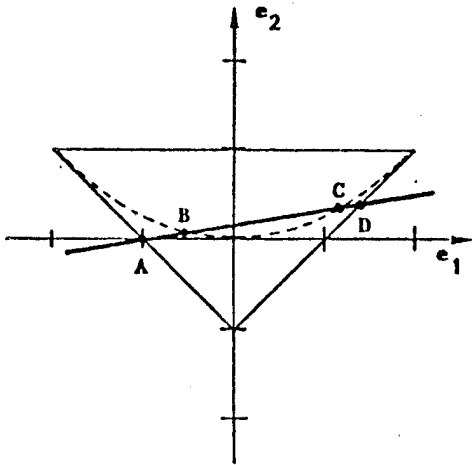


FIGURA 5.1a: SITUAÇÃO DA RETA NO PLANO DE PARÂMETROS

Trata-se do Caso 1 para a escolha do polinômio  $E(z)$  resultando na expressão dada pela equação 11

$$E(z^{-1}) = (1 - 0.29z^{-1})^2 \quad [11]$$

A figura 5.2 mostra a resposta a um degrau na referência. A implementação utilizada restringe a atuação da ação derivativa ao sinal de saída. Em [3] são apresentados resultados de outras implementações.

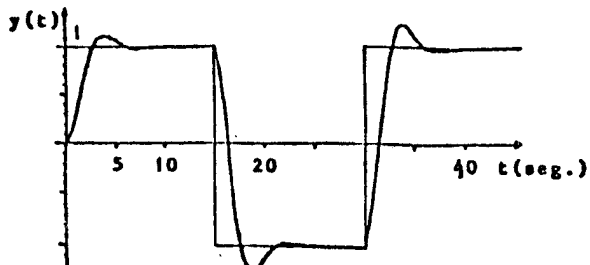


FIGURA 5.2: RESPOSTA A UM DEGRAU NA REFERÊNCIA  
Dados medidos:  $t_e = 5$  seg.;  $p_m = 11\%$

$$t_e = 4 \text{ seg.} \quad p_m = 10\%$$

Com estas especificações obtém-se o polinômio  $D(z^{-1})$  que define os polos dominantes em malha fechada dado pela equação 10.

$$D(z^{-1}) = 1 - 1.32z^{-1} + 0.43z^{-2} \quad [10]$$

As figuras 5.1a e 5.1b representam respectivamente, para este caso da reta dada pela equação 7, e a posição das raízes de  $E(z)$  no círculo unitário, quando os coeficientes deste polinômio variam sobre a reta.

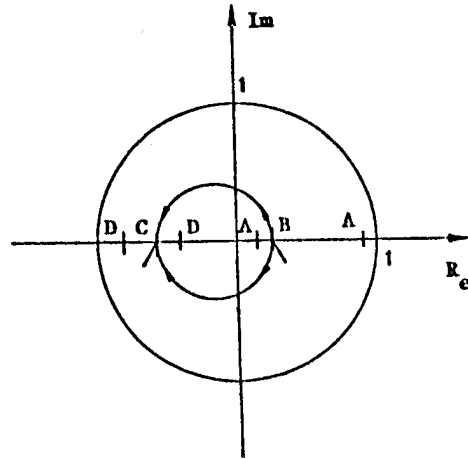


FIGURA 5.1b: SITUAÇÃO DOS POLOS NO CÍRCULO UNITÁRIO

O regulador PID resultante é definido pelos parâmetros a seguir:

$$K = 1.09 \quad T_I = 1.28 \text{ seg.} \quad T_D = 0.92 \text{ seg.}$$

### 5.2. Problema Servomecanismo - Regulador

Utiliza-se o mesmo sistema descrito em 5.1 com as mesmas especificações sobre o comportamento servomecanismo em malha fechada.

Para ilustrar o processo de escolha do polinômio  $E(z^{-1})$ , para redução do efeito das perturbações nas variáveis de saída e controle, as figuras 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6 representam as variações desses sinais em função do polinômio  $E(z^{-1})$ , para diferentes perturbações caracterizadas pelos polinômios  $C(z^{-1})$  indicados em cada caso.

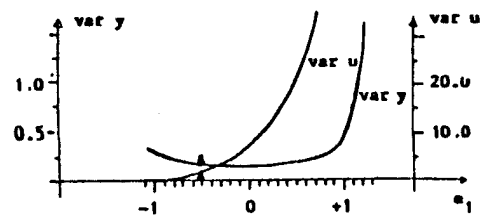


FIGURA 5.3: Caso 2.  $C(z^{-1}) = 1 - 0.5z^{-1}$

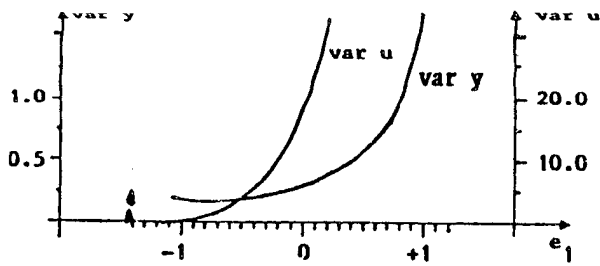


FIGURA 5.4: Caso 5.  $C(z^{-1}) = 1 - 1.4z^{-1} + 0.8z^{-2}$

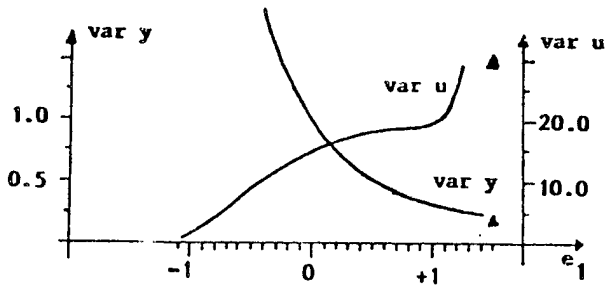


FIGURA 5.5: Caso 7.  $C(z^{-1}) = 1 + 1.5z^{-1} + 0.75z^{-2}$

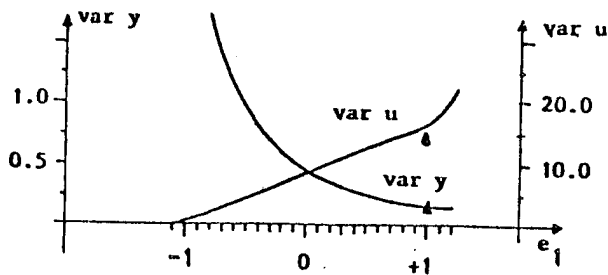


FIGURA 5.6: Caso 4.  $C(z^{-1}) = 1 + z^{-1} + 0.13z^{-2}$

Os pontos assinalados nas figuras anteriores ( $\Delta$ ) representam as variâncias obtidas com  $E(z^{-1}) = C(z^{-1})$ . Neste caso os coeficientes de  $E(z^{-1})$  em geral não satisfazem a equação 7, isto é, a estrutura PID não é garantida.

Para qualquer perturbação definida pelo polinômio  $C(z^{-1})$  o sistema proposto fornece as variâncias em função do ajuste de  $e_1$  (que define completamente  $e_2$  através da equação 7). A partir desta indicação, o usuário pode escolher o valor de  $e_1$  que corresponde a um compromisso aceitável para o problema em análise.

A figura 5.7 representa os coeficientes do polinômio  $C(z^{-1})$  em cada caso e a reta sobre a qual se situam os

coeficientes de  $E(z^{-1})$

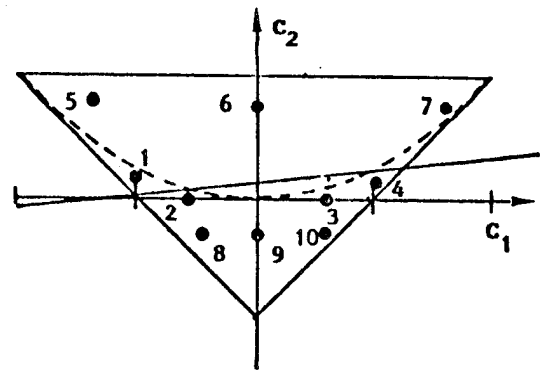


FIGURA 5.7: COEFICIENTES DE  $C(z^{-1})$

As situações mostradas nas figuras 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6 foram escolhidas para evidenciar as duas situações seguintes:

a) Figuras 5.3 e 5.4. Casos 2 e 5

A escolha de  $E(z^{-1})$  próximo de  $C(z^{-1})$ , como utilizado para redução da variância da saída [8,9] origina uma variância para o sinal de controle aceitável. O ajuste final poderia ser em torno deste valor.

b) Figuras 5.5 e 5.6. Casos 4 e 7

A mesma escolha do que no Caso a) origina variâncias excessivas para o sinal de controle. O ajuste final deverá estar longe da estratégia de variância mínima da saída [8,9] e deverá refletir um compromisso aceitável para a operação.

O comportamento da variância do sinal de controle é devido as raízes de  $G(z^{-1})$  que são zeros da função de transferência entre a perturbação e o sinal de controle, aspecto este ainda em análise.

As figuras 5.8 e 5.9 ilustram para o Caso 4 o comportamento do sinal de saída e do sinal de controle, utilizando-se  $e_1 = 1.2$ . Neste caso as variâncias medidas são:

$$\begin{aligned} \text{var } y(k) &= 0.15 \\ \text{var } u(k) &= 17.0 \end{aligned}$$

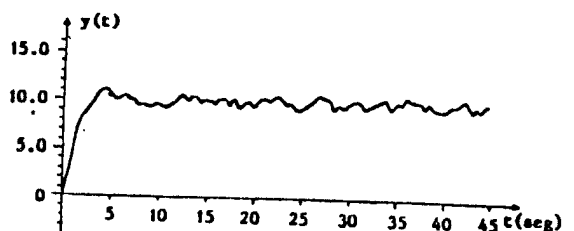


FIGURA 5.8: SINAL DE SAÍDA (Caso 4)

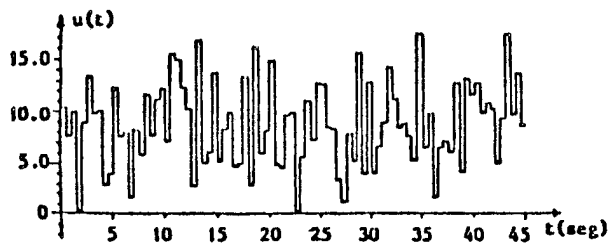


FIGURA 5.9 : SINAL DE CONTROLE  
(Caso 4)

## 6. CONTROLADOR ADAPTATIVO

A transformação do algoritmo descrito nas seções anteriores num controlador PID adaptativo é simples de um ponto de vista metodológico, dado que a determinação dos parâmetros do controlador depende exclusivamente dos parâmetros do modelo dinâmico (e da interação com o operador). A utilização de um algoritmo recursivo de estimação tipo matriz estendida [7] permite a estimação dos parâmetros dos sistemas envolvidos. Nesta situação, o controlador deve ser completado por um esquema de supervisão que, entre outros aspectos, comute para um controlador de parâmetros fixos durante a inicialização ou durante mudanças bruscas na operação. Estes parâmetros fixos poderiam ser os parâmetros fornecidos pelo operador, como uma primeira solução aceitável em torno da qual deseja-se que o controlador adaptativo evolua, quando da mudança de parâmetros do processo.

## 7. CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta um controlador com estrutura PID sintonizado através do posicionamento dos polos em malha fechada. Supondo que o processo possa ser aproximado por um modelo de segunda ordem, o algoritmo proposto permite definir os polos de forma a especificar o comportamento servomecanismo e a reduzir o efeito das perturbações. No primeiro caso, o ajuste do controlador é simples, e obtido a partir das especificações normalmente utilizadas na prática. No problema misto, servomecanismo-regulador, o método proposto fornece ao usuário as variâncias dos sinais de saída e de controle possíveis, permitindo a escolha de um compromisso aceitável.

O ajuste do controlador é função dos parâmetros do modelo de segunda ordem, permitindo um ajuste adaptativo através da utilização de técnicas de estimação recursiva.

## 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [ 1 ] Wittenmark B. "Self-Tuning PID-Controllers based on pole placement". Dept. of Aut. Cont. Lund Inst. of Techn. Sweden - 1979
- [ 2 ] Isermann R. Digital Control Systems. Springer Verlag. 1981
- [ 3 ] Batista J.C.-Controlador PID Autoajustável. Tese de Mestrado - UNICAMP 1985
- [ 4 ] Astrom, K.J., Wittenmark B. "Self-Tuning Controllers based on pole-zero placement. Proc. IEE, vol. 127, parte D, 1980
- [ 5 ] Clarke, D.W., Gawthrop P. "A Self-tuning Controller". Proc. IEE, vol. 122, 1975
- [ 6 ] Mendes, R.S.-Controladores Autoajustáveis por Alocação de polos e minimização de uma variância generalizada. Tese de Mestrado. UNICAMP 1984
- [ 7 ] Amaral W.C.-Identificação de sistemas multivariáveis - Tese de Doutorado - UNICAMP 1981
- [ 8 ] Lammers, H.Ch. - "A Simple self tuning controller". IFAC Conf. on Identification and Estimation, 1982
- [ 9 ] Wellstead P.E., Prager D., Zanker P., "A pole-assignment self-tuner". Proc. IEE, vol. 126, parte D, 1979
- [ 10 ] Allidina, A.Y., Hughes F.M. - "Generalized Self-Tuning Controller with pole-assignment". Proc. IEE, vol. 127, parte D, 1980.