MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/08.09.01.29-TDI

ESTUDO DE UMA MISSÃO ESPACIAL AOS PONTOS COLINEARES LAGRANGIANOS NO SISTEMA TERRA-LUA

Maria Rita da Silva

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Evandro Marconi Rocco, aprovada em 30 de junho de 2017.

URL do documento original:
<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3PDP29P>

INPE
São José dos Campos
2017

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
Gabinete do Diretor (GB)
Serviço de Informação e Documentação (SID)
Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970
São José dos Campos - SP - Brasil
Tel.:(012) 3208-6923/6921
E-mail: pubtc@inpe.br

COMISSÃO DO CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (DE/DIR-544):
Presidente:
Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação (CPG)
Membros:
Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)
Dr. André de Castro Milone - Coordenação de Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)
Dra. Carina de Barros Melo - Coordenação de Laboratórios Associados (CTE)
Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação de Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)
Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação de Observação da Terra (OBT)
Dr. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)
Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SID)
BIBLIOTECA DIGITAL:
Dr. Gerald Jean Francis Banon
Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SID)
REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:
Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SID)
Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)
EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:
Marcelo de Castro Pazos - Serviço de Informação e Documentação (SID)
André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SID)

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/08.09.01.29-TDI

ESTUDO DE UMA MISSÃO ESPACIAL AOS PONTOS COLINEARES LAGRANGIANOS NO SISTEMA TERRA-LUA

Maria Rita da Silva

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Evandro Marconi Rocco, aprovada em 30 de junho de 2017.

URL do documento original:
<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3PDP29P>

INPE
São José dos Campos
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Silva, Maria Rita da.

Si38e Estudo de uma missão espacial aos pontos colineares lagrangianos no sistema Terra-Lua / Maria Rita da Silva. – São José dos Campos : INPE, 2017.

xxvi + 211 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/08.09.01.29-TDI)

Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2017.

Orientador : Dr. Evandro Marconi Rocco.

1. Pontos de equilíbrio lagrangianos. 2. Sistema Terra-Lua. 3. Cinturões de radiação de Van Allen. 4. Tranferência de órbitas. 5. Manobras orbitais. I.Título.

CDU 521.31:629.78

Esta obra foi licenciada sob uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License.

Aluno (a): *Maria Rita da Silva*

Título: "ESTUDO DE UMA MISSÃO ESPACIAL AOS PONTOS COLINEARES LAGRANGIANOS NO SISTEMA TERRA-LUA"

Aprovado (a) pela Banca Examinadora em cumprimento ao requisito exigido para obtenção do Título de *Doutor(a)* em

Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle

Dr. Mario Cesar Ricci

Presidente / INPE / SJCampos - SP

Dr. Evandro Marconi Rocco

Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes

Membro da Banca / UNIFESP / São José dos Campos - SP

Dr. Francisco das Chagas Carvalho

Convidado(a) / ITA/DCTA / São José dos Campos - SP

Dr. Aguinaldo Cardozo da Costa Filho

Convidado(a) / IFSP / São José dos Campos - SP

Este trabalho foi aprovado por:

( ) maioria simples

(X) unanimidade

São José dos Campos, 30 de junho de 2017

"I do not know what I may appear to the world; but to myself I seem to have been only like a boy playing on the seashore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me".

Isaac Newton (1642 - 1727)
em *"From Brewster, Memoirs of Newton"*, 1885

"Imagination is more important than knowledge. For knowledge is limited, whereas imagination embraces the entire world, stimulating progress, giving birth to evolution. It is, strictly speaking, a real factor in scientific research".

Albert Einstein (1879 - 1955)
em *"Cosmic Religion and Other Opinions and Aphorisms"*, 1931

"Remember to look up at the stars and not down at your feet. Try to make sense of what you see and wonder about what makes the universe exist. Be curious. And however difficult life may seem, there is always something you can do and succeed at. It matters that you don't just give up".

Stephen Hawking (1942 -)
em *"Stephen Hawking marks 70th birthday with speech to leading cosmologists - The Guardian"*, 2012

A minha família

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço ao meu orientador Dr. Evandro Marconi Rocco, pela sua orientação que foi de grande valia, realizada com muito empenho, paciência e sempre acreditando na minha capacidade, para que eu pudesse alcançar os objetivos deste trabalho. Deste modo, saiba que grande parte desta tese o mérito também é teu. Além disso, agradeço também pela sua amizade, durante toda esta jornada, sempre com conselhos e incentivos a continuar progredindo na carreira profissional de pesquisa.

A minha família, a quem dedico este trabalho, agradeço pelo carinho, compreensão e paciência durante todos estes anos que tive de ceder meu tempo aos estudos.

Aos meus professores e membros da banca, agradeço por todas as contribuições feitas a este trabalho e a mim.

Aos meus amigos e colegas de pós-graduação, agradeço pela amizade e pelo apoio emocional.

Aos funcionários desta Instituição, agradeço por todo o suporte recebido.

À Capes/DS pelo suporte financeiro recebido durante o curso de pós-graduação.

E, por último, agradeço as pessoas que passaram pela minha vida, especialmente, a minha bisavó Ruth e ao meu tio Célio, que sempre apoiaram meus sonhos e me influenciaram fortemente a seguir em frente, independentemente das dificuldades encontradas pelo caminho.

RESUMO

Em um sistema planeta-lua-veículo espacial existem cinco pontos de equilíbrio, sendo que três são instáveis (L_1, L_2, L_3) e dois são estáveis (L_4, L_5). Estes pontos são alvos constantes das perturbações externas gravitacionais e não-gravitacionais, que podem inviabilizar a utilização dos mesmos em missões espaciais para observar o Universo e o nosso Sistema Solar. Deste modo, neste trabalho, objetiva-se estudar e analisar as manobras orbitais de um veículo espacial utilizando propulsão contínua, controladas por um sistema de controle PID em malha fechada, a partir de uma órbita de baixa altitude, em torno da Terra, para cada um dos três pontos colineares lagrangianos do sistema Terra-Lua considerando as perturbações externas como efeito durante as manobras orbitais. Assim, primeiramente, modelou-se os cinturões de radiação utilizando os dados fornecidos pela missão *Van Allen Probes*. Em seguida, determinou-se as localizações dos pontos colineares lagrangianos por meio do somatório das atrações gravitacionais da Terra e da Lua, a cada instante de tempo, compensadas com a pseudo-força centrífuga, em um referencial não-inercial; logo após, determinou-se o mesmo, porém sob a influência da atração gravitacional do Sol, da pressão de radiação solar e do potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos. A partir destas localizações instantâneas, obteve-se os elementos de estado instantâneos que foram transformados em elementos orbitais instantâneos, o que resultou na identificação das pseudo-órbitas dos pontos colineares lagrangianos, no referencial inercial. Desta forma, iniciou-se as simulações, sendo que, primeiramente, incluiu-se um estudo sobre a passagem do veículo espacial através dos cinturões de Van Allen, durante as manobras de transferência, nos períodos de baixa e alta atividade solar. Isto possibilitou obter, com maior precisão, o tempo que o veículo espacial permaneceu nas regiões de radiação e a taxa de dosagem de radiação equivalente considerando o alumínio, silício, tungstênio, tântalo e chumbo como materiais de blindagem. Após as manobras de transferência, aplicou-se a manobra de correção de órbita para estabilizar o veículo espacial em cada um dos pontos colineares lagrangianos.

Palavras-chave: Pontos de equilíbrio lagrangianos. Sistema Terra-Lua. Cinturões de radiação de Van Allen. Transferência de órbitas. Manobras orbitais.

STUDY OF A SPACE MISSION TO COLLINEAR LAGRANGE POINTS IN THE EARTH-MOON SYSTEM

ABSTRACT

In a planet-moon-space-vehicle system there are five equilibrium points, being that three are unstable (L_1, L_2, L_3), and two are stable (L_4, L_5). These points are targets of external gravitational and non-gravitational perturbations, which may make it impossible to use them in space missions to observe the Universe and our Solar System. So, in this work, the objective is to study and analyze the orbital maneuvers of a space vehicle using continuous propulsion, controlled by a closed-loop PID control system, from a low altitude orbit, around the Earth, for each one of the three collinear Lagrangian points in the Earth-Moon system considering the external perturbations as effect during the orbital maneuvers. Thereby, the radiation belts were first modeled using the data provided by the Van Allen Probes mission. Next, the locations of the collinear Lagrangian points were determined by sum of the Earth's and Moon's gravitational attractions, at each instant of time, compensated by the centrifugal pseudo-force, in a noninertial frame; subsequently, they were determined, but under the influence of the gravitational attraction of the Sun, the solar radiation pressure and the gravitational potential of the non-spherical primary bodies. From these instantaneous locations, the instantaneous state elements were obtained and transformed into instantaneous orbital elements, which resulted in the identification of the pseudo-orbits of the collinear Lagrangian points, in the inertial reference frame. Therefore, the simulations were initiated. Firstly, a study was included on the passage of the space vehicle through the Van Allen belts, during the maneuvers of transfer, during periods of low and high solar activity. This made it possible to obtain, with more precision, the time the spacecraft remained in the radiation regions and the equivalent radiation dose rate considering aluminum, silicon, tungsten, tantalum and lead as shielding materials. After the maneuvers of transfer, the orbit correction maneuver was applied to stabilize the space vehicle at each of the collinear Lagrangian points.

Keywords: Lagrangian equilibrium points. Earth-Moon system. Van Allen radiation belts. Transfer orbits. Orbital maneuvers.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

3.1 Estrutura padrão da zona de radiação ao redor da Terra formada pelos cinturões de Van Allen. 12
3.2 Trajetória helicoidal de uma partícula no campo magnético da Terra. . . 14
3.3 Movimento de uma partícula presa no campo magnético da Terra. 16
3.4 Movimento de uma partícula presa no campo magnético ao redor da Terra. 17
3.5 Esquema do movimento das partículas eletricamente carregadas no cinturão de radiação. 18
3.6 Órbita das sondas RBSP-A e RBSP-B no sistema geocêntrico inercial. . . 22
3.7 Variação do polo norte geomagnético entre 1590-2007. 24
3.8 Representação das estruturas dos cinturões de radiação ao redor da Terra. 25
3.9 Esboço do dipolo magnético terrestre. 26
3.10 Mapa da região de radiação de elétrons no período de 1 a 15 de janeiro de 2015. 28
3.11 Mapa da região interna de radiação em setembro de 1963. 29
3.12 Região de radiação de elétrons com energias iguais a 1.8 MeV e 2.1 MeV durante o mês de janeiro de 2015. 31
3.13 Região de radiação de elétrons com energias iguais a 2.6 MeV e 3.4 MeV durante o mês de janeiro de 2015. 32
3.14 Região de radiação de elétrons com energias iguais a 4,2 MeV e 5,2 MeV durante o mês de janeiro de 2015. 33
3.15 Região de radiação de elétrons com energias iguais a 6,3 MeV e 7,7 MeV durante o mês de janeiro de 2015. 34
3.16 Região de radiação de elétrons com energias iguais a 9,9 MeV e 12,3 MeV durante o mês de janeiro de 2015. 35
3.17 Região de radiação de elétrons com energias iguais a 15,2 MeV e 20 MeV durante o mês de janeiro de 2015. 36
3.18 Região de radiação de prótons com energias iguais a 21,25 MeV e 27,6 MeV durante o mês de janeiro de 2015. 37
3.19 Região de radiação de prótons com energias iguais a 35,9 MeV e 46,7 MeV durante o mês de janeiro de 2015. 38
3.20 Região de radiação de prótons com energias iguais a 60,7 MeV e 78,9 MeV durante o mês de janeiro de 2015. 39
3.21 Região de radiação de prótons com energias iguais a 102,6 MeV e 208 MeV durante o mês de janeiro de 2015. 40

3.22 Região de radiação de elétrons com energias iguais a 1,8 MeV e 2,1 MeV durante o mês de setembro de 2012. 42
3.23 Região de radiação de elétrons com energias iguais a 2,6 MeV e 3,4 MeV durante o mês de setembro de 2012. 43
3.24 Região de radiação de elétrons com energias iguais a 4,2 MeV e 5,2 MeV durante o mês de setembro de 2012. 44
3.25 Região de radiação de elétrons com energias iguais a 6,3 MeV e 7,7 MeV durante o mês de setembro de 2012. 45
3.26 Região de radiação de elétrons com energias iguais a 9,9 MeV e 12,3 MeV durante o mês de setembro de 2012. 46
3.27 Região de radiação de elétrons com energias iguais a 15,2 MeV e 20 MeV durante o mês de setembro de 2012. 47
3.28 Região de radiação de prótons com energias iguais a 21,25 MeV e 27,6 MeV durante o mês de setembro de 2012. 48
3.29 Região de radiação de prótons com energias iguais a 35,9 MeV e 46,7 MeV durante o mês de setembro de 2012. 49
3.30 Região de radiação de prótons com energias iguais a 60,7 MeV e 78,9 MeV durante o mês de setembro de 2012. 50
3.31 Região de radiação de prótons com energias iguais a 102,6 MeV e 208 MeV durante o mês de setembro de 2012. 51

4.1 A geometria do problema espacial restrito de três corpos. 54
4.2 Representação da localização dos pontos de equilíbrio lagrangianos. . . . 68
4.3 Diagrama de forças nos pontos colineares lagrangianos. 69
4.4 Representação da variação da pseudo-órbita do ponto colinear L_1. 71
4.5 Variação dos elementos orbitais da Lua e dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_1, considerando somente os corpos primários esféricos, durante o mês de Setembro de 2012. 74
4.6 Variação dos elementos orbitais da Lua e dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_1, considerando somente os corpos primários esféricos, durante o mês de Janeiro de 2015. 75
4.7 Variação dos elementos orbitais da Lua e dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_2, considerando somente os corpos primários esféricos, durante o mês de Setembro de 2012. 76
4.8 Variação dos elementos orbitais da Lua e dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_2, considerando somente os corpos primários esféricos, durante o mês de Janeiro de 2015. 77

4.9 Variação dos elementos orbitais da Lua e dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_3, considerando somente os corpos primários esféricos, durante o mês de Setembro de 2012. 78
4.10 Variação dos elementos orbitais da Lua e dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_3, considerando somente os corpos primários esféricos, durante o mês de Janeiro de 2015. 79

5.1 Vista planar do diagrama de forças considerando a perturbação da atração gravitacional do Sol e a pressão de radiação solar. 81
5.2 Esquema geométrico das posições da Terra, o Sol e o ponto colinear lagrangiano no problema espacial com perturbação. 83
5.3 Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_1 devido a atração gravitacional do Sol e pressão de radiação solar durante o mês de setembro de 2012. 86
5.4 Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_1 devido a atração gravitacional do Sol e pressão de radiação solar durante o mês de janeiro de 2015. 87
5.5 Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_2 devido a atração gravitacional do Sol e pressão de radiação solar durante o mês de setembro de 2012. 88
5.6 Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_2 devido a atração gravitacional do Sol e pressão de radiação solar durante o mês de janeiro de 2015. 89
5.7 Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_3 devido a atração gravitacional do Sol e pressão de radiação solar durante o mês de setembro de 2012. 90
5.8 Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_3 devido a atração gravitacional do Sol e pressão de radiação solar durante o mês de janeiro de 2015. 91
5.9 Formato da Terra e da Lua. 93
5.10 Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_1 sem e com a perturbação devido ao potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de setembro de 2012. 97
5.11 Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_1 sem e com a perturbação devido ao potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de janeiro de 2015. 98
5.12 Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_2 sem e com a perturbação devido ao potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de setembro de 2012. 99

5.13 Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_2 sem e com a perturbação devido ao potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de janeiro de 2015. 100
5.14 Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_3 sem e com a perturbação devido ao potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de setembro de 2012. 101
5.15 Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_3 sem e com a perturbação devido ao potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de janeiro de 2015. 102
5.16 Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_1, considerando as perturbações devido a atração gravitacional do Sol, pressão de radiação solar e o potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de Setembro de 2012. 105
5.17 Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_1, considerando as perturbações devido a atração gravitacional do Sol, pressão de radiação solar e o potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de Janeiro de 2015. 106
5.18 Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_2, considerando as perturbações devido a atração gravitacional do Sol, pressão de radiação solar e o potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de Setembro de 2012. 107
5.19 Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_2, considerando as perturbações devido a atração gravitacional do Sol, pressão de radiação solar e o potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de Janeiro de 2015. 108
5.20 Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_3, considerando as perturbações devido a atração gravitacional do Sol, pressão de radiação solar e o potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de Setembro de 2012. 109
5.21 Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_3, considerando as perturbações devido a atração gravitacional do Sol, pressão de radiação solar e o potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de Janeiro de 2015. 110

6.1 Representação da trajetória ótima determinada pela solução do problema de Lambert. 115
6.2 Esquema das forças externas agindo sobre o veículo espacial. 120
6.3 Comparação entre as manobras de transferência impulsiva e não-impulsiva 122

6.4 Comparação entre as manobras de baixo e alto empuxo. 123
6.5 Representação do Simulador de Trajetórias. 124

7.1 Manobra de alto empuxo nas regiões de elétrons e prótons durante o mês de setembro de 2012. 133
7.2 Manobra de baixo empuxo na região de elétrons durante o mês de setembro de 2012. 134
7.3 Manobra de baixo empuxo na região de elétrons durante o mês de outubro de 2012. 135
7.4 Manobra de baixo empuxo na região de elétrons durante o mês de novembro de 2012. 136
7.5 Manobra de baixo empuxo na região de prótons entre os meses de setembro-outubro de 2012. 137
7.6 Manobras de alto e baixo empuxo nas regiões de elétrons durante o mês de setembro de 2012. 138
7.7 Manobra de alto empuxo nas regiões de elétrons e prótons durante o mês de janeiro de 2015. 141
7.8 Manobra de baixo empuxo nas regiões de elétrons entre os meses de janeiro-março de 2015. 142
7.9 Manobra de baixo empuxo nas regiões de prótons entre os meses de janeiro-fevereiro de 2015. 143
7.10 Manobras de alto e baixo empuxo nas regiões de elétrons durante o mês de janeiro de 2015. 144
7.11 Relação entre as capacidades dos propulsores e os incrementos de velocidades aplicados até atingir o ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de setembro de 2012. 146
7.12 Variação da massa de propelente durante a manobra de alto empuxo até atingir o ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de setembro de 2012. 147
7.13 Variação dos elementos keplerianos da trajetória até atingir o ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de setembro de 2012. 148
7.14 Variação do empuxo aplicado e da massa do propelente durante a correção da órbita do veículo espacial sobre a pseudo-órbita do ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de setembro de 2012. 149
7.15 Variação do somatório das forças em equilíbrio durante a correção da órbita do veículo espacial sobre a pseudo-órbita do ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de setembro de 2012. 150
7.16 Variação dos elementos keplerianos do veículo espacial até atingir o ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de setembro de 2012. 151

7.17 Relação entre as capacidades dos propulsores e os incrementos de velocidades aplicados até atingir o ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de janeiro de 2015. 153
7.18 Variação da massa de propelente durante a manobra de alto empuxo até atingir o ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de janeiro de 2015. 154
7.19 Variação dos elementos keplerianos da trajetória até atingir o ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de janeiro de 2015. 155
7.20 Variação do empuxo aplicado e da massa do propelente durante a correção da órbita do veículo espacial sobre a pseudo-órbita do ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de janeiro de 2015. 156
7.21 Variação do somatório das forças em equilíbrio durante a correção da órbita do veículo espacial sobre a pseudo-órbita do ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de janeiro de 2015. 157
7.22 Variação dos elementos keplerianos do veículo espacial até atingir o ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de janeiro de 2015. 158
7.23 Variação dos elementos keplerianos da trajetória até atingir o ponto colinear lagrangiano L_2 durante o mês de setembro de 2012. 161
7.24 Variação dos elementos keplerianos da trajetória até atingir o ponto colinear lagrangiano L_3 durante o mês de setembro de 2012. 162
7.25 Variação do empuxo aplicado e da massa do propelente durante a correção da órbita do veículo espacial sobre as pseudo-órbitas dos pontos colineares lagrangianos L_2 e L_3 durante o mês de setembro de 2012. . . . 164
7.26 Variação do somatório das forças em equilíbrio durante a correção da órbita do veículo espacial sobre a pseudo-órbita do ponto colinear lagrangiano L_2 e L_3 durante o mês de setembro de 2012. 165
7.27 Variação dos elementos keplerianos do veículo espacial até atingir o ponto colinear lagrangiano L_2 durante o mês de setembro de 2012. 166
7.28 Variação dos elementos keplerianos do veículo espacial até atingir o ponto colinear lagrangiano L_3 durante o mês de setembro de 2012. 167
7.29 Variação do empuxo aplicado e da massa do propelente durante a correção da órbita do veículo espacial sobre as pseudo-órbitas dos pontos colineares lagrangianos. 168
7.30 Variação do somatório das forças em equilíbrio durante a correção da órbita do veículo espacial sobre as pseudo-órbitas dos pontos colineares lagrangianos L_1, L_2 e L_3. 169
7.31 Variação dos elementos keplerianos do veículo espacial até atingir o ponto colinear lagrangiano L_1 considerando os altos valores dos coeficientes dos harmônicos esféricos da Terra e da Lua. 170

7.32 Variação dos elementos keplerianos do veículo espacial até atingir o ponto colinear lagrangiano L_2 considerando os altos valores dos coeficientes dos harmônicos esféricos da Terra e da Lua. 171
7.33 Variação dos elementos keplerianos do veículo espacial até atingir o ponto colinear lagrangiano L_3 considerando os altos valores dos coeficientes dos harmônicos esféricos da Terra e da Lua. 172

LISTA DE TABELAS

Pág.

3.1 Fatores de Ponderação de Radiação 20
3.2 Variação Anual das Coordenadas Geográficas do Dipolo Magnético. . . . 26

6.1 Impulsos Específicos dos Principais Sistemas de Propulsão 119

7.1 Densidades dos materiais de blindagem. 129
7.2 Elementos keplerianos das órbitas iniciais para uma alta atividade solar. 131
7.3 Resultado da passagem do veículo espacial pelos cinturões de Van Allen, no período de alta atividade solar (dia). 139
7.4 Elementos keplerianos das órbitas iniciais para uma baixa atividade solar. 139
7.5 Resultado da passagem do veículo espacial pelos cinturões de Van Allen, no período de baixa atividade solar (dia). 140
7.6 Elementos keplerianos das órbitas inicial, final e atingida para uma alta atividade solar. 149
7.7 Elementos keplerianos das órbitas inicial, final e atingida para uma baixa atividade solar. 154
7.8 Valores de empuxo aplicado e propelente gasto durante a manobra orbital de transferência, para cada um dos pontos colineares lagrangianos, no mês de setembro de 2012 159
7.9 Elementos keplerianos das órbitas inicial, final e atingida para o ponto colinear L_2. 160
7.10 Elementos keplerianos das órbitas inicial, final e atingida para o ponto colinear L_3. 160

8.1 Capacidade do propulsor e a massa de combustível gasta durante a manobra de correção de órbita do veículo espacial sobre os pontos colineares lagrangianos. 176

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PID	–	Controlador Proporcional, Integral, Derivativo
RBSP	–	Radiation Belt Storm Probes
RE	–	Earth Radius
REPT	–	Relativistic Electron-Proton Telescope
RT	–	Raio da Terra
STRS	–	Spacecraft Trajectory Simulator

LISTA DE SÍMBOLOS

a	–	semi-eixo maior
c	–	velocidade da luz
e	–	excentricidade
$er(t)$	–	sinal de erro
f	–	ângulo da anomalia verdadeira
h	–	momento angular
i	–	ângulo de inclinação
l	–	espessura do material de blindagem
m	–	massa do corpo infinitesimal ou massa da partícula elétrica
n	–	movimento médio de um corpo
p	–	momentum relativístico total da partícula elétrica
q	–	carga da partícula
t	–	instante de tempo
u	–	ângulo da anomalia excêntrica
v	–	velocidade orbital
w	–	velocidade angular
x, y, z	–	sistema de coordenadas no referencial inercial
A	–	área da superfície do veículo espacial
B	–	campo magnético
C	–	constante de integração
$C(t)$	–	sinal de saída do controlador
$C(\bar{z}), S(\bar{z})$	–	funções de Stumpff
D	–	dosagem de radiação
E	–	energia da partícula elétrica
F	–	força resultante
G	–	constante gravitacional
I	–	constante de radiação solar
J	–	invariante longitudinal
L	–	distância máxima quando a linha do campo magnético cruza o equador magnético
R	–	distância entre os corpos primários
T	–	período orbital
U	–	potencial gravitacional dos corpos primários
X, Y, Z	–	sistema de coordenadas no referencial não-inercial
α	–	ângulo de arremesso
χ	–	variável universal
δ	–	ângulo de declinação
γ	–	ângulo de trajetória de vôo
φ	–	ângulo de longitude magnética
λ	–	ângulo de latitude magnética

μ	–	momento magnético
ν	–	ângulo de ascensão reta
ϖ	–	longitude do periapside
θ	–	ângulo formado entre o vetor normal ao plano e o raio incidente
ρ	–	densidade do material da blindagem
ω	–	argumento do periapside
ξ, η, ζ	–	sistema de coordenadas pulsantes
Δm	–	fração de massa do material a receber radiação
Δv	–	incremento de velocidade
Δv_1	–	incremento de velocidade para sair da órbita inicial
Δv_2	–	incremento de velocidade para entrar na órbita final na manobra de Hohmann e, entrar na órbita intermediária na manobra Bi-Elíptica
Δv_3	–	incremento de velocidade para entrar na órbita final na manobra Bi-Elíptica
ΔE	–	fração de energia acumulada
$\Delta\theta$	–	diferença entre as posições angulares do Sol e da Lua
$\Delta\varphi$	–	diferença entre os ângulos de inclinação do Sol e de cada ponto colinear
Φ	–	fluxo de radiação magnética
Λ	–	ângulo de latitude geográfica
Θ	–	ângulo de longitude geográfica
Ω	–	ângulo da ascensão resta do nodo ascendente
M^*	–	ponto espelho do hemisfério norte magnético
M^{**}	–	ponto espelho do hemisfério sul magnético
g_0	–	aceleração padrão da gravidade
i_S	–	ângulo do plano de inclinação do Sol
i_{L_j}	–	ângulo do plano de inclinação de cada ponto colinear lagrangiano, sendo $j = 1, 2, 3$
m_i, m_f	–	massas inicial e final
m_o	–	massa de repouso da partícula elétrica
m_1	–	massa do primeiro corpo primário
m_2	–	massa do segundo corpo primário
$p_{\|\|}$	–	componente paralela do momentum relativístico
$p_\perp$	–	componente perpendicular do momentum relativístico
r_1	–	raio da órbita inicial
r_2	–	raio da órbita final
r_d	–	distância entre o centro do dipolo a linha do campo magnético
r_i	–	módulo dos vetores de posição do corpo m em relação aos corpos primários, sendo $i = 1, 2$
r_{L_j}	–	distância de cada ponto colinear lagrangiano ao corpo m_1, sendo $j = 1, 2, 3$
r_S	–	raio do veículo espacial
r_{ST}	–	distância do Sol-Terra

t_i, t_f – tempos inicial e final
v_1 – velocidade de transferência inicial
v_2 – velocidade de transferência final
v_{c1} – velocidade na órbita inicial
v_{c2} – velocidade na órbita final
v_i, v_f – velocidades inicial e final
$v_{||}$ – componente paralela da velocidade da partícula elétrica
$v_{\perp}$ – componente perpendicular da velocidade da partícula elétrica
x_m – coordenada cartesiana do dipolo magnético no eixo x
y_m – coordenada cartesiana do dipolo magnético no eixo y
z_m – coordenada cartesiana do dipolo magnético no eixo z
w_R – fator de ponderação de radiação
B_m – campo magnético no ponto espelho
B_o – campo magnético em um ponto qualquer
B_r – campo magnético na direção radial
B_φ – campo magnético na direção longitudinal
B_λ – campo magnético na direção latitudinal
C_a – constante de absorção
C_d – sinal de saída do ganho derivativo
C_i – sinal de saída do ganho integral
C_p – sinal de saída do ganho proporcional
C_{rd} – constante de reflexão difusa
C_{rs} – constante de reflexão especular
D_T – dosagem equivalente de radiação
F_E – somatório das forças externas
F_{PR} – intensidade da força de pressão de radiação solar
F_S – intensidade da força gravitacional do Sol
I_{SP} – impulso específico
J_l – coeficiente harmônico esférico zonal
J_{li} – coeficiente harmônico esférico zonal da Lua, sendo $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
J_{ti} – coeficiente harmônico esférico zonal da Terra, sendo $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
K_d – ganho derivativo
K_i – ganho integral
K_p – ganho proporcional
L_1 – ponto colinear lagrangiano entre os corpos primários
L_2 – ponto colinear lagrangiano próximo ao corpo m_2
L_3 – ponto colinear lagrangiano próximo ao corpo m_1
L_4 – ponto triangular lagrangiano na posição positiva
L_5 – ponto triangular lagrangiano na posição negativa
M_p – massa do corpo primário
N_g – polo norte geográfico
N_m – polo norte magnético

P_{lm} – função associada de Legendre
R_c – raio ciclotron
R_l – raio equatorial da Lua
R_p – raio equatorial do corpo primário
R_t – raio equatorial da Terra
R_{SL_j} – distância do Sol a cada ponto colinear lagrangiano, sendo $j = 1, 2, 3$
S_g – polo sul geográfico
S_m – polo sul magnético
α_o – ângulo de arremesso em um ponto qualquer
θ_{sat} – ângulo de latitude do veículo espacial
λ_{sat} – ângulo de longitude do veículo espacial
ΔD_B – taxa de dosagem de radiação equivalente com a blindagem
$\bar{m}$ – momento do dipolo magnético
$\dot{m}$ – razão de massa do propelente
$\bar{n}$ – número de corpos
$\vec{n}$ – vetor normal a superfície do veículo espacial
$\vec{p}$ – vetor do momentum relativístico da partícula
$\vec{r}$ – vetor da distância entre m em relação a origem do sistema
$\vec{s}$ – vetor tangencial a superfície do veículo espacial
$\vec{v}$ – vetor velocidade da partícula
$\vec{B}$ – vetor do campo magnético
$\vec{E}$ – vetor do campo elétrico
$\vec{F}$ – vetor de força resultante
$\bar{\mu}$ – parâmetro gravitacional
$\bar{a}_t$ – aceleração tangencial
$\bar{a}_n$ – aceleração normal
$\vec{r}_1$ – vetor posição do corpo m_1 ao corpo m
$\vec{r}_2$ – vetor posição do corpo m_2 ao corpo m
$\vec{v}_{||}$ – vetor da componente paralela da velocidade da partícula elétrica
$\vec{v}_{\perp}$ – vetor da componente perpendicular da velocidade da partícula elétrica
$\bar{C}_{lm}$ – coeficiente harmônico esférico setorial normalizado
$\vec{F}_i$ – vetor da força gravitacional dos corpos primários, sendo $i = 1, 2$
$\vec{F}_L$ – vetor da força de Lorentz
$\bar{J}_l$ – coeficiente harmônico esférico zonal normalizado
$\bar{P}_{lm}$ – função associada de Legendre normalizado
$\bar{r}_{L_j}$ – projeção da distância de cada ponto colinear lagrangiano ao corpo m_1, sendo $j = 1, 2, 3$
$\bar{r}_{ST}$ – projeção da distância do Sol-Terra
$\bar{R}_{SL_j}$ – projeção da distância do Sol a cada ponto colinear lagrangiano, sendo $j = 1, 2, 3$
$\bar{S}_{lm}$ – coeficiente harmônico esférico tesseral normalizado
$\bar{f}, \bar{g}$ – coeficientes de Lagrange

$\bar{z}$	–	variável universal
$\bar{D}$	–	força de arrasto
$\bar{E}$	–	energia mecânica
$\bar{R}$	–	razão entre os raios das órbitas inicial e final
$\bar{\alpha}$	–	relação entre as variáveis universais
$\bar{a}$	–	aceleração
$\bar{\Omega}$	–	função da energia do potencial gravitacional no PR3C
$\dot{\bar{f}}, \dot{\bar{g}}$	–	derivadas dos coeficientes de Lagrange
$\bar{\bar{E}}$	–	empuxo
$\bar{\bar{\Omega}}$	–	função média da energia do potencial gravitacional no PPER3C
$\bar{\bar{\Omega}}'$	–	função média da energia do potencial gravitacional no PEER3C

SUMÁRIO

Pág.

1 INTRODUÇÃO 1
1.1 Objetivo Principal 1
1.2 Contribuições 1
1.3 Metodologia e Organização do Trabalho 2

2 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 5
2.1 Os Pontos de Equilíbrio Lagrangianos 5
2.2 A Estrutura de Radiação ao Redor da Terra 6
2.3 Transferência e Controle Orbital 7

3 MODELAGEM DE RADIAÇÃO NO MEIO ESPACIAL 11
3.1 Os Cinturões de Van Allen 11
3.1.1 Histórico 11
3.1.2 Dinâmica do Meio de Radiação 13
3.1.3 Dosagem do Meio de Radiação 18
3.2 Modelagem das Zonas de Radiação 21
3.2.1 Regiões de Radiação de Van Allen em Janeiro de 2015 29
3.2.2 Regiões de Radiação de Van Allen em Setembro de 2012 41

4 VARIAÇÃO DAS PSEUDO-ÓRBITAS DOS PONTOS COLINEARES LAGRANGIANOS SEM PERTURBAÇÃO 53
4.1 O Problema Restrito de Três Corpos 53
4.1.1 Histórico 53
4.2 O Problema Espacial Elíptico Restrito de Três Corpos 54
4.3 A Solução do Problema Espacial Elíptico Restrito de Três Corpos 64
4.3.1 A Integral do Movimento 65
4.3.2 Os Pontos Colineares Lagrangianos 67
4.3.3 As Pseudo-Órbitas dos Pontos Lagrangianos 70
4.4 Resultados: Variação das Pseudo-Órbitas dos Pontos Colineares Lagrangianos Sem Perturbação 72

5 VARIAÇÃO DAS PSEUDO-ÓRBITAS DOS PONTOS COLINEARES LAGRANGIANOS COM PERTURBAÇÃO 81

5.1 As Pseudo-Órbitas dos Pontos de Equilíbrio Lagrangianos Considerando o Sol e a Pressão de Radiação Solar 81

5.2 As Pseudo-Órbitas dos Pontos de Equilíbrio Lagrangianos Considerando os Potenciais Gravitacionais dos Corpos Primários Não-Esféricos 92

5.3 As Pseudo-Órbitas dos Pontos de Equilíbrio Lagrangianos Considerando os Potenciais Gravitacionais dos Corpos Primários Não-Esféricos, o Sol e a Pressão de Radiação Solar 103

6 CONTROLE DE TRAJETÓRIAS ORBITAIS 111

6.1 Manobras Orbitais de Alto Empuxo 111

6.2 Determinação da Órbita Ótima de Transferência 112

6.3 Dinâmica do Veículo Espacial 118

6.3.1 O Arco de Propulsão Contínua 121

6.4 Manobra Orbital de Baixo Empuxo 123

6.5 Simulador de Trajetórias de um Veículo Espacial 123

6.6 Controle de Trajetória Livre de Perturbações Externas 126

7 RESULTADOS GERAIS 129

7.1 Considerações Sobre as Simulações 129

7.2 Passagem do Veículo Espacial Através dos Cinturões de Van Allen 130

7.2.1 Alta Atividade Solar 131

7.2.2 Baixa Atividade Solar 132

7.3 Manobra de Transferência e Correção da Órbita Durante a Passagem do Veículo Espacial Pelas Zonas de Radiação 144

7.3.1 Manobra de Alto Empuxo e Correção da Órbita em Setembro de 2012 144

7.3.2 Manobra de Alto Empuxo e Correção da Órbita em Janeiro de 2015 . . 150

7.4 Manobras de Correção da Órbita de um Veículo Espacial para Atingir os Pontos Colineares Lagrangianos 159

8 CONCLUSÕES 173

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 177

APÊNDICE A - MATRIZES DE ROTAÇÃO 193

APÊNDICE B - EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE SÉTIMO GRAU CONSIDERANDO AS PERTURBAÇÕES DA ATRAÇÃO GRAVITACIONAL DO SOL E PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR . . . 195

APÊNDICE C - EQUAÇÕES DE DÉCIMO SÉTIMO GRAU CONSIDERANDO AS PERTURBAÇÕES DOS POTENCIAIS GRAVITACIONAIS DOS CORPOS PRIMÁRIOS 197

APÊNDICE D - EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE DÉCIMO PRIMEIRO GRAU CONSIDERANDO AS PERTURBAÇÕES DA ATRAÇÃO GRAVITACIONAL DO SOL, PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR E OS POTENCIAIS GRAVITACIONAIS DOS CORPOS PRIMÁRIOS 205

1 INTRODUÇÃO

1.1 Objetivo Principal

Neste trabalho, objetiva-se estudar e analisar as manobras orbitais de transferência e de correção de órbita de um veículo espacial utilizando propulsão contínua, controlada em malha fechada, a partir de uma órbita de baixa altitude, ao redor da Terra, para cada um dos três pontos colineares lagrangianos do sistema Terra-Lua, no referencial geocêntrico inercial.

1.2 Contribuições

Este trabalho possui as seguintes contribuições:

a) A utilização de um ambiente de simulação capaz de levar em consideração as perturbações externas como a atração gravitacional do Sol, a pressão de radiação solar e os altos termos dos potenciais gravitacionais, sendo o máximo de 2159 para a Terra e o máximo de 165 para a Lua, ambos em grau e ordem;

b) A simulação de uma missão espacial completa para os pontos colineares lagrangianos do sistema Terra-Lua, a partir de uma órbita ao redor da Terra, considerando propulsores de alto e de baixo empuxo;

c) A modelagem do campo de radiação de Van Allen, ao redor da Terra, a partir dos dados reais da missão espacial *Van Allen Probes Mission* (SIBECK et al., 2006; FOX et al., 2010) considerando o efeito de uma alta e baixa atividade solar em um certo período de tempo;

d) A estimação da dosagem de radiação que o interior do veiculo espacial estaria submetido, pois uma vez que o veículo espacial atravessa estas regiões de radiação, seus equipamentos eletrônicos poderão ser danificados, ao longo do tempo, devido a interação com a mesma;

e) A determinação das localizações dos pontos colineares lagrangianos L_1, L_2 e L_3 do sistema Terra-Lua, em pontos onde o somatório das forças gravitacionais dos corpos primários se compensam com a pseudo-força centrífuga, no referencial geocêntrico não-inercial e simulação da trajetória de um veículo nas proximidades desses pontos sujeito as perturbações orbitais gravitacionais e não-gravitacionais;

f) A determinação das localizações dos pontos colineares lagrangianos L_1, L_2 e L_3 do sistema Terra-Lua, em pontos onde a atração gravitacional do Sol com a pressão de radiação solar e os termos dos harmônicos esféricos zonais até J_6 para os potenciais gravitacionais da Terra e da Lua se adicionam ao somatório das forças gravitacionais dos corpos primários, compensadas com a pseudo-força centrífuga, no referencial geocêntrico não-inercial;

g) A determinação das pseudo-órbitas a partir das localizações dos pontos lagrangianos. Nesta tese, o termo *pseudo-órbita* se refere a uma órbita instantânea, para cada um dos pontos lagrangianos L_1, L_2 e L_3 com relação a um referencial inercial centrado na Terra, não definida pela influência de um campo de força gravitacional central e sim, devido a um somatório das forças presentes, conforme a definição mais detalhada que será apresentada no item 4.3.3.

1.3 Metodologia e Organização do Trabalho

No capítulo 2, faz-se uma revisão bibliográfica sobre os temas que serão abordados ao longo deste trabalho. Assim, primeiramente, apresenta-se uma bibliografia consultada sobre as singularidades do problema restrito de três corpos conhecidas por pontos de equilíbrio lagrangianos. Segue-se, então, por uma revisão da literatura sobre a modelagem e dosagem de radiação dos cinturões de Van Allen e, por fim, sobre a aplicação das manobras orbitais de transferência utilizadas para atingir as órbitas dos pontos de equilíbrio e os métodos de controle que mantém o veículo espacial estabilizado durante toda sua trajetória.

No capítulo 3, estuda-se o movimento das partículas eletricamente carregadas presas no campo geomagnético, onde formam os cinturões de radiação de Van Allen. Deste modo, segue-se com o desenvolvimento de um modelo das zonas de radiação de Van Allen, ao redor da Terra, utilizando os dados obtidos pela missão espacial *Van Allen Probes Mission*, considerando uma baixa e alta atividade solar. Estes dados serão analisados, em diferentes períodos de tempo, objetivando-se obter as distâncias que separam as zonas de radiação e identificar possíveis anomalias nestas regiões (BAKER et al., 2013), de modo que estas informações sejam inseridas no modelo dos cinturões de Van Allen.

No capítulo 4, estuda-se a dinâmica do movimento de um corpo infinitesimal no problema espacial elíptico restrito de três corpos. Por meio deste problema, obtém-se as equações gerais das localizações dos pontos colineares lagrangianos. Todavia, neste

trabalho, as localizações dos pontos colineares serão determinadas pelo somatório das forças gravitacionais, o que facilitará a adição das forças externas perturbativas ao sistema.

No capítulo 5, considera-se o desenvolvimento das equações das localizações dos pontos colineares se dará considerando as perturbações da força gravitacional do Sol, a força de pressão de radiação solar e as atrações gravitacionais dos corpos primários (Terra e Lua) considerando seus formatos não-esféricos.

No capítulo 6, estuda-se as manobras orbitais de transferência impulsiva e não-impulsiva (arco de propulsão). Inicialmente, apresenta-se a manobra orbital impulsiva, juntamente com a solução do problema de Lambert (*Two Point Boundary Value Problem*) (CURTIS, 2010). Em seguida, apresenta-se a manobra orbital não-impulsiva por meio da teoria do arco de propulsão contínua (CHOBOTOV, 1996) com aplicação na manobra orbital de baixo empuxo. Desta forma, inicia-se um estudo do sistema de controle que será utilizado para levar o veículo espacial até o ponto de equilíbrio; assim como, um método de controle, cuja finalidade é anular o efeito das perturbações externas que agem sobre o veículo espacial ao longo de sua trajetória sobre os pontos colineares lagrangianos.

No capítulo 7, simulam-se as manobras orbitais de transferência e de controle sobre a órbita final (pseudo-órbita do pontos colinear lagrangiano) no simulador STRS (*Spacecraft Trajectory Simulator*), desenvolvido por Rocco (2008b), Rocco (2008a). Para todas as manobras de transferência, inicialmente, determinam-se os incrementos de velocidade, por meio da solução do problema de Lambert, esperando-se encontrar as manobras ótimas impulsivas, isto é, de mínimo consumo de combustível durante a transferência orbital. Estas manobras serão aplicadas em um modelo mais realista que a abordagem impulsiva, que consiste na aplicação do arco de propulsão contínua sobre as localizações dos incrementos de velocidade, obtidos na abordagem impulsiva. Deste modo, a partir do modelo dos cinturões de Van Allen, simulam-se, primeiramente, as manobras orbitais de transferência através das regiões de radiação, visando estimar a dosagem de radiação absorvida pelo material da blindagem e o tempo que o veículo espacial permaneceu dentro das regiões de radiação dos cinturões. A partir da análise da passagem do veículo espacial nessas regiões, escolhe-se a melhor manobra orbital que será aplicada para atingir a órbita de cada um dos pontos colineares lagrangianos. Logo, uma vez atingido cada um dos pontos colineares, inicia-se a aplicação do método de controle, por meio da manobra de orbital de baixo empuxo, de modo que a trajetória seja corrigida e mantida próxima à trajetória de

referência (referente a cada um dos pontos colineares lagrangianos).

Por fim, no capítulo 8, a discussão é baseada nos resultados apresentados nos capítulos 3, 4 e 5, e principalmente, no capítulo 7.

2 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Neste capítulo, objetiva-se uma análise das publicações relacionadas aos assuntos a serem tratados nesta tese. Primeiramente, uma revisão da literatura sobre os pontos de equilíbrio lagrangianos. Segue-se, então, pelas publicações referentes aos cinturões de radiação de Van Allen localizados ao redor da Terra. E, por fim, apresenta-se uma revisão sobre os métodos de transferência orbital e controle no sistema Terra-Lua.

2.1 Os Pontos de Equilíbrio Lagrangianos

No problema restrito de três corpos, as soluções encontradas quando as partículas possuem velocidades e acelerações nulas são conhecidas por pontos de equilíbrio lagrangianos (SZEBEHELY, 1967). São cinco estes pontos de equilíbrio, sendo que dois são pontos estáveis e três são pontos instáveis. Os pontos instáveis são colineares e denotados por L_1, L_2 e L_3 (EULER, 1767), enquanto que, os pontos estáveis, L_4 e L_5, estão localizados nos vértices dos triângulos equiláteros, que formam com os corpos primários (LAGRANGE, 1772).

Entre as décadas de 1970 e 1980, os cinco pontos lagrangianos foram citados como alvos importantes nas aplicações astronáuticas, especialmente, os pontos colineares lagrangianos (FARQUHAR, 1967; FARQUHAR, 1969), devido a existência de trajetórias tridimensionais, delimitadas nas suas vizinhanças (GÓMEZ et al., 2003; CORRÊA, 2007). Essas trajetórias são órbitas periódicas *halo* (BREAKWELL; BROWN, 1979) e *quasi*-periódicas de *Lissajous* (FARQUHAR; KAMEL, 1973) que existem em uma região do espaço de solução que não é acessível por meio de um modelo de dois corpos.

No entanto, sabe-se que a localização dos pontos de equilíbrio são constantemente influenciadas pelas perturbações externas gravitacionais e não-gravitacionais. Radzievskii (1950) foi o primeiro a discutir a solução do problema restrito de três corpos considerando o efeito da força de pressão de radiação, conhecido por problema fotogravitacional restrito de três corpos. Segundo o autor, a atuação da pressão de radiação resulta em uma mudança nas posições dos pontos de equilíbrio clássicos e na determinação de novos pontos de equilíbrio (RADZIEVSKII, 1953). Este mesmo estudo foi realizado por Chernikov (1970), Schuerman (1980a) e Schuerman (1980b), os quais introduziram o efeito relativístico da pressão de radiação solar sobre a poeira, orbitando ao redor de uma estrela, conhecido por efeito Poynting-Robertson. Ammar (2008) e Narayan e Singh (2014) estudaram a localização e a estabilidade de cada um dos pontos de equilíbrio lagrangianos considerando o efeito da pressão

de radiação solar no problema elíptico restrito de três corpos.

Vidyakin (1974) determinou a localização dos pontos de equilíbrio considerando os três corpos como esferoides no movimento circular coplanar. Na mesma época, Sharma e Rao (1975) e Sharma e Rao (1976) determinaram as localizações dos pontos colineares lagrangianos e seus expoentes característicos considerando os corpos primários como esferoides oblatos, sendo que seus planos equatoriais coincidiam com o plano do movimento.

Mais tarde, Douskos (2011) determinou a existência de pontos de equilíbrio no problema restrito de três corpos sendo que, neste caso, ambos os primários são esferoides oblatos e emissores de radiação. Kumar e Narayan (2012) e Singh e Umar (2012) estudaram a estabilidade dos pontos de equilíbrio em um sistema onde os corpos primários são esferoides oblatos no problema fotogravitacional elíptico restrito de três corpos.

2.2 A Estrutura de Radiação ao Redor da Terra

Os cinturões de radiação são formados por prótons e elétrons aprisionados no campo geomagnético, sendo que o cinturão interno contém mais prótons do que o cinturão externo, que contém mais elétrons. Além disso, entre as duas zonas de radiação, existe uma região onde a intensidade de radiação é fraca, porém pode sofrer flutuações durante um período de tempo, assim como o cinturão externo, devido as variações na atividade solar (VAN ALLEN, 1959). No entanto, em um período de alta atividade solar (setembro a outubro de 2012), as sondas gêmeas *Radiation Belt Storm Probes* (RBSP), as quais fazem parte da missão espacial *Van Allen Probes* (SIBECK et al., 2006; FOX et al., 2010), descobriram um terceiro cinturão de radiação localizado entre os cinturões interno e externo (BAKER et al., 2013).

O conhecimento do ambiente de partículas é essencial para estimativas da exposição à radiação de seres humanos e materiais no espaço. McIlwain (1961) encontrou um sistema de coordenadas, que consiste na relação entre a magnitude do campo magnético B e a integral invariante J (será apresentada no item 3.1.2), capaz de organizar adequadamente as medições dos fluxos de radiação, feitas em diferentes localizações geográficas. Na mesma época, foram apresentados pela NASA os modelos empíricos dos fluxos de partículas (prótons e elétrons) presos no campo geomagnéticos. Os fluxos de partículas eram descritos em termos das coordenadas B/B_o e L, em que B_o é a intensidade do campo magnético no equador magnético (valor mínimo) e L é o parâmetro de McIlwain, definido pela distância máxima das linhas do campo mag-

nético quando estas atravessam o equador magnético (VETTE, 1966). Mais tarde, Oliveira et al. (2013) modelaram os cinturões de radiação considerando apenas o ângulo de latitude geográfica e a distância que separam as zonas de radiação.

Todavia, uma vez que o veículo espacial atravessa estas regiões, seus equipamentos eletrônicos poderão ser danificados, ao longo do tempo, devido a interação com a radiação. Park et al. (2002) e Shin e Kim (2004) determinaram a dosagem de radiação de um satélite ideal esférico por meio da variação da espessura da camada protetora considerando o alumínio como o material da blindagem. Samwell et al. (2008) analisaram a dosagem de radiação recebida por uma camada de alumínio, variando os valores da espessura em comparação com as diferentes trajetórias orbitais. Zeynali et al. (2012) propuseram o estudo da dosagem de radiação por meio da variação da espessura da camada protetora e a combinação dos diversos tipos de materiais como o alumínio, tungstênio, tântalo e polietileno.

2.3 Transferência e Controle Orbital

A primeira missão espacial a um ponto colinear lagrangiano foi proposta em 1968, durante o programa Apollo pela NASA (SCHMID, 1968). O objetivo principal desta missão era explorar a face oculta da Lua. Para isto, seriam enviados dois satélites orbitando acima de 200 km da superfície lunar, próximo ao ponto colinear lagrangiano L_2. Por meio da geometria de suas posições, estes satélites fariam imagens da face oculta da Lua e enviariam-nas, por meio de sinais de comunicação, para a nave Apollo. Esta missão era conhecida por *Lunar Far-Side Communication Satellites*, mas nunca foi realizada. Entretanto, este tipo de exploração está sendo novamente investigada para comunicação entre satélites com o orbitador lunar em programas de exploração espacial (LI et al., 2007), e para observações do espaço (GORGOLEWSKI, 2002).

Futuramente, a NASA analisa a possibilidade de enviar um conjunto de satélites para orbitar ao redor dos pontos lagrangianos no sistema Terra-Lua. A missão LAGRANGE (*Laser Gravitational-Wave Antenna at Geo-Lunar Lagrange Points*), que faz parte do programa *Gravitational Wave Mission* (PHYSICS..., 2012), constituída por uma constelação geocêntrica estável de três satélites nos pontos de equilíbrio lagrangianos L_3, L_4 e L_5 formando um observatório espacial, tem o objetivo de detectar e observar ondas gravitacionais. Para isto, um satélite no ponto L_3 deverá seguir em uma órbita tridimensional tipo *halo* perturbada, enquanto que os outros dois satélites (nos pontos L_4 e L_5) deverão seguir em órbitas semi-periódicas, ou colocadas em órbitas periódicas com fases semelhantes de modo que suas variações no

plano lunar sejam reduzidas. Os efeitos das perturbações externas não-gravitacionais serão eliminados por um sistema de controle baseado na técnica *drag-free*, o mesmo feito pela missão LISA *Pathfinder* (CONKLIN et al., 2011) e também, pela *Gravity Probe* B (BUCHMAN et al., 2000). Cabe-se ressaltar que o simulador STRS (ROCCO, 2008b; ROCCO, 2008a; ROCCO, 2013b), utilizado neste trabalho, foi desenvolvido para controlar trajetórias de missões espaciais semelhantes a *Gravity Probe* B, por meio da técnica *drag-free*, a qual será apresentada na seção 6.6.

Prado (1996), Prado (2002) e Prado (2006) estudou as famílias de transferência entre um corpo primário aos cincos pontos de equilíbrio lagrangianos nos sistemas Terra-Lua e Terra-Sol. O método consistiu em determinar as trajetórias, por meio do *Two Point Boundary Value Problem* com o problema planar circular restrito de três corpos e aplicar a regularização de Lemaître, a fim de evitar singularidades durante a integração numérica.

Felipe (2005) simulou uma missão espacial no sistema Terra-Lua: o veículo espacial viajaria de uma órbita baixa, ao redor da Terra, passando para uma órbita de estacionamento (tipo *halo*), em torno do ponto lagrangiano L_1, até atingir a órbita lunar. Neste caso, a solução do problema foi determinada por meio da transferência de Hohmann, juntamente com o problema de Lambert, onde foram necessários dois estágios: 1) transferência Terra-órbita *halo* e, 2) transferência órbita *halo*-Lua. As transferências realizadas até/de uma órbita *halo*, necessitam de um estudo prévio a partir de um conjunto de pontos sobre a órbita *halo*, que levará a trajetória ótima.

Corrêa (2007) apresentou um estudo sobre a dinâmica na vizinhança dos pontos lagrangianos L_1 e L_2 dos sistemas Terra-Lua e Terra-Sol. Em sua análise, foram definidos dois tipos de trajetórias a partir das variedades hiperbólicas associadas às órbitas periódicas: a trajetória de trânsito, confinada na região interna da variedade, e de não-trânsito, confinada na região externa da variedade. Desta forma, projetou-se uma missão espacial para a Lua com baixo custo de combustível com estes dois sistemas.

Melo et al. (2007) também estudaram a vizinhança dos pontos colineares L_1 e L_2, no sistema Terra-Lua. A análise foi feita pela esfera de influência da Lua, onde foram determinadas as trajetórias de escape e captura, ao longo da localização dos pontos colineares lagrangianos. A transferência até uma destas trajetórias foi realizada por meio de abordagens impulsivas (Hohmann e bi-elíptica).

Marcelino (2009) estudou o problema de controle de trajetória de manobras orbitais,

em malha fechada, no sistema Terra-Lua, considerando os efeitos das não-idealidades dos propulsores. O sistema propulsivo, neste caso, é de baixo empuxo com um alto impulso específico, aplicado por um longo período de tempo. Os resultados mostraram que a utilização de um empuxo contínuo, a longo prazo, apresentou um baixo consumo de combustível quando foi aplicado nas manobras de transferências orbitais e no aumento gradativo do semi-eixo maior. Além disso, constatou-se que a utilização de um sistema de controle PID, em malha fechada, favoreceu a eliminação de erros durante a trajetória.

Faria Venditti et al. (2010) estudaram uma combinação de trajetórias cônicas, utilizando manobras assistidas, para transferir um veículo espacial de um planeta, na qual é feito a partida, para a vizinhança de um outro planeta, onde é realizado a chegada, gastando o mínimo de combustível com um mínimo de tempo. Durante as simulações, a trajetória foi dividida em três partes, sendo que na primeira, a fase de partida, foi realizada dentro da esfera de influência do planeta de partida; na segunda, fase heliocêntrica, foi realizada durante a jornada entre os planetas; e a terceira, fase de chegada, foi realizada dentro da esfera de influência do planeta de chegada.

Gonçalves (2013) avaliou a influência do albedo e do potencial gravitacional da Lua (considerando o somatório dos coeficientes dos harmônicos esféricos até 100) durante as manobras de transferência e de correção de órbita de um satélite artificial, utilizando empuxo contínuo em um sistema de controle de trajetória em malha fechada.

Dutta et al. (2012) determinaram as trajetórias ótimas utilizando uma metodologia, em controle ótimo, baseada na radiação total recebida pelo veículo espacial durante sua passagem pelos cinturões de Van Allen.

Oliveira et al. (2013) analisaram o tempo e o consumo de combustível durante uma transferência orbital de baixo empuxo, a partir de uma órbita baixa, ao redor da Terra, até a Lua, variando o ângulo do plano da trajetória do veículo espacial, durante a passagem através dos cinturões de Van Allen.

Rocco (2013a) simulou o controle de trajetória de um veículo espacial capaz de corrigir automaticamente os elementos orbitais (a, e, i, Ω, w) utilizando um sistema de propulsão controlado em malha fechada, de modo que a direção e magnitude do empuxo foram ajustadas conforme a ordem do sinal do erro inserida durante a trajetória. Este tipo de problema pode ser caracterizado como multi-objetivo,

pois a correção de um único elemento orbital pode conflitar na correção dos outros elementos orbitais e vice-e-versa.

Rocco (2013b) simulou o controle de trajetória de um veículo espacial na realização de uma missão espacial tipo *drag-free* utilizando um sistema de propulsão de baixo empuxo, controlado em malha fechada, de modo que o veículo espacial pudesse seguir a trajetória de referência descrita por uma massa de prova, contida no próprio veículo.

Venditti et al. (2013) estudaram a dinâmica ao redor de corpos com formatos não-esféricos, como os asteróides. Para isto, primeiramente, consideraram a modelagem de um objeto irregular, a partir de uma combinação de várias figuras geométricas como paralelepípedos, obtendo-se, então, a força perturbadora gerada por este corpo. Desta forma, é apresentada o controle de trajetória de um veículo espacial, ao redor do corpo não-esférico, por meio de um sistema de controle PID em malha fechada.

Gonçalves et al. (2015) analisaram as manobras orbitais de um satélite artificial, próximo à superfície da Lua, sujeito à forças perturbativas gravitacional e não gravitacional, como o potencial gravitacional lunar, a atração gravitacional da Terra e do Sol, o albedo lunar e a pressão de radiação solar. As manobras ótimas foram determinadas a partir da solução do problema de Lambert, sendo que seus incrementos de velocidades foram aplicados em um ambiente de um simulador capaz de considerar um modelo mais realista do sistema de propulsão.

3 MODELAGEM DE RADIAÇÃO NO MEIO ESPACIAL

Este capítulo, primeiramente, apresenta um breve resumo sobre os cinturões de Van Allen, as equações do movimento das partículas eletricamente carregadas, presas no campo magnético terrestre, e a taxa de dosagem equivalente de radiação dos materiais de blindagem. Deste modo, segue-se para a modelagem das regiões de radiação e por fim, apresentam-se as análises das regiões de radiação nos períodos de alta e baixa atividade solar.

3.1 Os Cinturões de Van Allen

3.1.1 Histórico

O campo magnético não está somente agregado à Terra, mas estende-se ao longo da atmosfera para o espaço. Em 1958, foram lançados os satélites *Explorer I* e o *Explorer III* com o objetivo de coletar dados do meio espacial, ao redor da Terra, utilizando-se contadores Geiger. Inicialmente, os dados coletados do primeiro satélite apresentaram a presença de partículas carregadas em uma região à 1000 km de altitude, aproximadamente. Segundo Van Allen[1], estes valores não estariam corretos pois o contador poderia estar danificado. No entanto, os dados do segundo satélite apresentaram o mesmo resultado, confirmando-se, assim, a existência de uma região de partículas carregadas próximo à Terra (VAN ALLEN et al.; ROHRLICH; ALLEN, 1958, 1960 apud HESS, 1962). Desta forma, a existência de um anel de partículas carregadas, em torno da Terra, foi aceita, incluindo-se a ideia de que estas partículas estão presas neste anel.

No mesmo ano de lançamento dos satélites *Explorer*, outros satélites foram lançados ao espaço com a finalidade de estudar a radiação, proveniente destas partículas carregadas. Ressalta-se aqui, o satélite *Explorer IV*, que mapeou a intensidade de radiação até uma altitude de 2200 km, descobrindo o cinturão interno de radiação e os satélites *Pioneer III* e *Pioneer IV*, cujos os resultados de suas passagens, quase radialmente ao redor da Terra, concluíram a existência do cinturão externo de radiação (HESS, 1962). Em homenagem ao pioneiro do estudo, James Van Allen, estes dois cinturões de radiação são conhecidos por "cinturões de radiação de Van Allen". Logo, a estrutura de radiação, ao redor da Terra, é formada apenas por duas zonas intensas de radiação - cinturão interno e externo - e uma zona de radiação fraca, como mostra a Figura 3.1.

[1]Físico estadunidense que conduziu os experimentos dos satélites *Explorer I* e *Explorer III* descobrindo os cinturões de radiação ao redor da Terra, conhecidos por "cinturões de Van Allen".

Figura 3.1 - Estrutura padrão da zona de radiação ao redor da Terra formada pelos cinturões de Van Allen.

A partir de uma altitude de 0.3RT (RT: raio da Terra, sendo 1.0RT = 6378.139 Km) até 1.0RT, encontra-se o cinturão interno. Entre os valores de 1.0RT e 2.0RT, existe uma região na qual a intensidade de radiação é baixa, conhecida por *slot*. E, a partir de 2.0RT até 7.0RT, encontra-se o cinturão externo.

Fonte: Adaptado de Universe... (2014).

Sobre a origem da radiação, existiram muitas especulações a seu respeito. Desde o início da descoberta dos cinturões de radiação de Van Allen foram estudados diversos mecanismos de injeção das partículas nos dois cinturões. Inicialmente, sugeriu-se que os dois cinturões consistiam de partículas provenientes do gás solar ionizado injetado dentro do campo geomagnético por meio de um mecanismo de aceleração (VAN ALLEN, 1959). Porém, Neher (1959) explicou que a presença de elétrons no cinturão interno ocorria devido ao processo de decaimento da partícula méson μ, em altas altitudes, próxima à Terra. Após o decaimento, os elétrons seriam aprisionados nas linhas do campo geomagnético, mas esta teoria foi desprezada. Em Singer (1958a) e Singer (1958b), o autor identificou um outro mecanismo de injeção de partículas no cinturão interno: o decaimento de nêutrons[2] produziria prótons e elétrons que, agregariam-se às linhas do campo geomagnético formando o cinturão interno. Em contrapartida, aos mecanismos citados anteriormente, Gold (1959) afirmou que as

[2]Estes se formam por meio da colisão das partículas dos raios cósmicos contra o núcleo de átomos de oxigênio e de nitrogênio contidos na atmosfera terrestre.

partículas contidas no cinturão interno se originaram por meio de um processo de difusão iniciado no cinturão externo que, injetariam-nas no cinturão interno. Atualmente, sabe-se que o cinturão externo é formado por partículas contidas nos ventos solares e o cinturão interno é formado pelo decaimento de nêutrons na atmosfera terrestre (HUDSON et al., 2008; REITZ, 2008) e por partículas do plasma solar trazidas pelos processos de aceleração e difusão, que ocorrem dentro do cinturão externo (REEVES et al., 2013). Segundo Lyons e Thorne (1973), a região fraca de radiação existe devido a um mecanismo físico que limita o fluxo de partículas presas no campo geomagnético.

O fato é que o conhecimento da radiação, ao redor da Terra, propôs buscas por estruturas de radiação em outros planetas. A partir da década de 1970, foram lançadas as missões *Pioneer X* e *XI*, e a *Voyager II* rumo à Júpiter; *Pioneer XI* e *Voyager I* e *II* à Saturno e *Voyager II* à Urano e Netuno. Todos os quatro planetas visitados possuem estruturas de radiação semelhantes à da Terra: uma magnetosfera e cinturões de radiação (VAN ALLEN, 1998).

3.1.2 Dinâmica do Meio de Radiação

O entendimento do meio de radiação, formado pelas partículas eletricamente carregadas, dá-se pelo estudo dos três tipos de movimento das partículas acerca do campo magnético (ALFVEN, 1950).

O primeiro movimento está relacionado com a rotação da partícula sobre a linha do campo magnético. Assim, na presença de um campo magnético uniforme, desconsiderando o campo elétrico, o movimento de uma partícula elétrica é definido pela força de Lorentz [3], dada por (WALT, 1994; GRIFFITHS, 2011)

$$\vec{F_L} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{3.1}$$

em que q é a carga da partícula (incluindo o sinal), $\vec{B}$ é o vetor do campo magnético, $\vec{p}$ e $\vec{v}$ são os vetores do *momentum* ou quantidade de movimento e velocidade da carga, respectivamente.

A Equação 3.1 pode ser separada em componentes paralela e perpendicular ao campo, de modo que

[3] Na presença do campo elétrico, a força total é dada por $\vec{F_L} = q(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E})$, em que $\vec{E}$ é o vetor do campo elétrico.

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{||} = \vec{0} \tag{3.2}$$

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{\perp} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{3.3}$$

Integrando-se no tempo a Equação 3.2, o resultado indica que a partícula elétrica possui um vetor de velocidade constante, paralelo ao vetor do campo magnético, cuja componente do movimento não será afetada pelo campo. Entretanto, a Equação 3.3 implica que, a força magnética sobre a partícula elétrica estará sempre perpendicular ao plano que contém a componente perpendicular do vetor velocidade e o vetor do campo magnético. Isto significa que, a partícula deverá se movimentar no plano perpendicular ao longo da linha do campo magnético, com um raio igual a

$$R_c = \frac{mv_{\perp}}{qB} \tag{3.4}$$

em que R_c é o raio cíclotron produzido pela aceleração centrípeta, $v_{\perp}$ é a componente da velocidade perpendicular ao campo magnético e m é a massa da carga. Desta forma, conclui-se, então, que as partículas eletricamente carregadas se movem ao longo de um caminho helicoidal, isto é, em forma de uma espiral (VAN ALLEN, 1998), como mostra a Figura 3.2.

Figura 3.2 - Trajetória helicoidal de uma partícula no campo magnético da Terra.

O vetor velocidade $\vec{v}$ possui uma componente perpendicular, $\vec{v_{\perp}}$, e uma componente paralela, $\vec{v_{||}}$.

Fonte: Adaptado de Graf (2009).

O movimento da partícula elétrica pode ser entendido também por meio de uma in-

variante adiabática, que é uma quantidade física que varia lentamente se comparada com a periodicidade do movimento das partículas. É análoga à conservação da energia e ao momento angular no sistema mecânico, porém não é uma constante absoluta do movimento das partículas presas no cinturão de radiação. Segundo McIlwain (1966), o momento magnético de uma partícula elétrica é dado por

$$\mu = \frac{{p_\perp}^2}{2m_o B} = \frac{p^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2m_o B} \tag{3.5}$$

em que $p_\perp$ é a componente do *momentum*, perpendicular ao vetor do campo magnético, m_o é massa de repouso da partícula elétrica e α é o ângulo de arremesso determinado por meio da relação entre as componentes do vetor velocidade (ver Figura 3.2). Pode ser considerado, neste caso, como uma invariante adiabática se seus valores se conservam somente quando a partícula se move dentro de regiões onde a intensidade do campo magnético é forte ou fraca, variando gradualmente seu raio ciclotron (Equação 3.4), de modo que o momento magnético permaneça invariante durante o movimento.

Assim, por meio da conservação da Equação 3.5, tem-se que

$$\frac{p^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{B} = cte \tag{3.6}$$

o que significa que, se a partícula elétrica se movimenta, ao longo da linha do campo geomagnético, para pontos onde a intensidade do campo magnético aumenta, a componente perpendicular da quantidade de movimento também irá aumentar. Desta forma, desde que o valor de p^2 é constante (na ausência de campo elétrico), o valor de $\operatorname{sen}^2\alpha$ deverá aumentar, de tal modo que a Equação 3.6 se manterá constante.

O segundo tipo de movimento concentra-se na componente paralela da velocidade da partícula com relação ao campo magnético. Assim, em um espaço tridimensional, a velocidade da partícula é dada pela relação

$$v^2 = v_{||}^2 + v_\perp^2 \tag{3.7}$$

Logo, se considerarmos a conservação do momento magnético, sendo o campo magnético suficientemente forte, tal que o ângulo de arremesso seja $\alpha = 90°$ e portanto,

$$v_{||}^2 = v^2 \cos^2 90° = 0 \tag{3.8}$$
$$v_{\perp}^2 = v^2 \,\mathrm{sen}^2 90° = v^2$$

O local onde o aumento da intensidade do campo magnético se iguala ao aumento do ângulo de arremesso é conhecido por ponto espelho magnético. Neste ponto, as partículas elétricas sentirão uma força, devido a componente perpendicular da velocidade, ao longo da linha do campo magnético, que causará uma desaceleração em seus movimentos, movendo-as para uma outra região onde as linhas do campo se convergem (ATMOSPHERIC; COMMITTEE, 1999). Devido a este tipo de movimento as partículas elétricas se manterão presas formando uma região de radiação, como mostra a Figura 3.3.

Figura 3.3 - Movimento de uma partícula presa no campo magnético da Terra.

Apresenta-se um esquema bidimensional do movimento de uma única partícula, ao longo da linha do campo geomagnético, presa ao ser refletida nos pontos espelhos M^* e M^{**}.

Fonte: Adaptado de Atmospheric e Committee (1999).

Por meio de uma invariante adiabática, conhecida por invariante longitudinal, pode-se também descrever o movimento de uma partícula eletricamente carregada, con-

finada em um movimento de ida e volta, entre os dois pontos espelhos magnéticos sobre uma mesma linha de campo. Esta invariante é dada pela integral (FREDEN, 1969)

$$J = \int_{M**}^{M^*} \sqrt{1 - \frac{B}{B_m}} dl \tag{3.9}$$

Esta integral é tomada, ao longo da linha do campo magnético, entre os dois pontos espelhos, não dependendo da carga ou da energia da partícula, porém sob a condição de que $B < B_m$ (LAZUTIN, 1986), em que B_m é a intensidade do campo magnético no ponto espelho magnético. O resultado desta integral afirma que o movimento da partícula, entre os pontos espelhos magnéticos, deve ocorrer unicamente sobre a mesma linha do campo magnético.

O terceiro tipo de movimento é resultante da variação temporal da intensidade do campo magnético, que faz com que a partícula elétrica se desvie do movimento ciclotron ao redor da linha do campo. Este tipo de movimento ocorre sob a influência de uma força externa como, por exemplo, o campo elétrico da Terra. Neste caso, as partículas elétricas migrarão do movimento ao longo da linha do campo magnético para um movimento ciclotron ao redor da Terra, sendo que os prótons se movimentarão para a direção oeste e os elétrons para a direção leste. Observa-se, na Figura 3.4, que este fenômeno é o responsável pelo formato toroidal dos cinturões de radiação.

Figura 3.4 - Movimento de uma partícula presa no campo magnético ao redor da Terra.

Representa-se o movimento das partículas, ao longo da linha do campo geomagnético, refletidas nos pontos espelhos e ao redor da Terra.

Fonte: Adaptado de Ukhorskiy e Sitnov (2012).

Logo, associado a este tipo de movimento está a integral invariante do fluxo magnético, Φ, dado por

$$\Phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} \tag{3.10}$$

Neste caso, a integração se dá ao longo de uma curva fechada sobre uma superfície, onde J é constante (McILWAIN, 1966; FREDEN, 1969), isto é, em uma área delimitada pela órbita da partícula em torno do planeta. Deste modo, mesmo que o campo magnético da Terra seja não-uniforme, o fluxo de radiação magnética será conservado devido ao movimento de deriva do centro de guia das partículas eletricamente carregadas, ao redor da Terra.

Desse modo, verifica-se que o movimento das partículas eletricamente carregadas na presença de um campo magnético são divididos em movimento cíclotron, movimento de ida e volta entre os pontos espelhos magnéticos e o movimento de deriva ao redor da Terra, como mostra a Figura 3.5.

Figura 3.5 - Esquema do movimento das partículas eletricamente carregadas no cinturão de radiação.

Fonte: Adaptado de Kamide e Chian (2007).

3.1.3 Dosagem do Meio de Radiação

As partículas eletricamente carregadas, presas no campo magnético da Terra, como os prótons e elétrons, formam o meio de radiação espacial que pode alterar as pro-

priedades de dispositivos e circuitos elétricos de um veículo espacial. Segundo Bos (2011), estas partículas eletricamente carregadas formam a radiação ionizante que interage diretamente com os átomos da matéria por meio de colisões das partículas elétricas. Quando a matéria é exposta à radiação ionizante, a energia depositada em uma única interação é definida por

$$E_i = E_{in} - E_{out} + Q \tag{3.11}$$

em que E_{in} é a energia incidente depositada no ponto de interação, chamado de ponto de transferência, onde a partícula ionizante perde sua energia cinética, E_{out} é a energia das partículas ionizantes deixando a interação e Q é a mudança na energia de todas as partículas envolvidas durante a interação.

A soma de toda energia depositada, em um determinado volume, é a energia transmitida E dada por

$$E = \sum_i E_i \tag{3.12}$$

A interação entre as radiações ionizantes com a matéria, envolve a medição de uma dose de radiação D, que está ligada à energia absorvida por unidade de massa da matéria exposta àradiação (BOS, 2011)

$$D = \frac{\Delta \bar{E}}{\Delta m} \tag{3.13}$$

em que $\Delta \bar{E}$ é a energia média transmitida à matéria em um determinado volume e Δm é o elemento de massa de um material específico. A unidade de dosagem de radiação aborvida é J/kg.

Neste trabalho, considera-se o efeito da blindagem de radiação no meio espacial. Este efeito está relacionado com o transporte e interação das partículas eletricamente carregadas, entre a fonte de radiação e o material de blindagem, de modo a reduzir a intensidade de radiação e os danos dentro do veículo espacial (PROFIO, 1979). O efeito destas radiações é definido pela dosagem equivalente de radiação, dada por (KASE; NELSON, 1972)

$$D_T = \sum w_R D \tag{3.14}$$

em que w_R é fator de ponderação de radiação definido conforme mostra a Tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Fatores de Ponderação de Radiação

Tipo de Radiação	w_R
Fótons	1
Elétrons e Múons	1
Prótons	2
Partículas Alfas	20
Nêutrons	$2,5 + 18,2e^{-ln(E)^2/6}, E < 1MeV$ $5,0 + 17,0e^{-ln(2E)^2/6}, 1MeV \leq E \leq 50MeV$ $2,5 + 3,25e^{-ln(0,04E)^2/6}, E < 50MeV$

Fonte: Adaptado de Protection (2007).

Partindo-se da definição da unidade de dose de radiação (Equação 3.13), o cálculo da dosagem será dado em função do fluxo omnidirecional de partículas, que varia seu valor a cada posição do veículo espacial. Contudo, como este trabalho utiliza os dados da missão *Van Allen Probes*, os fluxo de partículas são dados pelo fluxo unidirecional, cujos valores dependem da direção de observação. Desta forma, o fluxo omnidirecional será calculado utilizando-se o fluxo unidirecional, por meio da integral

$$\Phi(E) = \int_{\Omega} \Phi(E, \alpha) d\Omega = \int_0^{\pi} \Phi(E, \alpha) 2\pi \,\mathrm{sen}\alpha d\alpha \tag{3.15}$$

em que $\Phi(\alpha, E)$ é o fluxo unidirecional de radiação e $d\Omega$ é o elementos de um ângulo sólido. A unidade do fluxo omnidirecional é $1/cm^2.s.MeV$. Esta integral implica em um fluxo uniforme de partículas, independente da direção de observação. Muitas publicações da NASA, especialmente, os modelos de radiação AE8 e AP8 (SAWYER; VETTE, 1976; VETTE, 1991) utilizam esta definição de fluxo para mapear a região de radiação.

Assim, conhecendo-se a unidade do fluxo omnidirecional e comparando-a com a unidade da dosagem de radiação, multiplica-se ao fluxo, a área da superfície de uma

casca esférica A, a energia da partícula E no meio de radiação, o tempo t e o inverso da massa de uma casca esférica. A equação da dosagem de radiação, em função do fluxo será dada por

$$D_B = \frac{\Phi(E)AE^2t}{m} \tag{3.16}$$

Considerando-se, então, o veículo espacial coberto por uma camada esférica de blindagem com espessura l e densidade ρ, a Equação 3.16 deverá ser multiplicada pelo fator de ponderação de radiação, o que tornará a dosagem de radiação como a dosagem equivalente de radiação. Além disso, para se obter a taxa de dosagem equivalente de radiação, a Equação 3.16 deverá ser dividida pelo tempo, de modo que

$$\frac{\Delta D_B}{\Delta t} = w_R \frac{3\Phi(E)E^2}{\rho l} \tag{3.17}$$

A unidade da Equação 3.17 é MeV/kg.s, para que a unidade da taxa de dosagem equivalente de radiação seja J/kg.s é necessário multiplicá-lo por $1,602.10^{-19}$ J/MeV. Além disso, neste trabalho, considera-se que a unidade de taxa de dosagem equivalente de radiação é o rem/s, em que rem é definido como $1rem = w_R x 0,01 J/kg$ (HAFFNER, 1967). Logo, a equação da taxa de dosagem equivalente de radiação recebida no interior de um veículo espacial quando este é blindado por uma casca esférica, será dada por

$$\frac{\Delta D_B}{\Delta t} = w_R \frac{4,80652971.10^{-11}\Phi(E)E^2}{\rho l} \tag{3.18}$$

A próxima seção apresenta a modelagem do meio de radiação espacial e as análises das regiões de radiação, ao redor da Terra, por meio dos dados da missão *Van Allen Probes*.

3.2 Modelagem das Zonas de Radiação

Oliveira et al. (2013) modelaram os cinturões de Van Allen considerando apenas o ângulo de latitude geográfica e as medidas das altitudes, que separam as zonas de radiação. No entanto, sabe-se que os cinturões de radiação não são estáveis e sofrem flutuações em suas dimensões, causadas pela alta atividade solar (PARKER, 1960). Desta forma, neste trabalho, modelou-se as regiões dos cinturões de Van Allen

considerando, além das medidas que delimitam as regiões de radiação, o efeito de uma alta e baixa atividade solar, em um determinado período de tempo.

Para isto, utilizou-se os dados fornecidos pela missão espacial *Van Allen Probes Mission* (SIBECK et al., 2006; FOX et al., 2010). Esta missão iniciou no final do mês de agosto de 2012 e, atualmente, mantém-se ativa, com o objetivo de estudar a dinâmica dos cinturões de radiação. Dentro desta missão são encontradas as sondas gêmeas *Radiation Belt Storm Probes* (RBSP) ou RBSP-A e RBSP-B, cujas órbitas são geocêntricas, elípticas e com uma inclinação de 10° (KESSEL et al., 2012), como mostra a Figura 3.6. Em cada uma das sondas há um detector, conhecido por *Relativistic Electron-Proton Telescope* (REPT), capaz de medir elétrons com energia entre 1,6 MeV e 19 MeV, e prótons com energia entre 17 MeV e acima de 100 MeV (SPENCE et al., 2013). Desde 2015, a análise destes dados é realizada pela NASA (National Aeronautics and Space Administration) com a participação do grupo *Radiation Belts Group* do INPE (SOUZA et al., 2016), conforme o acordo de cooperação entre a Agência Espacial Brasileira (AEB) e a NASA (ACORDO..., 2015; ATOS..., 2015; WORKSHOP..., 2017).

Figura 3.6 - Órbita das sondas RBSP-A e RBSP-B no sistema geocêntrico inercial.

Fonte: Adaptado de Van... (2015).

Após as medições, as sondas transmitem os dados em tempo real, por meio de um sistema de rádio frequência. Os dados são recebidos na estação terrestre, onde serão

apurados e disponibilizados no *site* da *Coordinated Data Analysis Web* (COORDINATED..., 2012). Nesta página da internet, o usuário seleciona a missão *Van Allen Probes (RBSP)*, sendo então direcionado para uma outra página onde encontrará diversas medidas provenientes de diferentes instrumentos. Contudo, o que interessa é o fluxo unidirecional de partículas eletricamente carregadas (prótons e elétrons), o parâmetro de McIlwain (definido pela distância máxima quando a linha do campo magnético cruza o equador magnético) e a posição da sonda RBSP-A no referencial geocêntrico inercial. Estes valores serão inseridos no simulador STRS (*Spacecraft Trajectory Simulator*) (ROCCO, 2008b; ROCCO, 2008a), que a cada instante de tempo determinará o tempo que o veículo espacial permanecerá nas regiões de radiação e a dosagem de radiação acumulada nos materiais de blindagem.

É importante lembrar que os cinturões de radiação de Van Allen estão contidos no campo magnético da Terra, o qual é representado por um dipolo magnético, cujo eixo está deslocado à $11,3°$ em relação ao eixo de rotação da Terra. Todavia, o campo geomagnético está enfraquecendo e o motivo principal deste fenômeno é a possibilidade da inversão dos polos magnéticos que está em curso. Segundo os dados do NOAA... (2015), em 1975, o polo norte magnético estava localizado no hemisfério norte à $78,60°$ N e $289,55°$ L. Contudo, no ano de 2015, o polo norte esteve localizado à $86,27°$ N e $159,18°$ O. Isto significa, que o polo norte magnético está se movendo a uma taxa de $0,014\%$/ano ou, aproximadamente, 55 km/ano à noroeste, como mostra a Figura 3.7. A variação dos ângulos de latitude e longitude do dipolo magnético em coordenadas geográficas são dados na Tabela 3.2. O motivo da inversão dos polos não é tão bem conhecido, mas supõem-se que uma das causas sejam as oscilações internas do material no núcleo externo terrestre, similar ao que ocorre nos ciclos solares (WALT, 1994; GLATZMAIERS; ROBERTS, 1995).

Além disso, as zonas interna e externa dos cinturões de radiação estão delimitadas, em média, entre 1 e 3 RT (RT - raio da Terra) e 4 e 6 RT, e sob a latitude magnética de $\pm 45°$ e $\pm 65°$ (OLESEN, 1966; WALT, 1994), respectivamente. No entanto, em um período de setembro até outubro de 2012, os detectores REPT-A e REPT-B descobriram um terceiro cinturão de radiação que apareceu, inicialmente, no dia 3 de setembro e desapareceu, gradualmente, até o dia 5 de outubro de 2012 (BAKER et al., 2013). A Figura 3.8 apresenta uma comparação entre as configurações dos cinturões de Van Allen antes e depois do fenômeno. Segundo Mann et al. (2016), a causa do aparecimento do terceiro cinturão de radiação está associada com a passagem de ventos solares, que formaram ondas de ultra-baixa frequência com grandes amplitudes, responsáveis pela perda de elétrons de baixa energia no cinturão

Figura 3.7 - Variação do polo norte geomagnético entre 1590-2007.

Fonte: Intreaba... (2013).

de radiação externo. Mesmo com a perda destas partículas, ainda permaneceu uma fina camada de elétrons no cinturão externo, o qual foi novamente restaurado por meio de uma complexa dinâmica entre os cinturões interno e externo, que formou o terceiro cinturão de radiação.

Durante a análise dos dados da missão *Van Allen Probes*, verificou-se que as sondas espaciais não conseguem mapear inteiramente os cinturões de radiação em um único dia, o que ocasiona o aparecimento de falhas no preenchimento de valores da intensidade de fluxo de partículas nas regiões de radiação. Deste modo, para homogenizar as regiões de radiação, de acordo com suas delimitações, aplicou-se o método de interpolação dos valores de fluxo de radiação considerando, neste caso, as posições inerciais da sonda.

Logo, neste trabalho, a modelagem das zonas de radiação de Van Allen se dará no plano do equador magnético. Por meio das posições inerciais da sonda, determinaram-se os valores dos ângulos de latitude e longitude geográficas que foram transformados nos ângulos de latitude e longitude magnéticas. A transformação de coordenadas geográficas (Λ, Θ) para magnéticas (λ, φ) é dada por (GEOMAGNETIC..., 2007)

Figura 3.8 - Representação das estruturas dos cinturões de radiação ao redor da Terra.

A primeira figura (à esquerda) mostra a estrutura típica dos cinturões de Van Allen, isto é, composta por dois cinturões de radiação. A segunda figura (à direita) apresenta, além dos dois cinturões de Van Allen, um terceiro cinturão de radiação formado entre os dois cinturões.

Fonte: Baker et al. (2013).

$$\text{sen}\lambda = \text{sen}\Lambda\,\text{sen}\Lambda_d + \cos\Lambda\cos\Lambda_d\cos\left(\Theta - \Theta_d\right) \tag{3.19}$$

$$\text{sen}\varphi = \frac{\cos\Lambda\,\text{sen}(\Theta - \Theta_d)}{\cos\lambda} \tag{3.20}$$

em que Λ e Θ são os ângulos de latitude e longitude geográficas, respectivamente; λ e φ são os ângulos de latitude e longitude magnéticas, respectivamente; e Λ_d e Θ_d são os ângulos de latitude e longitude do dipolo magnético em coordenadas geográficas (seus valores estão na Tabela 3.2).

Além disso, considerou-se que durante o período de um dia, os cinturões de radiação de Van Allen não se modificaram, independente da variação da longitude magnética. Deste modo, o método de interpolação exigiriu somente os valores de intensidade de fluxo de partículas e de latitude magnética.

Para o mapeamento das zonas de radiação, considerou-se uma pequena área da região de radiação de fluxo $d\Phi$ (ver Figura 3.9), delimitada entre as latitude magnéticas λ e $\lambda + d\lambda$, sendo que dr_d é a espessura infinitesimal e dl é o comprimento infinitesimal da linha do campo magnético da região de radiação. A equação da linha

Tabela 3.2 - Variação Anual das Coordenadas Geográficas do Dipolo Magnético.

Ano	**Longitude Mag.(°)**	**Latitude Mag.(°)**
2010	137,325	-64,432
2011	137,176	-64,401
2012	137,028	-64,370
2013	136,881	-64,340
2014	136,734	-64,309
2015	136,586	-64,278
2016	136,419	-64,245
2017	136,253	-64,212
2016	136,088	-64,179
2017	135,924	-64,147
2018	135,760	-64,114
2019	135,924	-64,147
2020	135,760	-64,114

Fonte: Adaptado de NOAA... (2015).

de força do dipolo magnético é obtida por meio da razão

Figura 3.9 - Esboço do dipolo magnético terrestre.

As linhas do campo magnético da Terra estão em vermelho.

Fonte: Produção do autor.

$$\frac{dr_d}{dl} = \frac{B_r}{B_\lambda} \tag{3.21}$$

em que $dl = r_d d\lambda$, sendo que r_d é a distância entre o centro do dipolo magnético a uma das linhas do campo magnético, e B_r e B_λ são as componentes do campo

magnético dados por

$$B_r = -\frac{2\bar{m}\,\mathrm{sen}\lambda}{{r_d}^3} \tag{3.22}$$

$$B_\lambda = \frac{\bar{m}\cos\lambda}{{r_d}^3} \tag{3.23}$$

em que $\bar{m}$ é o momento do dipolo magnético.

Substituindo as Equações 3.22 e 3.23 na 3.21 e integrando-a, obtém-se

$$r_d = L\cos^2\lambda \tag{3.24}$$

em que L é o parâmetro de McIlwain (McILWAIN, 1961), cujo valor define as distâncias das linhas dos campos magnéticos que cruzam o equador magnético.

Para mapear as regiões de radiação, determinaram-se as coordenadas magnéticas a partir das coordenadas geográficas da sonda RBSP, assim

$$X = r_d\,\mathrm{sen}\lambda = L\cos^2\lambda\,\mathrm{sen}\lambda \tag{3.25}$$

$$Z = r_d\cos\lambda = L\cos^3\lambda \tag{3.26}$$

Considerando as localizações, em coordenadas magnéticas, da sonda e sabendo-se os valores de fluxo omnidirecional de partículas nestas localizações, obtém-se os gráficos $\Phi(X, Z)$. A Figura 3.10 apresenta este tipo de gráfico, que mapeia os cinturões de Van Allen para um determinado período de tempo. Observa-se, neste caso, que o mapa não é homogêneo, isto é, contém regiões onde não mostram o fluxo de radiação. Por este motivo, foi aplicado no simulador o método de interpolação dos valores de fluxo de partículas eletricamente carregadas, sendo possível, então, determinar com maior precisão a intensidade do fluxo para qualquer posição do veículo espacial durante a manobra orbital.

Este tipo de mapa se difere ao de Carl E. McIlwain (McILWAIN, 1961; McILWAIN, 1966), que utilizou o sistema de coordenadas B-L para mapear detalhadamente as

Figura 3.10 - Mapa da região de radiação de elétrons no período de 1 a 15 de janeiro de 2015.

As regiões amareladas e avermelhadas representam as regiões de maior fluxo de partículas, referentes aos cinturões interno e externo de Van Allen. A região de menor densidade, em azul, refere-se ao *slot*, que é a zona de baixa radiação.

Fonte: Produção do autor.

partículas na zona de radiação. Este sistema de coordenadas é dado por meio da intensidade total do campo magnético. Deste modo, sendo $B^2 = {B_r}^2 + {B_\lambda}^2$ e as Equações 3.22 e 3.23, obtém-se

$$B = \frac{\bar{m}}{{r_d}^3}\sqrt{4 - \frac{3r_d}{L}} \tag{3.27}$$

Assim, substituindo a Equação 3.24 na 3.27, a intensidade do campo será dado por

$$B = \frac{\bar{m}}{L^3 \cos^6\lambda}\sqrt{1 + 3\,\mathrm{sen}^2\lambda} \tag{3.28}$$

A partir da Equação 3.28 cria-se o gráfico $\Phi = f(B, L)$, apresentado pelo mapa na Figura 3.11. Exemplos deste tipo de mapa são encontrados em Freden (1969) e Walt

(1994).

Figura 3.11 - Mapa da região interna de radiação em setembro de 1963.

Fonte: Freden (1969).

Nos próximos itens são apresentadas as análises das regiões de radiação, por meio dos gráficos $\Phi = f(L, t)$, para os meses de setembro de 2012 e janeiro de 2015. Estes gráficos apresentam uma varredura das regiões de radiação, em função das distâncias máximas das linhas do campo magnético quando cruzam o equador magnético por um determinado período de tempo, dado pelo fluxo omnidirecional de elétrons e prótons.

3.2.1 Regiões de Radiação de Van Allen em Janeiro de 2015

Neste item, é apresentada a evolução dos cinturões de Van Allen, durante uma baixa atividade solar, durante o mês de janeiro de 2015. Para a construção dos gráficos do fluxo omnidirecional de elétrons e prótons, considerou-se elétrons com uma energia entre 1 MeV e 20 MeV, e prótons com uma energia entre 21 MeV e 208 MeV. Os conjuntos de Figuras 3.12 a 3.17 mostram o comportamento da radiação de elétrons no período de estudo. Verifica-se no conjunto de Figuras 3.12 que, para

baixas energias (1,8 MeV e 2,1 MeV), a presença de elétrons se dá tanto no cinturão externo quanto no cinturão interno; contudo, para elétrons com energia igual a 2,1 MeV, o cinturão interno diminui sua extensão a partir do dia 11/01/2015, mantendo-se constante até o final do mês. No conjunto de Figuras 3.13, observa-se uma baixa intensidade do fluxo de radiação no cinturão interno para elétrons com energias iguais a 2,6 MeV e 3,4 MeV; no entanto,verifica-se que existe uma maior concentração de elétrons na região do cinturão externo para elétrons com energia igual a 2,6 MeV. Para elétrons com energia igual e acima de 3,4 MeV, observa-se que a região do cinturão externo tende a diminuir, extinguindo-se gradualmente para valores de energia acima de 4,2 MeV, como apresentam os conjuntos de Figuras 3.14 a 3.17; deste modo, o fluxo omnidirecional de elétrons, neste caso, se mantém concentrado somente na região do cinturão interno.

Os conjuntos de Figuras 3.18 a 3.21 mostram o comportamento da radiação de prótons presentes somente no cinturão interno. Segundo Hudson et al. (2008), a alta densidade de prótons é o resultado do decaimento de nêutrons na atmosfera terrestre. Verifica-se, então, que para prótons com energia igual a 21,25 MeV, o fluxo omnidirecional e a extensão da região do cinturão interno são maiores, como apresenta a Figura 3.18 (a). Comparando-a com os outros resultados, observa-se que acima de 27,6 MeV, o fluxo omnidirecional de prótons e a região interna de radiação diminuem.

Figura 3.12 - Região de radiação de elétrons com energias iguais a 1.8 MeV e 2.1 MeV durante o mês de janeiro de 2015.

(a) 1.8 MeV

(b) 2.1 MeV

Fonte: Produção do autor.

Figura 3.13 - Região de radiação de elétrons com energias iguais a 2.6 MeV e 3.4 MeV durante o mês de janeiro de 2015.

(a) 2.6 MeV

(b) 3.4 MeV

Fonte: Produção do autor.

Figura 3.14 - Região de radiação de elétrons com energias iguais a 4,2 MeV e 5,2 MeV durante o mês de janeiro de 2015.

(a) 4.2 MeV

(b) 5.2 MeV

Fonte: Produção do autor.

Figura 3.15 - Região de radiação de elétrons com energias iguais a 6,3 MeV e 7,7 MeV durante o mês de janeiro de 2015.

(a) 6.3 MeV

(b) 7.7 MeV

Fonte: Produção do autor.

Figura 3.16 - Região de radiação de elétrons com energias iguais a 9,9 MeV e 12,3 MeV durante o mês de janeiro de 2015.

(a) 9.9 MeV

(b) 12.3 MeV

Fonte: Produção do autor.

Figura 3.17 - Região de radiação de elétrons com energias iguais a 15,2 MeV e 20 MeV durante o mês de janeiro de 2015.

(a) 15.2 MeV

(b) 20 MeV

Fonte: Produção do autor.

Figura 3.18 - Região de radiação de prótons com energias iguais a 21,25 MeV e 27,6 MeV durante o mês de janeiro de 2015.

(a) 21.25 MeV

(b) 27.6 MeV

Fonte: Produção do autor.

Figura 3.19 - Região de radiação de prótons com energias iguais a 35,9 MeV e 46,7 MeV durante o mês de janeiro de 2015.

(a) 35.9 MeV

(b) 46.7 MeV

Fonte: Produção do autor.

Figura 3.20 - Região de radiação de prótons com energias iguais a 60,7 MeV e 78,9 MeV durante o mês de janeiro de 2015.

(a) 60.7 MeV

(b) 78.9 MeV

Fonte: Produção do autor.

Figura 3.21 - Região de radiação de prótons com energias iguais a 102,6 MeV e 208 MeV durante o mês de janeiro de 2015.

(a) 102.6 MeV

(b) 208 MeV

Fonte: Produção do autor.

3.2.2 Regiões de Radiação de Van Allen em Setembro de 2012

São apresentados os resultados da evolução dos cinturões de Van Allen, durante uma alta atividade solar, durante o mês de setembro de 2012. Assim, como na subseção anterior, para a construção dos gráficos do fluxo omnidirecional de elétrons e prótons, considerou-se elétrons com uma energia entre 1 MeV e 20 MeV, e prótons com uma energia entre 21 MeV e 208 MeV. Os conjuntos de Figuras 3.22 a 3.27 apresentam o comportamento da radiação de elétrons. Verifica-se, no conjunto de Figuras 3.22 e 3.23 que, para elétrons com energias iguais a 1,8 MeV, 2,1 MeV e 2,6 MeV, as regiões dos cinturões interno e externo se apresentam estáveis, respectivamente; porém, para elétrons com energia acima de 5,2 MeV, a região do cinturão externo e a intensidade do fluxo omnidirecional elétrons no cinturão interno diminuem gradualmente, como também foi verificado na Seção 3.2.1.

Uma terceira região de radiação é detectada para um fluxo de elétrons com energias iguais a 3.4 MeV e 4,2 MeV, como mostram as Figuras 3.23 (b) e 3.24 (a). Inicialmente, há a presença das regiões clássicas dos cinturões de Van Allen, no período de 1 a 2 de setembro de 2012; porém, a partir do dia 3 de setembro, ocorre o aparecimento gradual de uma terceira região de radiação, entre as regiões do *slot* e do cinturão externo, mantendo-se até o seu desaparecimento entre o final do mês de setembro e o começo do mês de outubro. Mann et al. (2016) explica detalhadamente que o surgimento desta nova zona de radiação é o resultado de um ”tsunami espacial” ocorrido dentro da região da magnetosfera: quando uma onda intensa de ventos solares choca-se contra a magnetosfera, a região externa do cinturão de Van Allen se dissipa, perdendo-se elétrons; no entanto, no momento do choque, algumas das partículas elétricas, provenientes dos ventos solares, conseguem entrar na região interna de radiação e assim, por meio destas, forma-se uma nova zona de radiação que preencherá novamente o cinturão externo de radiação. Nota-se que, entre o novo cinturão e o cinturão externo, encontra-se uma nova zona de baixa radiação (*slot*).

Os conjuntos de Figuras 3.28 a 3.31 mostram o comportamento da radiação de prótons presentes somente no cinturão interno. Na Figura 3.28 (a), observa-se uma intensidade maior no fluxo omnidirecional de prótons na região do cinturão interno, quando a energia é igual a 21,25 MeV. Assim, como na subseção anterior, para prótons com energia acima de 27,6 MeV, o fluxo diminuirá.

Figura 3.22 - Região de radiação de elétrons com energias iguais a 1,8 MeV e 2,1 MeV durante o mês de setembro de 2012.

(a) 1.8 MeV

(b) 2.1 MeV

Fonte: Produção do autor.

Figura 3.23 - Região de radiação de elétrons com energias iguais a 2,6 MeV e 3,4 MeV durante o mês de setembro de 2012.

(a) 2.6 MeV

(b) 3.4 MeV

Fonte: Produção do autor.

Figura 3.24 - Região de radiação de elétrons com energias iguais a 4,2 MeV e 5,2 MeV durante o mês de setembro de 2012.

(a) 4.2 MeV

(b) 5.2 MeV

Fonte: Produção do autor.

Figura 3.25 - Região de radiação de elétrons com energias iguais a 6,3 MeV e 7,7 MeV durante o mês de setembro de 2012.

(a) 6.3 MeV

(b) 7.7 MeV

Fonte: Produção do autor.

Figura 3.26 - Região de radiação de elétrons com energias iguais a 9,9 MeV e 12,3 MeV durante o mês de setembro de 2012.

(a) 9.9 MeV

(b) 12.3 MeV

Fonte: Produção do autor.

Figura 3.27 - Região de radiação de elétrons com energias iguais a 15,2 MeV e 20 MeV durante o mês de setembro de 2012.

(a) 15.2 MeV

(b) 20 MeV

Fonte: Produção do autor.

Figura 3.28 - Região de radiação de prótons com energias iguais a 21,25 MeV e 27,6 MeV durante o mês de setembro de 2012.

(a) 21.25 MeV

(b) 27.6 MeV

Fonte: Produção do autor.

Figura 3.29 - Região de radiação de prótons com energias iguais a 35,9 MeV e 46,7 MeV durante o mês de setembro de 2012.

(a) 35.9 MeV

(b) 46.7 MeV

Fonte: Produção do autor.

Figura 3.30 - Região de radiação de prótons com energias iguais a 60,7 MeV e 78,9 MeV durante o mês de setembro de 2012.

(a) 60.7 MeV

(b) 78.9 MeV

Fonte: Produção do autor.

Figura 3.31 - Região de radiação de prótons com energias iguais a 102,6 MeV e 208 MeV durante o mês de setembro de 2012.

(a) 102.6 MeV

(b) 208 MeV

Fonte: Produção do autor.

4 VARIAÇÃO DAS PSEUDO-ÓRBITAS DOS PONTOS COLINEARES LAGRANGIANOS SEM PERTURBAÇÃO

Este capítulo trata da definição de pseudo-órbitas dos pontos colineares lagrangianos, encontradas somente no ponto de vista do referencial inercial. Deste modo, inicialmente, introduz-se o problema espacial elíptico restrito de três corpos com a apresentação das equações do movimento e as soluções do problema, como a integral do movimento e as localizações dos pontos colineares lagrangianos, juntamente, com a definição das pseudo-órbitas. Assim, a partir das equações que determinam as localizações destes pontos lagrangianos, serão obtidas as variações dos elementos orbitais das pseudo-órbitas para cada um dos pontos colineares lagrangianos sem a adição de qualquer tipo de perturbação externa.

4.1 O Problema Restrito de Três Corpos

4.1.1 Histórico

O problema de três corpos foi apresentado e formulado, *a priori*, por Isaac Newton, no século XVII. Este problema consistia de três corpos de massa arbitrária sob a influência de suas atrações gravitacionais mútuas. Porém, para descrever matematicamente seu movimento, eram necessárias dezoito equações diferenciais de primeira ordem.

Mais tarde, Euler propôs o mesmo problema, no entanto, sugeriu que uma das massas fosse infinitesimal. Assim, dado dois corpos de massa m_1 e m_2, sob a influência de suas atrações gravitacionais mútuas, o terceiro corpo de massa infinitesimal m, movia-se no plano definido por estes dois corpos, porém a influência gravitacional do corpo infinitesimal no movimento dos outros corpos era restrita. Logo, o problema ficou conhecido por problema circular restrito de três corpos, o qual descrevia o movimento do terceiro corpo de massa infinitesimal m, sob as influências gravitacionais dos corpos primários, m_1 e m_2, por meio da solução de um conjunto de seis equações diferenciais de primeira ordem. Na época, Euler aplicou o problema no estudo do movimento da Lua, conhecido por teoria lunar (SZEBEHELY, 1967).

Quase dois séculos, após Newton e Euler, sugeriu-se o estudo do movimento do corpo infinitesimal quando os corpos primários descrevem órbitas elíptica, parabólica ou hiperbólica. Contudo, como a maioria dos corpos celestes no Sistema Solar possuem órbitas elípticas, houve maior interesse no estudo do movimento elíptico no campo da Dinâmica Orbital. Desta forma, em meados da década de sessenta, Kopal e Lyttleton

(1963), Szebehely e Giacaglia (1964) e Contopoulos (1967), entre outros autores, apresentaram trabalhos envolvendo o problema de um corpo infinitesimal orbitando ao redor de dois corpos primários, em suas órbitas elípticas.

4.2 O Problema Espacial Elíptico Restrito de Três Corpos

Primeiramente, para que sejam desenvolvidas as expressões da equação do movimento do corpo infinitesimal m (veículo espacial), é necessário definir um referencial e um sistema de coordenadas, onde ocorrerá o movimento. Neste trabalho, as simulações serão realizadas no ambiente do simulador STRS. Portanto, a origem do sistema deverá estar centrada no corpo de massa m_1 (Terra), como mostra a Figura 4.1.

Figura 4.1 - A geometria do problema espacial restrito de três corpos.

Os vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ representam as posições do veículo com relação aos corpos m_1 e m_2, respectivamente. O ângulo f relaciona os sistemas de coordenadas inercial (X,Y,Z) e o não-inercial (x,y,z), assim, quando $f = 0°$, os dois sistemas se coincidem totalmente.

Fonte: Produção do autor.

O conjunto de eixos X, Y e Z definem o sistema de coordenadas geocêntrico inercial. O eixo Y é perpendicular ao eixo X, formando o plano XY, normal ao eixo Z que está alinhado com o eixo z. O eixo z, por sua vez, faz parte do sistema de coordenadas geocêntrico não-inercial (x, y, z), o qual possui a origem do sistema no mesmo ponto em que o referencial inercial.

Os corpos m_1 e m_2 são conhecidos por corpos primários, desde que $m_1 > m_2 >> m$.

Nota-se, então, que o tamanho do corpo de massa m é desprezível, em relação aos corpos primários. Desta forma, o problema de três corpos torna-se *restrito*, pois o corpo infinitesimal não é capaz de influenciar no movimento dos primários. Além disso, como mostra a Figura 4.1, o corpo de massa m move-se livremente no espaço físico do sistema[1], logo o problema também é dito ser *espacial* ou *3D*.

Assim, a dinâmica do problema se sobressai na determinação dos possíveis movimentos do corpo de massa infinitesimal sob a atração gravitacional dos corpos m_1 e m_2, que se movem em órbita kepleriana devido as suas interações. Por meio da lei da gravitação universal de Newton, obtém-se os vetores das forças gravitacionais, $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, exercidas sobre o corpo m devido aos corpos primários m_1 e m_2, respectivamente, dados por

$$\vec{F_1} = -Gm_1m\frac{\vec{r_1}}{{r_1}^3} \tag{4.1}$$

$$\vec{F_2} = -Gm_2m\frac{\vec{r_2}}{{r_2}^3} \tag{4.2}$$

em que r_1 e r_2 são os módulos dos vetores de posição do corpo infinitesimal em relação aos corpos primários e G é a constante gravitacional igual a $6,67384.10^{-11}$ $m^3/kg.s^2$.

Aplicando-se a segunda lei de Newton, a expressão geral da equação da força resultante sobre o corpo infinitesimal é igual a

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -Gm_1m\frac{\vec{r_1}}{{r_1}^3} - Gm_2m\frac{\vec{r_2}}{{r_2}^3} \tag{4.3}$$

em que $\vec{F}$ é o vetor da força resultante e $\vec{r}$ é a distância vetorial do corpo infinitesimal com relação a origem do sistema.

As equações do movimento no referencial inercial são (SZEBEHELY, 1967)

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -G\frac{m_1(X - X_1)}{{r_1}^3} - G\frac{m_2(X - X_2)}{{r_2}^3} \tag{4.4}$$

[1]No problema planar restrito de três corpos, assume-se que o corpo infinitesimal m tem seu movimento limitado no mesmo plano dos corpos m_1 e m_2.

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = -G\frac{m_1(Y-Y_1)}{{r_1}^3} - G\frac{m_2(Y-Y_2)}{{r_2}^3} \tag{4.5}$$

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = -G\frac{m_1(Z-Z_1)}{{r_1}^3} - G\frac{m_2(Z-Z_2)}{{r_2}^3} \tag{4.6}$$

em que o módulo das distâncias r_1 e r_2 são

$$r_1 = \sqrt{(X-X_1)^2 + (Y-Y_1)^2 + (Z-Z_1)^2} \tag{4.7}$$

$$r_2 = \sqrt{(X-X_2)^2 + (Y-Y_2)^2 + (Z-Z_2)^2} \tag{4.8}$$

Devido a interação gravitacional entre a Terra e a Lua, as equações do movimento serão obtidas para o caso de uma órbita elíptica, o que torna o problema elíptico restrito de três corpos conhecido por problema espacial elíptico restrito de três corpos, sendo assim, a distância entre os corpos primários será igual a

$$R = \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos f)} \tag{4.9}$$

em que a, e e f são o semi-eixo maior, excentricidade e a anomalia verdadeira do corpo de massa m_2, respectivamente. Fazendo-se $e = 0$, a distância entre os primários se manterá constante; obtendo-se, então, o problema espacial circular restrito de três corpos, que é um caso especial do problema espacial elíptico restrito de três corpos.

Desta forma, utilizando-se as matrizes de rotação (ver Apêndice A), que relacionam os referenciais inercial e não-inercial, obtém-se

$$\begin{aligned}(\ddot{x} - 2\dot{f}\dot{y} - \dot{f}^2x - \ddot{f}y)\cos f - (\ddot{y} + 2\dot{f}\dot{x} - \dot{f}^2y + \ddot{f}x)\,\mathrm{sen} f = \\ -\left[G\frac{m_1(x-x_1)}{{r_1}^3} + G\frac{m_2(x-x_2)}{{r_2}^3}\right]\cos f + \left[G\frac{m_1(y-y_1)}{{r_1}^3} + \right. \\ \left. G\frac{m_2(y-y_2)}{{r_2}^3}\right]\mathrm{sen} f\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$(\ddot{x} - 2\dot{f}\dot{y} - \dot{f}^2 x - \ddot{f}y)\,\mathrm{sen} f + (\ddot{y} + 2\dot{f}\dot{x} - \dot{f}^2 y + \ddot{f}x)\cos f = \\ -\left[G\frac{m_1(x-x_1)}{{r_1}^3} + G\frac{m_2(x-x_2)}{{r_2}^3}\right]\mathrm{sen} f - \left[G\frac{m_1(y-y_1)}{{r_1}^3} + \\ G\frac{m_2(y-y_2)}{{r_2}^3}\right]\cos f \tag{4.11}$$

$$\ddot{z} = -\left[G\frac{m_1(z-z_1)}{{r_1}^3} + G\frac{m_2(z-z_2)}{{r_2}^3}\right] \tag{4.12}$$

em que os termos $\dot{f}\dot{x}$ e $\dot{f}\dot{y}$ são as acelerações de Coriolis e os termos $\dot{f}^2 x$ e $\dot{f}^2 y$ são as acelerações centrífugas. O módulo das distâncias r_1 e r_2, neste caso, serão

$$r_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} \tag{4.13}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2} \tag{4.14}$$

Manipulando-se as Equações 4.10 e 4.11, de modo a eliminar os termos que envolvem explicitamente as funções trigonomêtricas em função de f, determinam-se as equações do movimento do veículo espacial no referencial não-inercial nas formas

$$\ddot{x} - 2\dot{f}\dot{y} - \dot{f}^2 x - \ddot{f}y = -\left[G\frac{m_1(x-x_1)}{{r_1}^3} + G\frac{m_2(x-x_2)}{{r_2}^3}\right] \tag{4.15}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{f}\dot{x} - \dot{f}^2 y + \ddot{f}x = -\left[G\frac{m_1(y-y_1)}{{r_1}^3} + G\frac{m_2(y-y_2)}{{r_2}^3}\right] \tag{4.16}$$

$$\ddot{z} = -\left[G\frac{m_1(z-z_1)}{{r_1}^3} + G\frac{m_2(z-z_2)}{{r_2}^3}\right] \tag{4.17}$$

Todavia, as Equações 4.15 e 4.16 dependem ainda de f. Para que as localizações dos corpos primários se mantenham fixas no referencial não-inercial e a energia mecânica do sistema física seja conservada, é necessário utilizar, o sistema de coordenadas pulsante (ξ, η, ζ). A relação entre os dois sistemas de coordenadas será dado por (SINGH;

UMAR, 2012)

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{R}{a}\xi \\
y &= \frac{R}{a}\eta \\
z &= \frac{R}{a}\zeta
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

em que R é a distância entre os primários, em função da anomalia excêntrica u, igual a

$$
R = a(1 - e\cos u) \tag{4.19}
$$

Derivando-se as Equações 4.18, com relação ao tempo, lembrando-se que $R = R(u)$. As velocidades e acelerações serão dadas por

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{1}{a}\frac{dR}{du}\frac{du}{dt}\xi + \frac{R}{a}\frac{d\xi}{du}\frac{du}{dt} \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{1}{a}\frac{dR}{du}\frac{du}{dt}\eta + \frac{R}{a}\frac{d\eta}{du}\frac{du}{dt} \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{1}{a}\frac{dR}{du}\frac{du}{dt}\zeta + \frac{R}{a}\frac{d\zeta}{du}\frac{du}{dt}
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{a}\left(\frac{d^2R}{dtdu}\frac{du}{dt} + \frac{dR}{du}\frac{d^2u}{dt^2}\right)\xi + 2\frac{1}{a}\frac{dR}{du}\frac{d\xi}{du}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 \\
+\frac{R}{a}\left(\frac{d^2\xi}{dtdu}\frac{du}{dt} + \frac{d\xi}{du}\frac{d^2u}{dt^2}\right)
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{a}\left(\frac{d^2R}{dtdu}\frac{du}{dt} + \frac{dR}{du}\frac{d^2u}{dt^2}\right)\eta + 2\frac{1}{a}\frac{dR}{du}\frac{d\eta}{du}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{R}{a}\left(\frac{d^2\eta}{dtdu}\frac{du}{dt} + \frac{d\eta}{du}\frac{d^2u}{dt^2}\right) \tag{4.22}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{1}{a}\left(\frac{d^2R}{dtdu}\frac{du}{dt} + \frac{dR}{du}\frac{d^2u}{dt^2}\right)\zeta + 2\frac{1}{a}\frac{dR}{du}\frac{d\zeta}{du}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{R}{a}\left(\frac{d^2\zeta}{dtdu}\frac{du}{dt} + \frac{d\zeta}{du}\frac{d^2u}{dt^2}\right) \tag{4.23}$$

em que

$$\frac{dR}{du} = ae\,\mathrm{sen}u \tag{4.24}$$

e

$$\frac{d^2R}{du^2} = ae\cos u \tag{4.25}$$

As formas de $\dot{u}$ e $\ddot{u}$ serão dadas pela equação de Kepler na forma

$$n(t-T) = u - e\,\mathrm{sen}u \tag{4.26}$$

Deste modo, derivando-se duas vezes no tempo a Equação 4.26, tem-se que

$$\frac{du}{dt} = \frac{na}{R} \tag{4.27}$$

e

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{en^2a^3\,\mathrm{sen}u}{R^3} \tag{4.28}$$

Substituindo as Equações 4.24 e 4.27 nas Equações 4.20, obtém-se o conjunto de

equações diferenciais de primeira ordem igual a

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{nea\,\mathrm{sen}u}{R}\xi + n\frac{d\xi}{du} \\
\dot{y} &= \frac{nea\,\mathrm{sen}u}{R}\eta + n\frac{d\eta}{du} \\
\dot{z} &= \frac{nea\,\mathrm{sen}u}{R}\zeta + n\frac{d\zeta}{du}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Substituindo as Equações 4.24, 4.25, 4.27 e 4.28 nas Equações 4.21 a 4.23, obtém-se o conjunto de equações diferenciais de segunda ordem, na forma

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{en^2a^3}{R^3}(\cos u - e)\xi + \frac{en^2a^2\,\mathrm{sen}u}{R^2}\frac{d\xi}{du} + \frac{n^2a}{R}\frac{d^2\xi}{du^2} \\
\ddot{y} &= \frac{en^2a^3}{R^3}(\cos u - e)\eta + \frac{en^2a^2\,\mathrm{sen}u}{R^2}\frac{d\eta}{du} + \frac{n^2a}{R}\frac{d^2\eta}{du^2} \\
\ddot{z} &= \frac{en^2a^3}{R^3}(\cos u - e)\zeta + \frac{en^2a^2\,\mathrm{sen}u}{R^2}\frac{d\zeta}{du} + \frac{n^2a}{R}\frac{d^2\zeta}{du^2}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

As expressões para $\dot{f}$ e $\ddot{f}$ serão determinadas pela relação entre as anomalias excêntrica e verdadeira, dada pelas fórmulas trigonométricas

$$\cos f = \frac{(\cos u - e)}{(1 - e\cos u)} \tag{4.31}$$

$$\mathrm{sen}f = \frac{\sqrt{(1-e^2)}\,\mathrm{sen}u}{(1 - e\cos u)} \tag{4.32}$$

Derivando-se a Equação 4.31 no tempo, tem-se

$$-\dot{f}\,\mathrm{sen}f = \dot{u}\,\mathrm{sen}u\frac{(e^2-1)}{(1-e\cos u)^2} \tag{4.33}$$

Substituindo as Equações 4.27 e 4.32 na 4.33, obtém-se

$$\dot{f} = na^2 \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{R^2} \tag{4.34}$$

Derivando-a no tempo e considerando a Equação 4.27, logo

$$\ddot{f} = -\frac{2en^2a^4\sqrt{(1-e^2)}\,\mathrm{sen}u}{R^4} \tag{4.35}$$

Desta forma, substitui os conjuntos de Equações 4.29 e 4.30, juntamente com as Equações 4.34 e 4.35, nas Equações 4.15 a 4.17, obtendo-se

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \frac{ea\,\mathrm{sen}u}{R}\dot{\xi} - \frac{2a\sqrt{(1-e^2)}}{R}\dot{\eta} &= \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\xi} \\ \ddot{\eta} + \frac{ea\,\mathrm{sen}u}{R}\dot{\eta} + \frac{2a\sqrt{(1-e^2)}}{R}\dot{\xi} &= \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\eta} \\ \ddot{\zeta} + \frac{ea\,\mathrm{sen}u}{R}\dot{\zeta} &= \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\zeta} \end{aligned} \tag{4.36}$$

sendo,

$$\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\xi} = -\frac{a}{n^2R}\left[G\frac{m_1(\xi-\xi_1)}{{r_1}^3} + G\frac{m_2(\xi-\xi_2)}{{r_2}^3}\right] + \frac{a}{R}\xi \tag{4.37}$$

$$\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\eta} = -\frac{a}{n^2R}\left[G\frac{m_1(\eta-\eta_1)}{{r_1}^3} + G\frac{m_2(\eta-\eta_2)}{{r_2}^3}\right] + \frac{a}{R}\eta \tag{4.38}$$

$$\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\zeta} = -\frac{a}{n^2R}\left[G\frac{m_1(\zeta-\zeta_1)}{{r_1}^3} + G\frac{m_2(\zeta-\zeta_2)}{{r_2}^3}\right] - \frac{ea^2}{R^2}(\cos u - e)\zeta \tag{4.39}$$

em que

$$r_1 = \sqrt{(\xi-\xi_1)^2 + (\eta-\eta_1)^2 + (\zeta-\zeta_1)^2} \tag{4.40}$$

$$r_2 = \sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2 + (\zeta - \zeta_2)^2} \tag{4.41}$$

A função do potencial, $\bar{\Omega}$, formada a partir dos potenciais gravitacional e pela pseudo-força centrífuga, será igual a

$$\bar{\Omega} = \frac{a}{2R}(\xi^2 + \eta^2) + \frac{ea^2}{2R^2}(e - \cos u)\zeta^2 + \frac{a}{n^2 R}\left(\frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2}\right) \tag{4.42}$$

Observa-se que a função do potencial depende da anomalia excêntrica. Logo, desde que a função $\bar{\Omega}$ seja contínua dentro de um intervalo $[0, 2\pi]$, existirá um ponto neste intervalo que esta função tomará seu valor médio. Desta forma, considera-se, então, a função média do potencial, $\bar{\bar{\Omega}}$, dado por (SINGH; UMAR, 2012)

$$\bar{\bar{\Omega}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{\Omega} du \tag{4.43}$$

tal que,

$$\bar{\bar{\Omega}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - e^2)}}\left[\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + \frac{1}{n^2}\left(\frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2}\right)\right] \tag{4.44}$$

Logo, o conjunto de Equações 4.36 serão dadas por

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \frac{\partial \bar{\bar{\Omega}}}{\partial \xi} \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \frac{\partial \bar{\bar{\Omega}}}{\partial \eta} \\ \ddot{\zeta} &= \frac{\partial \bar{\bar{\Omega}}}{\partial \zeta} \end{aligned} \tag{4.45}$$

No entanto, estas equações expressam o movimento do corpo infinitesimal somente no caso planar do problema elíptico restrito de três corpos. Segundo Szebehely (1967), sendo

$$
\begin{aligned}
\bar{\bar{\Omega}}_{\xi} &= \frac{1}{n^2\sqrt{(1-e^2)}}\left[n^2\xi - \frac{Gm_1(\zeta-\zeta_1)}{{r_1}^3} - \frac{Gm_2(\zeta-\zeta_2)}{{r_2}^3}\right] \\
\bar{\bar{\Omega}}_{\eta} &= \frac{1}{n^2\sqrt{(1-e^2)}}\left[n^2\eta - \frac{Gm_1(\zeta-\zeta_1)}{{r_1}^3} - \frac{Gm_2(\zeta-\zeta_2)}{{r_2}^3}\right] \\
\bar{\bar{\Omega}}_{\zeta} &= -\frac{1}{n^2\sqrt{(1-e^2)}}\left[G\frac{m_1(\zeta-\zeta_1)}{{r_1}^3} + G\frac{m_2(\zeta-\zeta_2)}{{r_2}^3}\right]
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

Para o caso espacial do problema elíptico restrito de três corpos, faz-se

$$
\begin{aligned}
\bar{\bar{\Omega}}'_{\xi} &= \bar{\bar{\Omega}}_{\xi} \\
\bar{\bar{\Omega}}'_{\eta} &= \bar{\bar{\Omega}}_{\eta} \\
\bar{\bar{\Omega}}'_{\zeta} &= \frac{\zeta}{\sqrt{(1-e^2)}} + \bar{\bar{\Omega}}_{\zeta}
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

De modo que, a função do potencial, $\bar{\bar{\Omega}}'$, no sistema de coordenadas pulsantes seja igual a

$$
\bar{\bar{\Omega}}' = \frac{1}{\sqrt{(1-e^2)}}\left[\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) + \frac{1}{n^2}\left(\frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2}\right)\right] \tag{4.48}
$$

Logo, as equações do movimento no problema espacial elíptico restrito de três corpos serão dadas por

$$
\begin{aligned}
\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \frac{\partial\bar{\bar{\Omega}}'}{\partial\xi} \\
\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \frac{\partial\bar{\bar{\Omega}}'}{\partial\eta} \\
\ddot{\zeta} + \zeta &= \frac{\partial\bar{\bar{\Omega}}'}{\partial\zeta}
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

Na próxima seção, segue-se com a solução deste problema.

4.3 A Solução do Problema Espacial Elíptico Restrito de Três Corpos

O problema de dois corpos possui três equações diferenciais de segunda ordem para cada corpo, implicando na solução do problema por meio de 12 constantes de integração[2]. Segundo Vallado (2007), a solução é obtida analiticamente, sendo que seis constantes integração são determinadas por meio da conservação do momento linear, três pela conservação do momento angular, duas pelas primeira e segunda leis de Kepler e uma pela conservação da energia. Em virtude disso, o movimento dos corpos, no problema de dois corpos, sempre estará confinado em um caminho geométrico (elíptico, parabólico ou hiperbólico) no espaço inercial.

Estendendo-se a análise do movimento, considerando a interação gravitacional de $\bar{n}$-corpos (sendo $\bar{n} \geq 3$), obtém-se um sistema de $3\bar{n}$ equações diferenciais de segunda ordem, necessitando-se de $6\bar{n}$ integrais do movimento para completar a solução do problema. Deste modo, determinam-se seis constantes pela conservação do momento linear, três pela conservação do momento angular e uma pela conservação da energia, o que resulta em dez integrais do movimento (neste caso não existe uma lei análoga às duas primeiras leis de Kepler). Todavia, é possível reduzir a ordem do problema utilizando as dez constantes de integração por meio de duas maneiras: transferindo-se a origem do sistema para o baricentro, tal que a ordem do conjunto de equações se torna ($6\bar{n}$-10) e pela eliminação da variável tempo, reduzindo novamente a ordem para ($6\bar{n}$-12) (ROY, 2005). Nota-se, então, que mesmo o problema de três corpos ($\bar{n} = 3$) com nove equações diferenciais de segunda ordem, pode ser determinado com até seis constantes de integração.

A solução geral do problema de três corpos foi obtida por Sundman (1913), porém as séries que formam a solução do problema resultam em uma lenta convergência quando as utilizam. Devido a isto, a solução do problema de três corpos, geralmente, é tratada restringindo-se a interação gravitacional do terceiro corpo em relação aos corpos massivos e também, limitando seu movimento em um plano orbital. Isto implica, então, na existência de apenas duas equações diferenciais de segunda ordem e por consequência, necessitando-se de apenas quatro constantes de integração. Esta variação particular é chamada de problema planar restrito de três corpos (ROY, 2005). Todavia, neste trabalho será aplicado o problema espacial restrito de três corpos. Desta forma, primeiramente, será determinada a integral do movimento,

[2] O movimento de cada um dos dois corpos é definido por três equações diferenciais de segunda ordem, sendo que cada equação diferencial produz duas constantes de integração. Logo, o total de constantes de integração necessárias para determinar a solução do problema é $(2\times3)\times2 = 12$ constantes.

a qual será avaliada como ganho de informação sobre o comportamento do corpo infinitesimal e, adiante, serão obtidas as singularidades do problema.

4.3.1 A Integral do Movimento

Por meio do conjunto de Equações 4.49, pode-se obter uma relação que corresponda à conservação da energia do sistema. Desta forma, multiplicando-as pelas respectivas primeiras derivadas das posições, com relação a anomalia excêntrica e, em seguida, somando-as e integrando a equação obtida, com respeito a anomalia excêntrica, obtém-se

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{d^2\xi}{du^2}\frac{d\xi}{du} + \frac{d^2\eta}{du^2}\frac{d\eta}{du} + \frac{d^2\zeta}{du^2}\frac{d\zeta}{du} \right) du = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial\bar{\bar{\Omega}}'}{\partial\xi}\frac{d\xi}{du} + \frac{\partial\bar{\bar{\Omega}}'}{\partial\eta}\frac{d\eta}{du} + \frac{\partial\bar{\bar{\Omega}}'}{\partial\zeta}\frac{d\zeta}{du} \right) du \tag{4.50}$$

Aplicando-se uma relação de recorrência, a parte esquerda da Equação 4.50 pode ser reescrita, de tal maneira que

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}\frac{d}{du}\left(\frac{d\xi}{du}\frac{d\xi}{du}\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{du}\left(\frac{d\eta}{du}\frac{d\eta}{du}\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{du}\left(\frac{d\zeta}{du}\frac{d\zeta}{du}\right) \right] du = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial\bar{\bar{\Omega}}'}{\partial\xi}\frac{d\xi}{du} + \frac{\partial\bar{\bar{\Omega}}'}{\partial\eta}\frac{d\eta}{du} + \frac{\partial\bar{\bar{\Omega}}'}{\partial\zeta}\frac{d\zeta}{du} \right) du \tag{4.51}$$

A parte direita da Equação 4.51 é obtida por meio da derivada da função média do potencial $\bar{\bar{\Omega}}'(\xi, \eta, \zeta)$ igual a

$$\frac{d\bar{\bar{\Omega}}'}{du} = \frac{\partial\bar{\bar{\Omega}}'}{\partial\xi}\frac{d\xi}{du} + \frac{\partial\bar{\bar{\Omega}}'}{\partial\eta}\frac{d\eta}{du} + \frac{\partial\bar{\bar{\Omega}}'}{\partial\zeta}\frac{d\zeta}{du} \tag{4.52}$$

Desta forma, a Equação 4.51 se torna

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}\frac{d}{du}\left(\frac{d\xi}{du}\frac{d\xi}{du}\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{du}\left(\frac{d\eta}{du}\frac{d\eta}{du}\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{du}\left(\frac{d\zeta}{du}\frac{d\zeta}{du}\right) \right] du = \int_0^{2\pi} \frac{d\bar{\bar{\Omega}}'}{du} du \tag{4.53}$$

E, assim, tem-se que

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\xi}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 \right] = \bar{\bar{\Omega}}' - C \tag{4.54}$$

Ou

$$\frac{1}{2}v^2 = \bar{\bar{\Omega}}' - C \tag{4.55}$$

Portanto, a integral do movimento do problema espacial elíptico restrito de três corpos é igual a

$$C = \frac{1}{\sqrt{(1-e^2)}} \left[\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + \frac{1}{n^2}\left(\frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2}\right) \right] - \frac{1}{2}v^2 \tag{4.56}$$

A constante de integração, C, é obtida exclusivamente no problema restrito de três corpos. Por meio dela, fornece-se uma solução prévia do movimento orbital do corpo de massa infinitesimal. Logo, considerando-se o caso do movimento de um veículo espacial na vizinhança de um planeta como, por exemplo, a Terra, no referencial local; observa-se que, a solução deste problema será determinada pelas componentes dos vetores de posição (ξ, η, ζ) e velocidade ($\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$), a excentricidade e o movimento médio do corpo de massa m_2.

Desta forma, dadas as seis condições iniciais $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{\zeta}_0)$, essas quantidades irão formar um ponto no espaço de fase hexadimensional. Esse espaço de fase, por sua vez, poderá ser reduzido se existir a integral do sistema na forma da Equação 4.56. Esta integral representa uma variedade[3] pentadimensional ou uma hipersuperfície para um dado valor de C no espaço de seis dimensões ($\Re^6$); definindo-se, assim, as

[3]Variedade (*manifold* como é conhecida na literatura) é uma generalização de superfície. Logo, em um espaço bidimensional ($\Re^2$), a curva é uma variedade unidimensional.

regiões onde o movimento do corpo infinitesimal não é possível, isto é, as regiões proibidas. As regiões proibidas são regiões que limitam o movimento do corpo de massa infinitesimal, para que o mesmo não adquire velocidades de valores complexos. Logo, considera-se sempre que $v^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq 0$ e, portanto, $\bar{\bar{\Omega}}' \geq C$.

Neste caso, o valor da constante C está relacionado diretamente com a energia da partícula igual a[4]

$$C = -\frac{1}{\sqrt{(1-e^2)}}\left[\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) + \frac{1}{n^2}\left(\frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2}\right)\right] \tag{4.57}$$

Desta forma, quando uma partícula está orbitando, ao redor de um dos primários, se a energia do sistema aumenta (diminuindo o valor de C), as regiões permitidas, para o movimento, ampliam-se e a partícula pode, então, deixar de orbitar uma região do sistema para outra.

O próximo item segue com a determinação das singularidades do problema.

4.3.2 Os Pontos Colineares Lagrangianos

A principal contribuição de Euler, na solução do problema de três corpos foi a identificação dos pontos de equilíbrio colineares (L_1, L_2, L_3), situados ao longo da linha que une os corpos primários (EULER, 1767), poucos anos antes de Lagrange determinar os pontos de equilíbrio triangulares (L_4, L_5), situados no plano de movimento dos corpos primários, onde formam triângulos equiláteros com os mesmos (LAGRANGE, 1772). No entanto, é comum na literatura nos referirmos a estes cinco pontos como pontos lagrangianos, em homenagem ao matemático francês, Joseph-Louis Lagrange. A Figura 4.2 apresenta as localizações dos cinco pontos de equilíbrio lagrangianos.

De acordo com Szebehely (1967), no plano $x-y$, estes pontos lagrangianos são pontos de singularidade de uma variedade (*manifold*) dos estados de movimento de um corpo infinitesimal, onde $\dot{x} = \dot{y} = \bar{\bar{\Omega}}'_x = \bar{\bar{\Omega}}'_y = 0$, tal que $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$. A partir destas afirmações, as posições dos pontos de equilíbrio podem ser determinadas pela análise das derivadas parciais da função média do potencial, $\bar{\bar{\Omega}}'$, com relação às direções x e y, dependendo do intervalo em que estes pontos estarão localizados. Neste trabalho, as localizações dos pontos colineares lagrangianos serão determinadas pela soma das atrações gravitacionais dos corpos primários m_1 e m_2, dentro do intervalo na qual

[4]Mesmo que a definição da função do potencial seja positiva, em Mecânica Celeste toma-se $\bar{\bar{\Omega}}' = -\bar{\bar{\Omega}}'$(MURRAY; DERMOTT, 1999).

Figura 4.2 - Representação da localização dos pontos de equilíbrio lagrangianos.

Os cinco pontos lagrangianos estarão em equilíbrio com relação ao referencial não-inercial.

Fonte: Produção do autor.

este pontos estarão localizados, não considerando qualquer influência de perturbações externas. A adição de perturbações externas será apresentada no capítulo 5, assim como o controle da trajetória de um veículo espacial sobre os pontos colineares lagrangianos no capítulo 7. As simulações de controle de trajetória deverão ser realizadas no ambiente do simulador STRS (ROCCO, 2008b; ROCCO, 2008a) e por esta razão, as posições dos pontos colineares deverão ser determinadas com relação ao referencial inercial, com a origem no corpo m_1.

Assim, para que um corpo de massa infinitesimal m, orbitando em torno de m_1, esteja em equilíbrio em relação ao referencial não-inercial, as forças gravitacionais dos corpos primários m_1 e m_2 deverão ser compensadas por uma força de inércia, conhecida como pseudo-força centrífuga [5]. A pseudo-força centrífuga atuará no corpo m radialmente para fora com uma magnitude igual a $mw^2 r_{L_j}$, em que w é a velocidade angular do corpo m_2 e r_{L_j} (sendo $j = 1, 2, 3$) é a distância entre cada um dos pontos colineares lagrangianos ao corpo m_1. Na Figura 4.3, são apresentados as direções e sentidos das forças gravitacionais dos corpos primários m_1 e m_2 e a pseudo-força centrífuga sobre cada um dos pontos de equilíbrio. Desta forma, a posição de equilíbrio de cada um destes pontos, no referencial não-inercial, será dada por

[5] Se o corpo de massa m estiver acelerado em relação ao referencial não-inercial, uma outra força de inércia agirá sobre o corpo, conhecida por força de Coriolis (TAYLOR, 2005)

$$-\frac{Gm_1}{{r_{L_1}}^2}+\frac{Gm_2}{(R-r_{L_1})^2}+r_{L_1}w^2=0 \tag{4.58}$$

$$-\frac{Gm_1}{{r_{L_2}}^2}-\frac{Gm_2}{(r_{L_2}-R)^2}+r_{L_2}w^2=0 \tag{4.59}$$

$$\frac{Gm_1}{{r_{L_3}}^2}+\frac{Gm_2}{(R-r_{L_3})^2}+r_{L_3}w^2=0 \tag{4.60}$$

em que $w = 2\pi/T$, sendo que T é o período orbital de m_2 e R é a distância entre os corpos primários. Uma vez que estes pontos estejam em equilíbrio, com relação ao referencial não-inercial, suas velocidades e acelerações são consideradas nulas.

Figura 4.3 - Diagrama de forças nos pontos colineares lagrangianos.

A seta vermelha representa a pseudo-força centrífuga, a seta verde representa a força gravitacional do corpo m_1 e a seta azul representa a força gravitacional do corpo m_2.

Fonte: Produção do autor.

A partir da Equações 4.58 a 4.60, serão obtidas as equações polinomiais de quinto grau, cuja incógnita é a posição radial de cada um dos pontos colineares lagrangianos. Portanto, as equações polinomiais serão dadas por

$$\begin{aligned}
&w^2r_{L_1}^5-2w^2Rr_{L_1}^4+w^2R^2r_{L_1}^3-G(m_1-m_2)r_{L_1}^2+2m_1GRr_{L_1}-m_1GR^2=0 \quad (4.61)\\
&w^2r_{L_2}^5-2w^2Rr_{L_2}^4+w^2R^2r_{L_2}^3-G(m_1+m_2)r_{L_2}^2+2m_1GRr_{L_2}-m_1GR^2=0\\
&w^2r_{L_3}^5-2w^2Rr_{L_3}^4+w^2R^2r_{L_3}^3+G(m_1+m_2)r_{L_3}^2-2m_1GRr_{L_3}+m_1GR^2=0
\end{aligned}$$

As soluções destas equações poderão ser determinadas utilizando os métodos de Newton-Raphson, bisseção, falsa posição, secante ou de Bus e Dekker, entre outros. Segundo Wooford e Philips (1997), o método da bisseção é o mais apropriado para resolvê-las porque garante a convergência necessitando apenas de uma função de avaliação. O método de Newton-Raphson garante a convergência somente se o valor inicial for próximo ao resultado esperado e necessita de duas funções de avaliação para cada iteração. Desta forma, neste trabalho, utilizou-se o método da bisseção juntamente com a solução da equação polinomial de quarto grau (MILOVANOVIĆ et al., 1994), obtendo-se, então, uma raiz de valor real e quatro raízes de valores complexos. Por meio da solução real obtida, determinou-se os vetores das posições e velocidades, no plano tridimensional cartesiano, cujos valores aplicados no problema inverso (VALLADO, 2007) resultaram nos elementos orbitais das pseudo-órbitas dos pontos colineares lagrangianos.

O próximo item apresenta a definição de pseudo-órbitas.

4.3.3 As Pseudo-Órbitas dos Pontos Lagrangianos

Define-se pseudo-órbita como sendo a órbita instantânea, a cada passo da simulação, para cada um dos pontos de equilíbrio lagrangianos no referencial inercial centrado em m_1. Todavia, as posições dos pontos lagrangianos são obtidas por meio do equilíbrio das forças presentes, considerando-se os referenciais não-inerciais locais, isto é, centrado em cada um dos pontos. Assim, a cada instante de tempo, as forças gravitacionais dos corpos m_1 e m_2 se compensam com a pseudo-força centrifuga, nestes referenciais locais. E, portanto, uma vez determinadas as posições dos pontos de equilíbrio, a pseudo-órbita, no referencial inercial, centrado em m_1, possuirá as seguintes características, conforme a Figura 4.4:

a) O raio vetor r_1, que conecta o centro do corpo primário m_1 a um dos pontos de equilíbrio, apresenta a mesma velocidade angular que o raio vetor r_2, que conecta os centros dos corpos primários m_1 e m_2;

b) Logo, a trajetória do ponto de equilíbrio não pode ser definida como uma órbita, porque a velocidade do ponto não apresenta a velocidade necessária para uma órbita, em torno de m_1, com uma mesma excentricidade da órbita de m_2. Desta forma, para que este ponto descreva uma órbita de mesma excentricidade que m_2, de modo que essas órbitas sejam concêntricas, a velocidade angular do raio vetor r_1 deveria ser maior que a velocidade angular do raio vetor r_2;

Figura 4.4 - Representação da variação da pseudo-órbita do ponto colinear L_1.

As setas verde e vermelha representam o raio vetor que conecta o centro do corpo primário m_1 ao ponto acelerado e o raio vetor que conecta os centros dos corpos primários m_1 e m_2, respectivamente. As elipses laranjas representam as pseudo-órbitas do ponto lagrangiano à cada posição do corpo m_2. A linha preta é a linha dos apsides.

Fonte: Produção do autor.

c) Então, a partir dos elementos de estado ($\vec{r}$, $\vec{v}$) instantâneos, pode-se obter os elementos orbitais (a, e, i, Ω, w, M) instantâneos, para cada um dos pontos de equilíbrio, que irão caracterizar suas pseudo-órbitas;

d) Verifica-se na Figura 4.4, que a direção da linha dos apsides mudará sua orientação, a cada instante de tempo, em função da posição do corpo m_2, e assim, o ponto se manterá localizado somente em um dos extremos desta linha.

A próxima subseção apresenta os resultados da propagação das pseudo-órbitas dos pontos colineares lagrangianos, no sistema Terra-Lua, considerando apenas os corpos primários perfeitamente esféricos sem o efeito das perturbações externas sobre os pontos de equilíbrio, porém a órbita da Lua recebe a perturbação do Sol e da Terra, como dito na subseção 4.3.2.

4.4 Resultados: Variação das Pseudo-Órbitas dos Pontos Colineares Lagrangianos Sem Perturbação

Durante um período orbital completo da Lua, ao redor da Terra, calculou-se a variação dos elementos pseudo-orbitais dos pontos colineares lagrangianos L_1, L_2 e L_3, somente com a presença dos corpos primários perfeitamente esféricos, durante os períodos de setembro de 2012 e janeiro de 2015. Estas épocas são consideradas devido a análise da passagem do veículo espacial através dos cinturões de Van Allen. Além disso, para este trabalho, a distância entre a Terra-Lua (R) é dada a cada instante de tempo por meio das equações das coordenadas geocêntricas da Lua encontradas no *The Astronomical Almanac* (THE..., 1987). Estas equações se baseiam no modelo matemático DE102 (NEWHALL et al., 1983), que inclui, além das contribuições do Sol e da Terra como massas pontuais esféricas, a atração gravitacional da Terra por meio dos harmônicos esféricos zonais J_2, J_3 e J_4.

Nas Figuras 4.5 (c) e 4.6 (c), verifica-se para o ponto colinear L_1, que a cada posição da Lua em seu plano orbital, ao redor da Terra, o argumento do periapside de sua pseudo-órbita varia totalmente ($0 \leq \omega \leq 360°$) durante um período lunar completo. Este mesmo tipo de resultado é verificado para os pontos colineares L_2 (ver Figuras 4.7 (c) e 4.8 (c)) e L_3 (ver Figuras 4.9 (c) e 4.10 (c)).

Conforme o item refpseudoorbita, o ponto lagrangiano acelerado permanecerá localizado somente em um dos extremos na linha dos apsides. Desse modo, nas Figuras 4.5 (d) e 4.6 (c), observa-se que o ponto colinear L_1 se manterá localizado aproximadamente no apoapside ($M \approx 180°$) variando com uma amplitude entre $-6°/+8,5°$, para setembro de 2012, e $-9°/+10°$, para janeiro de 2015. Sua pseudo-órbita é mais excêntrica do que a da Lua (em média entre $0,31 \leq e \leq 0,45$), como mostra as Figuras 4.5 (b) e 4.6 (b), e com uma menor variação do comprimento do semi-eixo maior (ver Figuras 4.5 (a) e 4.6 (a)). Além disso, observa-se nas Figuras 4.5 (e) e 4.6 (e), que o ponto L_1 se manterá entre os corpos primários (Terra e Lua), colinear à posição da Lua, como mostra variação do seu raio pseudo-orbital em comparação com o raio orbital da Lua.

Para o ponto colinear L_2, verifica-se que o mesmo estará localizado sempre no periapside ($M = 0°$) de sua pseudo-órbita, como apresenta as Figuras 4.7 (d) e 4.8 (d), e se manterá a uma distância radial maior que a da Lua (ver Figuras 4.7 (e) e 4.8 (e)). A pseudo-órbita deste ponto, por sua vez, é mais excêntrica (em média entre $0,4 \leq e \leq 0,9$) que a pseudo-órbita do ponto colinear L_1 e a órbita da Lua (ver Figuras 4.7 (b) e 4.8 (b)), e com uma maior variação no comprimento do

seu semi-eixo maior, como mostram as Figuras 4.7 (a) e 4.8 (a).

Por último, observa-se que a localização do ponto colinear L_3 se manterá tanto no periapside ($M = 0°$) quanto no apoapside ($M = 180°$), como mostram nas Figuras 4.9 (d) e 4.10 (d). A causa desta variação acentuada na anomalia média está relacionada com a variação dos outros elementos pseudo-orbitais. Na Figura 4.10 (b), quando a excentricidade da pseudo-órbita do ponto colinear L_3 for circular ($e = 0$), o semi-eixo maior da pseudo-órbita se iguala ao semi-eixo maior da órbita da Lua (ver Figura 4.10 (a)). Neste instante, o argumento do periapside da pseudo-órbita é inexistente e o ponto colinear L_3 estará localizado em $M = 0°$. Conforme a excentricidade e o semi-eixo maior da pseudo-órbita aumenta até atingir os seus máximos, o ponto L_3 se manterá no periapside, no entanto, quando a excentricidade for nula e o semi-eixo maior da pseudo-órbita for igual ao da Lua novamente, o ponto L_3 irá para o apoapside. Este tipo de variação periódica é observado também no período de Setembro de 2012. Nas Figuras 4.9 (e) e 4.10 (e), verifica-se que mesmo sob estas mudanças, o ponto L_3 se manterá a uma distância radial aproximada à posição da Lua em relação a Terra.

Figura 4.5 - Variação dos elementos orbitais da Lua e dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_1, considerando somente os corpos primários esféricos, durante o mês de Setembro de 2012.

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.6 - Variação dos elementos orbitais da Lua e dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_1, considerando somente os corpos primários esféricos, durante o mês de Janeiro de 2015.

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.7 - Variação dos elementos orbitais da Lua e dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_2, considerando somente os corpos primários esféricos, durante o mês de Setembro de 2012.

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.8 - Variação dos elementos orbitais da Lua e dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_2, considerando somente os corpos primários esféricos, durante o mês de Janeiro de 2015.

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.9 - Variação dos elementos orbitais da Lua e dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_3, considerando somente os corpos primários esféricos, durante o mês de Setembro de 2012.

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.10 - Variação dos elementos orbitais da Lua e dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_3, considerando somente os corpos primários esféricos, durante o mês de Janeiro de 2015.

Fonte: Produção do autor.

5 VARIAÇÃO DAS PSEUDO-ÓRBITAS DOS PONTOS COLINEARES LAGRANGIANOS COM PERTURBAÇÃO

No item 4.3.2 foram determinadas as localizações e as pseudo-órbitas dos pontos colineares lagrangianos L_1, L_2 e L_3, por meio do somatório das forças gravitacionais envolvidas (m_1 e m_2) no referencial não-inercial. Neste capítulo, serão determinadas as expressões das localizações dos pontos colineares lagrangianos considerando a contribuição da força não-gravitacional perturbativa ao sistema como a pressão radiação solar e a contribuição das forças gravitacionais perturbativas como a atração gravitacional do Sol e o potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos.

5.1 As Pseudo-Órbitas dos Pontos de Equilíbrio Lagrangianos Considerando o Sol e a Pressão de Radiação Solar

Em um sistema físico formado pelos corpos primários m_1 e m_2, as localizações dos pontos colineares lagrangianos L_1, L_2 e L_3 poderão ser obtidas pelo somatório das atrações gravitacionais destes corpos com as perturbações da atração gravitacional do Sol e da pressão de radiação solar, como mostra a Figura 5.1.

Figura 5.1 - Vista planar do diagrama de forças considerando a perturbação da atração gravitacional do Sol e a pressão de radiação solar.

A seta amarela representa a força gravitacional do Sol (M_S) e a seta laranja representa a força da pressão de radiação solar. O ângulo $\Delta\theta$ representa a diferença entre os ângulos de posição do Sol e da Lua (m_2) em suas respectivas órbitas, em torno da Terra (m_1).

Fonte: Produção do autor.

Os corpos primários, neste caso, são considerados perfeitamente esféricos, logo, as expressões das atrações gravitacionais da Terra, da Lua e do Sol serão dadas pela lei da atração gravitacional de Newton. No entanto, para a pressão de radiação solar, a expressão da força é dada por (NASA-SP-8027, 1969)

$$F_{PR} = \frac{I}{c}[(-C_a - C_{rs} - 1)\cos(\theta) - (\cos(\theta) + \frac{2}{3}C_{rd})\vec{n} + (3 - C_{rs})\,\mathrm{sen}(\theta)\vec{s}]\cos(\theta)A \tag{5.1}$$

em que θ é o ângulo formado entre o vetor normal ao plano e o raio de luz incidente, $\vec{n}$ e $\vec{s}$ são os vetores unitários normal e tangencial a superfície do veículo espacial, respectivamente, A é a área da superfície do veículo espacial, c é a constante da velocidade da luz igual a 3.10^8 m/s, I é a constante de radiação solar e C_a, C_{rs} e C_{rd} são os coeficientes de absorção, reflexão especular e reflexão difusa, respectivamente.

Considerando o raio incidente normal ao plano da superfície do veículo espacial ($\theta = 0$), a Equação 5.1 pode ser reescrita como

$$F_{PR} = \frac{-IA}{c}\left(\frac{2}{3}C_{rd} + C_a + 2 + C_{rs}\right) \tag{5.2}$$

Somando as atrações gravitacionais dos corpos primários e do Sol com a força de pressão de radiação solar (Equação 5.2), em cada uma das posições dos pontos colineares, no referencial não-inercial, tem-se

$$-\frac{Gm_1}{{r_{L_1}}^2} + \frac{Gm_2}{(R - r_{L_1})^2} + \frac{GM_S}{R_{SL_1}^2} - b + r_{L_1}w^2 = 0 \tag{5.3}$$

$$-\frac{Gm_1}{{r_{L_2}}^2} - \frac{Gm_2}{(r_{L_2} - R)^2} + \frac{GM_S}{R_{SL_2}^2} - b + r_{L_2}w^2 = 0 \tag{5.4}$$

$$\frac{Gm_1}{{r_{L_3}}^2} + \frac{Gm_2}{(R - r_{L_3})^2} + \frac{GM_S}{R_{SL_3}^2} - b + r_{L_3}w^2 = 0 \tag{5.5}$$

sendo

$$b = \frac{IA}{mc}(2 + C_a + C_{rs} + \frac{2}{3}C_{rd}) \tag{5.6}$$

o termo da aceleração da pressão de radiação solar, M_S é a massa do Sol igual a $1,98855.10^{30}$ kg, m é a massa do veículo espacial e R_{SL_j} (sendo $j = 1, 2, 3$) é a distância do Sol a cada um dos pontos colineares lagrangianos, definido em um espaço tridimensional, conforme a Figura 5.2, na forma

$$R_{SL_j} = \frac{\sqrt{r_{L_j}^2 \cos^2(i_L) + r_{ST}^2 \cos^2(i_S) - 2r_{L_j} \cos(i_L) r_{ST} \cos(i_S) \cos(\Delta\theta)}}{\cos(\Delta\varphi)} \tag{5.7}$$

, para j = 1,2,3

em que r_{ST} é a distância do Sol-Terra, i_L e i_S são os ângulos de inclinação da Lua e do Sol, respectivamente, e $\Delta\varphi$ é a diferença entre esses ângulos.

Figura 5.2 - Esquema geométrico das posições da Terra, o Sol e o ponto colinear lagrangiano no problema espacial com perturbação.

Nesta figura, $\bar{r}_{ST}$, $\bar{r}_{L_j}$ e $\bar{r}_{SL_j}$ são as projeções da distância do Sol-Terra, entre os pontos colineares lagrangianos a Terra e entre o Sol a cada um dos pontos colineares.

Fonte: Produção do autor.

Aplicando-se as Equações 5.3 a 5.5 em um ambiente computacional, obtém-se suas respectivas equações polinomiais de sétimo grau, conforme está apresentado no Apêndice B. As soluções destas equações, obtidas por meio da aplicação do método da bisseção, darão a cada instante de tempo as localizações de cada um dos pontos colineares lagrangianos perturbados pela atração gravitacional do Sol e pela força de pressão de radiação solar. Por meio destas localizações, geram-se seus vetores de posições e velocidades instantâneas que irão determinar, a cada instante de tempo, os elementos keplerianos de suas pseudo-órbitas.

Deste modo, durante um período orbital completo da Lua, ao redor da Terra, calculou-se a variação dos elementos pseudo-orbitais dos pontos colineares lagrangianos L_1, L_2 e L_3, considerando a presença dos corpos primários perfeitamente esféricos juntamente com as perturbações externas devido a atração gravitacional do Sol e a pressão de radiação solar, nos períodos de setembro de 2012 e janeiro de 2015. Assim como na Seção 4.4, observa-se, por exemplo, nas Figuras 5.3 (c) e 5.4 (c), para o ponto colinear L_1 perturbado, que a cada posição da Lua em seu plano orbital, ao redor da Terra, o argumento do periapside irá variar totalmente ($0 \leq \omega \leq 360°$) para um período lunar completo. Este mesmo tipo de resultado é verificado para os pontos colineares perturbados L_2 (ver Figuras 5.5 (c) e 5.6 (c)) e L_3 (ver Figuras 5.7 (c) e 5.8 (c)).

Além disso, para o ponto colinear L_1, verifica-se nas Figuras 5.3 (e) e 5.4 (e), que a adição da perturbação da atração gravitacional do Sol com a pressão de radiação solar faz com que a distância radial do ponto diminua com relação a Terra, quando comparada com a distância radial do mesmo quando não há perturbação. Isto resulta em uma diferença, aproximadamente, da ordem de 10^5 km entre essas distâncias. Observa-se ainda que, sua pseudo-órbita perturbada será mais excêntrica (em média entre $0,78 \leq e \leq 0,87$) (ver Figuras 5.3 (b) e 5.4 (b)) e com uma menor variação do comprimento do semi-eixo maior, como mostram as Figuras 5.3 (a) e 5.4 (a). Todavia, mesmo com a perturbação, este ponto ainda se manterá próximo ao seu apoapside ($M \approx 180°$), porém variando com amplitudes entre $-0,4°/+0,5°$, em setembro de 2012, e $-1°/+0,8°$, em janeiro de 2015, respectivamente, conforme mostram as Figuras 5.3 (d) e 5.4 (d). Apesar da anomalia média ter variação acentuada em sua amplitude, os outros elementos keplerianos também possuem, porém com amplitudes bem pequenas. Este mesmo tipo de variação é devido ao efeito das perturbações nos elementos de estado que afetará os respectivos elementos keplerianos, como poderá ser verificado também para os pontos colineares L_2 e L_3.

Para o ponto colinear L_2, a distância radial diminui quando comparada com a mesma quando não há perturbação. Isto resulta em uma variação, aproximadamente, da ordem de 10^4 km, entre essas distâncias como mostram as Figuras 5.5 (e) e 5.6 (e). Logo, este ponto se manterá próximo à Lua com uma pseudo-órbita menos excêntrica ($0,13 \leq e \leq 0,32$) (ver Figuras 5.5 (b) e 5.6 (b)), em comparação com a pseudo-órbita de L_2 sem perturbação, e com uma menor variação no comprimento do semi-eixo maior, como mostram as Figuras 5.5 (a) e 5.6 (a). Observa-se ainda que, o mesmo se manterá próximo ao seu periapside ($M \approx 0°$), como apresentam as Figuras 5.5 (d) e 5.6 (d); no entanto, este ângulo oscilará em amplitudes que variam, ao longo de um período orbital lunar completo, entre $-13°/+9°$, em setembro de 2012, e $-15°/+8°$, em janeiro de 2015.

Para o ponto colinear L_3, quando este tem sua pseudo-órbita perturbada pela atração gravitacional do Sol e pela pressão de radiação solar se manterá oscilando somente no seu apoapside ($M = 180°$), como apresentam as Figuras 5.7 (d) e 5.8 (d). Todavia, este ponto apresentará uma pseudo-órbita hiperbólica, variando em média entre $14,3 \leq e \leq 26$, como mostram as Figuras 5.7 (b) e 5.8 (b), e com uma menor variação do comprimento do semi-eixo maior (ver Figuras 5.7 (a) e 5.8 (a)), em comparação com a pseudo-órbita do ponto L_3 sem perturbação. Observa-se nas Figuras 5.7 (e) e 5.8 (e), que a distância radial deste ponto aumentará, com uma variação, aproximadamente, da ordem de 10^6 km, o que torna sua localização maior que a distância Terra-Lua. Este tipo de resultado foi verificado no trabalho de Chernikov (1970), porém o desvio obtido da ordem de 10^7 km, com relação a Terra.

Figura 5.3 - Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_1 devido a atração gravitacional do Sol e pressão de radiação solar durante o mês de setembro de 2012.

Fonte: Produção do autor.

Figura 5.4 - Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_1 devido a atração gravitacional do Sol e pressão de radiação solar durante o mês de janeiro de 2015.

Fonte: Produção do autor.

Figura 5.5 - Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_2 devido a atração gravitacional do Sol e pressão de radiação solar durante o mês de setembro de 2012.

Fonte: Produção do autor.

Figura 5.6 - Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_2 devido a atração gravitacional do Sol e pressão de radiação solar durante o mês de janeiro de 2015.

Fonte: Produção do autor.

Figura 5.7 - Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_3 devido a atração gravitacional do Sol e pressão de radiação solar durante o mês de setembro de 2012.

Fonte: Produção do autor.

Figura 5.8 - Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_3 devido a atração gravitacional do Sol e pressão de radiação solar durante o mês de janeiro de 2015.

Fonte: Produção do autor.

5.2 As Pseudo-Órbitas dos Pontos de Equilíbrio Lagrangianos Considerando os Potenciais Gravitacionais dos Corpos Primários Não-Esféricos

No capítulo 4, as localizações dos pontos colineares lagrangianos foram determinadas considerando-se os corpos primários como massas pontuais perfeitamente esféricas. Contudo, sabe-se que estes corpos celestes não são perfeitos, isto é, são não-esféricos. A Terra, como mostra a Figura 5.9 (a), é achatada nos polos, com protuberâncias no equador e próximo aos polos norte e sul. A Lua, assim como a Terra, é também achatada nos polos, porém com protuberâncias somente em um dos lados, como mostra a Figura 5.9 (b). Logo, considerando-se o potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, não será possível utilizar a expressão da atração gravitacional para corpos esfericamente simétricos. Deste modo, neste caso, utilizam-se os harmônicos esféricos, cujo método representa, matematicamente, o potencial gravitacional do corpo em estudo.

A expressão geral da função do potencial gravitacional utilizando os harmônicos esféricos é dada por (VALLADO, 2007)

$$U = \frac{GM_p}{r}\left[1 - \sum_{l=2}^{\infty} \bar{J}_l \left(\frac{R_p}{r}\right)^l \bar{P}_l[\operatorname{sen}(\phi_{sat})] + \right. \tag{5.8}$$
$$\left. \sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l} \left(\frac{R_p}{r}\right)^l \bar{P}_{lm}[\operatorname{sen}(\phi_{sat})][\bar{C}_{lm}\cos(m\lambda_{sat}) + \bar{S}_{lm}\operatorname{sen}(m\lambda_{sat})]\right]$$

em que M_p e R_p são a massa e o raio equatorial do corpo primário, respectivamente, r, ϕ_{sat} e λ_{sat} são a distância, latitude e longitude do veículo espacial com relação ao corpo primário, respectivamente, $\bar{P}_{lm}$ são as funções associadas de Legendre normalizadas e $\bar{J}_l$, $\bar{C}_{lm}$ e $\bar{S}_{lm}$ são os coeficientes dos harmônicos esféricos normalizados (zonais, setoriais e tesserais, respectivamente).

No entanto, neste trabalho, interessa-se somente pela função do potencial gravitacional com os coeficientes harmônicos zonais. Logo, a Equação 5.8 se torna

$$U = \frac{GM_p}{r}\left[1 - \sum_{l=2}^{\infty} \bar{J}_l \left(\frac{R_p}{r}\right)^l \bar{P}_l[\operatorname{sen}(\phi_{sat})]\right] \tag{5.9}$$

Segundo Vallado (2007), as funções associadas de Legendre e os coeficientes harmô-

Figura 5.9 - Formato da Terra e da Lua.

(a) Terra

(b) Lua

As figuras da Terra são baseadas no modelo EIGEN-6c (CHRISTOPH et al., 2011) e as da Lua são baseadas no modelo GRAIL-660 criado a partir dos resultados obtidos pela missão espacial GRAIL (ARNOLD et al., 2015). As ondulações dos geoides são multiplicadas por um fator inicial de 10000 de modo que as mesmas sejam visíveis.

Fonte: International... (2016).

nicos esféricos zonais, ambos normalizados, serão dados por

$$\bar{J}_l = \sqrt{\frac{1}{(2l+1)}} J_l \qquad (5.10)$$
$$\bar{P}_l = \sqrt{(2l+1)} P_l$$

Assim,

$$\bar{J}_l \bar{P}_l = J_l P_l \tag{5.11}$$

Desta forma, a equação geral da força do potencial gravitacional do corpo primário, considerando os harmônicos esféricos zonais até J_6, será dada por

$$\begin{aligned} F = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{GM_p}{r^2}\Bigg[1 - \frac{J_2}{2}\left(\frac{R_p}{r}\right)^2 (3\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat}) - 1) - \frac{J_3}{2}\left(\frac{R_p}{r}\right)^3 \\ (5\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat}) - 3\,\mathrm{sen}(\phi_{sat})) - \frac{J_4}{8}\left(\frac{R_p}{r}\right)^4 (35\,\mathrm{sen}^4(\phi_{sat}) - 30\,\mathrm{sen}(\phi_{sat}) + 3) \\ -\frac{J_5}{8}\left(\frac{R_p}{r}\right)^5 (63\,\mathrm{sen}^5(\phi_{sat}) - 70\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat}) + 15\,\mathrm{sen}(\phi_{sat})) - \frac{J_6}{16} \\ \left(\frac{R_p}{r}\right)^6 (231\,\mathrm{sen}^6(\phi_{sat}) - 315\,\mathrm{sen}^4(\phi_{sat}) + 105\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat}) - 5)\Bigg] \end{aligned} \tag{5.12}$$

A localização dos pontos colineares lagrangianos será obtida da mesma maneira que os estudos anteriores, porém as forças gravitacionais da Terra e da Lua serão dadas pela Equação 5.12. Deste modo, somando as atrações gravitacionais da Terra e da Lua, lembrando-se que, neste caso, o ângulo de latitude do veículo espacial com relação a Lua é nulo, obtém-se

$$\begin{aligned} -\frac{Gm_1}{{r_{L_1}}^2}\Bigg[1 - \frac{J_{t2}}{2}\left(\frac{R_t}{r_{L_1}}\right)^2 (3\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat}) - 1) - \frac{J_{t3}}{2}\left(\frac{R_t}{r}\right)^3 (5\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat}) - \\ 3\,\mathrm{sen}(\phi_{sat})) - \frac{J_{t4}}{8}\left(\frac{R_t}{r_{L_1}}\right)^4 (35\,\mathrm{sen}^4(\phi_{sat}) - 30\,\mathrm{sen}(\phi_{sat}) + 3) - \frac{J_{t5}}{8} \\ \left(\frac{R_t}{r}\right)^5 (63\,\mathrm{sen}^5(\phi_{sat}) - 70\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat}) + 15\,\mathrm{sen}(\phi_{sat})) - \frac{J_{t6}}{16}\left(\frac{R_t}{r_{L_1}}\right)^6 \\ (231\,\mathrm{sen}^6(\phi_{sat}) - 315\,\mathrm{sen}^4(\phi_{sat}) + 105\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat}) - 5)\Bigg] + \frac{Gm_2}{(R - r_{L_1})^2} \\ \left[1 + \frac{J_{l2}}{2}\left(\frac{R_l}{(R - r_{L_1})}\right)^2 - \frac{J_{l4}}{8}\left(\frac{R_l}{(R - r_{L_1})}\right)^4 + \frac{J_{l6}}{16}\left(\frac{R_l}{(R - r_{L_1})}\right)^6\right] + \\ r_{L_1} w^2 = 0 \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{Gm_1}{{r_{L_2}}^2}\Bigg[1-\frac{J_{t2}}{2}\left(\frac{R_t}{r_{L_2}}\right)^2(3\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})-1)-\frac{J_{t3}}{2}\left(\frac{R_t}{r}\right)^3(5\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat})- \\
3\,\mathrm{sen}(\phi_{sat}))-\frac{J_{t4}}{8}\left(\frac{R_t}{r_{L_2}}\right)^4(35\,\mathrm{sen}^4(\phi_{sat})-30\,\mathrm{sen}(\phi_{sat})+3)-\frac{J_{t5}}{8} \\
\left(\frac{R_t}{r}\right)^5(63\,\mathrm{sen}^5(\phi_{sat})-70\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat})+15\,\mathrm{sen}(\phi_{sat}))-\frac{J_{t6}}{16}\left(\frac{R_t}{r_{L_2}}\right)^6 \\
(231\,\mathrm{sen}^6(\phi_{sat})-315\,\mathrm{sen}^4(\phi_{sat})+105\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})-5)\Bigg]-\frac{Gm_2}{(r_{L_2}-R)^2} \\
\left[1+\frac{J_{l2}}{2}\left(\frac{R_l}{(r_{L_2}-R)}\right)^2-\frac{J_{l4}}{8}\left(\frac{R_l}{(r_{L_2}-R)}\right)^4+\frac{J_{l6}}{16}\left(\frac{R_l}{(r_{L_2}-R)}\right)^6\right]+ \\
r_{L_2}w^2=0
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{Gm_1}{{r_{L_3}}^2}\Bigg[1-\frac{J_{t2}}{2}\left(\frac{R_t}{r_{L_3}}\right)^2(3\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})-1)+\frac{J_{t3}}{2}\left(\frac{R_t}{r}\right)^3(5\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat})- \\
3\,\mathrm{sen}(\phi_{sat}))-\frac{J_{t4}}{8}\left(\frac{R_t}{r_{L_3}}\right)^4(35\,\mathrm{sen}^4(\phi_{sat})-30\,\mathrm{sen}(\phi_{sat})+3)+\frac{J_{t5}}{8} \\
\left(\frac{R_t}{r}\right)^5(63\,\mathrm{sen}^5(\phi_{sat})-70\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat})+15\,\mathrm{sen}(\phi_{sat}))-\frac{J_{t6}}{16}\left(\frac{R_t}{r_{L_3}}\right)^6 \\
(231\,\mathrm{sen}^6(\phi_{sat})-315\,\mathrm{sen}^4(\phi_{sat})+105\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})-5)\Bigg]+\frac{Gm_2}{(R-r_{L_3})^2} \\
\left[1+\frac{J_{l2}}{2}\left(\frac{R_l}{(R-r_{L_3})}\right)^2-\frac{J_{l4}}{8}\left(\frac{R_l}{(R-r_{L_3})}\right)^4+\frac{J_{l6}}{16}\left(\frac{R_l}{(R-r_{L_3})}\right)^6\right]+ \\
r_{L_3}w^2=0
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

em que J_l, J_t e R_l, R_t são os coeficientes harmônicos zonais e os raios equatoriais da Lua e Terra, respectivamente. Os valores dos coeficientes zonais da Lua e da Terra, podem ser encontrados em Michael Jr. e Blackshear (1972) e Vallado (2007), respectivamente. Assim, como na Seção anterior, aplica-se as Equações 5.13 a 5.15 em um ambiente computacional, obtendo-se suas respectivas equações polinomiais de décimo sétimo grau, conforme está apresentado no Apêndice C. As soluções destas equações, obtidas por meio da aplicação do método da bisseção, darão a cada instante de tempo as localizações de cada um dos pontos colineares lagrangianos perturbados pela atração gravitacional do Sol e pela força de pressão de radiação

solar. Por meio destas localizações, geram-se seus vetores de posições e velocidades instantâneas que irão determinar, a cada instante de tempo, os elementos orbitais de suas pseudo-órbitas.

Os resultados da variação dos elementos pseudo-orbitais dos pontos colineares lagrangianos L_1, L_2 e L_3, são apresentados para um período orbital lunar completo, ao redor da Terra, durante os meses de setembro de 2012 e de janeiro de 2015, perturbados pelos potenciais gravitacionais dos corpos primários não-esféricos, considerando somente os harmônicos zonais esféricos até J_6, sendo que, neste caso, a Lua contribui somente com os harmônicos esféricos pares. Logo, observa-se nas Figuras 5.10 (c) e 5.11 (c) que, quando o ponto colinear L_1 é perturbado pelos potenciais gravitacionais da Terra e da Lua, o argumento do periapside irá variar totalmente ($0 \leq \omega \leq 360°$) para um período lunar completo, ao redor da Terra. Este mesmo tipo de resultado é verificado para os pontos colineares perturbados L_2 (ver Figuras 5.12 (c) e 5.13 (c)) e L_3 (ver Figuras 5.14 (c) e 5.15 (c)).

Além disso, para todos os pontos colineares perturbados pelos potenciais gravitacionais, verifica-se que a variação da distância radial é mínima, sob a ordem de, aproximadamente, $1 - 10$ m, em comparação com a pseudo-órbita de cada um dos pontos quando não se considera as perturbações gravitacionais. Nos trabalhos de Sharma e Rao (1975) e de Sharma e Rao (1976), as localizações dos pontos colineares lagrangianos tiveram desvios, aproximadamente, da ordem de 10 m, sendo que em Sharma e Rao (1975), as posições foram determinadas por meio de equações polinomiais de nono grau dadas a partir do potencial de McCuskey (1963), cuja equação considera os momentos de inércia dos corpos primários e, em Sharma e Rao (1976), pelas equações polinomiais de sétimo grau considerando, neste caso, as dimensões dos esferoides.

Observa-se, então, neste trabalho, que a variação dos elementos keplerianos das pseudo-órbitas perturbadas pelos potenciais gravitacionais da Terra e da Lua serão próximas aos valores determinados na Seção 4.4, como podem ser verificados por meio dos conjuntos de Figuras 5.10-5.15. Todavia, devido a perturbação dos potenciais gravitacionais da Terra e da Lua, aparecerão pequenas oscilações, ao longo da variação dos elementos keplerianos. Observa-se que, para o ponto L_1, existem oscilações acentuadas no semi-eixo maior e na anomalia média. Assim, como na seção 5.1, isto ocorre devido ao efeito da perturbação externa que, neste caso, são os potenciais gravitacionais dos corpos primários. Este tipo de perfil é também observado para os pontos colineares L_2 e L_3.

Figura 5.10 - Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_1 sem e com a perturbação devido ao potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de setembro de 2012.

Fonte: Produção do autor.

Figura 5.11 - Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_1 sem e com a perturbação devido ao potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de janeiro de 2015.

Fonte: Produção do autor.

Figura 5.12 - Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_2 sem e com a perturbação devido ao potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de setembro de 2012.

Fonte: Produção do autor.

Figura 5.13 - Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_2 sem e com a perturbação devido ao potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de janeiro de 2015.

Fonte: Produção do autor.

Figura 5.14 - Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_3 sem e com a perturbação devido ao potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de setembro de 2012.

Fonte: Produção do autor.

Figura 5.15 - Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_3 sem e com a perturbação devido ao potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de janeiro de 2015.

Fonte: Produção do autor.

5.3 As Pseudo-Órbitas dos Pontos de Equilíbrio Lagrangianos Considerando os Potenciais Gravitacionais dos Corpos Primários Não-Esféricos, o Sol e a Pressão de Radiação Solar

Neste caso, desconsidera-se os harmônicos zonais esféricos dos corpos primários acima de J_2, pois a contribuição deste termo do potencial é a mais relevante, e assim, adiciona-se as acelerações do Sol e da pressão de radiação solar nas Equações 5.13-5.15. Logo, o somatório das forças perturbativas presentes, em cada um dos pontos colineares lagrangianos, serão dados por

$$-\frac{Gm_1}{{r_{L_1}}^2}\left[1-\frac{J_{t2}}{2}\left(\frac{R_t}{r_{L_1}}\right)^2(3\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})-1)\right]+\frac{Gm_2}{(R-r_{L_1})^2}\,[1+ \frac{3J_{l2}}{2}\left(\frac{R_l}{(R-r_{L_1})}\right)^2\Bigg]+\frac{GM_S}{R_{SL_1}^2}-b+r_{L_1}w^2=0 \tag{5.16}$$

$$-\frac{Gm_1}{{r_{L_2}}^2}\left[1-\frac{J_{t2}}{2}\left(\frac{R_t}{r_{L_2}}\right)^2(3\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})-1)\right]-\frac{Gm_2}{(r_{L_2}-R)^2}\,[1+ \frac{3J_{l2}}{2}\left(\frac{R_l}{(r_{L_2}-R)}\right)^2\Bigg]+\frac{GM_S}{R_{SL_2}^2}-b+r_{L_2}w^2=0 \tag{5.17}$$

$$\frac{Gm_1}{{r_{L_3}}^2}\left[1-\frac{J_{t2}}{2}\left(\frac{R_t}{r_{L_3}}\right)^2(3\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})-1)\right]+\frac{Gm_2}{(R-r_{L_3})^2}\,[1+ \frac{3J_{l2}}{2}\left(\frac{R_l}{(R-r_{L_3})}\right)^2\Bigg]+\frac{GM_S}{R_{SL_3}^2}-b+r_{L_3}w^2=0 \tag{5.18}$$

Assim, aplica-se as Equações 5.16 a 5.18 em um ambiente computacional, obtendo-se suas respectivas equações polinomiais de décimo primeiro grau, conforme está apresentado no Apêndice D. As soluções destas equações, obtidas por meio da aplicação do método da bisseção, darão a cada instante de tempo as localizações de cada um dos pontos colineares lagrangianos perturbados pela atração gravitacional do Sol, força de pressão de radiação solar e pelo potenciais gravitacionais dos corpos primários. Por meio destas localizações, geram-se seus vetores de posições e velo-

cidades instantâneas que irão determinar, a cada instante de tempo, os elementos keplerianos de suas pseudo-órbitas.

Deste modo, verifica-se nas Figuras 5.16 (c) e 5.17 (c) que, para o ponto colinear L_1 perturbado, o argumento do periapside irá variar totalmente ($0 \leq \omega \leq 360°$) para um período lunar completo, ao redor da Terra. Este mesmo tipo de resultado é verificado para os pontos colineares perturbados L_2 (ver Figuras 5.18 (c) e 5.19 (c)) e L_3 (ver Figuras 5.20 (c) e 5.21 (c)).

Além disso, observa-se que os conjuntos de Figuras 5.16 a 5.21 apresentam resultados semelhantes aos que foram obtidos na Seção 5.1, o que significa que a perturbação devido aos potenciais gravitacionais dos corpos primários, considerando somente o harmônico zonal J_2, teve uma contribuição pequena se comparada com as perturbações devido a atração gravitacional do Sol e a pressão de radiação solar.

Figura 5.16 - Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_1, considerando as perturbações devido a atração gravitacional do Sol, pressão de radiação solar e o potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de Setembro de 2012.

Fonte: Produção do autor.

Figura 5.17 - Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_1, considerando as perturbações devido a atração gravitacional do Sol, pressão de radiação solar e o potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de Janeiro de 2015.

Fonte: Produção do autor.

Figura 5.18 - Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_2, considerando as perturbações devido a atração gravitacional do Sol, pressão de radiação solar e o potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de Setembro de 2012.

Fonte: Produção do autor.

Figura 5.19 - Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_2, considerando as perturbações devido a atração gravitacional do Sol, pressão de radiação solar e o potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de Janeiro de 2015.

Fonte: Produção do autor.

Figura 5.20 - Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_3, considerando as perturbações devido a atração gravitacional do Sol, pressão de radiação solar e o potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de Setembro de 2012.

Fonte: Produção do autor.

Figura 5.21 - Variação dos elementos pseudo-orbitais do ponto colinear L_3, considerando as perturbações devido a atração gravitacional do Sol, pressão de radiação solar e o potencial gravitacional dos corpos primários não-esféricos, durante o mês de Janeiro de 2015.

Fonte: Produção do autor.

6 CONTROLE DE TRAJETÓRIAS ORBITAIS

Neste capítulo, interessa-se o estudo das manobras orbitais e o sistema de controle, que será aplicado neste trabalho. Na primeira parte, estuda-se as manobras orbitais de alto empuxo, as quais requerem o Δv aplicado instantaneamente, para que as mesmas sejam realizadas. Todavia, como isto é impossível nas missões espaciais, é necessário, então, que o impulso, a ser aplicado, seja distribuído, ao longo de um arco, durante um período de tempo. Deste modo, na segunda parte, apresenta-se a manobra orbital não-impulsiva (método do arco propulsivo), seguida pela manobra orbital de baixo empuxo. A terceira parte e última, deste capítulo, destina-se ao sistema de controle PID, que será utilizado durante as simulações das missões espaciais.

6.1 Manobras Orbitais de Alto Empuxo

As manobras orbitais são utilizadas para transferir um veículo espacial de uma órbita para outra utilizando sistemas de propulsão. Durante estas manobras, as velocidades orbitais podem sofrer uma mudança na sua intensidade, direção e sentido. A intensidade das velocidades orbitais são determinadas pela equação da *vis-viva*, igual a

$$v^2 = \bar{\mu}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{6.1}$$

em que v é a intensidade da velocidade em um ponto qualquer, r é o raio com a origem no foco à um determinado ponto qualquer na órbita, a é o semi-eixo maior da órbita e $\bar{\mu} = G(M_p + m)$, sendo G a constante gravitacional, M_p é a massa do corpo central e m é a massa do veículo espacial.

Se um veículo espacial necessita ser manobrado de uma órbita para outra, é necessário que ocorra uma variação instantânea em sua velocidade orbital em determinados pontos da trajetória. Este tipo de manobra é chamada de manobra ou de alto empuxo ou impulsiva. Entretanto, para que este tipo de manobra ocorra, é necessária uma força infinita aplicada em um instante de tempo, o que não é aceitável no mundo real. Todavia, a manobra de alto empuxo é apenas um modelo matemático que se aproxima, do que pode ser realmente, a manobra de transferência. Portanto, quando um veículo espacial sofre uma alteração instantânea em sua velocidade orbital, um vetor do incremento de velocidade Δv é adicionado ao vetor velocidade v_i, transformando-o em um vetor velocidade v_f, de forma que o veículo espacial possa

sair de sua órbita inicial e determinar sua trajetória para uma orbital final qualquer.

Para que a manobra orbital de transferência utilize o mínimo de combustível, para um tempo de transferência livre, é necessário que seja aplicado um Δv tangencial ao periapside e ao apoapside da órbita de transferência. Desta forma, o ângulo formado entre as velocidades orbital e de transferência é igual a zero e os vetores permanecem paralelos, isto é, na mesma direção e sentido. Assim, o incremento de velocidade é dado por

$$\Delta v = v_2 - v_1 \tag{6.2}$$

Além disso, admita-se, também, fixar um número de impulsos (geralmente, n = 1, 2 ou 3) necessários, tal que a soma total dos incrementos de velocidade, Δv, seja mínima. A manobra de transferência de Hohmann e a bi-elíptica são manobras bi e tri-impulsivas, respectivamente, que requerem o mínimo de energia necessária para transferir um veículo espacial entre duas órbitas coplanares (CHOBOTOV, 1996; CURTIS, 2010). Segundo Shternfeld e Mendlowitz (1960) e Hoelker e Silber (1961), a quantidade de combustível necessária para enviar um veículo espacial, utilizando uma destas manobras, é somente verificada pela razão, $\bar{R} = r_2/r_1$, em que r_1 é o raio da órbita inicial e r_2 é o raio da órbita final. Para uma razão entre $1 \leq \bar{R} \leq 11,94$, a transferência orbital é a de Hohmann. Este limite é aplicado para transferências de órbitas de baixa altitude para as órbitas geoestacionárias. Quando $\bar{R} > 15,58$, a transferência orbital é a bi-elíptica. Entretanto, se a razão estiver limitada entre $11,94 < \bar{R} < 15,58$, então, deve-se observar os valores dos raios das órbitas circulares: se o apoapside for maior que o periapside, logo, favorece-se a transferência bi-elíptica; caso contrário, favorece-se a transferência de Hohmann. Deve-se notar que a transferência bi-elíptica, em alguns casos, obtém o mínimo de Δv que deve ser aplicado durante a manobra, porém o tempo de viagem é maior, se comparada com a transferência de Hohmann.

6.2 Determinação da Órbita Ótima de Transferência

Na seção anterior, deste capítulo, estudou-se as manobras de alto empuxo, como uma primeira aproximação no processo de otimização do tempo e do consumo de combustível. Todavia, a trajetória ótima da manobra de alto empuxo poderá ser obtida por meio da solução do problema de Lambert, buscando-se, do mesmo modo, o mínimo incremento de velocidade total (Δv).

Neste trabalho, a solução do problema de Lambert é calculada utilizando as variáveis universais, que permitem encontrar uma solução simples e objetiva para qualquer tipo de transferência orbital (elíptica, parabólica ou hiperbólica) (BOND; ALLMAN, 1996; VALLADO, 2007; CURTIS, 2010). Sendo assim, dada a energia mecânica na forma

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \tag{6.3}$$

Substituindo as componentes radial e transversal da velocidade na Equação 6.3, obtém-se

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{(r\dot{v})^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \tag{6.4}$$

Sabendo-se que $h = \sqrt{\mu p} = r^2\dot{v}$, em que h é o momento angular, e rearranjando a Equação 6.4, de modo que

$$\dot{r}^2 = -\frac{\mu p}{r^2} + \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \tag{6.5}$$

Define-se uma variável universal χ igual a

$$\chi = \frac{\sqrt{\mu}}{r} \tag{6.6}$$

Elevando-se ao quadrado a Equação 6.6 e dividindo-a pela Equação 6.5, tem-se

$$\left(\frac{dr}{d\chi}\right)^2 = -p + 2r - \frac{r^2}{a} \tag{6.7}$$

Por meio da Equação 6.7, obtém-se as equações da posição e do tempo em termos da variável universal χ e do semi-eixo maior. Logo,

$$r = a + a\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\chi}{\sqrt{a}}\right)\frac{\vec{r_0}\cdot\vec{v_0}}{\sqrt{\mu a}} + \cos\left(\frac{\chi}{\sqrt{a}}\right)\left(\frac{r_0}{a} - 1\right)\right] \tag{6.8}$$

$$\sqrt{\mu}\Delta t = a\left[\chi - \sqrt{a}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\chi}{\sqrt{a}}\right)\right] + \frac{\vec{r_0}\cdot\vec{v_0}}{\sqrt{\mu}a}\left[1-\cos\left(\frac{\chi}{\sqrt{a}}\right)\right] + r_0\sqrt{a}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\chi}{\sqrt{a}}\right) \quad (6.9)$$

Todavia, necessita-se ainda que as equações sejam dadas por uma variável universal, de modo que se obtenha equações do movimento para qualquer tipo de seção cônica (elipse, parábola ou hipérbole). Neste caso, toma-se uma nova variável universal, $\bar{z}$, dada na forma

$$\bar{z} \equiv \frac{\chi^2}{a} \quad (6.10)$$

Substituindo a variável universal $\bar{z}$ nas Equações 6.8 e 6.9, encontrarão-se as funções de Stumpff $C(\bar{z})$ e $S(\bar{z})$, que podem ser definidas por séries infinitas ou por funções trigonométricas dadas nas formas (CURTIS, 2010)

$$C(\bar{z}) = \begin{cases} \frac{1-\cos(\bar{z})}{\bar{z}} & (\bar{z} > 0) \\ \frac{\cosh\sqrt{-\bar{z}}-1}{-\bar{z}} & (\bar{z} < 0) \\ \frac{1}{2} & (\bar{z} = 0) \end{cases} \quad (6.11)$$

$$S(\bar{z}) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\bar{z}}-\,\mathrm{sen}\sqrt{\bar{z}}}{\sqrt{\bar{z}^3}} & (\bar{z} > 0) \\ \frac{\sinh\sqrt{-\bar{z}}-\sqrt{-\bar{z}}}{\sqrt{-\bar{z}^3}} & (\bar{z} < 0) \\ \frac{1}{6} & (\bar{z} = 0) \end{cases} \quad (6.12)$$

em que as condições $\bar{z} > 0$, $\bar{z} < 0$ e $\bar{z} = 0$ se referem as órbitas hiperbólicas, parabólicas e elípticas, respectivamente. Desta forma, segue-se com a determinação da trajetória ótima que a manobra de transferência orbital deverá fazer.

Assim, dados os vetores das posições inicial e final, $\vec{r_1}$ e $\vec{r_2}$, respectivamente, a trajetória é realizada por meio da conexão entre vetores de posição, durante um intervalo de tempo, Δt, como mostra a Figura 6.1. Nota-se, que este problema poderá ser aplicado nas soluções de manobras de *rendezvous* e também na interceptação de veículos ou satélites espaciais.

Desse modo, primeiramente, analisa-se a trajetória que o veículo espacial deverá realizar (percurso longo ou percurso curto). A direção é obtida por meio da avaliação da variação angular da anomalia verdadeira Δf. Logo, se

Figura 6.1 - Representação da trajetória ótima determinada pela solução do problema de Lambert.

Fonte: Adaptado de Curtis (2010).

$$\Delta f > \pi, \text{ então}, \operatorname{sign}(\pi - \Delta f) = -1 \tag{6.13}$$

O veículo espacial toma um caminho mais longo. Ou se

$$\Delta f < \pi, \text{ então}, \operatorname{sign}(\pi - \Delta f) = +1 \tag{6.14}$$

O veículo espacial toma um caminho mais curto.

Nos casos, em que $\Delta f = \pi$, a órbita de transferência não pode ser determinada, pois os vetores posição estão em direção oposta. No entanto, se $\Delta f = 0$ ou 2π, os vetores posição estão na mesma direção e a órbita é uma cônica degenerada.

A variação angular Δf é determinada pelos vetores das posições inicial e final. Assim,

$$\Delta f = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{r_1}\cdot\vec{r_2}}{|\vec{r_1}|\,|\vec{r_2}|}\right) \tag{6.15}$$

As posições e velocidades ($\vec{r_2}$,$\vec{v_2}$) de um satélite, sobre a trajetória ótima, é obtida em função dos estados iniciais ($\vec{r_1}$,$\vec{v_1}$), dados por

$$\begin{aligned} \vec{r_2} &= \bar{f}\vec{r_1} + \bar{g}\vec{v_1} \\ \vec{v_2} &= \dot{\bar{f}}\vec{r_1} + \dot{\bar{g}}\vec{v_1} \end{aligned} \tag{6.16}$$

em que $\bar{f}$, $\bar{g}$, $\dot{\bar{f}}$ e $\dot{\bar{g}}$ são os coeficientes de Lagrange, seguidas pelas suas derivadas, respectivamente, em função da variação angular Δf. Todavia, estes coeficientes podem ser obtidos em termos das variáveis universais χ e z. Assim,

$$\begin{aligned} \bar{f} &= 1 - \frac{\chi^2}{r_1}C(\bar{z}) \\ \dot{\bar{f}} &= \frac{\sqrt{\mu}}{r_1 r_2}\chi[zS(\bar{z}) - 1] \end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned} \bar{g} &= \Delta t - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\chi^3 S(\bar{z}) \\ \dot{\bar{g}} &= 1 - \frac{\chi^2}{r_2}C(\bar{z}) \end{aligned} \tag{6.18}$$

Segundo Curtis (2010), a relação entre as variáveis universais não deverá mais ser dada por $\bar{z} = \bar{\alpha}\chi^2$, pois $\bar{\alpha}$ está relacionada com o semi-eixo maior de uma órbita qualquer. Portanto, afim de eliminar a relação das variáveis com o parâmetro orbital, a nova relação será dada por

$$\chi = \sqrt{\frac{y(\bar{z})}{C(\bar{z})}} \tag{6.19}$$

em que

$$y(\bar{z}) = r_1 + r_2 - \bar{A}\frac{1 - zS(\bar{z})}{\sqrt{C(\bar{z})}} \tag{6.20}$$

Sendo que a constante $\bar{A}$ será igual a

$$\bar{A} = \operatorname{sen}\Delta f\sqrt{\frac{r_1 r_2}{1 - \cos\Delta f}} \tag{6.21}$$

Substituindo as Equações 6.19 e 6.20 nas Equações 6.17 e 6.18. E, lembrando-se que as funções $C(\bar{z})$ e $S(\bar{z})$ são dados pelas Equações 6.11 e 6.12. Os coeficientes de Lagrange serão funções em termos da variável universal $\bar{z}$ nas formas

$$\bar{f}(\bar{z}) = 1 - \frac{y(\bar{z})}{r_1} \tag{6.22}$$

$$\bar{g}(\bar{z}) = \bar{A}\sqrt{\frac{y(\bar{z})}{\mu}} \tag{6.23}$$

$$\dot{\bar{g}}(\bar{z}) = 1 - \frac{y(\bar{z})}{r_2} \tag{6.24}$$

Por meio destas funções, as velocidades de transferência serão

$$\vec{v_1} = \frac{\vec{r_2} - \bar{f}(\bar{z})\vec{r_1}}{\bar{g}(\bar{z})} \tag{6.25}$$

$$\vec{v_2} = \frac{\dot{\bar{g}}(\bar{z})\vec{r_2} - \vec{r_1}}{\bar{g}(\bar{z})} \tag{6.26}$$

Portanto, os vetores de incrementos de velocidades, $\Delta\vec{v_1}$ e $\Delta\vec{v_2}$, serão determinados com os vetores das velocidades nas órbitas inicial e final, respectivamente. Assim,

$$\Delta\vec{v_1} = \vec{v_1} - \vec{v}_{inicial} \tag{6.27}$$

$$\Delta\vec{v_2} = \vec{v}_{final} - \vec{v_2} \tag{6.28}$$

A variável universal $\bar{z}$ será determinada, a cada instante da manobra, pela função (CURTIS, 2010)

$$F(\bar{z}) = \chi(\bar{z})^3 S(\bar{z}) + \bar{A}\sqrt{y(\bar{z})} - \sqrt{\mu}t \tag{6.29}$$

considerando que $0 \leq \bar{z} \leq 4\pi^2$. Deste modo, isto será feito utilizando o método de Newton-Raphson, na qual a variável $\bar{z}$ será avaliada por meio de um processo iterativo na forma

$$\bar{z}_{i+1} = \bar{z}_i - \frac{F(\bar{z}_i)}{\dot{F}(\bar{z}_i)} \tag{6.30}$$

Quando o método convergir, determinam-se os coeficientes de Lagrange, cujo os mesmos obterão as velocidades de transferência e, portanto, os incrementos de velocidades.

6.3 Dinâmica do Veículo Espacial

Na Seção 6.1, deste capítulo, foi visto que as manobras de transferência de alto empuxo são aquelas em que o Δv é aplicado instantaneamente em um ponto qualquer de uma órbita circular ou elíptica. No entanto, para que isto aconteça, necessita-se de um sistema de propulsão com energia suficiente para que o empuxo aplicado seja com uma intensidade infinita.

O sistema de propulsão é formado por propulsores, cuja classificação está de acordo com suas características construtivas (material, dimensão e formato), potência, tipo de combustível e a intensidade do impulso específico (MAREC, 1979). O impulso específico, I_{SP}, é um parâmetro muito importante para a performance do propulsor, definido por

$$I_{SP} = \frac{\bar{\bar{E}}}{\dot{m}g_0} \tag{6.31}$$

em que $\bar{\bar{E}}$ é o empuxo aplicado, $\dot{m}$ é a razão da massa do propelente consumida ao

longo do tempo e g_0 é a aceleração padrão da gravidade. Um valor alto na intensidade do impulso específico, para um determinado tipo de propulsor, significa que o mesmo necessita de pouco propelente durante a manobra. A Tabela 6.1 apresenta os valores de impulsos específicos para alguns sistemas de propulsão conhecidos.

Tabela 6.1 - Impulsos Específicos dos Principais Sistemas de Propulsão

Sistema de Propulsão	$I_{SP}(s)$
Sólido	200-300
Líquido	250-450
Iônico	>1000

Fonte: Adaptado de Curtis (2010).

Os propulsores químicos são os propulsores mais comuns e podem ser sólidos, líquidos ou gasosos. Devido ao seu baixo valor do impulso específico, a intensidade do empuxo aplicado, em um instante de tempo, é alta. Logo, esses propulsores são mais utilizados nas transferências orbitais de alto empuxo. Os propulsores iônicos são propulsores elétricos que produzem empuxo por meio da aceleração de íons, por meio do bombardeamento de elétrons. Este sistema é mais eficiente do que o propulsor químico, pois pode produzir baixo empuxo contínuo, ao longo tempo, reduzindo a quantidade de combustível necessária durante uma missão espacial. No caso da propulsão química, a quantidade de combustível requerida é maior.

Desta maneira, para que um veículo espacial ganhe movimento, é necessário que sua massa de combustível seja consumida e ejetada durante toda trajetória, sendo em grandes ou pequenas proporções. O problema da variação da massa de combustível é tratado aplicando a segunda lei de Newton e a conservação da quantidade de movimento do veículo num todo. De acordo com Chobotov (1996), a equação do movimento de um veículo espacial com massa variável é

$$m\bar{a} = -\bar{\bar{v}}\frac{dm}{dt} + F_E \tag{6.32}$$

em que $\bar{\bar{v}}$ é a velocidade de escape das partículas, F_E é o somatório das forças externas aplicadas no veículo, como mostra a Figura 6.2. Neste caso, a aceleração terá duas componentes ao longo do caminho percorrido: na direção normal e tangencial (CURTIS, 2010). A componente da aceleração tangencial é dada por

$$\bar{a}_t = \frac{dv}{dt} \tag{6.33}$$

Figura 6.2 - Esquema das forças externas agindo sobre o veículo espacial.

Fonte: Extraído de Chobotov (1996).

A componente normal ao caminho percorrido pelo veículo espacial é definida por

$$\bar{a}_n = -v\frac{d\gamma}{dt} \tag{6.34}$$

em que γ é o ângulo da trajetória de vôo.

Todavia, interessa-se o movimento na direção tangencial. Desta forma, a Equação 6.32 é escrita como

$$m\frac{dv}{dt} = -\bar{\bar{v}}\frac{dm}{dt} - \bar{D} - mg\,\text{sen}\gamma \tag{6.35}$$

em que $\bar{D}$ é a força de arrasto.

Multiplicando-se a Equação 6.35 por dt/m, obtém-se

$$dv = -\bar{\bar{v}}\frac{dm}{m} - \frac{\bar{D}}{m}dt - g\,\text{sen}\gamma dt \tag{6.36}$$

Substituindo-se a expressão do impulso específico na Equação 6.36 e integrando-a com relação ao tempo, tem-se a equação geral do incremento de velocidade do veículo espacial, durante sua trajetória, na forma

$$\Delta v = g_0 I_{SP} \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\bar{D}}{m} dt - \int_{t_1}^{t_2} g \,\mathrm{sen}\gamma dt \tag{6.37}$$

em que g_0 é a constante gravitacional ao nível do mar, m_i é a massa inicial e m_f a massa final do veículo. O próximo item discutirá a aplicação da Equação 6.37 durante a transferência orbital de m veículo espacial.

6.3.1 O Arco de Propulsão Contínua

Segundo Chobotov (1996), a equação do incremento de velocidade aplicado ao veículo (desconsiderando a força de arrasto) é dada por

$$\Delta v = g_0 I_{SP} \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) - \int_{t_1}^{t_2} g \,\mathrm{sen}\gamma dt \tag{6.38}$$

Conforme a Equação 6.38, quando $t_1 = t_2$, o Δv aplicado se refere à manobra de alto empuxo. No entanto, é impossível aplicar um impulso de magnitude infinita em um intervalo de tempo pequeno. Logo, o impulso deverá ser distribuído, ao longo de um arco propulsivo, a cerca da localização de sua aplicação.

De acordo com Rocco (2013c), considera-se que o arco propulsivo utiliza um empuxo contínuo, limitado à capacidade máxima dos propulsores, desta maneira, ocorre um desvio em relação à órbita final desejada devido aos erros da magnitude e direção do empuxo aplicado, e portanto, o efeito do arco propulsivo não equivale à aplicação de um impulso.

A distribuição do impulso em um arco propulsivo é apresentada na Figura 6.5. Verifica-se que, durante a distribuição da manobra, em um arco propulsivo, a intensidade do Δv aplicado diminui se a direção da aplicação do empuxo é mantida constante. No entanto, o ângulo γ assume valores diferentes de zero ao longo do arco propulsivo (γ_1 e γ_2). Desta forma, para minimizar o efeito do ângulo de voo, mantendo-o próximo de zero, é necessário um método de controle da direção de apontamento do propulsor. Isto garante que o empuxo seja aplicado somente na direção tangencial à trajetória. Todavia, de acordo com Rocco (2013c), a solução deste problema exige a atuação de um sistema de controle de atitude, mas não elimina o

erro na órbita final atingida pelo veículo.

Figura 6.3 - Comparação entre as manobras de transferência impulsiva e não-impulsiva

A manobra impulsiva é apresentada pela linha sólida e a manobra não-impulsiva pela linha pontilhada.

Fonte: Chobotov (1996)

Para otimizar a manobra de transferência, em um arco propulsivo, considera-se o método de otimização das manobras orbitais com propulsão contínua (Edelbaum (1961), Biggs (1978), Biggs (1979)). Contudo, a otimização de manobras com propulsão contínua necessita de métodos numéricos e a definição de valores iniciais para a obtenção da solução. Assim, para minimizar o efeito causado pelo erro na direção de aplicação do empuxo, a execução da manobra é realizada em várias etapas. Em cada uma delas se aplica uma parte do incremento de velocidade total, de tal forma que se reduz cada arco propulsivo e, então, diminui-se o ângulo γ. Portanto, o erro na trajetória é minimizado. Todavia, este procedimento em etapas maximiza o tempo total para atingir a órbita final, de forma que a otimização do problema necessita de uma abordagem multiobjetivo. No entanto, neste trabalho, a otimização multiobjetivo não é aplicada.

6.4 Manobra Orbital de Baixo Empuxo

Estas manobras utilizam um sistema de propulsão iônica, de baixo empuxo, caracterizada por um alto impulso específico e por um baixo nível de aceleração do veículo espacial. A transferência entre as órbitas pelo veículo espacial, utilizando-se a propulsão iônica, é diferente se comparada a manobra orbital de alto empuxo, em que geralmente se utiliza a propulsão química. Devido a baixa intensidade da propulsão iônica, a manobra orbital descreve trajetórias em formato de espiral, enquanto que, a manobra de alto empuxo se aproxima de uma trajetória elíptica, como mostra a Figura 6.4.

Figura 6.4 - Comparação entre as manobras de baixo e alto empuxo.

Fonte: Adaptado de Sutton e Biblarz (2001).

A manobra de baixo empuxo é capaz de provocar pequenos ajustes na trajetória e devido a esta característica a manobra de baixo empuxo é bastante utilizada nas manobras de *rendezvous* e acoplamento.

6.5 Simulador de Trajetórias de um Veículo Espacial

As simulações das manobras orbitais, bem como o controle das trajetórias, serão feitas no *Spacecraft Trajectory Simulator* (STRS), desenvolvido por Rocco (2008b). A Figura 6.5 apresenta o esquema do simulador.

Figura 6.5 - Representação do Simulador de Trajetórias.

Fonte: Produção do autor.

Inicialmente, no simulador, são inseridos os dados de entrada que compreendem os elementos keplerianos (a, e, i, Ω, w, M) da órbita inicial, ao redor de um planeta ou um corpo celeste qualquer, os tempos inicial t_i e final t_f da trajetória, o passo da simulação e o parâmetro gravitacional μ. A partir de um tempo inicial, os elementos keplerianos iniciais do veículo espacial são convertidos nos elementos iniciais de posição da coordenada cartesiana pelo problema direto de posicionamento (BATE et al., 1971). Logo após, estes elementos são inseridos nos seguintes subprogramas do STRS: guiamento, dinâmica orbital de referência, dinâmica orbital atual e perturbação.

No guiamento, os elementos orbitais referentes a posição inicial do veículo espacial são inseridos no subprograma somente quando $t = 0$. De outra forma, para $t > 0$, são inseridos os elementos da posição de referência (determinados após o inicio da simulação). O mesmo é considerado para os elementos de posição atual, porém estes elementos são transformados em elementos keplerianos pelo problema inverso de posicionamento (BATE et al., 1971). Além destes dados, este subprograma recebe um sinal gerado pelo atuador. Assim, eles serão aplicados no processo de orientação do movimento do veículo espacial, calculando-se as mudanças de posição e velocidade do veículo, necessárias para seguir uma determinada trajetória com base no seu estado de movimento. Desta forma, o subprograma gerará um sinal que será enviado para a dinâmica orbital de referência.

Na dinâmica orbital de referência, o sinal recebido é inserido juntamente com os estados iniciais e o sinal da perturbação. Após os cálculos, este subprograma gerará um sinal que irá alimentá-lo até o término da simulação. Neste simulador, o estado de referência são as posições que o veículo espacial deverá seguir durante a simulação. Na dinâmica orbital atual, determina-se o estado atual do veículo espacial. Para isto, serão inseridos o estado inicial e os sinais gerados pela perturbação e o controle. Assim, como na referência, o sinal gerado neste subprograma irá alimentá-lo até o final da simulação.

No simulador, a posição de referência é comparada continuadamente com a posição atual do veículo espacial. Por meio da diferença entre os estados é gerado um sinal de erro que, por sua vez, é enviado para um sistema de controle PID. O controlador PID é um sistema de controle, em malha fechada, de três termos: proporcional, integral e derivativo. Dado um sinal de erro de entrada, cada um destes três controladores atuarão sobre este erro de formas diferentes (BOLTON, 1993).

No controlador proporcional, o erro de entrada gera um sinal de saída proporcional à sua entrada em função do tempo, na forma

$$c_p(t) = K_p er(t) \tag{6.39}$$

em que K_p é o ganho proporcional, $c_p(t)$ é o sinal de saída e $er(t)$ é o sinal de entrada.

No controlador integral, o erro de entrada gera um sinal de saída proporcional à sua integral no tempo igual a

$$c_i(t) = K_i \int er(t)dt \tag{6.40}$$

em que K_i é o ganho integral e $c_i(t)$ é o sinal de saída.

E, no controle derivativo, o erro de entrada gera um sinal de saída proporcional à sua taxa de variação com o tempo dado por

$$c_d(t) = K_d \frac{der(t)}{dt} \tag{6.41}$$

em que K_d é o ganho derivativo e $c_d(t)$ é o sinal de saída. Por ser "insensível" aos

sinais de erro constantes ou de variação lenta, o controlador derivativo deve ser utilizado em uma combinação com outros controladores.

Deste modo, a combinação destes três controladores formarão o controlador PID, cuja lei de controle é definida na forma

$$c(t) = K_p er(t) + K_i \int er(t)dt + K_d \frac{der(t)}{dt} \tag{6.42}$$

em que $c(t)$ é o sinal de saída do controlador.

Segundo Rocco (2013c), o controlador PID gera um sinal para os atuadores, com o intuito de reduzir o erro, no regime transitório e também no estado estacionário, definindo-se, assim, as correções a serem aplicadas. Assim, por meio do atuador é gerado um sinal de atuação que será somado às perturbações externas. Deste modo, um novo sinal é obtido de forma que seja aplicado no modelo da dinâmica do movimento orbital, determinando-se, então, os estados atuais do veículo. Esses novos elementos orbitais serão calculados por meio da solução da equação de Kepler.

$$M = u - e\,\mathrm{sen}u \tag{6.43}$$

em que M é a anomalia média, u é a anomalia excêntrica e e é a excentricidade da órbita, de maneira a determinar o estado atual do veículo.

Portanto, o estado atual estimado é comparado com o estado de referência, gerando um sinal de erro, iniciando novamente o ciclo. Nota-se que o erro na trajetória se tornará cada vez mais relevante durante ao longo do tempo devido aos efeitos das perturbações orbitais.

6.6 Controle de Trajetória Livre de Perturbações Externas

Neste trabalho, busca-se um método capaz de anular o efeito das perturbações externas, devido a atração gravitacional do Sol, pressão de radiação solar e o campo gravitacional de um corpo não-esférico, no movimento de um veículo espacial localizado, a cada instante de tempo, em um dos pontos colineares lagrangianos do sistema Terra-Lua, semelhante ao método *drag-free*.

Segundo Pugh (1959), o método de controle por *drag-free* minimiza os efeitos das perturbações externas de origem não-gravitacional (força de arrasto e pressão de

radiação solar) sobre a trajetória de um veículo espacial ao redor da Terra. Para isto, necessita-se que o mesmo seja formado por duas partes: uma parte primária e uma parte secundária. A parte primária é revestida por uma esfera oca grande (parte secundária) e se mantém localizada no centro de massa da esfera. A parte secundária é equipada por sensores que monitoram a posição da parte primária, durante toda a trajetória, sem a presença de forças ou torques externos agindo sobre a mesma. Assim, ao entrar em movimento, a parte secundária deverá acompanhar a parte primária por meio do uso de atuadores que irão reposicionar, a todo momento, a parte secundária com relação a parte primária. A atuação dos sensores fará com que a posição da parte primária se mantenha estabilizada, de modo que ambas as partes não se choquem. Devido o cancelamento das perturbações externas sobre o satélite, a trajetória da parte primária dependerá somente da força gravitacional (DEBRA, 1997; DEBRA, 2003; FLECK; STARIN, 2003).

Os primeiros estudos sobre o controle de um satélite utilizando o *drag-free* foram introduzidos por Pugh (1959) e Lange (1964), sendo que a discussão e análise matemática, aplicada em um sistema de controle, foi desenvolvida, primeiramente, por Lange (1964). A partir da década de 70, lançou-se o TRIAD, primeiro satélite que utilizou o controle por *drag-free* (DEPARTMENT et al., 1974). Anos após, em 2004, a NASA lançou a *Gravity Probe B* com o objetivo de medir e verificar o efeito da curvatura do espaço-tempo, predito pela Relatividade Geral de Einstein (NASA et al., 2004). Futuramente, a NASA lançará mais dois satélites, em uma missão que utilize o método de controle por *drag-free*: a *LISA Pathfinder* para verificar a aceleração de queda livre por meio de duas massas testes (MCNAMARA et al., 2008) e a LAGRANGE para detectar e observar ondas gravitacionais (PHYSICS..., 2012).

O método de controle deste trabalho é baseado no estudo de Rocco (2013b), que analisou os resultados obtidos por meio de uma simulação do controle da trajetória de um veículo espacial, tipo a *Gravity Probe B*, utilizando o método de controle por *drag-free* modelado no ambiente de simulação STRS. Logo, para as manobras orbitais de transferência, a referência é determinada a partir do estado inicial com o sinal da perturbação, gerando um sinal que alimentará, a cada instante de tempo, a dinâmica de referência até o término da simulação. Para as manobras de correção de órbita, a referência é dada somente pela posição dos pontos colineares lagrangianos, que serão determinados a cada instante de tempo. Desta forma, para ambos os casos, o estado de referência será comparado com o estado atual do veículo espacial, gerando um sinal de erro que será enviado para um sistema de controle PID, em malha fechada. Portanto, o sinal de controle com a perturbação serão inseridos na

dinâmica do estado atual do veículo espacial.

7 RESULTADOS GERAIS

Neste capitulo, objetiva-se apresentar os resultados gerais referentes às manobras orbitais de transferência e de correção de órbita para atingir cada um dos pontos colineares lagrangianos do sistema Terra-Lua, utilizando o arco de propulsão contínua com o sistema de controle PID em malha fechada.

7.1 Considerações Sobre as Simulações

Neste trabalho, para a realização das simulações, considera-se:

a) Um estudo sobre a passagem do veículo espacial através dos cinturões de radiação de Van Allen, modelado conforme a seção 3.2, utilizando as manobras de alto e baixo empuxo, além da combinação entre as mesmas, buscando-se o tempo que o veículo espacial poderá permanecer nas regiões de radiação;

b) Por meio deste estudo, estima-se a taxa de dosagem equivalente de radiação dentro do veículo espacial utilizando a Equação 3.18. Neste caso, o veículo é considerado como uma esfera perfeita de 100 cm de raio, blindado por uma camada de 1 mm de espessura de silício, tungstênio, tântalo, alumínio e ou chumbo. A Tabela 7.1 apresenta os valores das densidades dos materiais utilizados nas simulações;

Tabela 7.1 - Densidades dos materiais de blindagem.

Materiais	Densidade (kg/cm^3)
Alumínio	0,002697
Tungstênio	0,019250
Chumbo	0,011340
Tântalo	0,016650
Silício	0,002330

c) No modelo dos cinturões de Van Allen, considera-se que suas regiões de radiação serão delimitadas pelo parâmetro de McIlwain, isto é, as distâncias máximas das linhas dos campos magnéticos quando estas cruzam o equador magnético, limitadas entre $1 \leq L \leq 6$, a intensidade do fluxo de partículas (elétrons ou prótons) e o ângulo de latitude magnética, sendo que o cinturão

interno estará entre $\pm 40°$ e o cinturão externo entre $\pm 65°$;

d) Para as manobras orbitais de alto empuxo, considera-se um sistema de propulsão definido por um propulsor químico com um impulso específico $I_{SP} = 460$ s e, para as manobras de baixo empuxo, considera-se um propulsor iônico tipo Hall com um impulso específico $I_{SP} = 2000$ s. O propulsor iônico, neste caso, é o PHALL II, desenvolvido na UnB (Universidade de Brasília), e possui uma capacidade máxima de 150 mN (FERREIRA et al., 2015);

e) As referências das manobras orbitais serão dadas pelos elementos orbitais das pseudo-órbitas dos pontos colineares lagrangianos L_1, L_2 e L_3, determinadas na seção 4.4;

f) Para simular com maior precisão o ambiente espacial, consideram-se as perturbações externas como a atração gravitacional do Sol, a pressão de radiação solar e os coeficientes dos harmônicos esféricos dos potenciais gravitacionais da Terra e da Lua;

g) Todas estas especificações serão aplicadas no simulador STRS, descrito na seção 6.5, onde serão realizadas as simulações das manobras orbitais de transferência e de correção de órbita.

7.2 Passagem do Veículo Espacial Através dos Cinturões de Van Allen

Primeiramente, estuda-se a passagem de um veículo espacial através dos cinturões de Van Allen, considerando uma alta e baixa atividade solar, nos períodos de setembro-novembro de 2012 e janeiro-março de 2015, respectivamente. Logo, conforme os resultados apresentados no item 3.2.2, durante uma alta atividade solar, em setembro de 2012, confirmou-se a presença de uma terceira região de radiação (BAKER et al., 2013), por meio da análise dos gráficos, somente para elétrons com energias iguais a 3,4 MeV e 4,2 MeV. Para uma baixa atividade solar, em janeiro de 2015 (ver item 3.2.1), não foi verificado qualquer tipo de anomalia presente, como também para as regiões que contém somente prótons tanto em uma alta e baixa atividade solar. Desta forma, neste trabalho, para simular a passagem do veículo espacial pelas zonas de radiação, escolheu-se regiões de elétrons com energia igual a 4,2 MeV e prótons com energia iguais a 21,25 MeV, no período de alta atividade solar, e regiões de elétrons com energia igual a 1,8 MeV e prótons com energia igual a 21,25 MeV, no período de baixa atividade solar.

7.2.1 Alta Atividade Solar

A Tabela 7.2 apresenta os dados iniciais de cada uma das manobras simuladas durante uma alta atividade solar. Os valores da inclinação, longitude do nodo ascendente e o argumento do periapside são semelhantes aos valores dos mesmos na pseudo-órbita do ponto colinear lagrangiano L_1, na época que o veículo espacial atingir a órbita de referência, de modo que a trajetória de transferência do veículo seja mantida no mesmo plano que as órbitas inicial e final.

Tabela 7.2 - Elementos keplerianos das órbitas iniciais para uma alta atividade solar.

Elementos Keplerianos	Manobras		
	Alto Empuxo	Baixo Empuxo	Alto + Baixo Empuxo
a (km)	12725	8000	8000
e	0,449901768	0	0
i (°)	21,127885611794	21,127885611794	21,127885611794
Ω (°)	347,47085222111	347,47085222111	347,47085222111
w (°)	260,91427989341	260,91427989341	260,91427989341
M (°)	1,09621581694	0	0

Fonte: Produção do autor.

Logo, a manobra de alto empuxo iniciou-se em 3 de setembro de 2012 às 23 h 03 min 40 s. A Figura 7.1 (a) apresenta a trajetória do veículo espacial pelos cinturões de radiação de Van Allen que contém somente elétrons, entre os dias 3 e 4 de setembro de 2012. Observa-se que o veículo espacial iniciou sua manobra de alto empuxo a partir de uma órbita de baixa altitude, ao redor da Terra, atravessando o cinturão interno, a região de baixo fluxo de radiação (em azul) e o terceiro cinturão (conforme o item 3.2.2, verificou-se que, neste período de tempo, apareceu um terceiro cinturão de radiação). O gráfico das taxas de dosagens equivalente de radiação de elétrons referente a cada um dos materiais de blindagem é apresentado na Figura 7.1 (b). Para a região que contém somente prótons, observa-se na Figura 7.1 (a) que, o veículo espacial atravessou somente o cinturão interno. O gráfico das taxas de dosagens equivalente de radiação de prótons referente a cada um dos materiais de blindagem é apresentado na Figura 7.1 (d).

A manobra de baixo empuxo iniciou em 1 de setembro de 2012 às 0 h 0 min 0 s. No conjunto de Figuras 7.2 são apresentados as transformações das regiões de radiação

referente à cada período de tempo, durante a alta atividade solar. Deste modo, na Figura 7.2 (a) as regiões de radiação são formadas somente pelos cinturões interno e externo. Na Figura 7.2 (b), o cinturão externo desaparece, o que resulta no aparecimento do terceiro cinturão de radiação com o cinturão interno. Após alguns dias, o cinturão externo reaparece, como mostra a Figura 7.2 (c) e o terceiro cinturão de radiação se manterá até o final do mês de setembro de 2012 (ver Figura 7.2 (d)). Para este conjunto de figuras, observa-se que o veículo espacial permaneceu somente na região do cinturão interno. No entanto, entre outubro e novembro de 2012, o veículo espacial prosseguiu para a região de baixo fluxo de partículas (ver o conjunto de Figuras 7.3). A partir de novembro de 2012, o veículo espacial se deslocou para a zona externa de radiação, como mostra a Figura 7.4. Os gráficos das taxas de dosagens equivalente de radiação de elétrons para cada período da manobra, referente a cada um dos materiais de blindagem, são apresentados nas Figuras 7.2 (e), 7.3 (c) e 7.4 (b). Para região que contém somente prótons, o veículo espacial permaneceu somente no cinturão interno entre os meses de setembro e outubro, como mostra o conjunto de Figuras 7.5. Os gráficos das taxas de dosagens equivalente de radiação de prótons para cada período da manobra, referente a cada um dos materiais de blindagem, são apresentados nas Figuras 7.5 (b) e 7.5 (d).

Para a combinação entre as manobras de alto e baixo empuxo, inicialmente, utilizou-se a manobra de alto empuxo para o veículo espacial atravessar o cinturão interno, como mostra a Figura 7.6 (a). Deste modo, o veículo foi injetado na região de baixo fluxo de partículas (ver Figura 7.6 (b)), onde permaneceu por meio da manobra de baixo empuxo. Ao se aproximar da zona externa de radiação, o veículo utilizou novamente a manobra de alto empuxo, sendo então injetado para fora da região de radiação, como apresenta a Figura 7.6 (c).

A Tabela 7.3 apresenta o tempo que o veículo espacial permaneceu em cada uma das regiões de radiação (elétron e próton) referente a cada tipo de manobra. Além disso, são apresentados os valores médios das taxas de dosagem equivalente de radiação para os materiais que absorveram pouca radiação que, neste caso, como foram apresentados nos gráficos, são o tungstênio, tântalo e o chumbo.

7.2.2 Baixa Atividade Solar

A Tabela 7.4 apresenta os dados iniciais de cada uma das manobras simuladas durante uma baixa atividade solar.

Para este estudo, o veículo espacial iniciou sua manobra de alto empuxo em 5 de

Figura 7.1 - Manobra de alto empuxo nas regiões de elétrons e prótons durante o mês de setembro de 2012.

(a) Trajetória na Região de Elétrons

(b) Taxa Equivalente de Elétrons

(c) Trajetória na Região de Prótons

(d) Taxa Equivalente de Prótons

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.2 - Manobra de baixo empuxo na região de elétrons durante o mês de setembro de 2012.

(a) Trajetória entre 01-02/09/12

(b) Trajetória entre 03-04/09/12

(c) Trajetória entre 05-06/09/12

(d) Trajetória entre 07-30/09/12

(e) Taxa de Dosagem de Elétrons

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.3 - Manobra de baixo empuxo na região de elétrons durante o mês de outubro de 2012.

(a) Trajetória entre 01-08/10/12

(b) Trajetória entre 09-31/10/12

(c) Taxa de Dosagem de Elétrons

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.4 - Manobra de baixo empuxo na região de elétrons durante o mês de novembro de 2012.

(a) Trajetória na Região de Elétrons

(b) Taxa de Dosagem de Elétrons

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.5 - Manobra de baixo empuxo na região de prótons entre os meses de setembro-outubro de 2012.

(a) Trajetória em Setembro

(b) Taxa de Dosagem de Prótons em Setembro

(c) Trajetória em Outubro

(d) Taxa de Dosagem de Prótons em Outubro

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.6 - Manobras de alto e baixo empuxo nas regiões de elétrons durante o mês de setembro de 2012.

(a) Trajetória entre 01-02/09/12

(b) Trajetória entre 03-04/09/12

(c) Trajetória entre 05-15/09/12

(d) Taxa de Dosagem de Elétrons

Fonte: Produção do autor.

Tabela 7.3 - Resultado da passagem do veículo espacial pelos cinturões de Van Allen, no período de alta atividade solar (dia).

Manobras	Tempo (dia)		Dosagem (rad/s)	
	Elétron	Próton	Elétron	Próton
AE[1]	<1	<1	1.10^{-5}	5.10^{-6}
BE[2]	50	35	1.10^{-4}	5.10^{-6}
AE + BE[3]	14		2.10^{-3}	

[1]AE - Alto Empuxo.

[2]BE - Baixo Empuxo.

[3]AE + BE - Alto + Baixo Empuxo.

Tabela 7.4 - Elementos keplerianos das órbitas iniciais para uma baixa atividade solar.

Elementos Keplerianos	Manobras		
	Alto Empuxo	Baixo Empuxo	Alto + Baixo Empuxo
a (km)	12690	8000	8000
e	0,448384554	0	0
i (°)	18,3889408471	18,3889408471	18,3889408471
Ω (°)	356,52788821139	356,52788821139	356,52788821139
w (°)	345,4249873316	345,4249873316	345,4249873316
M (°)	0,09800692252	10	10

janeiro de 2015 às 20 h 51 min 44 s. Conforme os resultados analisados no item 3.2.1, durante uma baixa atividade solar existem apenas as regiões clássicas de radiação, isto é, os cinturões interno e externo. O conjunto de Figuras 7.7 mostra a passagem do veículo espacial nas regiões que contém somente elétrons (Figura 7.7 (a)) e prótons (ver Figura 7.7 (c)). As taxas de dosagens equivalente de radiação, referente a cada material de blindagem, são apresentados nas Figuras 7.7 (b) e 7.7 (d).

Sobre a manobra de baixo empuxo, esta iniciou em 1 de janeiro de 2015 às 0 h 0 min 0 s. O conjunto de Figuras 7.8 apresenta a passagem do veículo espacial através dos cinturões clássicos de radiação de Van Allen, contendo somente elétrons, e suas respectivas taxas de dosagem de radiação, entre os meses de janeiro-março de 2015. Inicialmente, o veículo espacial permaneceu apenas na região do cinturão interno, seguindo para a região de baixo fluxo de partículas (ver Figura 7.8 (c)) e, assim, deslocou-se para a zona externa de radiação, como apresenta a Figura 7.8 (e). Na região que contém somente prótons, o veículo permaneceu somente no cinturão interno, entre os meses de janeiro-fevereiro, como apresenta o conjunto de Figuras 7.9

Assim, como no item anterior, estudou-se a combinação entre as manobras de alto e de baixo empuxo, aplicada apenas na passagem do veículo espacial através das regiões de elétrons. A manobra, neste caso, iniciou-se na mesma época que a manobra de baixo empuxo e com os mesmos elementos keplerianos, como mostra a Tabela 7.4. O conjunto de Figuras 7.10 apresenta a trajetória do veículo pelas zonas clássicas de radiação, durante o mês de janeiro de 2015 e sua taxa de dosagem equivalente de radiação.

A Tabela 7.5 apresenta o tempo que o veículo espacial permaneceu em cada uma das regiões de radiação (elétrons e prótons) referente à cada tipo de manobra e os respectivos valores médios das taxas de dosagem equivalente de radiação para os materiais que absorveram pouca radiação que, neste caso, novamente foram o tungstênio, tântalo e o chumbo.

Tabela 7.5 - Resultado da passagem do veículo espacial pelos cinturões de Van Allen, no período de baixa atividade solar (dia).

Manobras	Tempo (dia)		Dosagem (rad/s)	
	Elétron	Próton	Elétron	Próton
AE[1]	<1	<1	5.10^{-3}	5.10^{-6}
BE[2]	58	34	5.10^{-3}	5.10^{-6}
AE + BE[3]	2		2.10^{-3}	

[1]AE - Alto Empuxo.

[2]BE - Baixo Empuxo.

[3]AE + BE - Alto + Baixo Empuxo.

Figura 7.7 - Manobra de alto empuxo nas regiões de elétrons e prótons durante o mês de janeiro de 2015.

(a) Trajetória na Região de Elétrons

(b) Taxa de Dosagem de Elétrons

(c) Trajetória na Região de Prótons

(d) Taxa de Dosagem de Prótons

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.8 - Manobra de baixo empuxo nas regiões de elétrons entre os meses de janeiro-março de 2015.

(a) Trajetória em Janeiro

(b) Taxa de Dosagem de Elétrons em Janeiro

(c) Trajetória em Fevereiro

(d) Taxa de Dosagem de Elétrons em Fevereiro

(e) Trajetória em Março

(f) Taxa de Dosagem de Elétrons em Março

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.9 - Manobra de baixo empuxo nas regiões de prótons entre os meses de janeiro-fevereiro de 2015.

(a) Trajetória entre Janeiro-Fevereiro

(b) Taxa de Dosagem de Prótons em Janeiro

(c) Taxa de Dosagem de Prótons em Fevereiro

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.10 - Manobras de alto e baixo empuxo nas regiões de elétrons durante o mês de janeiro de 2015.

(a) Trajetória em Janeiro

(b) Taxa de Dosagem de Elétrons em Janeiro

Fonte: Produção do autor.

7.3 Manobra de Transferência e Correção da Órbita Durante a Passagem do Veículo Espacial Pelas Zonas de Radiação

De acordo com os resultados obtidos, apresentados nas Tabelas 7.3 e 7.5, a manobra de alto empuxo foi a única que manteve o veículo espacial em um curto período de tempo e com a menor taxa de dosagem equivalente de radiação, tanto nas regiões de radiação que contém somente elétrons quanto naquela que contém somente prótons. Logo, nesta seção serão apresentados os resultados da manobra de alto empuxo, nos períodos de baixa e alta atividade solar, para atingir apenas o ponto colinear lagrangiano L_1, obtido na seção 4.4.

7.3.1 Manobra de Alto Empuxo e Correção da Órbita em Setembro de 2012

Inicialmente, determinou-se a manobra ótima de transferência. Para isto, buscou-se a solução do problema de Lambert (seção 6.2), obtendo-se, assim, os incrementos de velocidade que foram aplicados no ponto inicial da órbita de transferência, para que o veículo deixasse a órbita inicial, e no ponto final da órbita de transferência, para que o veículo fosse injetado na órbita final. Os incrementos de velocidades inicial e final serão aplicados em torno das posições de aplicação, porém, deve-se ressaltar, novamente, que estes arcos propulsores não são equivalentes à aplicação do impulso,

pois produzem um desvio em relação à órbita final devido aos erros da intensidade e direção dos impulsos aplicados.

Desta forma, o próximo passo será simular a manobra de alto empuxo, que transferirá o veículo espacial de uma órbita baixa, ao redor da Terra, até o ponto colinear lagrangiano L_1. Para iniciar o movimento orbital, saindo de uma órbita de baixa altitude, ao redor da Terra, até aproximadamente ao semi-eixo maior da trajetória, utilizou-se um propulsor com capacidade de 10580 N, como apresenta a Figura 7.11 (a), que ilustra o primeiro arco propulsivo. Observa-se que este varia, em todas as direções, ao longo da aplicação do arco. Para atingir o ponto colinear lagrangiano L_1, utilizou-se um propulsor com uma capacidade de 8083.0255 N, como apresenta a Figura 7.11 (b), que ilustra o segundo arco propulsivo. Seus respectivos valores de incrementos de velocidades, aplicados no ponto inicial da órbita de transferência, para que o veículo deixasse a órbita inicial, e no ponto final da órbita de transferência, para que o veículo fosse injetado na órbita final são apresentados nas Figuras 7.11 (c) e 7.11 (d).

Para este estudo, considerou-se a massa total do satélite (carga + propelente) igual a 2000 kg. A Figura 7.12 apresenta a quantidade de propelente utilizada ao longo da manobra de alto empuxo. Verifica-se que foram gastos, aproximadamente, 749,6959985 kg de propelente para levar um satélite de uma órbita baixa, ao redor da Terra, até aproximadamente o ponto lagrangiano L_1, o que resultou em em saldo de 1250,3040014508 kg de propelente para ainda manter o satélite sobre o ponto colinear lagrangiano.

O conjunto de Figuras 7.13 apresenta a variação dos elementos keplerianos a, e e i na simulação da manobra orbital impulsiva em malha fechada. Inicialmente, durante a aplicação do primeiro arco propulsivo, o semi-eixo maior do satélite se estabiliza em, aproximadamente, 171500 km, como mostra a Figura 7.13 (a). Logo após, quando se aciona o segundo arco propulsivo, a órbita da trajetória do veículo espacial atinge, aproximadamente, o valor próximo ao do semi-eixo maior da órbita do ponto colinear L_1. A Figura 7.13 (b) mostra o desvio da variação do semi-eixo maior da trajetória durante a manobra. A excentricidade da órbita de transferência do veículo espacial, durante a aplicação do primeiro arco propulsivo, se estabiliza em, aproximadamente, 0.96 até a aplicação do segundo arco, cuja excentricidade decai até atingir, aproximadamente, o valor da excentricidade da órbita final, como mostra a Figura 7.13 (c). O desvio da excentricidade durante a manobra até atingir a órbita do ponto L_1 é apresentado na Figura 7.13 (d). A variação da inclinação do

Figura 7.11 - Relação entre as capacidades dos propulsores e os incrementos de velocidades aplicados até atingir o ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de setembro de 2012.

(a) Primeiro Arco Propulsivo

(b) Segundo Arco Propulsivo

(c) Primeiro Arco Propulsivo

(d) Segundo Arco Propulsivo

Fonte: Produção do autor.

plano da órbita de transferência é pequena, como mostra a Figura 7.13 (e). Ao aplicar o primeiro propulsor, o ângulo de inclinação sofre pequenas variações diminuindo seu valor ao longo do tempo. No entanto, quando é aplicado o segundo propulsivo, a inclinação sofre somente uma pequena variação, aumentando, até atingir aproximadamente o valor do ângulo da órbita do ponto lagrangiano L_1. A Figura 7.13 (f) apresenta o desvio do ângulo de inclinação durante toda a manobra.

Os valores dos elementos keplerianos das órbitas inicial, final e a atingida pelo veículo espacial são apresentados na Tabela 7.6. A última coluna mostra os desvios obtidos entre as órbitas final e a atingida. Observa-se que existe um desvio aparente com

Figura 7.12 - Variação da massa de propelente durante a manobra de alto empuxo até atingir o ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de setembro de 2012.

Fonte: Produção do autor.

relação ao semi-eixo maior ($\approx$ 33 m) e o argumento do periapside ($\approx 2°$). Devido a isto, será necessário aplicar uma manobra de ajuste capaz de anular as perturbações externas ao sistema, buscando-se aproximar o veículo espacial à posição do ponto colinear lagrangiano L_1. Este ajuste será realizado com a aplicação de um método que utiliza a manobra de baixo empuxo juntamente com um sistema de controle PID, em malha fechada, que corrigirá a órbita do veículo espacial com relação a pseudo-órbita do ponto colinear L_1 não-perturbado, a cada instante de tempo. As perturbações externas consideradas, neste caso, são a atração gravitacional do Sol, a pressão de radiação solar e os coeficientes dos harmônicos esféricos zonais (até J_6) para os potenciais gravitacionais da Terra e da Lua.

Neste trabalho, para corrigir a trajetória do veículo espacial sobre a pseudo-órbita de cada um dos pontos colineares lagrangianos, empregou-se um método que utiliza diferentes conjuntos de ganho do controlador, dependendo das condições estabelecidas entre a posição atual e a referência, para diminuir os desvios das posições e velocidades durante a manobra. Deste modo, utilizou-se um sistema de propulsores iônicos com capacidade total de 10 N. A Figura 7.14 (a) apresenta a variação do empuxo aplicado ao longo da manobra, durante um período igual ao período da órbita da Lua, ao redor da Terra. Neste caso, verificou-se que quando a órbita do veículo espacial se aproxima da pseudo-órbita do ponto colinear L_1, o empuxo aplicado varia em torno de 1.6 N, durante toda a manobra. Devido a isto, a massa do propelente

Figura 7.13 - Variação dos elementos keplerianos da trajetória até atingir o ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de setembro de 2012.

Fonte: Produção do autor.

Tabela 7.6 - Elementos keplerianos das órbitas inicial, final e atingida para uma alta atividade solar.

Elementos Keplerianos	Órbita			$\|\Delta\|$[1]
	Inicial	Final (Referência)	Atingida	
a (km)	12275	232954.35413086	232954.3207603	0.03337056
e	0.449901768	0.44969242819728	0.43982520760272	0.009867220595
i (°)	21.127885611794	-	21.103113036099	0.024772575
Ω (°)	347.47085222111	-	347.47023371431	0.0006185068
w (°)	260.91427989341	-	263.00664260697	2.092362714
M (°)	1.09621581694	181.09621581694	181.42056557187	0.324349754

[1] $|\Delta|$ - Diferença entre as órbitas final (referência) e atingida.

gasta será de 230,8605 kg, como mostra a Figura 7.14 (b), o que resultará em um saldo de 1019,443501 kg.

Figura 7.14 - Variação do empuxo aplicado e da massa do propelente durante a correção da órbita do veículo espacial sobre a pseudo-órbita do ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de setembro de 2012.

(a) (b)

Fonte: Produção do autor.

A Figura 7.15 apresenta a variação do somatório das forças gravitacionais da Terra e da Lua. Verifica-se que, conforme a posição do veículo espacial se aproxima da localização do ponto colinear lagrangiano, o valor do somatório diminui, ao longo do

tempo, até atingir, aproximadamente, a ordem de 10^{-9} N. A variação dos elementos keplerianos obtidos por meio da correção da órbita do veículo espacial com relação a pseudo-órbita do ponto colinear L_1 é apresentado pelo conjunto de Figuras 7.16. Nota-se, então, que as curvas que definem os elementos orbitais do veículo espacial (curvas laranjas) se sobrepõem às curvas azuis que definem os elementos orbitais do ponto lagrangiano L_1, com a atuação do sistema de controle. Verifica-se que após $t = 1.10^6$ s, o veículo estará praticamente sobre o ponto lagrangiano. No intervalo $0,5.10^6 < t < 0,6.10^6$, a variação brusca que pode ser observada em alguns gráficos, evidenciam a mudança dos ganhos do controlador realizada com o objetivo de aprimorar a correção da trajetória pelo sistema de controle, de modo a eliminar o erro entre as trajetórias de referência e atual.

Figura 7.15 - Variação do somatório das forças em equilíbrio durante a correção da órbita do veículo espacial sobre a pseudo-órbita do ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de setembro de 2012.

Fonte: Produção do autor.

7.3.2 Manobra de Alto Empuxo e Correção da Órbita em Janeiro de 2015

Assim, como o caso anterior, determinou-se inicialmente a manobra ótima de transferência por meio da solução do problema de Lambert, obtendo-se, assim, os incrementos de velocidade que foram aplicados no ponto inicial da órbita de transferência, para que o veículo deixasse a órbita inicial, e no ponto final da órbita de transferência, para que o veículo fosse injetado na órbita final. Desta forma, simulou-se

Figura 7.16 - Variação dos elementos keplerianos do veículo espacial até atingir o ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de setembro de 2012.

Fonte: Produção do autor.

a manobra de alto empuxo, aplicando os incrementos de velocidades inicial e final em torno das posições de aplicação dos arcos propulsivos, para que o veículo espacial seja transferido de uma órbita baixa, ao redor da Terra, até o ponto colinear lagrangiano L_1.

Assim, para iniciar o movimento orbital, saindo de uma órbita de baixa altitude, ao redor da Terra, utilizou-se um propulsor com capacidade de 19530 N, como apresenta a Figura 7.17 (a). Observa-se que este varia, em todas as direções, ao longo da aplicação do arco. Para atingir o ponto colinear lagrangiano L_1, utilizou-se um propulsor com uma capacidade de 7899,9 N, como mostra a Figura 7.17 (b). Seus respectivos valores de incrementos de velocidades, aplicados no ponto inicial da órbita de transferência, para que o veículo deixe a órbita inicial, e no ponto final da órbita de transferência, para que o veículo seja injetado na órbita final são apresentados nas Figuras 7.17 (c) e 7.17 (d).

A Figura 7.18 apresenta a quantidade de propelente utilizada ao longo da manobra de alto empuxo. Verifica-se que foram gastos 773,6730923 kg de propelente para levar um satélite de uma órbita baixa, ao redor da Terra, até o ponto lagrangiano L_1, o que resultou em 1226,3269076553 kg de propelente para ainda manter o satélite sobre o ponto colinear lagrangiano.

O conjunto de Figuras 7.19 apresenta a variação dos elementos keplerianos a, e e i na simulação da manobra orbital impulsiva em malha fechada. Inicialmente, durante a aplicação do primeiro arco propulsivo, o semi-eixo maior do satélite se estabiliza em, aproximadamente, 172000 km, como mostra a Figura 7.19 (a). Logo após, quando se aciona o segundo arco propulsivo, a órbita da trajetória do veículo espacial atinge, aproximadamente, o valor próximo ao do semi-eixo maior da órbita do ponto colinear L_1. A Figura 7.19 (b) mostra o desvio da variação do semi-eixo maior da trajetória durante a manobra. A excentricidade da órbita de transferência do veículo espacial, durante a aplicação do primeiro arco propulsivo, se estabiliza em, aproximadamente, 0.96 até a aplicação do segundo arco, cuja excentricidade decai até atingir, aproximadamente, o valor da excentricidade da órbita final, como mostra a Figura 7.19 (c). O desvio da excentricidade durante a manobra até atingir a órbita do ponto L_1 é apresentado na Figura 7.19 (d). A variação da inclinação do plano da órbita de transferência é pequena, como mostra a Figura 7.19 (e). Ao aplicar o primeiro propulsivo, o ângulo de inclinação sofre pequenas variações diminuindo seu valor ao longo do tempo. No entanto, quando é aplicado o segundo arco propulsivo, a inclinação sofre somente uma pequena variação, aumentando, até

Figura 7.17 - Relação entre as capacidades dos propulsores e os incrementos de velocidades aplicados até atingir o ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de janeiro de 2015.

(a) Primeiro Arco Propulsivo

(b) Segundo Arco Propulsivo

(c) Primeiro Arco Propulsivo

(d) Segundo Arco Propulsivo

Fonte: Produção do autor.

atingir aproximadamente o valor do ângulo da órbita do ponto lagrangiano L_1. A Figura 7.19 (f) apresenta o desvio do ângulo de inclinação durante toda a manobra.

Os valores dos elementos keplerianos das órbitas inicial, final e a atingida pelo veículo espacial são apresentados na Tabela 7.7. A última coluna mostra desvios obtidos entre a órbitas final e a atingida. Observa-se que existe um desvio grande com relação ao semi-eixo maior de, aproximadamente, 34 m. Devido a isto, aplica-se a manobra de ajuste, buscando-se aproximar o veículo espacial à posição do ponto colinear lagrangiano L_1. Assim, como no item anterior, as perturbações externas consideradas serão a atração gravitacional do Sol, a pressão de radiação solar e os

Figura 7.18 - Variação da massa de propelente durante a manobra de alto empuxo até atingir o ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de janeiro de 2015.

Fonte: Produção do autor.

coeficientes dos harmônicos esféricos zonais (até J_6) da Terra e da Lua.

Tabela 7.7 - Elementos keplerianos das órbitas inicial, final e atingida para uma baixa atividade solar.

Elementos Keplerianos	Órbita			$\|\Delta\|$[1]
	Inicial	Final (referência)	Atingida	
a (km)	12690	233543,83555158	233543,87027709	0,03472551
e	0,448384554	0,4483483568526	0,44396666530568	0,004381691547
i (°)	18,3889408471	-	18,66876155684	0,022064691
Ω (°)	356,52788821139	-	356,67574003698	0,147851825
w (°)	345,4249873316	-	346,07703330333	0,652045971
M (°)	0,09800692252	180,09800692252	181,15649712528	0,823572099

[1] $|\Delta|$ - Diferença entre as órbitas final (referência) e atingida.

A Figura 7.20 (a) apresenta a variação do empuxo aplicado ao longo da manobra, durante um período igual ao período da órbita da Lua, ao redor da Terra. Neste caso, verifica-se que quando a órbita do veículo espacial se aproxima da pseudo-órbita do ponto colinear L_1, o empuxo aplicado varia em torno de 1,58 N, durante toda a manobra. Devido a isto, a massa do propelente gasta é de 221,8244 kg, como mostra

Figura 7.19 - Variação dos elementos keplerianos da trajetória até atingir o ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de janeiro de 2015.

Fonte: Produção do autor.

a Figura 7.20 (b), o que resultará em um saldo de 1004,502508 kg.

Figura 7.20 - Variação do empuxo aplicado e da massa do propelente durante a correção da órbita do veículo espacial sobre a pseudo-órbita do ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de janeiro de 2015.

(a) (b)

Fonte: Produção do autor.

Na Figura 7.21, observa-se que o valor do somatório das forças gravitacionais da Terra e da Lua diminuem, ao longo do tempo, até atingir a ordem de 10^{-9} N. A variação dos elementos keplerianos obtidos por meio da correção da órbita do veículo espacial com relação a pseudo-órbita do ponto colinear L_1 é apresentado pelo conjunto de Figuras 7.22.

Figura 7.21 - Variação do somatório das forças em equilíbrio durante a correção da órbita do veículo espacial sobre a pseudo-órbita do ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de janeiro de 2015.

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.22 - Variação dos elementos keplerianos do veículo espacial até atingir o ponto colinear lagrangiano L_1 durante o mês de janeiro de 2015.

Fonte: Produção do autor.

7.4 Manobras de Correção da Órbita de um Veículo Espacial para Atingir os Pontos Colineares Lagrangianos

Nesta seção são apresentados os resultados referentes às manobras de transferência e de correção de órbita para atingir cada um dos pontos colineares lagrangianos do sistema Terra-Lua, no período de setembro de 2012, considerando as pseudo-órbitas, determinadas no item 4.4, como referências. Para isto, aplica-se, novamente, a manobra de ajuste, buscando-se aproximar o veículo espacial a posição dos pontos L_1, L_2 e L_3. Todavia, neste estudo, além de apresentar os resultados da manobra de correção de órbita considerando, primeiramente, a perturbação da atração gravitacional do Sol, pressão de radiação solar e os coeficientes dos harmônicos esféricos zonais até J_6 dos corpos primários; logo após, apresentam-se os resultados com a perturbação da atração gravitacional do Sol, pressão de radiação solar e o somatório dos coeficientes dos harmônicos esféricos zonais, sectoriais e tesserais dos corpos primários[1], ambos em grau e ordem.

Assim, primeiramente, simulou-se a manobra de alto empuxo para atingir os pontos colineares lagrangianos. Desta forma, para cada um destes pontos, determinou-se a manobra ótima de transferência por meio da solução do problema de Lambert, obtendo-se, assim, os incrementos de velocidade que foram aplicados no ponto inicial da órbita de transferência, para que o veículo deixasse a órbita inicial, e no ponto final da órbita de transferência, para que o veículo fosse injetado na órbita final. A Tabela 7.8 apresenta os valores dos empuxos aplicados, para iniciar o movimento orbital, saindo de uma órbita de baixa altitude, ao redor da Terra, até aproximadamente ao semi-eixo maior da trajetória, e para atingir o ponto colinear lagrangiano, respectivamente, e também a quantidade de propelente utilizada em cada uma das manobras de transferência.

Tabela 7.8 - Valores de empuxo aplicado e propelente gasto durante a manobra orbital de transferência, para cada um dos pontos colineares lagrangianos, no mês de setembro de 2012

Pontos	Empuxo (N)		Massa (kg)	
	Inicial	Final	Consumida	Saldo
L_1	10580	8083,0255	749,6959985	1250,3040014508
L_2	8382	8099,7411	1163,778793	836,22120685263
L_3	12100	21884,26	1185,993522	814,00647820232

[1]Os valores dos coeficientes dos harmônicos esféricos dos potenciais gavitacionais da Terra e da Lua são dados pelo próprio ambiente computacional do simulador.

Os conjuntos de Figuras 7.23 e 7.24 apresentam as variações dos elementos keplerianos a, e e i nas simulações das manobra orbitais impulsivas, em malha fechada, para atingir os pontos colineares L_2 e L_3, respectivamente. Os valores dos elementos keplerianos das órbitas inicial, final e a atingida pelo veículo espacial, nas manobras para atingir os pontos L_2 e L_3, são apresentados na Tabela 7.9 e 7.10, respectivamente.

Tabela 7.9 - Elementos keplerianos das órbitas inicial, final e atingida para o ponto colinear L_2.

Elementos Keplerianos	Órbita			$\|\Delta\|$[1]
	Inicial	Final (referência)	Atingida	
a (km)	12050	797543,64354802	797543,09134186	0,55220616
e	0.419087136	0.4193756258492	0,43063179370928	0,011256167
i (°)	21,127885611816	-	21,118171067247	0,009714544569
Ω (°)	347,47085222152	-	347,44359257823	0,027259643
w (°)	82,698505631111	-	82,471027114658	0,224748516
M (°)	179,5104021	359.51040208533	1,1074169930437	1,597014908

[1] $|\Delta|$ - Diferença entre as órbitas final (referência) e atingida.

Tabela 7.10 - Elementos keplerianos das órbitas inicial, final e atingida para o ponto colinear L_3.

Elementos Keplerianos	Órbita			$\|\Delta\|$[1]
	Inicial	Final (referência)	Atingida	
a (km)	8750	480643,54727526	480643,56747978	0,02020452
e	0,2	0,20194757830636	0,23596951461302	0,016493731
i (°)	21,28495375421	-	21,268700062746	0,016253691
Ω (°)	347,09652706787	-	347,05057052607	0,045956541
w (°)	76,358857365534	-	80,607691622904	4,248834257
M (°)	179,9960099374	359,9960099374	0,79241944008516	0,796409502

[1] $|\Delta|$ - Diferença entre as órbitas final (referência) e atingida.

Para o ponto L_2, observa-se que existe um desvio com relação ao semi-eixo maior ($\approx$ 552 m) e a anomalia média ($\approx 1°$). Para o ponto L_3, verifica-se um desvio para o semi-eixo maior ($\approx$ 20 m) e para o argumento do periapside ($\approx 4°$). O ponto L_1 foi

Figura 7.23 - Variação dos elementos keplerianos da trajetória até atingir o ponto colinear lagrangiano L_2 durante o mês de setembro de 2012.

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.24 - Variação dos elementos keplerianos da trajetória até atingir o ponto colinear lagrangiano L_3 durante o mês de setembro de 2012.

Fonte: Produção do autor.

verificado e controlado no item 7.3.1. Portanto, primeiramente, aplica-se a manobra de ajuste para aproximar o veículo espacial à pseudo-órbita dos pontos colineares lagrangianos L_2 e L_3, considerando as perturbações externas como a perturbação da atração gravitacional do Sol, a pressão de radiação solar e os coeficientes dos harmônicos esféricos zonais até J_6 da Terra e da Lua. Do mesmo modo, como foi feito nos itens 7.3.1 e 7.3.2 para corrigir a trajetória do veículo espacial, verifica-se na Figura 7.25 (a), que o empuxo aplicado, ao longo da manobra, para manter o veículo espacial sobre o ponto colinear L_2, varia em torno de 0,8 N, com um gasto de propelente de 142,4601 kg, durante um período igual ao período da órbita da Lua, ao redor da Terra, como mostra a Figura 7.25 (b). Para o ponto L_3, verifica-se na Figura 7.25 (c), que o empuxo aplicado, ao longo da manobra, varia em torno de 0,4 N, com um gasto de propelente de 78,6663 kg, como mostra a Figura 7.25 (d).

Na Figura 7.26, observa-se-se que o somatório das forças gravitacionais da Terra e da Lua diminuem ao longo do tempo até atingir, aproximadamente, a ordem de 10^{-10} N. A variação dos elementos keplerianos obtidos por meio da correção da órbita do veículo espacial com relação as pseudo-órbitas dos pontos colineares L_2 e L_3 são apresentados pelos conjuntos de Figuras 7.27 e 7.28, respectivamente.

Deste modo, segue-se para a manobra de correção de órbita para cada um dos pontos colineares lagrangianos, considerando a perturbação externa dada pela atração gravitacional do Sol, a pressão de radiação solar e o somatório dos coeficientes dos harmônicos esféricos zonais até 800 para a Terra e 165 para a Lua, ambos em grau e ordem. Na Figura 7.29 (a), verifica-se que o empuxo aplicado, ao longo da manobra, para manter o veículo espacial sobre o ponto colinear L_1, varia em torno de 1 N, com um gasto de propelente de 691,8343 kg, durante um período de 130 dias, como mostra a Figura 7.29 (b). Para o ponto L_2, nota-se na Figura 7.29 (c), que o empuxo aplicado, ao longo da manobra, varia em torno de 0,8 N, com um gasto de propelente de 430,1840 kg (ver Figura 7.29 (d)). E, para o ponto L_3, observa-se na Figura 7.29 (e), que o empuxo aplicado, ao longo da manobra, varia em torno de 0,4 N, com um gasto de propelente de 204,6984 kg, como mostra a Figura 7.29 (f).

Na Figura 7.30, observa-se que os somatórios das forças gravitacionais da Terra e da Lua também irão diminuir, porém ao longo de um tempo maior (130 dias), até atingir, aproximadamente, a ordem de 10^{-10} N. A variação dos elementos keplerianos obtidos por meio da correção da órbita do veículo espacial com relação as pseudo-órbitas dos pontos colineares L_1, L_2 e L_3 são apresentados pelos conjuntos de Figuras 7.31, 7.32 e 7.33, respectivamente.

Figura 7.25 - Variação do empuxo aplicado e da massa do propelente durante a correção da órbita do veículo espacial sobre as pseudo-órbitas dos pontos colineares lagrangianos L_2 e L_3 durante o mês de setembro de 2012.

(a) L2

(b) L2

(c) L3

(d) L3

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.26 - Variação do somatório das forças em equilíbrio durante a correção da órbita do veículo espacial sobre a pseudo-órbita do ponto colinear lagrangiano L_2 e L_3 durante o mês de setembro de 2012.

(a) L2

(b) L3

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.27 - Variação dos elementos keplerianos do veículo espacial até atingir o ponto colinear lagrangiano L_2 durante o mês de setembro de 2012.

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.28 - Variação dos elementos keplerianos do veículo espacial até atingir o ponto colinear lagrangiano L_3 durante o mês de setembro de 2012.

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.29 - Variação do empuxo aplicado e da massa do propelente durante a correção da órbita do veículo espacial sobre as pseudo-órbitas dos pontos colineares lagrangianos.

(a) L1

(b) L1

(c) L2

(d) L2

(e) L3

(f) L3

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.30 - Variação do somatório das forças em equilíbrio durante a correção da órbita do veículo espacial sobre as pseudo-órbitas dos pontos colineares lagrangianos L_1, L_2 e L_3.

(a) L1

(b) L2

(c) L3

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.31 - Variação dos elementos keplerianos do veículo espacial até atingir o ponto colinear lagrangiano L_1 considerando os altos valores dos coeficientes dos harmônicos esféricos da Terra e da Lua.

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.32 - Variação dos elementos keplerianos do veículo espacial até atingir o ponto colinear lagrangiano L_2 considerando os altos valores dos coeficientes dos harmônicos esféricos da Terra e da Lua.

Fonte: Produção do autor.

Figura 7.33 - Variação dos elementos keplerianos do veículo espacial até atingir o ponto colinear lagrangiano L_3 considerando os altos valores dos coeficientes dos harmônicos esféricos da Terra e da Lua.

(a) (b) (c) (d) (e) (f)

Fonte: Produção do autor.

8 CONCLUSÕES

Este trabalho objetivou a determinação das manobras orbitais de um veículo espacial, utilizando propulsão contínua, controlada por um sistema de controle PID, em malha fechada, a partir de uma órbita de baixa altitude, ao redor da Terra, para os pontos colineares lagrangianos L_1, L_2 e L_3 do sistema Terra-Lua, no referencial geocêntrico inercial.

Todavia, sabe-se que próximo à Terra existem regiões de radiação formadas por partículas eletricamente carregadas, presas no campo geomagnético, conhecidas por cinturões de radiação de Van Allen. A presença da radiação enfatiza a necessidade de estudar o tempo que o veículo espacial pode permanecer nos cinturões, de modo que a dosagem de radiação recebida seja mínima o possível para não danificar os componentes eletrônicos a bordo de um veículo espacial. Desta forma, modelou-se as regiões de radiação, a partir dos dados da missão espacial *Van Allen Probes Mission*, juntamente com a análise das regiões de prótons e elétrons nos períodos de alta e baixa atividade solar, em setembro de 2012 e janeiro de 2015, respectivamente. Desta análise, observou-se uma variação radial entre os limites que separam os cinturões de radiação e confirmou-se a existência de uma terceira zona de radiação para a região de elétrons com energia igual a 3,4 MeV e 4,2 MeV, durante uma alta atividade solar, conforme o estudo de Baker et al. (2013). Para a região que contém somente prótons, no período de setembro de 2012, e para as regiões de elétrons e prótons, no periodo de janeiro de 2015, não observou nenhum tipo de anomalia presente.

Deste modo, seguiu-se com a determinação das posições dos pontos colineares lagrangianos L_1, L_2 e L_3 do sistema Terra-Lua. As equações de suas localizações foram obtidas por meio do somatório das forças gravitacionais dos corpos primários perfeitamente esféricos m_1 e m_2, compensadas com a pseudo-força centrífuga, em cada ponto colinear. As posições radiais dos pontos colineares foram obtidas utilizando o método da bisseção, durante um período orbital lunar em setembro de 2012 e janeiro de 2015 (épocas referentes às manobras orbitais de transferência de um veículo espacial pelos cinturões de Van Allen). A partir deste resultado, determinou-se os elementos orbitais dos pontos colineares lagrangianos, a cada instante de tempo. Assim, a partir da análise dos gráficos, sobre a variação dos elementos orbitais, verificou-se a existência de órbitas instantâneas, chamadas de pseudo-órbitas, em um referencial geocêntrico inercial.

Em geral, as pseudo-órbitas são caracterizadas por apresentar a mesma velocidade angular que a massa m_2, porém não apresentam velocidade necessária para uma

órbita, em torno de m_1, com uma mesma excentricidade que a órbita de m_2. Deste modo, considerando-se a órbita da Lua perturbada pela atração gravitacional do Sol e da Terra (THE..., 1987), verificou-se, então, que as pseudo-órbitas dos pontos colineares L_1 e L_2 são mais excêntricas que a da Lua, porém a excêntricidade da pseudo-órbita do ponto L_3 varia em torno da excentricidade da Lua ($0 \leq e \leq 0,3$). Logo, por meio de suas localizações instantâneas, geraram-se os elementos de estado instantâneos, cujos valores determinaram os elementos orbitais instantâneos, para cada um dos pontos de equilíbrio. A partir da análise dos gráficos da variação do argumento do periapside, verificou-se que o mesmo varia entre 0° e 360°, para todos os pontos colineares, o que conclui que a direção da linha dos apsides muda sua orientação, a cada instante de tempo, em função da posição do corpo m_2. No entanto, cada um destes pontos colineares se mantiveram localizados somente em um dos extremos da linha dos apsides, sendo que os pontos L_1 e L_2 permaneceram próximos aos seus apoapside e periapside, respectivamente, o ponto L_3 se manteve tanto no periapside quanto no apoapside devido a variação da sua excentricidade.

Considerando-se ainda que o sistema Terra-Lua é, constantemente, perturbado pela ação das forças não-gravitacionais e gravitacionais, obteve-se, então, as equações das localizações dos pontos colineares lagrangianos perturbados. Desta forma, primeiramente, estudou-se as pseudo-órbitas dos pontos colineares perturbados somente pela atração gravitacional do Sol e a pressão de radiação solar. Dos resultados obtidos, observou-se que os pontos colineares L_1 e L_2 ainda permaneceram próximos aos seus apoapside e periapside, respectivamente, porém o ponto colinear L_3 se manteve somente próximo ao seu apoapside. A distância radial e o semi-eixo maior do ponto L_1 diminuiram na ordem de 10^5 km, em comparação com a localização do mesmo quando não perturbado, o que tornou sua pseudo-órbita mais excêntrica. Este tipo de situação foi verificado também para o ponto L_3, sendo uma diferença na ordem de 10^6 km, porém a pseudo-órbita se tornou hiperbólica. Para o ponto L_2, sua posição diminuiu na ordem de 10^4 km, mantendo-o mais próximo à órbita da Lua, o que tornou sua pseudo-órbita menos excêntrica se comparada com a mesma quando não perturbada. Além das contribuições destas perturbações, considerou-se também a perturbação dos potenciais gravitacionais da Terra e da Lua, somente com os termos dos harmônicos esféricos zonais até J_6. Verificou-se, neste estudo, que estas perturbações causaram uma diferença mínima, na ordem entre 1 a 10 m, entre as distâncias radiais dos pontos colineares perturbados em comparação com os mesmos quando não-perturbados. No entanto, quando foram consideradas todas estas perturbações, sendo que utilizou-se os termos dos harmônicos esféricos zonais até J_2, as pseudo-órbitas dos pontos colineares mantiveram os resultados da varia-

ção dos elementos keplerianos semelhantes quando foram consideradas somente as perturbações devido a atração gravitacional do Sol e a pressão de radiação solar. O que pode ser concluído que o coeficiente J_2, apesar de ser o mais relevante entre os outros coeficientes dos harmônicos esféricos, não perturbou com maior intensidade em comparação com a atração gravitacional do Sol e a pressão de radiação solar.

Portanto, uma vez modelados os cinturões de radiação de Van Allen e conhecendo as localizações de cada um dos pontos colineares lagrangianos, no sistema Terra-Lua, iniciou-se o estudo das manobras orbitais de transferência de um veículo espacial, a partir de uma órbita de baixa altitude, ao redor da Terra, até atingir cada um dos pontos colineares lagrangianos. Assim, primeiramente, estudou-se o tempo que o veículo espacial permaneceu nas regiões de radiação, ao redor da Terra, e confirmou-se que a manobra orbital de alto empuxo foi a única que manteve o veículo espacial em um tempo mínimo nas regiões de radiação, se comparada com as manobras de baixo empuxo e a combinação entre as mesmas, durante uma alta e baixa atividade solar. Além disso, verificou-se que o chumbo, o tântalo e o tungstênio foram os materiais que absorveram pouca radiação em suas camadas de blindagem, independente dos períodos de atividade solar. Para as regiões de prótons, a taxa máxima de dosagem acumulada foram iguais, durante as manobras de alto empuxo e de baixo empuxo. No entanto, para as regiões de elétrons, a manobra de alto empuxo foi a única que obteve a menor taxa no período de alta atividade solar, enquanto que a combinação entre as manobras de alto empuxo e baixo empuxo obteve a menor taxa no período de baixa atividade solar.

Deste modo, escolheu-se a manobra de alto empuxo para transferir o veículo espacial até os pontos colineares lagrangianos. Primeiramente, simulou-se a transferência orbital de um veículo espacial até a pseudo-órbita do ponto colinear L_1, nos períodos de setembro de 2012 (alta atividade solar) e janeiro de 2015 (baixa atividade solar). Da análise dos resultados obtidos, verificou-se que para atingir o ponto colinear L_1, durante uma baixa atividade solar, o veículo espacial gastou 1226,326907 kg de propelente, um pouco menos do que foi gasto, durante uma alta atividade solar (1250,304001 kg). Além disso, para ambos os casos, foram encontrados desvios entre as órbitas final e de referência, por este motivo, aplicou-se, então, o método de correção de órbita em que, durante um período orbital lunar completo, o veículo espacial manteve acionado, constantemente, o sistema de propulsão. Desta forma, durante o mês de setembro de 2012, o sistema de propulsão do veículo espacial variou entre 1,6 N, gastando 230,8605 kg de combustível, gerando um saldo de 1019,443501 kg. Para o período de janeiro de 2015, o sistema de propulsão do veículo espacial

variou entre 1,58 N, gastando 221,8244 kg de combustível, gerando um saldo de 1004,502508 kg. Em ambos os casos, os resultados mostraram que a órbita do veículo espacial se aproximou da pseudo-órbita do ponto colinear L_1, mesmo este sob o efeito das perturbações externas, como a atração gravitacional do Sol, a pressão de radiação solar e os coeficientes dos harmônicos esféricos zonais até J_6 dos potenciais gravitacionais da Terra e da Lua.

Por último, estudou-se as manobras de transferência e de correção de órbita de um veículo espacial, perturbado pela atração gravitacional do Sol, pressão de radiação solar e os coeficientes dos harmônicos esféricos dos potenciais gravitacionais da Terra e da Lua, sobre as pseudo-órbitas dos pontos colineares lagrangianos, no período de setembro de 2012. É importante ressaltar que, neste caso, simulou-se a manobra de correção considerando o somatório dos coeficientes dos potenciais gravitacionais da Terra e da Lua (1) somente os zonais até J_6 e (2) para os zonais, tesserais e setoriais, sendo 800 para Terra e 165 para a Lua. A Tabela 8.1 apresenta os resultados obtidos nas simulações.

Tabela 8.1 - Capacidade do propulsor e a massa de combustível gasta durante a manobra de correção de órbita do veículo espacial sobre os pontos colineares lagrangianos.

Pontos	Empuxo(Massa) - N(kg)	
	J_6	Acima de J_6
L_1	1,6(230,8605)	1(691,8343)
L_2	0,8(142,4601)	0,8(430,1840)
L_3	0,4(78,6663)	0,4(204,6984)

Verifica-se, então, que a perturbação devido ao somatório dos coeficientes dos harmônicos esféricos maior do que J_6, afetaram somente o sistema de propulsão do veículo espacial, quando este corrigiu sua órbita sobre a pseudo-órbita do ponto colinear L_1, de modo que a intensidade do empuxo aplicado, durante toda a manobra, diminuiu seu valor. Além disso, dos resultados obtidos na seção 7.4 e apresentados na Tabela 8.1, mostraram para todos os pontos colineares lagragianos que, quando considerou-se somente os coeficientes zonais até J_6, o tempo que a manobra de correção de órbita levou para corrgir a órbita do veículo espacial na referência foi menor, de modo que resultou também um gasto menor de combustível se comparado quando considerou-se os valores altos dos coeficientes dos harmônicos esféricos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACORDO garante acesso a dados dde missões da NASA nas áreas de clima espacial e heliofísica. **INPE/Notícias**, 2015. Disponível em: <http://www.inpe.br/noticias/noticia.php?Cod_Noticia=3916>. Acesso em: 14 abr. 2017. 22

ALFVEN, H. **Cosmical electrodynamics**. London: Oxford at the Clarendon Press, 1950. 248 p. (The international series of monographs on Physics). Disponível em: <https://archive.org/details/CosmicalElectrodynamics>. Acesso em: 10 fev. 2015. 13

AMMAR, M. K. The effect of solar radiation pressure on the lagrangian points in the elliptic restricted three-body problem. **Astrophysics and Space Science**, v. 313, n. 4, p. 393–408, fev. 2008. 5

ARNOLD, D.; BERTONE, S.; JÄGGI, A.; BEUTLER, G.; MERVART, L. Grail gravity field determination using the celestial mechanics approach. **Icarus**, v. 261, p. 182–192, nov. 2015. 93

ATMOSPHERIC; COMMITTEE, S. E. **Guide to modeling Earth's trapped radiation environment**. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1999. 55 p. (AIAA Standards). (AIAA G-083-1999). Disponível em: <http://www.spacewx.com/Docs/AIAA_G-083-1999.pdf>. Acesso em: 11 jun. 2015. 16

ATOS assinados por ocasião da visita da Presidenta Dilma Rousseff aos Estados Unidos - Washington. **INPE/Notícias**, 2015. Disponível em: <www.itamaraty.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=10389>. Acesso em: 14 abr. 2017. 22

BAKER, D. N.; KANEKAL, S. G.; HOXIE, V. C.; HENDERSON, M. G.; LI, X.; SPENCE, H. E.; ELKINGTON, S. R.; FRIEDEL, R. H. W.; GOLDSTEIN, J.; HUDSON, M. K.; REEVES, G. D.; THORNE, R. M.; KLETZING, C. A.; CLAUDEPIERRE, S. G. A long-lived relativistic electron storage ring embedded in earth's outer van allen belt. **Science**, v. 340, n. 6129, p. 186–190, abr. 2013. 2, 6, 23, 25, 130, 173

BATE, R. R.; MUELLER, D. D.; WHITE, J. E. **Fundamentals of Astrodynamics**. New York, USA: Dover Publications, 1971. 455 p. 124

BIGGS, M. C. B. **The optimisation of spacecraft orbital manoeuvres**: Part i: linearly varying thrust angles. The Hatfield Polytechnic, Numerical Optimization Centre: [s.n.], 1978. 122

_____. **The optimisation of spacecraft orbital manoeuvres**: Part ii: using pontryagin's maximum principle. The Hatfield Polytechnic, Numerical Optimization Centre: [s.n.], 1979. 122

BOLTON, W. **Engenharia de Controle**. São Paulo: Makron Books, 1993. 264 p. 125

BOND, V. R.; ALLMAN, M. C. **Modern Astrodynamics**: Fundamentals and perturbation methods. London, England: Princeton University Press, 1996. 264 p. (Cambridge Studies In Advanced Mathematics, v. 51). 113

BOS, A. J. J. Fundamentals of radiation dosimetry. In: ROSENFELD, B.; KRON, T.; D'ERRICO, M.; MOSCOVITCH, M. (Ed.). **Concepts and trends in medical radiation dosimetry: proceedings of the SSD summer school**. [S.l.]: American Institute of Physics, 2011. (AIP Conference Proceedings/Accelerators, Beams, and Instrumentations), p. 5–23. 19

BREAKWELL, J. V.; BROWN, J. V. The 'halo' family of 3-dimensional periodic orbits in the earth-moon restricted 3-body problem. **Celestial Mechanics**, v. 20, n. 4, p. 389–404, nov 1979. 5

BUCHMAN, S.; EVERITT, C. W. F.; PARKINSON, B.; TURNEAURE, J. P.; DEBRA, D.; BARDAS, D.; BENCZE, W.; BRUMLEY, R.; GILL, D.; GUTT, G.; GWO, D. H.; KEISER, G. M.; LIPA, J.; LOCKHART, J.; MESTER, J.; MUHLFELDER, B.; TABER, M.; WANG, S.; XIAO, Y.; ZHOU, P. The gravity probe b relativity mission. **Advances in Space Research**, v. 25, n. 6, p. 1177–1180, 2000. 8

CHERNIKOV, Y. A. The photogravitational restricted three-body problem. **Soviet Astronomy - AJ**, v. 14, p. 176–181, ago. 1970. 5, 85

CHOBOTOV, V. A. **Orbital Mechanics**. Washington, DC: AIAA (American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc.), 1996. 447 p. (AIAA Education Series). ISBN 978-1563475375. 3, 112, 119, 120, 121, 122

CHRISTOPH, F.; BRUINSMA, S. L.; SHAKO, R.; FLECHTNER, F.; DAHLE, C.; ABRIKOSOV, O.; MARTY, J.; LEMOINE, J.; NEUMAYER, H.; BIANCALE, R.; BARTHELMES, F.; KOENIG, R.; BALMINO, G.; EIGEN-TEAM. EIGEN-6 -

the new combined global gravity field model including goce data from the collaboration of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse. **AGU Fall Meeting Abstracts**, dez. 2011. 93

CONKLIN, J. W.; BUCHMAN, S.; AGUERO, V.; ALFAUWAZ, A.; ALJADAAN, A.; ALMAJED, M.; ALTWAIJRY, H.; AL-SAUD, T.; BALAKRISHNAN, K.; BYER, R. L.; BOWER, K.; COSTELLO, B.; CUTLER, G. D.; DEBRA, D. B.; FAIED, D. M.; FOSTER, C.; GENOVA, A. L.; HANSON, J.; HOOPER, K.; HULTGREN, E.; JAROUX, B.; KLAVINS, A.; LANTZ, B.; LIPA, J. A.; PALMER, A.; PLANTE, B.; SANCHEZ, H. S.; SARAF, S.; SCHAECHTER, D.; SHERRILL, T.; SHU, K.-L.; SMITH, E.; TENERELLI, D.; VANBEZOOIJEN, R.; VASUDEVAN, G.; WILLIAMS, S. D.; WORDEN, S. P.; ZHOU, J.; ZOELLNER, A. Lagrange: Laser gravitational-wave antenna at geo-lunar lagrange points. **ArXiv e-prints**, p. 24, nov 2011. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1111.5264v2.pdf>. Acesso em: 9 jul. 2015. 8

CONTOPOULOS, G. Integrals of motion in the elliptic restricted three-body problem. **The Astronomical Journal**, v. 72, n. 5, p. 669–673, jun 1967. 54

COORDINATED Data Analysis Web. 2012. Disponível em: <http://cdaweb.sci.gsfc.nasa.gov/index.html/>. Acesso em: 9 feb. 2017. 23

CORRÊA, A. A. **Transferências orbitais e dinâmicas na vizinhança dos pontos lagrangianos L1 e L2**. 162 p. (INPE-14480-TDI/1161). Tese (Tese (Doutorado em Mecânica Espacial e Controle)) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2007. Disponível em: <http://mtc-m16b.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/MTC-m13@80/2006/02.22.12.03/doc/publicacao.pdf>. Acesso em: 9 jul. 2015. 5, 8

CURTIS, H. D. **Orbital Mechanics for Engineering Students**. Oxford, Great Britain: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2010. 721 p. ISBN 978-0080971902. 3, 112, 113, 114, 115, 116, 118, 119

DEBRA, D. B. Drag-free spacecraft as platforms for space missions and fundamental physics. **Classical and Quantum Gravity**, v. 14, p. 1549–1555, jun. 1997. 127

_____. Drag-free control for fundamental physics missions. **Advances in Space Research**, v. 32, p. 1221–1226, out. 2003. 127

DEPARTMENT, S. O. T. S.; GUIDANCE, S. O. T.; LABORATORY, C. A satellite freed of all but gravitational forces: "triad i". **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 11, p. 637, set. 1974. 127

DOUSKOS, C. N. Equilibrium points of the restricted three-body problem with equal prolate and radiating primaries, and their stability. **Astrophysics and Space Science**, v. 333, n. 1, p. 79–87, maio 2011. 6

DUTTA, A.; LIBRARO, P.; KASDIN, J.; CHOUEIRI, E. Minimizing total radiation fluence during time-constrained electric orbit-raising. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SPACE FLIGHT DYNAMICS, 23., 2012, Pasadena, California. **Proceedings of the International Symposium on Space Flight Dynamics**. Pasadena: ISSFD, 2012. 9

EDELBAUM, T. N. Propulsion requirements for controllable satellites. **ARSJ**, v. 31, n. 8, p. 1079–1089, ago. 1961. 122

EULER, L. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium. **Novi Commentarii Academiae Scientarum Petropolitanae**, v. 11, p. 144–155, 1767. Disponível em: <http://www.biodiversitylibrary.org/item/38574{#}page/7/mode/1up>. Acesso em: 9 jul 2015. 5, 67

Faria Venditti, F. C.; Marconi Rocco, E.; Bertachini de Almeida Prado, A. F.; Suhkanov, A. Gravity-assisted maneuvers applied in the multi-objective optimization of interplanetary trajectories. **Acta Astronautica**, v. 67, p. 1255–1271, nov. 2010. 9

FARQUHAR, R. W. Lunar communications with libration-point satellites. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 4, n. 10, p. 1383–1384, out. 1967. 5

_____. Future missions for libration-point satellites. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 8, n. 7, p. 52–56, jun 1969. 5

FARQUHAR, R. W.; KAMEL, A. A. Quasi-periodic orbits about the translunar libration point. **Celestial Mechanics**, v. 7, n. 4, p. 458–473, jun. 1973. 5

FELIPE, G. de. **Transferências orbitais envolvendo órbitas do tipo 'halo'**. 222 p. (INPE-12539-TDI/1001). Tese (Tese (Doutorado em Mecânica Espacial e Controle)) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2005. Disponível em: <http://mtc-m16b.sid.inpe.br/archive.cgi/sid.inpe.br/jeferson/2005/07.14.18.30>. Acesso em: 9 jul. 2015. 8

FERREIRA, J. L.; MARTINS, A. A.; MIRANDA, R.; SCHELLING, A.; ALVES, L. S. de; COSTA, E. G.; JUNIOR, H. O. C.; BRANCO, A. C.; LOPES, F. N. O. Permanent magnet hall thrusters development and applications on future brazilian space missions. **Journal of Physics Conference Series**, v. 641, n. 1, p. 12–16, out. 2015. 130

FLECK, M. E.; STARIN, S. R. Evaluation of a drag-free control concept for missions in low earth orbit. In: AIAA GUIDANCE, NAVIGATION, AND CONTROL CONFERENCE AND EXHIBIT, 9., Austin, Texas. **Proceedings...** NASA Goddard Space Flight Center,Texas, 2003. 127

FOX, N. J.; MAUK, B. H.; WEISS, M.; BARNES, R. J.; KESSEL, R.; SIBECK, D. G. The radiation belt storm probes (rbsp): Using a fundamental physics mission to support practical applications. **AGU Fall Meeting Abstracts**, dez. 2010. 1, 6, 22

FREDEN, S. C. Inner-belt van allen radiation. **Space Science Reviews**, v. 9, p. 198–242, mar. 1969. 17, 18, 28, 29

GEOMAGNETIC Coordinates. 2007. Disponível em: <http://hpamsmi2.mi.infn.it/~wwwams/geo1.html>. Acesso em: 10 mar. 2014. 24

GLATZMAIERS, G. A.; ROBERTS, P. H. A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal. **Nature**, v. 377, p. 203–209, set. 1995. 23

GOLD, T. Origin of the radiation near the earth discoverred by means of satellites. **Nature**, v. 183, p. 355–358, 1959. 12

GÓMEZ, G.; MASDEMONT, J. J.; MONDELO, J. M. Libration point orbits: A survey from the dynamical point of view. In: GÓMEZ, G.; MASDEMONT, J. J. (Ed.). **Libration point orbits and applications: proceedings of the conference Aiguablava, Spain**. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2003. p. 311–372. ISBN 981-238-363-8. 5

GONÇALVES, L. D. **Manobras orbitais de satélites artificiais lunares com aplicação de propulsão contínua**. 277 p. (sid.inpe.br/mtc-m19/2013/02.28.17.28-TDI). Tese (Dissertação (Mestrado em Mecânica Espacial e Controle)) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2013. Disponível em: <http://mtc-m16d.sid.inpe.br/col/

sid.inpe.br/mtc-m19/2013/02.28.17.28/doc/publicacao.pdf?metadatarepository=&mirror=iconet.com.br/banon/2006/11.26.21.31>. Acesso em: 4 ago. 2017. 9

GONÇALVES, L. D.; ROCCO, E. M.; MORAES, R. V. Orbital maneuvers of a lunar artificial satellite, under the action of gravitational and non-gravitational perturbation forces. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SPACE FLIGHT DYNAMICS, 25., 2015, Munich, Germany. **Proceedings...** Munich: Deutsches Zentrum fur Luftund Raumfahrt e. V. (DLR), 2015. 10

GORGOLEWSKI, S. Future space vlbi on lunar orbits and in the radio shadow on the farside of the moon. In: COSPAR SCIENTIFIC ASSEMBLY, 34., 2002, Houston, Texas. **Proceedings...** [S.l.], 2002. (COSPAR Meeting). 7

GRAF, K. **Radiation Belt Particle Dynamics**. Stanford University, 2009. Disponível em: <http://nova.stanford.edu/~vlf/IHY_Test/Tutorials/GeomagneticallyTrappedRadiation/GeomagneticallyTrappedRadiation.pdf>. Acesso em: 03 set. 2015. 14

GRIFFITHS, D. J. **Eletrodinâmica**. 3. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2011. 402 p. ISBN 978-85-7605-886-1. 13

HAFFNER, J. W. chapter iv. In: **Radiation and shielding in space**. New York and London: Academic Press, 1967. p. 112. 21

HESS, W. N. Energetic particles in the inner van allen belt. **Space Science Review**, v. 1, n. 2, p. 278–312, out. 1962. 11

HOELKER, R. F.; SILBER, R. The bi-elliptical transfer between co-planar circular orbits. **Planetary and Space Science**, v. 7, p. 164–175, jul. 1961. 112

HUDSON, M. K.; KRESS, B. T.; MUELLER, H.-R.; ZASTROW, J. A.; BLAKE, J. B. Relationship of the van allen radiation belts to solar wind drivers. **Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics**, v. 70, p. 708–729, 2008. 13, 30

INTERNATIONAL Centre for Global Earth Models (IGCEM). 2016. Disponível em: <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>. Acesso em: 09 feb. 2016. 93

INTREABA un astronom: Polii magneticii ai pamantului si miscarile lor. 2013. Disponível em: <http://astrointrebari.astroclubul.org/polii-magneticii-ai-pamantului-si-miscarile-lor/>. Acesso em: 11 jun. 2015. 24

KAMIDE, Y.; CHIAN, A. C.-L. **Handbook of the Solar-Terrestrial Environment**. 1. ed. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. 539 p. ISBN 9783540463153. 18

KASE, K. R.; NELSON, W. R. **Concepts of radiation dosimetry**. United States of America: National Technical Information Service, U. S. Department of Commerce, 1972. 220 p. SLAC-153, UC-34. Disponível em: <http://www.slac.stanford.edu/cgi-wrap/getdoc/slac-r-153.pdf>. Acesso em: 21 jun. 2015. 19

KESSEL, R. L.; FOX, N. J.; WEISS, M. The radiation belt storm probes (rbsp) and space weather. **Space Science Reviews Journal**, v. 179, n. 1-4, p. 531–543, nov 2012. 22

KOPAL, Z.; LYTTLETON, R. A. On the elliptic case of the restricted problem of three bodies and remote history of the earth-moon system. **Icarus**, v. 1, p. 455–458, 1963. 54

KUMAR, C. R.; NARAYAN, A. Existence and stability of collinear equilibrium points in elliptical restricted problem. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**, v. 80, n. 4, p. 477–494, 2012. 6

LAGRANGE, J. L. Essai sur le probl'eme des trois corps. **Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris**, v. 6, n. IX, p. 272–282, 1772. Disponível em: <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k229225j/f65>. Acesso em: 9 jul 2015. 5, 67

LANGE, B. The drag-free satellite. **AIAA Journal**, v. 2, p. 1590–1606, sep 1964. 127

LAZUTIN, L. L. **X-ray emission of auroral electrons and magnetospheric dynamics**. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1986. 220 p. (Physics and Chemistry in Space, v. 14). ISBN 978-3-642-70400-0. 17

LI, H.; ZHANG, Q.; ZHANG, N. Equilibrium points in earth-moon system for continuous communication with far-side station and lunar orbiter. In: **Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series**. [S.l.: s.n.], 2007. (Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, v. 6795). 7

LYONS, L. R.; THORNE, R. M. Equilibrium structure of radiation belt electrons. **Journal of Geophysical Research**, v. 78, p. 2142–2149, maio 1973. 13

MANN, I. R.; OZEKE, L. G.; MURPHY, K. R.; CLAUDEPIERRE, S. G.; TURNER, D. L.; BAKER, D. N.; RAE, I. J.; KALE, A.; MILLING, D. K.; BOYD, A. J.; SPENCE, H. E.; REEVES, G. D.; SINGER, H. J.; DIMITRAKOUDIS, S.; DAGLIS, I. A.; HONARY, F. Explaining the dynamics of the ultra-relativistic third van allen radiation belt. **Nature Physics**, v. 12, p. 978–983, jun. 2016. 23, 41

MARCELINO, E. W. **Controle de trajetória orbital em manobras de empuxo contínuo de longo prazo**. 186 p. (INPE-15757-TDI/1500). Dissertação (Tese (Doutorado em Mecânica Espacial e Controle)) — INPE- Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2009. Disponível em: <http://mtc-m16c.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/mtc-m18@80/2009/05.25.20.23/doc/publicacao.pdf>. Acesso em: 9 jul. 2015. 8

MAREC, J. P. **Optimal Space Trajectories**. [S.l.]: Elsevier, 1979. 329 p. 118

MCCUSKEY, S. W. **Introduction to celestial mechanics**. 1. ed. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1963. 184 p. ISBN 978-0201045703. 96

McILWAIN, C. E. Coordinates for mapping the distribution of magnetically trapped particles. **Journal of Geophysical Research**, v. 66, n. 1, p. 3681–3691, 1961. 6, 27

_____. Magnetic coordinates. **Space Science Reviews**, v. 5, p. 585–598, 1966. 15, 18, 27

MCNAMARA, P.; VITALE, S.; DANZMANN, K.; TEAM, L. P. S. W. Lisa pathfinder. **Classical and Quantum Gravity**, v. 25, n. 11, jun. 2008. 127

MELO, C. F. de; MACAU, E. E. N.; WINTER, O. C.; NETO, E. V. Numerical study about natural escape and capture routes by the moon via lagrangian points l1 and l2. **Advances in Space Research**, v. 40, n. 1, p. 83–95, 2007. 8

MICHAEL JR., W. H.; BLACKSHEAR, W. T. Recent results on the mass, gravitational field, and moments of inertia of the moon. **The Moon**, v. 3, p. 388–402, mar. 1972. 95

MILOVANOVIĆ, G. V.; MITRINOVIĆ, D. S.; RASSIAS, T. M. **Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros**. USA,UK: World Scientific, 1994. 823 p. ISBN 978-981-4506-48-9. 70

MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar System Dynamics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1999. 592 p. ISBN 9780521575973. 67

NARAYAN, A.; SINGH, N. Existence and stability of collinear equilibrium points in elliptical restricted three body problem under the radiating primaries. **Astrophysics and Space Science**, v. 354, p. 355–368, dez. 2014. 5

NASA; UNIVERSITY, S.; MARTIN, L. **Gravity Probe B - Launch Companion**. [S.l.: s.n.], 2004. 127

NASA-SP-8027. **Spacecraft radiation torques**. [S.l.]: NASA Washington, DC, United States, oct 1969. 41 p. 82

NEHER, H. V. Change of cosmic rays in space. **Nature**, v. 184, p. 423–425, ago. 1959. 12

NEWHALL, X. X.; STANDISH, E. M.; WILLIAMS, J. DE 102 - a numerically integrated ephemeris of the moon and planets spanning forty-four centuries. **Astronomy and Astrophysics**, v. 125, p. 150–167, ago. 1983. 72

NOAA - National Centers for Environment Information: Wandering of the geomagnetic poles. 2015. Disponível em: <http://www.ngdc.noaa.gov/geomag/GeomagneticPoles.shtml>. Acesso em: 11 jun. 2015. 23, 26

OLESEN, H. L. Radiation environments. In: _____. **Radiation Effects on Electronic Systems**. Boston, MA: Springer US, 1966. p. 1–33. ISBN 978-1-4899-5705-4. 23

OLIVEIRA, T. C.; ROCCO, E. M.; PRADO, A. F. B. A.; FERREIRA, J. L. A study of the duration of the passage through the van allen belts for a spacecraft going to the moon. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 465, n. 1, p. 12–19, 2013. 7, 9, 21

PARK, J.; CHUNG, T.; LEE, S.-P. Radiation analysis of communications and broadcasting satellite. **KSAS International Journal**, v. 3, n. 2, p. 40–45, nov. 2002. 7

PARKER, E. N. Geomagnetic fluctuations and the form of the outer zone of the van allen radiation belt. **Journal of Geophysical Research**, v. 67, n. 10, p. 3117–3130, out. 1960. 21

PHYSICS of Cosmos: Gravitational wave mission. 2012. Disponível em: <http://pcos.gsfc.nasa.gov/studies/gravwave/>. Acesso em: 10 aug. 2014. 7, 127

PRADO, A. F. B. A. Travelling between the lagragian points and the earth. **Acta Astronautica**, v. 39, n. 7, p. 483–486, 1996. 8

_____. Impulsive transfers to/from the lagrangian points in the earth-sun system. In: WINTER, O. C.; PRADO, A. F. B. d. A. (Ed.). **Advances in Space Dynamics 3: applications in astronautics**. Sao Jose dos Campos: INPE, 2002. p. 272–285. 8

_____. Orbital maneuvers between the lagrangian points and the primaries in the earth-sun system. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 28, p. 131 –139, 06 2006. 8

PROFIO, A. E. **Radiation shielding and dosimetry**. Canada: John Wiley and Sons, Inc., 1979. 547 p. ISBN 978-0471043294. 19

PROTECTION, T. I. C. on R. **The 2007 Recommendations of the International Commission On Radiological Protection**. Elsevier, 2007. Annals of the ICRP, ICRP Publication 103, 35 p. Disponível em: <http://www.icrp.org/docs/ICRP_Publication_103-Annals_of_the_ICRP_37(2-4)-Free_extract.pdf>. Acesso em: 21 jun. 2015. 20

PUGH, G. E. **Proposal for a satellite test of the Coriolis prediction of general relativity**. [S.l.: s.n.], 1959. 414–426 p. 126, 127

RADZIEVSKII, V. V. The restricted three-body problem including radiation pressure. **Astronomicheskii Zhurnal**, v. 27, p. 249–256, 1950. 5

_____. The space photogravitational restricted three-body problem. **Astronomicheskii Zhurnal**, v. 30, p. 225–265, 1953. 5

REEVES, G. D.; SPENCE, H. E.; HENDERSON, M. G.; MORLEY, S. K.; FRIEDEL, R. H. W.; FUNSTEN, H. O.; BAKER, D. N.; KANEKAL, S. G.; BLAKE, J. B.; FENNELL, J. F.; CLAUDEPIERRE, S. G.; THORNE, R. M.; TURNER, D. L.; KLETZING, C. A.; KURTH, W. S.; LARSEN, B. A.; NIEHOF, J. T. Electron acceleration in the heart of the van allen radiation belts. **Science**, v. 341, p. 991–994, ago. 2013. 13

REITZ, G. Characteristic of the radiation field in low earth orbit and in deep space. **Zeitschrift fur medizinische Physik**, v. 18, n. 4, p. 233–243, 2008. 13

ROCCO, E. M. Analisys of the trajectory due to the terrestrial albedo applied to some scientific missions. In: **Mathematical Problems in Engineering,**

Aerospace and Sciences. [s.n.], 2008. (Genoa, Italy). Disponível em: <http://at.yorku.ca/c/a/u/b/60.htm>. Acesso em: 03 ago. 2017. 3, 8, 23, 68

_____. Perturbed orbital motion with a pid control system for the trajectory. In: **XIV Colóquio Brasileiro de Dinâmica Orbital**. [S.l.: s.n.], 2008. (Aguas de Lindoia), p. 12. 3, 8, 23, 68, 123

_____. Automatic correction of orbital elements using continous thrut controlled in closed loop. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 465, n. 1, p. 7, 2013. 9

_____. Controle de trajetória com propulsão contínua para missões do tipo drag-free. In: **Resumos do VII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica**. São Luís, Brazil: [s.n.], 2013. (CONEM, v. 7). 8, 10, 127

_____. Simulação de manobras orbitais impulsivas com empuxo limitado e controle de trajetória em malha fechada. In: **Proceedings Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. [S.l.: s.n.], 2013. (SBMAC, 1). 121, 126

ROHRLICH, F.; ALLEN, J. A. V. **First Public Lecture on the Discovery of the Geomagnetically Trapped Radiation**. 13. ed. State University of Iowa: Department of Physics and Astronomy, 1960. 30 p. (Research Report). 11

ROY, A. E. Bristol (UK): Institute of Physics Publishing, 2005. ISBN 9780750310154. 64

SAMWELL, S. W.; HADY, A. A.; MIKHAIL J. S. IBRAHIM, M.; HANNA, Y. S. Studying the total ionizing dose and displacement damage dose effects for various orbital trajectories. In: **First Middle East and Africa IAU - Regional Meeting**. [S.l.: s.n.], 2008. p. 55–58. 7

SAWYER, D.; VETTE, J. **AP-8 trapped proton environment for solar maximum and solar minimum**. [S.l.: s.n.], 1976. 176 p. (NASA-TM-X-72605, NSSDC/WDC-A-R/S-76-06). 20

SCHMID, P. E. **Lunar Far-Side Communication Satellites**. Washington D. C., 1968. 19 p. Disponível em: <http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19680015886.pdf>. Acesso em: 24 jun. 2015. 7

SCHUERMAN, D. W. The effect of radiation pressure on the restricted three-body problem. In: PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL

ASTRONOMICAL UNION. **Solid particles in the solar system**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co., 1980. (IAU Symposium), p. 285–288. 5

_____. The restricted three-body problem including radiation pressure. **Astrophysical Journal**, v. 238, p. 337–342, maio 1980. 5

SHARMA, R. K.; RAO, P. V. S. Collinear equilibria and their characteristic exponents in the restricted three-body problem when the primaries are oblate spheroids. **Celestial Mechanics**, v. 12, p. 189–201, set. 1975. 6, 96

_____. Stationary solutions and their characteristic exponents in the restricted three-body problem when the more massive primary is an oblate spheroid. **Celestial Mechanics**, v. 13, p. 137–149, mar. 1976. 6, 96

SHIN, M.-Y.; KIM, M.-H. Space radiation shielding calculation ny approximate model for leo satellites. **Journal of the Korean Nuclear Society**, v. 36, n. 11, p. 1–11, fev. 2004. 7

SHTERNFELD, A.; MENDLOWITZ, H. Soviet space science. **Physics Today**, v. 13, p. 54, 1960. 112

SIBECK, D. G.; MAUK, B. H.; GREBOWSKY, J. M.; FOX, N. J. The living with a star radiation belt storm probes mission and related missions of opportunity. **AGU Fall Meeting Abstracts**, dez. 2006. 1, 6, 22

SINGER, S. F. Radiation belt and trapped cosmic rays albedo. **Physical Review Letters**, n. 1, p. 171–173, 1958. 12

_____. Trepped albedo theory of the radiation belt. **Physical Review Letters**, n. 1, p. 181–183, 1958. 12

SINGH, J.; UMAR, A. Motion in the photogrational elliptic restricted three-body problem under an oblate primary. **The Astronomical Journal**, v. 143, n. 109, p. 22, 2012. 6, 58, 62

SOUZA, V. M.; VIEIRA, L. E.; MEDEIROS, C.; SILVA, L. A. D.; ALVES, L. R.; KOGA, D.; SIBECK, D. G.; WALSH, B. M.; KANEKAL, S. G.; JAUER, P. R.; ROCKENBACH, M.; LAGO, A. D.; SILVEIRA, M. V. D.; MARCHEZI, J. P.; MENDES, O.; GONZALEZ, W. D.; BAKER, D. N. A neural network approach for identifying particle pitch angle distributions in van allen probes data. **Space Weather**, v. 14, p. 275–284, abr. 2016. 22

SPENCE, H. E.; REEVES, G. D.; BAKER, D. N.; BLAKE, J. B.; BOLTON, M.; BOURDARIE, S.; CHAN, A. A.; CLAUDEPIERRE, S. G.; CLEMMONS, J. H.; CRAVENS, J. P.; ELKINGTON, S. R.; FENNELL, J. F.; FRIEDEL, R. H. W.; FUNSTEN, H. O.; GOLDSTEIN, J.; GREEN, J. C.; GUTHRIE, A.; HENDERSON, M. G.; HORNE, R. B.; HUDSON, M. K.; JAHN, J.-M.; JORDANOVA, V. K.; KANEKAL, S. G.; KLATT, B. W.; LARSEN, B. A.; LI, X.; MAcDONALD, E. A.; MANN, I. R.; NIEHOF, J.; O'Brien, T. P.; ONSAGER, T. G.; SALVAGGIO, D.; SKOUG, R. M.; SMITH, S. S.; SUTHER, L. L.; THOMSEN, M. F.; THORNE, R. M. Science goals and overview of the radiation belt storm probes (rbsp) energetic particle, composition, and thermal plasma (ect) suite on nasa's van allen probes mission. **Space Science Review Journal**, v. 179, p. 311–336, nov. 2013. 22

SUNDMAN, K. F. Mémoire sur le probléme des trois corps. **The Astronomical Journal**, v. 36, n. 1, p. 105–179, 1913. 64

SUTTON, G.; BIBLARZ, O. **Rocket propulsion elements**. New York: John Wiley and Sons, Inc., 2001. 123

SZEBEHELY, V.; GIACAGLIA, G. E. O. On the elliptic restrictedproblem of three bodies. **The Astronomical Journal**, v. 69, n. 3, p. 230–235, abr. 1964. 54

SZEBEHELY, V. G. **Theory of Orbits**: The restricted problem of three bodies. 1. ed. New York and London: Academic Press, 1967. 684 p. ISBN 9780126806502. 5, 53, 55, 62, 67

TAYLOR, J. R. **Classical Mechanics**. United States of America: University Science Books, 2005. 786 p. ISBN 1-891389-22-X. 68

THE Astronomical Almanac for the year 1987. Washington, D. C., USA and London, England.: U.S. Government Printing Office and HM Stationery Office, 1987. 536 p. ISBN 9789996432101. 72, 174

UKHORSKIY, A. Y.; SITNOV, M. I. Dynamics of radiation belt particles. **Space Science Reviews**, v. 179, n. 1, p. 545–569, nov. 2012. 17

UNIVERSE Today: Nasa's van allen probes spot impenetrable radiation barrier in space. 2014. Disponível em: <www.universetoday.com/116742/nasas-van-allen-probes-spot-impenetrable-radiation-barrier-in-space/>. Acesso em: 13 aug. 2015. 12

VALLADO, D. A. **Fundamentals of Astrodynamics and Applications**. 3. ed. New York: Springer-Verlag, 2007. 1055 p. (Space Technology Library, v. 21). ISBN 978-0-387-71831-6. 64, 70, 92, 95, 113

VAN ALLEN, J. A. The geomagnetically trapped corpuscular radiation. **Journal of Geophysical Research**, v. 64, p. 1683–1689, nov. 1959. 6, 12

_____. Radiation belts. In: STEVEN, T. S.; BRUCE, T. T. (Ed.). **From the Sun: Auroras, Magnetic Storms, Solar Flares, Cosmic Rays.** 1. ed. [S.l.]: American Geophysical Union, 1998, (Special Publications). p. 23–28. ISBN 9781118665305. 13, 14

VAN ALLEN, J. A.; LUDWIG, G. H.; RAY, E. C.; MCILWAIN, C. E. Observation of high intensity radiation by satellites 1958 alpha and gamma. **Journal of Jet Propulsion**, v. 28, n. 9, p. 588–592, 1958. 11

VAN Allen Probes Science Gateway: Orbit plot. 2015. Disponível em: <http://rbspgway.jhuapl.edu/OrbitPlot>. Acesso em: 4 sept. 2015. 22

VENDITTI, F. C. F.; ROCCO, E. M.; PRADO, A. F. B. A. Trajectory control around non-spherical bodies modelled by parallelepipeds. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 465, n. 1, p. 7, 2013. 10

VETTE, J. **The AE-8 trapped electron model environment**. [S.l.: s.n.], 1991. 138 p. (NSSDC/WDC-A-R&S 91-24). 20

VETTE, J. I. A model proton environment above 4 mev. In: _____. **Radiation Trapped in the Earth's Magnetic Field: Proceedings of the Advanced Study Institute Held at the Chr. Michelsen Institute, Bergen, Norway August 16–September 3, 1965**. Dordrecht: Springer Netherlands, 1966. (Astrophysics and Space Science Library, v. 5), p. 865–874. ISBN 978-94-010-3553-8. 7

VIDYAKIN, V. V. The plane restricted circular problem of three spheroids. **Astronomicheskii-Zhurnal**, v. 18, p. 1087–1094, out. 1974. 6

WALT, M. **Introduction to Geomagnetically Trapped Radiation**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. 168 p. (Cambridge Atmospheric and Space Science Series). ISBN 978-0-521-61611-9. 13, 23, 29

WOOFORD, C.; PHILIPS, C. **Numerical Methods with Worked Examples**. London, UK: Chapman and Hall, 1997. 237 p. ISBN 0-412-72150-3. 70

WORKSHOP INPE-NASA discute projetos em parcerias nas áreas de heliofísica e de clima espacial. **INPE/Notícias**, 2017. Disponível em: <www.inpe.br/noticia.php?Cod_Noticia=4423>. Acesso em: 14 abr. 2017. 22

ZEYNALI, O.; MASTI, D.; GANDOMKAR, S. Shielding protection of electronic circuits against radiation effects of space high energy particles. **Advances in Applied Science Research**, v. 3, n. 1, p. 446–451, 2012. 7

APÊNDICE A - MATRIZES DE ROTAÇÃO

A relação entre os sistemas de coordenadas não-inercial (X, Y, Z) e inercial (x, y, z), dará-se por meio de uma rotação simples, em $z = Z$, conforme mostra a matriz abaixo. Logo,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos f & -\operatorname{sen} f & 0 \\ \operatorname{sen} f & \cos f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

Derivando-se a Matriz A.1 duas vezes no tempo t, obtém-se

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos f & -\operatorname{sen} f & 0 \\ \operatorname{sen} f & \cos f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} - \dot{f}Y \\ \dot{Y} + \dot{f}X \\ \dot{Z} \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

e

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos f & -\operatorname{sen} f & 0 \\ \operatorname{sen} f & \cos f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{X} - 2\dot{f}\dot{Y} - \dot{f}^2 X - \ddot{f}Y \\ \ddot{Y} + 2\dot{f}\dot{X} - \dot{f}^2 Y + \ddot{f}X \\ \ddot{Z} \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

APÊNDICE B - EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE SÉTIMO GRAU CONSIDERANDO AS PERTURBAÇÕES DA ATRAÇÃO GRAVITACIONAL DO SOL E PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR

$$\begin{aligned}
&\cos^2(i_L)w^2r_{L_1}^7 + [-2w^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 2Rw^2\cos^2(i_L) - \\
&b\cos^2(i_L)]r_{L_1}^6 + [4Rw^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + R^2w^2\cos^2(i_L) + \\
&w^2r_{ST}^2\cos^2(i_S) + 2br_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + 2Rb\cos^2(i_L)]r_{L_1}^5 + \\
&[-2R^2w^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 2Rw^2r_{ST}^2\cos^2(i_S) - 4Rbr_{ST} \\
&\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - R^2b\cos^2(i_L) - br_{ST}^2\cos^2(i_S) - Gm_1 \\
&\cos^2(i_L) + Gm_2\cos^2(i_L) + GM_S\cos(\Delta\varphi)^2]r_{L_1}^4 + [R^2w^2r_{ST}^2\cos^2(i_S) + \\
&2R^2br_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + 2Gm_1r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - \\
&2Gm_2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + 2Rbr_{ST}^2\cos^2(i_S) + 2Gm_1R\cos^2(i_L) \\
&-2GM_SR\cos(\Delta\varphi)^2]r_{L_1}^3 + [-4Gm_1Rr_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - R^2b \\
&r_{ST}^2\cos^2(i_S) - Gm_1R^2\cos^2(i_L) - Gm_1r_{ST}^2\cos^2(i_S) + Gm_2r_{ST}^2\cos^2(i_S) + \\
&GM_SR^2\cos(\Delta\varphi)^2]r_{L_1}^2 + [2Gm_1R^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + 2Gm_1 \\
&Rr_{ST}^2\cos^2(i_S)]r_{L_1} - Gm_1\cos^2(i_S)R^2r_{ST}^2 = 0
\end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
&\cos^2(i_L)w^2r_{L_2}^7 + [-2w^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 2Rw^2\cos^2(i_L) - \\
&b\cos^2(i_L)]r_{L_2}^6 + [4Rw^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + R^2w^2\cos^2(i_L) + \\
&w^2r_{ST}^2\cos^2(i_S) + 2br_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + 2Rb\cos^2(i_L)]r_{L_2}^5 + \\
&[-2R^2w^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 2Rw^2r_{ST}^2\cos^2(i_S) - 4Rbr_{ST} \\
&\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - R^2b\cos^2(i_L) - br_{ST}^2\cos^2(i_S) - Gm_1 \\
&\cos^2(i_L) - Gm_2\cos^2(i_L) + GM_S\cos(\Delta\varphi)^2]r_{L_2}^4 + [R^2w^2r_{ST}^2\cos^2(i_S) + \\
&2R^2br_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + 2Gm_1r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + \\
&2Gm_2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + 2Rbr_{ST}^2\cos^2(i_S) + 2Gm_1R\cos^2(i_L) \\
&-2GM_SR\cos(\Delta\varphi)^2]r_{L_2}^3 + [-4Gm_1Rr_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - R^2b \\
&r_{ST}^2\cos^2(i_S) - Gm_1R^2\cos^2(i_L) - Gm_1r_{ST}^2\cos^2(i_S) - Gm_2r_{ST}^2\cos^2(i_S) + \\
&GM_SR^2\cos(\Delta\varphi)^2]r_{L_2}^2 + [2Gm_1R^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + 2Gm_1 \\
&Rr_{ST}^2\cos^2(i_S)]r_{L_2} - Gm_1\cos^2(i_S)R^2r_{ST}^2 = 0
\end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\cos^2(i_L)w^2r_{L_3}^7 + [-2w^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 2Rw^2\cos^2(i_L) - b\cos^2(i_L)]r_{L_3}^6 + [4Rw^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + R^2w^2\cos^2(i_L) + w^2r_{ST}^2\cos^2(i_S) + 2br_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + 2Rb\cos^2(i_L)]r_{L_3}^5 + [-2R^2w^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 2Rw^2r_{ST}^2\cos^2(i_S) - 4Rbr_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - R^2b\cos^2(i_L) - br_{ST}^2\cos^2(i_S) + Gm_1\cos^2(i_L) + Gm_2\cos^2(i_L) + GM_S\cos(\Delta\varphi)^2]r_{L_3}^4 + [R^2w^2r_{ST}^2\cos^2(i_S) + 2R^2br_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 2Gm_1r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 2Gm_2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + 2Rbr_{ST}^2\cos^2(i_S) - 2Gm_1R\cos^2(i_L) - 2GM_SR\cos(\Delta\varphi)^2]r_{L_3}^3 + [4Gm_1Rr_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - R^2br_{ST}^2\cos^2(i_S) + Gm_1R^2\cos^2(i_L) + Gm_1r_{ST}^2\cos^2(i_S) + Gm_2r_{ST}^2\cos^2(i_S) + GM_SR^2\cos(\Delta\varphi)^2]r_{L_3}^2 + [-2Gm_1R^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 2Gm_1Rr_{ST}^2\cos^2(i_S)]r_{L_3} + Gm_1\cos^2(i_S)R^2r_{ST}^2 = 0 \tag{B.3}$$

APÊNDICE C - EQUAÇÕES DE DÉCIMO SÉTIMO GRAU CONSIDERANDO AS PERTURBAÇÕES DOS POTENCIAIS GRAVITACIONAIS DOS CORPOS PRIMÁRIOS

$$
\begin{aligned}
&16w^2r_{L_1}^{17} - 128Rw^2r_{L_1}^{16} + 448R^2w^2r_{L_1}^{15} + [-896R^3w^2 - 16Gm_1 + 16Gm_2]r_{L_1}^{14} \quad \text{(C.1)}\\
&+[1120R^4w^2 + 128Gm_1R - 96Gm_2R]r_{L_1}^{13} + [24GJ_{t2}m_1R_t^2\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat}) - 896\\
&R^5w^2 - 8GJ_{t2}m_1R_t^2 + 8GJ_{l2}m_2R_l^2 - 448Gm_1R^2 + 240Gm_2R^2]r_{L_1}^{12} + [40G\\
&J_{t3}m_1R_t^3\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat}) - 192GJ_{t2}m_1RR_t^2\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat}) + 448R^6w^2 - 24GJ_{t3}m_1R_t^3\\
&\mathrm{sen}(\phi_{sat}) + 64GJ_{t2}m_1RR_t^2 - 32GJ_{l2}m_2RR_l^2 + 896Gm_1R^3 - 320Gm_2R^3]r_{L_1}^{11}\\
&+[70GJ_{t4}m_1R_t^4\,\mathrm{sen}^4(\phi_{sat}) - 320GJ_{t3}m_1RR_t^3\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat}) + 672GJ_{t2}m_1R^2R_t^2\\
&\mathrm{sen}^2(\phi_{sat}) - 128R^7w^2 + 192GJ_{t3}m_1RR_t^3\,\mathrm{sen}(\phi_{sat}) - 60GJ_{t4}m_1R_t^4\,\mathrm{sen}(\phi_{sat})\\
&-224GJ_{t2}m_1R^2R_t^2 + 6GJ_{t4}m_1R_t^4 + 48GJ_{l2}m_2R^2R_l^2 - 6GJ_{l4}m_2R_l^4 - 1120G\\
&m_1R^4 + 240Gm_2R^4]r_{L_1}^{10} + [126GJ_{t5}m_1\,\mathrm{sen}^5(\phi_{sat})R_t^5 - 560GJ_{t4}m_1RR_t^4\\
&\mathrm{sen}^4(\phi_{sat}) + 1120GJ_{t3}m_1R^2R_t^3\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat}) - 140GJ_{t5}m_1\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat})R_t^5 -\\
&1344GJ_{t2}m_1R^3R_t^2\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat}) + 16R^8w^2 - 672GJ_{t3}m_1R^2R_t^3\,\mathrm{sen}(\phi_{sat}) + 480\\
&GJ_{t4}m_1RR_t^4\,\mathrm{sen}(\phi_{sat}) + 30GJ_{t5}m_1\,\mathrm{sen}(\phi_{sat})R_t^5 + 448GJ_{t2}m_1R^3R_t^2 - 48G\\
&J_{t4}m_1RR_t^4 - 32GJ_{l2}m_2R^3R_l^2 + 12GJ_{l4}m_2RR_l^4 + 896Gm_1R^5 - 96Gm_2R^5]\\
&r_{L_1}^{9} + [231GJ_{t6}m_1\,\mathrm{sen}^6(\phi_{sat})R_t^6 - 1008GJ_{t5}m_1\,\mathrm{sen}^5(\phi_{sat})RR_t^5 + 1960GJ_{t4}\\
&m_1R^2R_t^4\,\mathrm{sen}^4(\phi_{sat}) - 315GJ_{t6}m_1\,\mathrm{sen}^4(\phi_{sat})R_t^6 - 2240GJ_{t3}m_1R^3R_t^3\\
&\mathrm{sen}^3(\phi_{sat}) + 1120GJ_{t5}m_1\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat})RR_t^5 + 1680GJ_{t2}m_1\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})R^4R_t^2\\
&+105GJ_{t6}m_1\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})R_t^6 + 1344GJ_{t3}m_1R^3R_t^3\,\mathrm{sen}(\phi_{sat}) - 1680GJ_{t4}m_1\\
&R^2R_t^4\,\mathrm{sen}(\phi_{sat}) - 240GJ_{t5}m_1\,\mathrm{sen}(\phi_{sat})RR_t^5 - 560GJ_{t2}m_1R^4R_t^2 + 168GJ_{t4}\\
&m_1R^2R_t^4 - 5GJ_{t6}m_1R_t^6 + 8GJ_{l2}m_2R^4R_l^2 - 6GJ_{l4}m_2R^2R_l^4 + 5GJ_{l6}m_2R_l^6 -\\
&448Gm_1R^6 + 16Gm_2R^6]r_{L_1}^{8} + [-1848GJ_{t6}m_1\,\mathrm{sen}^6(\phi_{sat})RR_t^6 + 3528GJ_{t5}\\
&m_1\,\mathrm{sen}^5(\phi_{sat})R^2R_t^5 - 3920GJ_{t4}m_1R^3R_t^4\,\mathrm{sen}^4(\phi_{sat}) + 2520GJ_{t6}m_1\,\mathrm{sen}^4(\phi_{sat})\\
&RR_t^6 + 2800GJ_{t3}m_1\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat})R^4R_t^3 - 3920GJ_{t5}m_1\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat})R^2R_t^5 - 1344\\
&GJ_{t2}m_1R^5R_t^2\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat}) - 840GJ_{t6}m_1\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})RR_t^6 - 1680GJ_{t3}m_1\\
&\mathrm{sen}(\phi_{sat})R^4R_t^3 + 3360GJ_{t4}m_1R^3R_t^4\,\mathrm{sen}(\phi_{sat}) + 840GJ_{t5}m_1\,\mathrm{sen}(\phi_{sat})R^2R_t^5\\
&+448GJ_{t2}m_1R^5R_t^2 - 336GJ_{t4}m_1R^3R_t^4 + 40GJ_{t6}m_1RR_t^6 + 128Gm_1R^7]r_{L_1}^{7} +\\
&[6468GJ_{t6}m_1\,\mathrm{sen}^6(\phi_{sat})R^2R_t^6 - 7056GJ_{t5}m_1\,\mathrm{sen}^5(\phi_{sat})R^3R_t^5 + 4900GJ_{t4}m_1\\
&R^4R_t^4\,\mathrm{sen}^4(\phi_{sat}) - 8820GJ_{t6}m_1\,\mathrm{sen}^4(\phi_{sat})R^2R_t^6 - 2240GJ_{t3}m_1R^5R_t^3\\
&\mathrm{sen}^3(\phi_{sat}) + 7840GJ_{t5}m_1\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat})R^3R_t^5 + 672GJ_{t2}m_1R^6R_t^2\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat}) + \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\ldots 2940GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^2R_t^6 + 1344GJ_{t3}m_1R^5R_t^3\operatorname{sen}(\phi_{sat}) - 4200GJ_{t4}m_1 \\
&R^4R_t^4\operatorname{sen}(\phi_{sat}) - 1680GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^3R_t^5 - 224GJ_{t2}m_1R^6R_t^2 + 420GJ_{t4} \\
&m_1R^4R_t^4 - 140GJ_{t6}m_1R^2R_t^6 - 16Gm_1R^8]r_{L_1}^6 + [-12936GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^6(\phi_{sat}) \\
&R^3R_t^6 + 8820GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^5(\phi_{sat})R^4R_t^5 - 3920GJ_{t4}m_1R^5R_t^4\operatorname{sen}^4(\phi_{sat}) + 17640G \\
&J_{t6}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^3R_t^6 + 1120GJ_{t3}m_1R^6R_t^3\operatorname{sen}^3(\phi_{sat}) - 9800GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^3(\phi_{sat}) \\
&R^4R_t^5 - 192GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^7R_t^2 - 5880GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^3R_t^6 - 672GJ_{t3} \\
&m_1R^6R_t^3\operatorname{sen}(\phi_{sat}) + 3360GJ_{t4}m_1R^5R_t^4\operatorname{sen}(\phi_{sat}) + 2100GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^4 \\
&R_t^5 + 64GJ_{t2}m_1R^7R_t^2 - 336GJ_{t4}m_1R^5R_t^4 + 280GJ_{t6}m_1R^3R_t^6]r_{L_1}^5 + [16170G \\
&J_{t6}m_1\operatorname{sen}^6(\phi_{sat})R^4R_t^6 - 7056GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^5(\phi_{sat})R^5R_t^5 + 1960GJ_{t4}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat}) \\
&R^6R_t^4 - 22050GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^4R_t^6 - 320GJ_{t3}m_1\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R^7R_t^3 + 7840G \\
&J_{t5}m_1\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R^5R_t^5 + 24GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^8R_t^2 + 7350GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat}) \\
&R^4R_t^6 + 192GJ_{t3}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^7R_t^3 - 1680GJ_{t4}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^6R_t^4 - 1680G \\
&J_{t5}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^5R_t^5 - 8GJ_{t2}m_1R^8R_t^2 + 168GJ_{t4}m_1R^6R_t^4 - 350GJ_{t6}m_1R^4 \\
&R_t^6]r_{L_1}^4 + [-12936GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^6(\phi_{sat})R^5R_t^6 + 3528GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^5(\phi_{sat})R^6R_t^5 - \\
&560GJ_{t4}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^7R_t^4 + 17640GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^5R_t^6 + 40GJ_{t3}m_1 \\
&\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R^8R_t^3 - 3920GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R^6R_t^5 - 5880GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^5 \\
&R_t^6 - 24GJ_{t3}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^8R_t^3 + 480GJ_{t4}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^7R_t^4 + 840GJ_{t5}m_1 \\
&\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^6R_t^5 - 48GJ_{t4}m_1R^7R_t^4 + 280GJ_{t6}m_1R^5R_t^6]r_{L_1}^3 + [6468GJ_{t6}m_1 \\
&\operatorname{sen}^6(\phi_{sat})R^6R_t^6 - 1008GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^5(\phi_{sat})R^7R_t^5 + 70GJ_{t4}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^8 \\
&R_t^4 - 8820GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^6R_t^6 + 1120GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R^7R_t^5 + 2940G \\
&J_{t6}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^6R_t^6 - 60GJ_{t4}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^8R_t^4 - 240GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat}) \\
&R^7R_t^5 + 6GJ_{t4}m_1R^8R_t^4 - 140GJ_{t6}m_1R^6R_t^6]r_{L_1}^2 + [-1848GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^6(\phi_{sat}) \\
&R^7R_t^6 + 126GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^5(\phi_{sat})R^8R_t^5 + 2520GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^7R_t^6 - 140 \\
&GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R^8R_t^5 - 840GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^7R_t^6 + 30GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat}) \\
&R^8R_t^5 + 40GJ_{t6}m_1R^7R_t^6]r_{L_1} + 231GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^6(\phi_{sat})R^8R_t^6 - 315GJ_{t6}m_1 \\
&\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^8R_t^6 + 105GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^8R_t^6 - 5GJ_{t6}m_1R^8R_t^6 = 0
\end{aligned}
$$

$$16w^2r_{L_2}^{17} - 128Rw^2r_{L_2}^{16} + 448R^2w^2r_{L_2}^{15} + [-896R^3w^2 - 16Gm_1 - 16Gm_2]r_{L_2}^{14} \quad \text{(C.2)}$$
$$+[1120R^4w^2 + 128Gm_1R + 96Gm_2R]r_{L_2}^{13} + [24GJ_{t2}m_1R_t^2\operatorname{sen}^2(\phi_{sat}) - 896$$
$$R^5w^2 - 8GJ_{t2}m_1R_t^2 - 8GJ_{l2}m_2R_l^2 - 448Gm_1R^2 - 240Gm_2R^2]r_{L_2}^{12} + [40G$$
$$J_{t3}m_1R_t^3\operatorname{sen}^3(\phi_{sat}) - 192GJ_{t2}m_1RR_t^2\operatorname{sen}^2(\phi_{sat}) + 448R^6w^2 - 24GJ_{t3}m_1R_t^3$$
$$\operatorname{sen}(\phi_{sat}) + 64GJ_{t2}m_1RR_t^2 + 32GJ_{l2}m_2RR_l^2 + 896Gm_1R^3 + 320Gm_2R^3]r_{L_2}^{11}$$
$$+[70GJ_{t4}m_1R_t^4\operatorname{sen}^4(\phi_{sat}) - 320GJ_{t3}m_1RR_t^3\operatorname{sen}^3(\phi_{sat}) + 672GJ_{t2}m_1R^2R_t^2$$
$$\operatorname{sen}^2(\phi_{sat}) - 128R^7w^2 + 192GJ_{t3}m_1RR_t^3\operatorname{sen}(\phi_{sat}) - 60GJ_{t4}m_1R_t^4\operatorname{sen}(\phi_{sat})$$
$$-224GJ_{t2}m_1R^2R_t^2 + 6GJ_{t4}m_1R_t^4 - 48GJ_{l2}m_2R^2R_l^2 + 6GJ_{l4}m_2R_l^4 - 1120G$$
$$m_1R^4 - 240Gm_2R^4]r_{L_2}^{10} + [126GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^5(\phi_{sat})R_t^5 - 560GJ_{t4}m_1RR_t^4$$
$$\operatorname{sen}^4(\phi_{sat}) + 1120GJ_{t3}m_1R^2R_t^3\operatorname{sen}^3(\phi_{sat}) - 140GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R_t^5 -$$
$$1344GJ_{t2}m_1R^3R_t^2\operatorname{sen}^2(\phi_{sat}) + 16R^8w^2 - 672GJ_{t3}m_1R^2R_t^3\operatorname{sen}(\phi_{sat}) + 480$$
$$GJ_{t4}m_1RR_t^4\operatorname{sen}(\phi_{sat}) + 30GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R_t^5 + 448GJ_{t2}m_1R^3R_t^2 - 48G$$
$$J_{t4}m_1RR_t^4 + 32GJ_{l2}m_2R^3R_l^2 - 12GJ_{l4}m_2RR_l^4 + 896Gm_1R^5 + 96Gm_2R^5]$$
$$r_{L_2}^9 + [231GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^6(\phi_{sat})R_t^6 - 1008GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^5(\phi_{sat})RR_t^5 + 1960GJ_{t4}$$
$$m_1R^2R_t^4\operatorname{sen}^4(\phi_{sat}) - 315GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R_t^6 - 2240GJ_{t3}m_1R^3R_t^3$$
$$\operatorname{sen}^3(\phi_{sat}) + 1120GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})RR_t^5 + 1680GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^4R_t^2$$
$$+105GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R_t^6 + 1344GJ_{t3}m_1R^3R_t^3\operatorname{sen}(\phi_{sat}) - 1680GJ_{t4}m_1$$
$$R^2R_t^4\operatorname{sen}(\phi_{sat}) - 240GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})RR_t^5 - 560GJ_{t2}m_1R^4R_t^2 + 168GJ_{t4}$$
$$m_1R^2R_t^4 - 5GJ_{t6}m_1R_t^6 - 8GJ_{l2}m_2R^4R_l^2 + 6GJ_{l4}m_2R^2R_l^4 - 5GJ_{l6}m_2R_l^6 -$$
$$448Gm_1R^6 - 16Gm_2R^6]r_{L_2}^8 + [-1848GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^6(\phi_{sat})RR_t^6 + 3528GJ_{t5}m_1$$
$$\operatorname{sen}^5(\phi_{sat})R^2R_t^5 - 3920GJ_{t4}m_1R^3R_t^4\operatorname{sen}^4(\phi_{sat}) + 2520GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})$$
$$RR_t^6 + 2800GJ_{t3}m_1\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R^4R_t^3 - 3920GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R^2R_t^5 - 1344$$
$$GJ_{t2}m_1R^5R_t^2\operatorname{sen}^2(\phi_{sat}) - 840GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})RR_t^6 - 1680GJ_{t3}m_1$$
$$\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^4R_t^3 + 3360GJ_{t4}m_1R^3R_t^4\operatorname{sen}(\phi_{sat}) + 840GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^2R_t^5$$
$$+448GJ_{t2}m_1R^5R_t^2 - 336GJ_{t4}m_1R^3R_t^4 + 40GJ_{t6}m_1RR_t^6 + 128Gm_1R^7]r_{L_2}^7 +$$
$$[6468GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^6(\phi_{sat})R^2R_t^6 - 7056GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^5(\phi_{sat})R^3R_t^5 + 4900GJ_{t4}m_1$$
$$R^4R_t^4\operatorname{sen}^4(\phi_{sat}) - 8820GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^2R_t^6 - 2240GJ_{t3}m_1R^5R_t^3$$
$$\operatorname{sen}^3(\phi_{sat}) + 7840GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R^3R_t^5 + 672GJ_{t2}m_1R^6R_t^2\operatorname{sen}^2(\phi_{sat}) +$$
$$2940GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^2R_t^6 + 1344GJ_{t3}m_1R^5R_t^3\operatorname{sen}(\phi_{sat}) - 4200GJ_{t4}m_1$$
$$R^4R_t^4\operatorname{sen}(\phi_{sat}) - 1680GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^3R_t^5 - 224GJ_{t2}m_1R^6R_t^2 + 420$$
$$GJ_{t4}m_1R^4R_t^4 - 140GJ_{t6}m_1R^2R_t^6 - 16Gm_1R^8]r_{L_2}^6 + [-12936GJ_{t6}m_1\ldots$$

$$
\begin{aligned}
&\ldots \operatorname{sen}^6(\phi_{sat})R^3R_t^6 + 8820GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^5(\phi_{sat})R^4R_t^5 - 3920GJ_{t4}m_1R^5R_t^4\operatorname{sen}^4(\phi_{sat}) + \\
&17640GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^3R_t^6 + 1120GJ_{t3}m_1R^6R_t^3\operatorname{sen}^3(\phi_{sat}) - 9800GJ_{t5}m_1 \\
&\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R^4R_t^5 - 192GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^7R_t^2 - 5880GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^3R_t^6 - 672 \\
&GJ_{t3}m_1R^6R_t^3\operatorname{sen}(\phi_{sat}) + 3360GJ_{t4}m_1R^5R_t^4\operatorname{sen}(\phi_{sat}) + 2100GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^4 \\
&R_t^5 + 64GJ_{t2}m_1R^7R_t^2 - 336GJ_{t4}m_1R^5R_t^4 + 280GJ_{t6}m_1R^3R_t^6]r_{L_2}^5 + [16170G \\
&J_{t6}m_1\operatorname{sen}^6(\phi_{sat})R^4R_t^6 - 7056GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^5(\phi_{sat})R^5R_t^5 + 1960GJ_{t4}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat}) \\
&R^6R_t^4 - 22050GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^4R_t^6 - 320GJ_{t3}m_1\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R^7R_t^3 + 7840G \\
&J_{t5}m_1\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R^5R_t^5 + 24GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^8R_t^2 + 7350GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat}) \\
&R^4R_t^6 + 192GJ_{t3}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^7R_t^3 - 1680GJ_{t4}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^6R_t^4 - 1680G \\
&J_{t5}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^5R_t^5 - 8GJ_{t2}m_1R^8R_t^2 + 168GJ_{t4}m_1R^6R_t^4 - 350GJ_{t6}m_1R^4 \\
&R_t^6]r_{L_2}^4 + [-12936GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^6(\phi_{sat})R^5R_t^6 + 3528GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^5(\phi_{sat})R^6R_t^5 - \\
&560GJ_{t4}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^7R_t^4 + 17640GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^5R_t^6 + 40GJ_{t3}m_1 \\
&\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R^8R_t^3 - 3920GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R^6R_t^5 - 5880GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^5 \\
&R_t^6 - 24GJ_{t3}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^8R_t^3 + 480GJ_{t4}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^7R_t^4 + 840GJ_{t5}m_1 \\
&\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^6R_t^5 - 48GJ_{t4}m_1R^7R_t^4 + 280GJ_{t6}m_1R^5R_t^6]r_{L_2}^3 + [6468GJ_{t6}m_1 \\
&\operatorname{sen}^6(\phi_{sat})R^6R_t^6 - 1008GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^5(\phi_{sat})R^7R_t^5 + 70GJ_{t4}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^8 \\
&R_t^4 - 8820GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^6R_t^6 + 1120GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R^7R_t^5 + 2940G \\
&J_{t6}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^6R_t^6 - 60GJ_{t4}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^8R_t^4 - 240GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat}) \\
&R^7R_t^5 + 6GJ_{t4}m_1R^8R_t^4 - 140GJ_{t6}m_1R^6R_t^6]r_{L_2}^2 + [-1848GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^6(\phi_{sat}) \\
&R^7R_t^6 + 126GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^5(\phi_{sat})R^8R_t^5 + 2520GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^7R_t^6 - 140 \\
&GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R^8R_t^5 - 840GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^7R_t^6 + 30GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat}) \\
&R^8R_t^5 + 40GJ_{t6}m_1R^7R_t^6]r_{L_2} + 231GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^6(\phi_{sat})R^8R_t^6 - 315GJ_{t6}m_1 \\
&\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^8R_t^6 + 105GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^8R_t^6 - 5GJ_{t6}m_1R^8R_t^6 = 0
\end{aligned}
$$

$$16w^2r_{L_3}^{17} - 128Rw^2r_{L_3}^{16} + 448R^2w^2r_{L_3}^{15} + [-896R^3w^2 + 16Gm_1 + 16Gm_2]r_{L_3}^{14} \quad \text{(C.3)}$$
$$+[1120R^4w^2 - 128Gm_1R - 96Gm_2R]r_{L_3}^{13} + [-24GJ_{t2}m_1R_t^2\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat}) - 896$$
$$R^5w^2 + 8GJ_{t2}m_1R_t^2 + 8GJ_{l2}m_2R_l^2 + 448Gm_1R^2 + 240Gm_2R^2]r_{L_3}^{12} + [40G$$
$$J_{t3}m_1R_t^3\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat}) + 192GJ_{t2}m_1RR_t^2\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat}) + 448R^6w^2 - 24GJ_{t3}m_1R_t^3$$
$$\mathrm{sen}(\phi_{sat}) - 64GJ_{t2}m_1RR_t^2 - 32GJ_{l2}m_2RR_l^2 - 896Gm_1R^3 - 320Gm_2R^3]$$
$$r_{L_3}^{11} + [-70GJ_{t4}m_1R_t^4\,\mathrm{sen}^4(\phi_{sat}) - 320GJ_{t3}m_1RR_t^3\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat}) - 672GJ_{t2}m_1R^2$$
$$R_t^2\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat}) - 128R^7w^2 + 192GJ_{t3}m_1RR_t^3\,\mathrm{sen}(\phi_{sat}) + 60GJ_{t4}m_1R_t^4\,\mathrm{sen}(\phi_{sat})$$
$$+224GJ_{t2}m_1R^2R_t^2 - 6GJ_{t4}m_1R_t^4 + 48GJ_{l2}m_2R^2R_l^2 - 6GJ_{l4}m_2R_l^4 + 1120G$$
$$m_1R^4 + 240Gm_2R^4]r_{L_3}^{10} + [126GJ_{t5}m_1\,\mathrm{sen}^5(\phi_{sat})R_t^5 + 560GJ_{t4}m_1RR_t^4$$
$$\mathrm{sen}^4(\phi_{sat}) + 1120GJ_{t3}m_1R^2R_t^3\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat}) - 140GJ_{t5}m_1\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat})R_t^5 +$$
$$1344GJ_{t2}m_1R^3R_t^2\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat}) + 16R^8w^2 - 672GJ_{t3}m_1R^2R_t^3\,\mathrm{sen}(\phi_{sat}) - 480$$
$$GJ_{t4}m_1RR_t^4\,\mathrm{sen}(\phi_{sat}) + 30GJ_{t5}m_1\,\mathrm{sen}(\phi_{sat})R_t^5 - 448GJ_{t2}m_1R^3R_t^2 + 48G$$
$$J_{t4}m_1RR_t^4 - 32GJ_{l2}m_2R^3R_l^2 + 12GJ_{l4}m_2RR_l^4 - 896Gm_1R^5 - 96Gm_2R^5]$$
$$r_{L_3}^{9} + [-231GJ_{t6}m_1\,\mathrm{sen}^6(\phi_{sat})R_t^6 - 1008GJ_{t5}m_1\,\mathrm{sen}^5(\phi_{sat})RR_t^5 - 1960GJ_{t4}$$
$$m_1R^2R_t^4\,\mathrm{sen}^4(\phi_{sat}) + 315GJ_{t6}m_1\,\mathrm{sen}^4(\phi_{sat})R_t^6 - 2240GJ_{t3}m_1R^3R_t^3$$
$$\mathrm{sen}^3(\phi_{sat}) + 1120GJ_{t5}m_1\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat})RR_t^5 - 1680GJ_{t2}m_1\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})R^4R_t^2$$
$$-105GJ_{t6}m_1\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})R_t^6 + 1344GJ_{t3}m_1R^3R_t^3\,\mathrm{sen}(\phi_{sat}) + 1680GJ_{t4}m_1$$
$$R^2R_t^4\,\mathrm{sen}(\phi_{sat}) - 240GJ_{t5}m_1\,\mathrm{sen}(\phi_{sat})RR_t^5 + 560GJ_{t2}m_1R^4R_t^2 - 168GJ_{t4}$$
$$m_1R^2R_t^4 + 5GJ_{t6}m_1R_t^6 + 8GJ_{l2}m_2R^4R_l^2 - 6GJ_{l4}m_2R^2R_l^4 + 5GJ_{l6}m_2R_l^6 +$$
$$448Gm_1R^6 + 16Gm_2R^6]r_{L_3}^{8} + [1848GJ_{t6}m_1\,\mathrm{sen}^6(\phi_{sat})RR_t^6 + 3528GJ_{t5}m_1$$
$$\mathrm{sen}^5(\phi_{sat})R^2R_t^5 + 3920GJ_{t4}m_1R^3R_t^4\,\mathrm{sen}^4(\phi_{sat}) - 2520GJ_{t6}m_1\,\mathrm{sen}^4(\phi_{sat})$$
$$RR_t^6 + 2800GJ_{t3}m_1\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat})R^4R_t^3 - 3920GJ_{t5}m_1\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat})R^2R_t^5 + 1344$$
$$GJ_{t2}m_1R^5R_t^2\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat}) + 840GJ_{t6}m_1\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})RR_t^6 - 1680GJ_{t3}m_1$$
$$\mathrm{sen}(\phi_{sat})R^4R_t^3 - 3360GJ_{t4}m_1R^3R_t^4\,\mathrm{sen}(\phi_{sat}) + 840GJ_{t5}m_1\,\mathrm{sen}(\phi_{sat})R^2R_t^5$$
$$-448GJ_{t2}m_1R^5R_t^2 + 336GJ_{t4}m_1R^3R_t^4 - 40GJ_{t6}m_1RR_t^6 - 128Gm_1R^7]r_{L_3}^{7} +$$
$$[-6468GJ_{t6}m_1\,\mathrm{sen}^6(\phi_{sat})R^2R_t^6 - 7056GJ_{t5}m_1\,\mathrm{sen}^5(\phi_{sat})R^3R_t^5 - 4900GJ_{t4}m_1$$
$$R^4R_t^4\,\mathrm{sen}^4(\phi_{sat}) + 8820GJ_{t6}m_1\,\mathrm{sen}^4(\phi_{sat})R^2R_t^6 - 2240GJ_{t3}m_1R^5R_t^3$$
$$\mathrm{sen}^3(\phi_{sat}) + 7840GJ_{t5}m_1\,\mathrm{sen}^3(\phi_{sat})R^3R_t^5 - 672GJ_{t2}m_1R^6R_t^2\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat}) -$$
$$2940GJ_{t6}m_1\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})R^2R_t^6 + 1344GJ_{t3}m_1R^5R_t^3\,\mathrm{sen}(\phi_{sat}) + 4200GJ_{t4}m_1$$
$$R^4R_t^4\,\mathrm{sen}(\phi_{sat}) - 1680GJ_{t5}m_1\,\mathrm{sen}(\phi_{sat})R^3R_t^5 + 224GJ_{t2}m_1R^6R_t^2 - 420GJ_{t4}$$
$$m_1R^4R_t^4 + 140GJ_{t6}m_1R^2R_t^6 + 16Gm_1R^8]r_{L_3}^{6} + [12936GJ_{t6}m_1\,\mathrm{sen}^6(\phi_{sat})\ldots$$

$$\ldots R^3R_t^6 + 8820GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^5(\phi_{sat})R^4R_t^5 + 3920GJ_{t4}m_1R^5R_t^4\operatorname{sen}^4(\phi_{sat}) - 17640G$$
$$J_{t6}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^3R_t^6 + 1120GJ_{t3}m_1R^6R_t^3\operatorname{sen}^3(\phi_{sat}) - 9800GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})$$
$$R^4R_t^5 + 192GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^7R_t^2 + 5880GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^3R_t^6 - 672GJ_{t3}$$
$$m_1R^6R_t^3\operatorname{sen}(\phi_{sat}) - 3360GJ_{t4}m_1R^5R_t^4\operatorname{sen}(\phi_{sat}) + 2100GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^4$$
$$R_t^5 - 64GJ_{t2}m_1R^7R_t^2 + 336GJ_{t4}m_1R^5R_t^4 - 280GJ_{t6}m_1R^3R_t^6]r_{L_3}^5 + [-16170$$
$$GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^6(\phi_{sat})R^4R_t^6 - 7056GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^5(\phi_{sat})R^5R_t^5 - 1960GJ_{t4}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})$$
$$R^6R_t^4 + 22050GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^4R_t^6 - 320GJ_{t3}m_1\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R^7R_t^3 + 7840G$$
$$J_{t5}m_1\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R^5R_t^5 - 24GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^8R_t^2 - 7350GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})$$
$$R^4R_t^6 + 192GJ_{t3}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^7R_t^3 + 1680GJ_{t4}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^6R_t^4 - 1680G$$
$$J_{t5}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^5R_t^5 + 8GJ_{t2}m_1R^8R_t^2 - 168GJ_{t4}m_1R^6R_t^4 + 350GJ_{t6}m_1R^4$$
$$R_t^6]r_{L_3}^4 + [12936GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^6(\phi_{sat})R^5R_t^6 + 3528GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^5(\phi_{sat})R^6R_t^5 +$$
$$560GJ_{t4}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^7R_t^4 - 17640GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^5R_t^6 + 40GJ_{t3}m_1$$
$$\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R^8R_t^3 - 3920GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R^6R_t^5 + 5880GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^5$$
$$R_t^6 - 24GJ_{t3}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^8R_t^3 - 480GJ_{t4}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^7R_t^4 + 840GJ_{t5}m_1$$
$$\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^6R_t^5 + 48GJ_{t4}m_1R^7R_t^4 - 280GJ_{t6}m_1R^5R_t^6]r_{L_3}^3 + [-6468GJ_{t6}m_1$$
$$\operatorname{sen}^6(\phi_{sat})R^6R_t^6 - 1008GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^5(\phi_{sat})R^7R_t^5 - 70GJ_{t4}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^8$$
$$R_t^4 + 8820GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^6R_t^6 + 1120GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R^7R_t^5 - 2940G$$
$$J_{t6}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^6R_t^6 + 60GJ_{t4}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})R^8R_t^4 - 240GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})$$
$$R^7R_t^5 - 6GJ_{t4}m_1R^8R_t^4 + 140GJ_{t6}m_1R^6R_t^6]r_{L_3}^2 + [1848GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^6(\phi_{sat})$$
$$R^7R_t^6 + 126GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^5(\phi_{sat})R^8R_t^5 - 2520GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^7R_t^6 - 140$$
$$GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}^3(\phi_{sat})R^8R_t^5 + 840GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^7R_t^6 + 30GJ_{t5}m_1\operatorname{sen}(\phi_{sat})$$
$$R^8R_t^5 - 40GJ_{t6}m_1R^7R_t^6]r_{L_3} - 231GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^6(\phi_{sat})R^8R_t^6 + 315GJ_{t6}m_1$$
$$\operatorname{sen}^4(\phi_{sat})R^8R_t^6 - 105GJ_{t6}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})R^8R_t^6 + 5GJ_{t6}m_1R^8R_t^6 = 0$$

APÊNDICE D - EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE DÉCIMO PRIMEIRO GRAU CONSIDERANDO AS PERTURBAÇÕES DA ATRAÇÃO GRAVITACIONAL DO SOL, PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR E OS POTENCIAIS GRAVITACIONAIS DOS CORPOS PRIMÁRIOS

$$
\begin{aligned}
&2\cos^2(i_L)w^2r_{L_1}^{11} + [-4w^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 8Rw^2\cos^2(i_L) \\
&-2b\cos^2(i_L)]r_{L_1}^{10} + [16Rw^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + 12R^2w^2 \\
&\cos^2(i_L) + 2w^2r_{ST}^2\cos^2(i_S) + 4br_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + 8Rb \\
&\cos^2(i_L)]r_{L_1}^{9} + [-24R^2w^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 8\cos^2(i_L)R^3 \\
&w^2 - 8Rw^2r_{ST}^2\cos^2(i_S) - 16Rbr_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 12R^2b \\
&\cos^2(i_L) - 2br_{ST}^2\cos^2(i_S) - 2Gm_1\cos^2(i_L) + 2Gm_2\cos^2(i_L) + 2GM_S \\
&\cos^2(\Delta\varphi)]r_{L_1}^{8} + [16\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^3w^2r_{ST} + 2\cos^2(i_L)R^4 \\
&w^2 + 12R^2w^2r_{ST}^2\cos^2(i_S) + 24R^2br_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + 4G \\
&m_1r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 4Gm_2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + \\
&8\cos^2(i_L)R^3b + 8Rbr_{ST}^2\cos^2(i_S) + 8Gm_1R\cos^2(i_L) - 4Gm_2\cos^2(i_L) \\
&R - 8GM_SR\cos^2(\Delta\varphi)]r_{L_1}^{7} + [-4\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^4w^2r_{ST} + \\
&3GJ_{t2}m_1\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_L)R_t^2 - 8\cos^2(i_S)R^3w^2r_{ST}^2 - 16\cos(i_S) \\
&\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^3br_{ST} - GJ_{t2}m_1\cos^2(i_L)R_t^2 + GJ_{l2}m_2\cos^2(i_L) \\
&R_l^2 - 16Gm_1Rr_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + 8Gm_2\cos(i_S)\cos(i_L) \\
&\cos(\Delta\theta)Rr_{ST} - 2\cos^2(i_L)R^4b - 12R^2br_{ST}^2\cos^2(i_S) - 12Gm_1R^2\cos^2(i_L) \\
&-2Gm_1r_{ST}^2\cos^2(i_S) + 2Gm_2\cos^2(i_L)R^2 + 2Gm_2r_{ST}^2\cos^2(i_S) + 12GM_S \\
&R^2\cos^2(\Delta\varphi))]r_{L_1}^{6} + [-6GJ_{t2}m_1\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) \\
&R_t^2r_{ST} - 12GJ_{t2}m_1\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_L)RR_t^2 + 2\cos^2(i_S)R^4w^2r_{ST}^2 + 2G \\
&J_{t2}m_1\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R_t^2r_{ST} - 2GJ_{l2}m_2\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) \\
&R_l^2r_{ST} + 4\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^4br_{ST} + 4GJ_{t2}m_1\cos^2(i_L)RR_t^2 + \\
&24Gm_1R^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 4Gm_2\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) \\
&R^2r_{ST} + 8\cos^2(i_S)R^3br_{ST}^2 + 8Gm_1\cos^2(i_L)R^3 + 8Gm_1Rr_{ST}^2\cos^2(i_S) - 4 \\
&Gm_2\cos^2(i_S)Rr_{ST}^2 - 8GM_S\cos^2(\Delta\varphi)R^3]r_{L_1}^{5} + [24GJ_{t2}m_1\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat}) \\
&\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)RR_t^2r_{ST} + 18GJ_{t2}m_1\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_L)R^2R_t^2 + \\
&3GJ_{t2}m_1\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_S)R_t^2r_{ST}^2 - 8GJ_{t2}m_1\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R \\
&R_t^2r_{ST} - 6GJ_{t2}m_1\cos^2(i_L)R^2R_t^2 - GJ_{t2}m_1\cos^2(i_S)R_t^2r_{ST}^2 + GJ_{l2}m_2 \\
&\cos^2(i_S)R_l^2r_{ST}^2 - 16Gm_1\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^3r_{ST} - 2\cos^2(i_S)R^4\ldots
\end{aligned}
\tag{D.1}
$$

$$
\begin{aligned}
&\ldots br_{ST}^2 - 2Gm_1\cos^2(i_L)R^4 - 12Gm_1\cos^2(i_S)R^2r_{ST}^2 + 2Gm_2\cos^2(i_S)R^2r_{ST}^2 \\
&+2GM_S\cos^2(\Delta\varphi)R^4]r_{L_1}^4 + [-36GJ_{t2}m_1\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) \\
&R^2R_t^2r_{ST} - 12GJ_{t2}m_1\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_L)R^3R_t^2 - 12GJ_{t2}m_1\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat}) \\
&\cos^2(i_S)RR_t^2r_{ST}^2 + 12GJ_{t2}m_1\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^2R_t^2r_{ST} + 4GJ_{t2}m_1 \\
&\cos^2(i_L)R^3R_t^2 + 4GJ_{t2}m_1\cos^2(i_S)RR_t^2r_{ST}^2 + 4Gm_1\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) \\
&R^4r_{ST} + 8Gm_1\cos^2(i_S)R^3r_{ST}^2]r_{L_1}^3 + [24GJ_{t2}m_1\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})\cos(i_S)\cos(i_L) \\
&\cos(\Delta\theta)R^3R_t^2r_{ST} + 3GJ_{t2}m_1\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_L)R^4R_t^2 + 18GJ_{t2}m_1\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat}) \\
&\cos^2(i_S)R^2R_t^2r_{ST}^2 - 8GJ_{t2}m_1\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^3R_t^2r_{ST} - GJ_{t2}m_1 \\
&\cos^2(i_L)R^4R_t^2 - 6GJ_{t2}m_1\cos^2(i_S)R^2R_t^2r_{ST}^2 - 2Gm_1\cos^2(i_S)R^4r_{ST}^2]r_{L_1}^2 + \\
&[-6GJ_{t2}m_1\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^4R_t^2r_{ST} - 12GJ_{t2}m_1\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat}) \\
&\cos^2(i_S)R^3R_t^2r_{ST}^2 + 2GJ_{t2}m_1\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^4R_t^2r_{ST} + 4GJ_{t2}m_1 \\
&\cos^2(i_S)R^3R_t^2r_{ST}^2]r_{L_1} + 3GJ_{t2}m_1\,\mathrm{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_S)R^4R_t^2r_{ST}^2 - GJ_{t2}m_1 \\
&\cos^2(i_S)R^4R_t^2r_{ST}^2 = 0
\end{aligned}
$$

$$2\cos^2(i_L)w^2r_{L_2}^{11} + [-4w^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 8Rw^2\cos^2(i_L) \quad \text{(D.2)}$$
$$-2b\cos^2(i_L)]r_{L_2}^{10} + [16Rw^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + 12R^2w^2$$
$$\cos^2(i_L) + 2w^2r_{ST}^2\cos^2(i_S) + 4br_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + 8Rb$$
$$\cos^2(i_L)]r_{L_2}^9 + [-24R^2w^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 8\cos^2(i_L)R^3$$
$$w^2 - 8Rw^2r_{ST}^2\cos^2(i_S) - 16Rbr_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 12R^2b$$
$$\cos^2(i_L) - 2br_{ST}^2\cos^2(i_S) - 2Gm_1\cos^2(i_L) - 2Gm_2\cos^2(i_L) + 2GM_S$$
$$\cos^2(\Delta\varphi)]r_{L_2}^8 + [16\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^3w^2r_{ST} + 2\cos^2(i_L)R^4$$
$$w^2 + 12R^2w^2r_{ST}^2\cos^2(i_S) + 24R^2br_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + 4G$$
$$m_1r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + 4Gm_2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) +$$
$$8\cos^2(i_L)R^3b + 8Rbr_{ST}^2\cos^2(i_S) + 8Gm_1R\cos^2(i_L) + 4Gm_2\cos^2(i_L)$$
$$R - 8GM_SR\cos^2(\Delta\varphi)]r_{L_2}^7 + [-4\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^4w^2r_{ST} +$$
$$3GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_L)R_t^2 - 8\cos^2(i_S)R^3w^2r_{ST}^2 - 16\cos(i_S)$$
$$\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^3br_{ST} - GJ_{t2}m_1\cos^2(i_L)R_t^2 - GJ_{l2}m_2\cos^2(i_L)$$
$$R_l^2 - 16Gm_1Rr_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 8Gm_2\cos(i_S)\cos(i_L)$$
$$\cos(\Delta\theta)Rr_{ST} - 2\cos^2(i_L)R^4b - 12R^2br_{ST}^2\cos^2(i_S) - 12Gm_1R^2\cos^2(i_L)$$
$$-2Gm_1r_{ST}^2\cos^2(i_S) - 2Gm_2\cos^2(i_L)R^2 - 2Gm_2r_{ST}^2\cos^2(i_S) + 12GM_S$$
$$R^2\cos^2(\Delta\varphi))]r_{L_2}^6 + [-6GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)$$
$$R_t^2r_{ST} - 12GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_L)RR_t^2 + 2\cos^2(i_S)R^4w^2r_{ST}^2 + 2G$$
$$J_{t2}m_1\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R_t^2r_{ST} + 2GJ_{l2}m_2\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)$$
$$R_l^2r_{ST} + 4\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^4br_{ST} + 4GJ_{t2}m_1\cos^2(i_L)RR_t^2 +$$
$$24Gm_1R^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + 4Gm_2\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)$$
$$R^2r_{ST} + 8\cos^2(i_S)R^3br_{ST}^2 + 8Gm_1\cos^2(i_L)R^3 + 8Gm_1Rr_{ST}^2\cos^2(i_S) + 4$$
$$Gm_2\cos^2(i_S)Rr_{ST}^2 - 8GM_S\cos^2(\Delta\varphi)R^3]r_{L_2}^5 + [24GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})$$
$$\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)RR_t^2r_{ST} + 18GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_L)R^2R_t^2 +$$
$$3GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_S)R_t^2r_{ST}^2 - 8GJ_{t2}m_1\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R$$
$$R_t^2r_{ST} - 6GJ_{t2}m_1\cos^2(i_L)R^2R_t^2 - GJ_{t2}m_1\cos^2(i_S)R_t^2r_{ST}^2 - GJ_{l2}m_2$$
$$\cos^2(i_S)R_l^2r_{ST}^2 - 16Gm_1\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^3r_{ST} - 2\cos^2(i_S)R^4$$
$$br_{ST}^2 - 2Gm_1\cos^2(i_L)R^4 - 12Gm_1\cos^2(i_S)R^2r_{ST}^2 - 2Gm_2\cos^2(i_S)$$
$$R^2r_{ST}^2 + 2GM_S\cos^2(\Delta\varphi)R^4]r_{L_2}^4 + [-36GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos(i_S)\cos(i_L)$$
$$\cos(\Delta\theta)R^2R_t^2r_{ST} - 12GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_L)R^3R_t^2 - 12GJ_{t2}m_1\ldots$$

$$\ldots \operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_S)RR_t^2r_{ST}^2 + 12GJ_{t2}m_1\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^2R_t^2r_{ST} + 4G$$
$$J_{t2}m_1\cos^2(i_L)R^3R_t^2 + 4GJ_{t2}m_1\cos^2(i_S)RR_t^2r_{ST}^2 + 4Gm_1\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)$$
$$R^4r_{ST} + 8Gm_1\cos^2(i_S)R^3r_{ST}^2]r_{L_2}^3 + [24GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos(i_S)\cos(i_L)$$
$$\cos(\Delta\theta)R^3R_t^2r_{ST} + 3GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_L)R^4R_t^2 + 18GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})$$
$$\cos^2(i_S)R^2R_t^2r_{ST}^2 - 8GJ_{t2}m_1\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^3R_t^2r_{ST} - GJ_{t2}m_1$$
$$\cos^2(i_L)R^4R_t^2 - 6GJ_{t2}m_1\cos^2(i_S)R^2R_t^2r_{ST}^2 - 2Gm_1\cos^2(i_S)R^4r_{ST}^2]r_{L_2}^2 +$$
$$[-6GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^4R_t^2r_{ST} - 12GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})$$
$$\cos^2(i_S)R^3R_t^2r_{ST}^2 + 2GJ_{t2}m_1\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^4R_t^2r_{ST} + 4GJ_{t2}m_1$$
$$\cos^2(i_S)R^3R_t^2r_{ST}^2]r_{L_2} + 3GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_S)R^4R_t^2r_{ST}^2 - GJ_{t2}m_1$$
$$\cos^2(i_S)R^4R_t^2r_{ST}^2 = 0$$

$$
\begin{aligned}
&2\cos^2(i_L)w^2r_{L_3}^{11} + [-4w^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 8Rw^2\cos^2(i_L) \\
&-2b\cos^2(i_L)]r_{L_3}^{10} + [16Rw^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + 12R^2w^2 \\
&\cos^2(i_L) + 2w^2r_{ST}^2\cos^2(i_S) + 4br_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + 8Rb \\
&\cos^2(i_L)]r_{L_3}^{9} + [-24R^2w^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 8\cos^2(i_L)R^3 \\
&w^2 - 8Rw^2r_{ST}^2\cos^2(i_S) - 16Rbr_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 12R^2b \\
&\cos^2(i_L) - 2br_{ST}^2\cos^2(i_S) + 2Gm_1\cos^2(i_L) + 2Gm_2\cos^2(i_L) + 2GM_S \\
&\cos^2(\Delta\varphi)]r_{L_3}^{8} + [16\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^3w^2r_{ST} + 2\cos^2(i_L)R^4 \\
&w^2 + 12R^2w^2r_{ST}^2\cos^2(i_S) + 24R^2br_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 4G \\
&m_1r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 4Gm_2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + \\
&8\cos^2(i_L)R^3b + 8Rbr_{ST}^2\cos^2(i_S) - 8Gm_1R\cos^2(i_L) - 4Gm_2\cos^2(i_L) \\
&R - 8GM_SR\cos^2(\Delta\varphi)]r_{L_3}^{7} + [-4\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^4w^2r_{ST} - \\
&3GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_L)R_t^2 - 8\cos^2(i_S)R^3w^2r_{ST}^2 - 16\cos(i_S) \\
&\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^3br_{ST} + GJ_{t2}m_1\cos^2(i_L)R_t^2 + GJ_{l2}m_2\cos^2(i_L) \\
&R_l^2 + 16Gm_1Rr_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) + 8Gm_2\cos(i_S)\cos(i_L) \\
&\cos(\Delta\theta)Rr_{ST} - 2\cos^2(i_L)R^4b - 12R^2br_{ST}^2\cos^2(i_S) + 12Gm_1R^2\cos^2(i_L) \\
&+2Gm_1r_{ST}^2\cos^2(i_S) + 2Gm_2\cos^2(i_L)R^2 + 2Gm_2r_{ST}^2\cos^2(i_S) + 12GM_S \\
&R^2\cos^2(\Delta\varphi))]r_{L_3}^{6} + [6GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) \\
&R_t^2r_{ST} + 12GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_L)RR_t^2 + 2\cos^2(i_S)R^4w^2r_{ST}^2 - 2G \\
&J_{t2}m_1\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R_t^2r_{ST} - 2GJ_{l2}m_2\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) \\
&R_l^2r_{ST} + 4\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^4br_{ST} - 4GJ_{t2}m_1\cos^2(i_L)RR_t^2 - \\
&24Gm_1R^2r_{ST}\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) - 4Gm_2\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta) \\
&R^2r_{ST} + 8\cos^2(i_S)R^3br_{ST}^2 - 8Gm_1\cos^2(i_L)R^3 - 8Gm_1Rr_{ST}^2\cos^2(i_S) - 4 \\
&Gm_2\cos^2(i_S)Rr_{ST}^2 - 8GM_S\cos^2(\Delta\varphi)R^3]r_{L_3}^{5} + [-24GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat}) \\
&\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)RR_t^2r_{ST} - 18GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_L)R^2R_t^2 - \\
&3GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_S)R_t^2r_{ST}^2 + 8GJ_{t2}m_1\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R \\
&R_t^2r_{ST} + 6GJ_{t2}m_1\cos^2(i_L)R^2R_t^2 + GJ_{t2}m_1\cos^2(i_S)R_t^2r_{ST}^2 + GJ_{l2}m_2 \\
&\cos^2(i_S)R_l^2r_{ST}^2 + 16Gm_1\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^3r_{ST} - 2\cos^2(i_S)R^4 \\
&br_{ST}^2 + 2Gm_1\cos^2(i_L)R^4 + 12Gm_1\cos^2(i_S)R^2r_{ST}^2 + 2Gm_2\cos^2(i_S) \\
&R^2r_{ST}^2 + 2GM_S\cos^2(\Delta\varphi)R^4]r_{L_3}^{4} + [36GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos(i_S)\cos(i_L) \\
&\cos(\Delta\theta)R^2R_t^2r_{ST} + 12GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_L)R^3R_t^2 + 12GJ_{t2}m_1\ldots
\end{aligned}
\tag{D.3}
$$

$$\ldots \operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_S)RR_t^2r_{ST}^2 - 12GJ_{t2}m_1\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^2R_t^2r_{ST} - 4G$$
$$J_{t2}m_1\cos^2(i_L)R^3R_t^2 - 4GJ_{t2}m_1\cos^2(i_S)RR_t^2r_{ST}^2 - 4Gm_1\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)$$
$$R^4r_{ST} - 8Gm_1\cos^2(i_S)R^3r_{ST}^2]r_{L_3}^3 + [-24GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos(i_S)\cos(i_L)$$
$$\cos(\Delta\theta)R^3R_t^2r_{ST} - 3GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_L)R^4R_t^2 - 18GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})$$
$$\cos^2(i_S)R^2R_t^2r_{ST}^2 + 8GJ_{t2}m_1\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^3R_t^2r_{ST} + GJ_{t2}m_1$$
$$\cos^2(i_L)R^4R_t^2 + 6GJ_{t2}m_1\cos^2(i_S)R^2R_t^2r_{ST}^2 + 2Gm_1\cos^2(i_S)R^4r_{ST}^2]r_{L_3}^2 +$$
$$[6GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^4R_t^2r_{ST} + 12GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})$$
$$\cos^2(i_S)R^3R_t^2r_{ST}^2 - 2GJ_{t2}m_1\cos(i_S)\cos(i_L)\cos(\Delta\theta)R^4R_t^2r_{ST} - 4GJ_{t2}m_1$$
$$\cos^2(i_S)R^3R_t^2r_{ST}^2]r_{L_3} - 3GJ_{t2}m_1\operatorname{sen}^2(\phi_{sat})\cos^2(i_S)R^4R_t^2r_{ST}^2 + GJ_{t2}m_1\cos^2(i_S)$$
$$R^4R_t^2r_{ST}^2 = 0$$

PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE

Teses e Dissertações (TDI)

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

Notas Técnico-Científicas (NTC)

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programas de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

Publicações Seriadas

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Constam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

Pré-publicações (PRE)

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.

Manuais Técnicos (MAN)

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

Relatórios de Pesquisa (RPQ)

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

Publicações Didáticas (PUD)

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

Programas de Computador (PDC)

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. Aceitam-se tanto programas fonte quanto os executáveis.