INPE-5305-TDI/455

DEDUÇÃO DE CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO COM DINÂMICA FRACIONADA E RESTRIÇÕES NÃO-DIFERENCIAIS

Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto

INPE

São José dos Campos

Fevereiro de 1991

Secretaria da Ciência e Tecnologia
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

INPE-5305-TDI/455

DEDUÇÃO DE CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO COM DINÂMICA FRACIONADA E RESTRIÇÕES NÃO-DIFERENCIAIS

Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto

Tese de Doutorado em Ciência Espacial/Mecânica Orbital
orientada pelo Dr. Atair Rios Neto,
defendida e aprovada em 27 de fevereiro de 1991.

INPE
São José dos Campos
Fevereiro de 1991

681.5

PINTO, R.L.U.F.
Dedução de condições necessárias para a solução de problemas de controle ótimo com dinâmica fracionada e restrição não-diferenciais. / R.L.U.F. Pinto. -- São José dos Campos: INPE, 1991. 210p. -- (INPE-5305-TDI/455)

1. Controle ótimo. 2. Dinâmica fracionada. 3. Restrição não-diferenciada. 4. Título

INPE-5305-TDI/455

DEDUÇÃO DE CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO COM DINÂMICA FRACIONADA E RESTRIÇÕES NÃO-DIFERENCIAIS

Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto

INPE

São José dos Campos

Fevereiro de 1991

Aprovada pela Banca Examinadora
em cumprimento a requisito exigido
para a obtenção do Título de Doutor
em Ciência Espacial

Dr. Antonio Felix Martins Neto ______________ Presidente

Dr. Atair Rios Neto ______________ Orientador

Dr. Luis Novaes Ferreira França ______________ Membro da Banca -convidado-

Dr. José Cláudio Geromel ______________ Membro da Banca -convidado-

Dr. Agenor de Toledo Fleury ______________ Membro da Banca -convidado-

Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza ______________ Membro da Banca

Candidato: Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto

São José dos Campos, 27 de fevereiro de 1991

RESUMO

Um conjunto de condições necessárias é deduzido para a solução de uma classe de problemas de controle ótimo bastante genérica. A dedução é feita paulatinamente, iniciando-se com a solução de um problema básico de controle ótimo envolvendo restrições de contorno do tipo misto, para sucessivamente analisar a presença de restrições de contorno múltiplo e restrições não-diferenciais, culminando na solução de um problema rotulado como problema de controle ótimo com dinâmica fracionada. A dedução é feita tendo como princípio um teorema de função implícita, e combina idéias de autores anteriores, acrescidas de particularidades próprias do presente desenvolvimento. Aspectos didáticos e de síntese da metodologia de dedução são levados em consideração, de modo que o trabalho oferece não apenas um conjunto de condições necessárias propriamente dito, mas também uma rotina para a dedução de condições necessárias. Isto pode vir a ser útil, seja na solução de outras classes de problemas, seja na obtenção de soluções numéricas. Exemplos enfocando aspectos diversos são resolvidos. Espera-se que o trabalho seja de utilidade não somente para a solução de problemas relacionados à tecnologia espacial, mas também em outras áreas de aplicação.

" Se o Senhor não constroi a casa,
em vão labutam os seus construtores;
Se o Senhor não guarda a cidade,
em vão vigiam os guardas.

É inútil que madrugueis
e que atraseis o vosso deitar
para comer o pão com duros trabalhos:
ao seu amado ele o dá enquanto dorme! "

Livro dos Salmos, salmo 127(126),
versículos 1 e 2, de *Salomão.*

Aos meus avós,

José e Iracema.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar os meus sinceros agradecimentos:

À Universidade Federal de Minas Gerais, ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais e ao Programa CAPES/PICD pela materialização do meu doutoramento;

Aos professores do Curso de Pós-Graduação em Ciência Espacial do INPE pela seriedade e dedicação no cumprimento de seus deveres, e particularmente ao Prof. Atair Rios Neto pela orientação do presente trabalho;

A todos os amigos que de alguma forma participaram da realização deste curso, mas especialmente ao Prof. José Jaime da Cruz, cujas atitudes representaram uma lição de humanismo;

Aos meus familiares, sobretudo aos meus avós José e Iracema e à minha mãe Nilza, pela assistência e dedicação;

Ao Senhor da Vida por tudo, mas especialmente pela preservação da vida do meu filho Henrique Tadeu, sem o que eu talvez tivesse sucumbido.

Necessary Conditions Derivation for the Solution of Optimal Control Problems with Fractioned-Dynamics and Non-Differential Constraints.

ABSTRACT

A set of necessary conditions for the solution of a very general class of optimal control problems is derived. This process is performed in a gradual manner, starting with an ordinary problem of optimal control with mixed-boundary constraints, going through the analysis of multi-boundary constraints and non-differential constraints, and culminating with the solution of a problem here described as "optimal fractioned-dynamics control problem". The derivation is based in an implicit function theorem, and combine ideas of some of the previous works with those of the author. Didactic aspects of the deduction methodology are considered, enabling the work to be used as a necessary conditions deduction routine, instead of just posing a set of necessary conditions properly speaking. This can be useful in the derivation of other classes of optimal problems, or in practical problems where a numerical soluction is required. Examples focusing many aspects are solved. It is hoped that this work proves to be useful for the solution of space technology problems, as well as for applications in other areas.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A disponibilidade de um conjunto de condições necessárias para a solução de problemas de controle ótimo de sistemas dinâmicos constitui um dos aspectos fundamentais para aplicações práticas da teoria de controle ótimo. Isto é particularmente importante no caso da tecnologia espacial, onde encontra-se frequentemente problemas práticos modelados como problemas de controle ótimo. Dentro do contexto, é preciso que se observe que a disponibilidade de condições necessárias é importante não apenas para a abordagem de aspectos analíticos destes problemas, mas também, via de regra, para o solucionamento numérico dos mesmos.

Neste trabalho, deduz-se um conjunto de condições necessárias para uma classe bastante genérica de problemas de controle ótimo denominada como "problemas de controle ótimo com dinâmica fracionada". A expressão "dinâmica fracionada " quer expressar aqui o fato da dinâmica do problema ser diferente em sub-intervalos distintos do tempo. A mudança prevista na dinâmica pode incluir alteração na estrutura das equações diferenciais, na estrutura das restrições não-diferenciais, ou até mesmo na conceituação dos vetores de estado ou de controle em sub-intervalos distintos.

Problemas desta natureza podem surgir, para citar exemplos ligados à tecnologia espacial, ao se modelar a trajetória de um veículo espacial dentro e fora da atmosfera, onde as forças aerodinâmicas e gravitacionais recebem tratamentos diferenciados, ou então no modelamento elástico do veículo, que sofre alterações, seja no caso de foguetes, após a ejeção de um estágio, seja no caso de satélites, após a extenção de painéis solares. Exemplos fora da tecnologia espacial são abordados por Clarke e Vinter em [14].

A dedução das condições necessárias é feita sob a tentativa de conciliar, satisfatoriamente, simplicidade e precisão matemática. Com isto, espera-se que não apenas os resultados propriamente ditos, mas também a metodologia de dedução em si, estejam acessíveis a prováveis usuários. Um dos aspectos didáticos da dedução é que ela se estabelece paulatinamente, começando com problemas mais simples, os quais vão sendo progressivamente expandidos.

No Capítulo 2 é feita uma breve revisão bibliográfica que aborda, separadamente, o tratamento de restrições não-diferenciais, o estudo de problemas com restrições de contorno múltiplo, e, por último, a obtenção de condições necessárias para a solução de problemas com dinâmica fracionada.

Inicia-se o desenvolvimento teórico propriamente dito no Capítulo 3, cuja filosofia de dedução e resultados são obtidos baseando-se em Blum [9], acrescentando-se idéias de Hestenes [40] e alguns aspectos originais, que são comentados no final do capítulo. O desenvolvimento utiliza resultados auxiliares tratados no Apêndice A, os quais incluem um teorema de função implícita.

No Capítulo 4 passa-se a considerar no problema a presença de restrições de contorno do tipo múltiplo. A dedução envolve o particionamento do intervalo total de tempo em vários sub-intervalos, e uma discriminação das quinas como "implícitas" ou "explícitas". Restrições de desigualdade são supostas terem sido representadas na forma de igualdade, com o auxílio de variáveis complementares.

Dando sequência ao estudo, o tratamento de restrições não-diferenciais é considerado no Capítulo 5. Utiliza-se um teorema de função implícita durante as deduções e, também aí, idéias de Hestenes [40] são aproveitadas. As restrições não-diferenciais aparecem na forma de igualdade, do tipo misto nas variáveis de estado e de controle. Entretanto, no final do capítulo, mostra-se uma maneira de representar restrições não-diferenciais de desigualdade na forma de igualdade. Assim, num sentido prático, o problema estudado prevê a presença de restrições não-diferenciais de desigualdade.

Apoiando-se nos desenvolvimentos dos capítulos anteriores, deduz-se no Capítulo 6 um conjunto de condições necessárias para problemas de controle ótimo com dinâmica fracionada, inicialmente considerando-se somente a presença de restrições de contorno múltiplo, e acrescentando-se posteriormente restrições não-diferenciais.

Com o intuito de fortalecer algumas idéias expostas ao longo do trabalho, no Capítulo 7 são tecidas algumas considerações relacionadas com a teoria existente.

No Capítulo 8 apresenta-se alguns exemplos resolvidos, cada um enfocando um aspecto particular.

Finalmente, no Capítulo 9 estabelece-se a conclusão do trabalho, incluindo algumas expectativas quanto a desenvolvimentos futuros.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LITERATURA

2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, através de uma revisão bibliográfica, apresenta-se um breve histórico e dá-se uma noção do estado da arte na dedução de condições necessárias de primeira ordem para a solução de problemas de otimização de processos de controle descritos por equações diferenciais ordinárias.

A abordagem compreende três linhas de pesquisa perseguidas pelos estudiosos da área, quais sejam: i) Tratamento de restrições não-diferenciais; ii) Problemas com restrições de contorno múltiplo; iii) Problemas com dinâmica fracionada.

A presente revisão não objetiva o tratamento de problemas não-suaves, ou seja, problemas nos quais as hipóteses de diferenciabilidade das funções envolvidas normalmente adotadas são relaxadas. Por outro lado, a possibilidade de existir variáveis de estado descontínuas é considerada.

2.2 - TRATAMENTO DE RESTRIÇÕES NÃO-DIFERENCIAIS

A dedução de condições necessárias para a solução de problemas de otimização dinâmica com restrições não-diferenciais é assunto já considerado de longa data. De acordo com Paiewonsky [59], ainda no final do século passado, Weierstrass foi provavelmente o primeiro a estudar o assunto, obtendo as usuais condições necessárias incluindo as condições de quina para um problema de Lagrange em duas dimensões, supondo a presença de restrições de desigualdade na coordenada $x(\cdot)$. Restrições de desigualdade envolvendo explicitamente a derivada da variável dependente, $\dot{x}(\cdot)$, passaram a ser consideradas mais tarde, destacando-se estudo feito por Valentine [69] em 1937, onde o autor sugere tratar desigualdades com um artifício matemático hoje conhecido como "representação do tipo Valentine" para um vínculo de desigualdade.[1]

---

[1] Mais recentemente podemos ver a representação do tipo Valentine sendo utilizada para o tratamento de restrições de desigualdade no estado em Jacobson e Lele [41], Miele e Cloutier [53], e em Miele et al. [54]–[55], visando a solução de problemas reais com o auxílio de procedimentos numéricos.

Estes autores, bem como os primeiros estudiosos dos primórdios da otimização dinâmica, tratavam o problema em sua forma clássica do cálculo de variações, onde não se faz uso da definição das variáveis de controle, como na teoria de controle ótimo.

Com a adoção, nas últimas décadas, do formalismo de controle ótimo[2], a solução de problemas de otimização dinâmica adquire novas características. Em 1933, L. M. Graves [35] publica um artigo que segundo Reid [64], é o primeiro trabalho na literatura do cálculo de variações e teoria de controle ótimo onde encontramos a "condição de Weierstrass" ou "princípio de extremo" em um "formalismo de controle". Hestenes [38], em 1950, publica resultados que incluem um conjunto de condições necessárias para problemas envolvendo restrições não-diferenciais que dependem simultaneamente das variáveis de controle e de estado. Em [39], Hestenes aperfeiçoa seus resultados, desenvolvendo uma dedução que chama a atenção pela generalidade do problema analisado, para a época, e pela aplicabilidade das condições necessárias por ele deduzidas.

Por sua vez, em 1959, Pontryagin et al. [62] publicam um conjunto de condições necessárias, na forma de um princípio de máximo, hoje conhecido como "princípio de máximo de Pontryagin". Pontryagin et al., em seus resultados, supõem para as variáveis de controle um conjunto de restrições embutidas na forma abstrata

$$u \in U,$$

sendo U dependente exclusivamente de u.[3]

Condições necessárias para problemas com restrições nas variáveis de estado, dentro de um formalismo de controle ótimo, foram obtidas provavelmente pela primeira vez em 1959, através de estudos feitos por Gamkrelidze [29]–[30] que partiu em sua dedução do princípio de máximo de Pontryagin. Posteriormente, Berkovitz [6] recuperou os resultados de Gamkrelidze com uma dedução fundamentada no cálculo de variações.

Apoiando-se numa técnica de derivação da restrição do estado no tempo, Bryson et al. [11] obtiveram resultados que estendem a aplicabilidade dos de Gamkrelidze a restrições de

[2] Vide em Berkovitz [7] um histórico sobre o desenvolvimento da teoria de controle ótimo e sua relação com o cálculo de variações.

[3] Hestenes, comparando os resultados obtidos por ele em [38], com aqueles obtidos por Pontryagin et al.[62], afirma em [40], pág. 252, ter deduzido o "princípio de máximo" ainda em 1950. Sem querer entrar no mérito da questão, deve-se observar que existem diferenças significativas entre o "princípio de máximo" estabelecido por Hestenes, e o "princípio de máximo de Pontryagin".

ordem superior a 1.[4]

Os resultados de Bryson et al. não se prestam a problemas cuja trajetória ótima toca a fronteira de estado em apenas um instante isolado. Esta limitação foi eliminada em Jacobson et al. [42], que obtêm seus resultados recorrendo a uma generalização das condições de Kuhn-Tucker. Entretanto, conforme observado por Taylor [67], os resultados de Jacobson et al. ainda não se aplicam a problemas cuja solução atinge a fronteira no instante final. Esta limitação veio a ser removida em Medhin [52], que recorre a um método de penalização para a sua dedução (vide também Matveev [51]).

A dedução de condições necessárias para problemas com a presença simultânea de restrições no estado e do tipo misto, foi efetuada em um número relativamente pequeno de estudos. Dentro desta categoria pode-se citar, separados pela metodologia de dedução:

a) Guinn [36], Russak [65]-[66] e Gollan [34], que fazem suas deduções como um prosseguimento de Hestenes [39];

b) Makowski e Neustadt [49], que utilizam uma teoria abstrata desenvolvida por Neustadt (vide Neustadt [57]-[58] e Halkin e Neustadt [37]);

c) Anorov [2]-[3], que realiza uma extensão do princípio de máximo de Pontryagin;

d) Dyukalov e Ilyutovich [26]-[27] que obtêm seus resultados a partir do estudo de problemas lineares [23]-[25], uma idéia vislumbrada pela primeira vez por Kantorovich [43] em 1940;

e) Dubovitskii e Milyutin [20]-[21], Ledzewicz-Kowalewska [46]-[47], e Dubovitskii e Dubovitskii [22], que utilizam teoria desenvolvida por Dubovitskii e Milyutin [18]-[19];

f) Arutyunov [5], que desenvolve sua dedução apoiando-se em um método de função de penalização.

---

[4] Para a definição da ordem de uma restrição no estado, vide Bryson et al. [11], pág. 2456.

Os resultados obtidos por Dyukalov e Ilyutovich, e aqueles que se desenvolveram tendo como base a teoria de Dubovitskii e Milyutin, têm a propriedade de não necessitarem da hipótese de que a matriz de derivadas parciais

$$\left[\frac{\partial c}{\partial u}\right], \quad \left\{\frac{\partial c}{\partial u}\right\}_{i,j} \triangleq \frac{\partial c_i}{\partial u_j} \qquad (i = 1, \ldots, n_c; j = 1, \ldots, n_u)$$

tenha posto n_c, onde c denota o vetor de restrições não-diferenciais e u o vetor de controle. Isto, em princípio, permite um tratamento unificado das restrições não-diferenciais, sem a necessidade de um tratamento discriminado para as restrições no estado. Particularmente, nas condições necessárias de Dyukalov e Ilyutovich[5], aparece explicitamente a influência da matriz de derivadas parciais $[\partial c/\partial u]$. Por outro lado, estes resultados apresentam algumas dificuldades quanto à sua utilização prática, como por exemplo, o envolvimento de medidas de Lebesgue-Stielties.

Um outro aspecto relevante a se comentar é que as condições necessárias de Arutyunov [5], e de Dubovitskii e Dubovitskii [22], têm a importante propriedade de se aplicarem a problemas cuja solução está sobre a fronteira de estado no instante final.

2.3 - PROBLEMAS COM RESTRIÇÕES DE CONTORNO MÚLTIPLO

Aqui, por "restrições de contorno múltiplo", estamos querendo nos referir a restrições do tipo

$$g[x(t_0); x(t_1); x^+(t_1); \ldots; x(t_N); x^+(t_N); x(t_{N+1}); t_0; t_1; \ldots; t_{N+1}; p] = 0, \tag{2.1}$$

sendo $t_e(e = 1, \ldots, N) \in [t_0, t_{N+1}]$, um conjunto de instantes intermediários, e p um vetor de parâmetros.[6]

Observe através de (2.1) que, em princípio, admite-se descontinuidades no vetor de estado.

O tratamento de problemas de otimização dinâmica com vínculos de contorno múltiplo surgiu dentro do cálculo variacional através de Denbow [16] em 1937, que deduziu condições

---

5 Os resultados de Dyukalov e Ilyutovich foram desenvolvidos para um problema com uma estrutura de pouca generalidade, pelo menos no que diz respeito às condições de contorno.

6 Vínculos intermediarios, do tipo

$$\theta[x(t_i); t_i] = 0, \quad t_i \in (t_0, t_{N+1}),$$

e vínculos de contorno misto, do tipo

$$\psi[x(t_0); x(t_{N+1}); t_0; t_{N+1}] = 0$$

naturalmente aparecem como casos particularizados de (2.1).

necessárias para um problema denominado por ele como "problema generalizado de Bolza". O desenvolvimento de Denbow não prevê descontinuidades nas variáveis de estado e nem a presença de restrições não-diferenciais.

Dentro de um formalismo de controle ótimo, Nathanson [56], em 1971, talvez tenha sido o primeiro a tratar a solução de problemas com vínculos de contorno múltiplo[7], fazendo suas deduções seguindo a linha de raciocínio de Hestenes [39], nas quais as condições de contorno aparecem numa forma parametrizada.

Em Makowski e Neustadt [49], o problema estudado também inclui um conjunto de vínculos de contorno múltiplo. À semelhança de Nathanson, Makowski e Neustadt admitem a presença simultânea de restrições não-diferenciais. Makowski e Neustadt, entretanto, ao contrário de Nathanson, consideram os instantes intermediários fixos. Ambos trabalham com o vetor de estado contínuo sobre todo o intervalo de tempo.

Problemas com vínculos de contorno múltiplo prevendo descontinuidades no vetor de estado foram considerados por Getz e Martin [33] em 1980, que obtêm uma forma estendida do princípio de máximo de Pontryagin. O problema considerado por Getz e Martin não prevê a existência de restrições não-diferenciais e, conforme comentários dos próprios autores, generaliza resultados obtidos anteriormente por Mason et al. [50] (vide também Denham [17]), Vincent e Mason [70] e Geering [31].

No Capítulo 5 do presente trabalho, pela primeira vez na literatura, segundo nossa revisão bibliográfica, deduz-se um conjunto de condições necessárias para problemas de controle ótimo envolvendo simultaneamente restrições não-diferenciais, vínculos de contorno múltiplo, e descontinuidades no vetor de estado.

[7] Nathanson apresenta as condições de contorno na forma

$$t_e = T^e(b), \qquad e = 0,1,\ldots,N+1;$$

$$x(T^e(b)) = X^e(b), \qquad e = 0,1,\ldots,N+1;$$

sendo b um vetor de parâmetros a ser determinado.

2.4 - CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA PROBLEMAS COM DINÂMICA FRACIONADA

Problemas de controle ótimo cuja dinâmica muda sobre uma superfície descrita por

$$\theta[x(\tau);\tau] = 0, \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}], \qquad \theta : R^{n_x} \times R \longmapsto R \tag{2.2}$$

receberam na literatura a denominação de problemas com estrutura variável.[8] Por "mudança na dinâmica" deseja-se expressar modificações na estrutura das equações diferenciais que regem o problema.

No caso da equação (2.2) assumir a forma particular

$$\theta = \tau - t_i, \qquad \tau \in [t_0, t_{N+1}], \tag{2.3}$$

o problema tem recebido na literatura a denominação de controle por passos ("step by step control", segundo Arsenashvili [4]).

Condições necessárias para problemas de controle por passos foram deduzidas por Kharatishvilli [44] em 1980, que analisa um problema de tempo mínimo para o qual se admite um único instante de mutação t_i, de valor a ser determinado. O problema estudado por Kharatishvilli inclui a presença de restrições não-diferenciais, as quais permanecem inalteradas ao passar por t_i. Posteriormente, Arsenashvili [4], utilizando os resultados desenvolvidos por Kharatishvilli, deduz condições necessárias para um problema que inclui um retardo como argumento nas equações diferenciais. O trabalho de Arsenashvili também considera um único instante de mutação para a dinâmica, prevendo sobre este instante uma alteração na própria conceituação física dos vetores de estado e de controle, que, no caso, podem possuir até dimensões distintas nos dois sub-intervalos de tempo considerados. O problema estudado por Arsenashvili, contudo, não possui restrições não-diferenciais. Tanto no trabalho de Kharatishvilli como no de Arsenashvili, as restrições de contorno possuem estrutura bastante simples.

O tratamento de problemas de controle ótimo por passos envolvendo restrições de contorno múltiplo só veio a ser considerado em 1989 através de Clarke e Vinter [14]–[15], que adotaram para o problema a denominação de "multiprocessos ótimos" ("optimal multiprocess"). Clarke e Vinter deduzem condições necessárias em [15], apontando algumas aplicações em [14]. O

[8] Uma outra denominação utilizada é a de "problemas com as equações diferenciais possuindo o lado direito descontínuo". Vide, por exemplo, Troitskii [68].

desenvolvimento de Clarke e Vinter admite certos tipos de não-regularidade nas funções envolvidas. Quanto às restrições não-diferenciais, Clarke e Vinter consideram somente a presença de restrições de controle. Restrições mistas ou no estado não foram previstas.

No Capítulo 6 do presente trabalho deduz-se um conjunto de condições necessárias para um problema de multiprocessos ótimos, aqui denominado como "problema de controle ótimo com dinâmica fracionada". O problema estudado no Capítulo 6 admite um número arbitrário, embora conhecido, de mutações, prevê a existência de restrições de contorno múltiplo e a presença de restrições não-diferenciais mistas. Tanto as equações diferenciais que descrevem a dinâmica do problema, como as restrições não-diferenciais, podem sofrer alterações nos pontos de mutação, podendo os vetores de estado e de controle possuir dimensões distintas em intervalos distintos de tempo. Embora restrições de desigualdade não estejam explicitamente presentes, apresenta-se uma forma destas serem incorporadas ao problema através de manipulações já conhecidas. Deste modo, num sentido prático, pode-se considerar que o problema prevê a presença de restrições deste tipo. A dedução do Capítulo 6, a se basear em nossa revisão da literatura, está sendo aplicada a um problema ainda não estudado anteriormente.

CAPÍTULO 3

CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA ORDINÁRIO DE CONTROLE ÓTIMO

3.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo deduz-se condições necessárias para a solução do problema de encontrar valores ótimos para

$$(y(\cdot), v(\cdot), \tau_0, \tau_1, q),$$

a saber,

$$(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, p),$$

de modo que

$$h_0[x(t_0); x(t_1); t_0; t_1; p] \qquad (3.1a)$$

seja um mínimo, com:

$$h_i[x(t_0); x(t_1); t_0; t_1; p] = 0, \qquad i = 1, \ldots, n_h; \qquad (3.1b)$$

$$\dot{x}(\tau) = f[x(\tau); u(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_0, t_1]; \qquad (3.1c)$$

onde

$$t_e \in \delta_e \subset E^1, \quad e = 0, 1; \qquad t_0 < t_1;$$

$$p \in Q \subset E^{n_p};$$

$$x(\tau) \in Y \subset E^{n_x} \quad , \qquad \tau \in [t_0, t_1];$$

$$u(\tau) \in V \subset E^{n_u} \quad , \qquad \tau \in [t_0, t_1];$$

$$h_i : E^{2n_x} \times E^2 \times E^{n_p} \longmapsto E, \qquad i = 0, 1, \ldots, n_h;$$

$$f \triangleq [f_1; \ldots; f_{n_x}]' : E^{n_x} \times E^{n_u} \times E \longmapsto E^{n_x};$$

denotando E^α o espaço euclidiano de dimensão α e sendo $\delta_e(e = 0, 1), Q, Y$ e V conjuntos abertos.

As funções $x(\cdot)$ e $u(\cdot)$ devem satisfazer certas condições de regularidade que serão estabelecidas no conjunto de hipóteses a ser enunciado adiante. O mesmo conjunto de hipóteses também conterá condições de regularidade para as funções $h_i(i = 0, 1, \ldots, n_h)$ e $f_j(j = 1, \ldots, n_x)$.

O presente problema será identificado ao longo do trabalho como "problema ordinário de controle ótimo". A dedução de condições necessárias para este problema servirá de base para as generalizações que se processarão nos próximos capítulos. Os fundamentos matemáticos que servirão de apoio para a dedução foram reunidos no Apêndice A, que será referenciado sempre que necessário.

As condições necessárias apresentam-se na forma de uma regra de multiplicadores, deduzidas com base em um teorema de função implícita e recorrendo-se a uma técnica de variáveis adjuntas.

A linha de raciocínio adotada foi inspirada em Blum [9]. Entretanto, o desenvolvimento aqui seguido difere daquele adotado por Blum em alguns aspectos, os quais, tomados em conjunto, tornam os mecanismos de dedução mais facilmente acessíveis. Isto sem comprometimento do rigor matemático. Ao contrário, conforme será defendido posteriormente, a presente dedução possui consistência matemática superior àquela encontrada em Blum.

É bom ressaltar também que alguns conceitos da análise funcional são utilizados aqui naturalmente, sem se recorrer ao formalismo próprio da análise funcional, diferentemente de Blum. Isto torna as hipóteses aqui adotadas, de um ponto de vista conceitual, mais simples.

Algumas idéias contidas em Hestenes [40] também foram incorporadas ao desenvolvimento.

3.2 - HIPÓTESES

Para a validade dos resultados a serem deduzidos, devem ser adotadas as seguintes hipóteses:

H1: $x_j(\cdot)(j = 1, \ldots, n_x)$ devem ser funções contínuas para $\tau \in [t_0, t_1]$;

H2: $u_k(\cdot)(k = 1, \ldots, n_u)$ devem ser funções contínuas para $\tau \in [t_0, t_1]$;

H3: As funções $f_i(i = 1, \ldots, n_x)$ e $h_j(j = 0, 1, \ldots, n_h)$, e suas derivadas parciais primeiras, são todas contínuas em relação a todos os seus argumentos, nos domínios considerados.

Observe que, em virtude das condições de regularidade embutidas nas hipóteses H1–H3, e da restrição (3.1c), o problema (3.1) não possui quinas, sendo as funções $x_j (j = 1, \ldots, n_x)$, na verdade, suaves. No próximo capítulo, com a introdução de restrições de contorno múltiplo, estas condições serão relaxadas, permitindo a existência de quinas.

3.3 - CONDIÇÕES NECESSÁRIAS

Para o enunciado das condições necessárias para a solução do problema (3.1) considere as definições a seguir:

DEFINIÇÃO 3.1: (Mínimo Local para o Problema Ordinário de Controle Ótimo)

Diz-se que

$$(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, p)$$

fornece um mínimo local para o problema (3.1), *e particularmente, que* $u(\cdot)$ *representa um controle localmente ótimo, quando existir um* ϵ *positivo, não importa quão pequeno ele seja, tal que*

$$h_0[y(\tau_0); y(\tau_1); \tau_0; \tau_1; q] \geq h_0[x(t_0); x(t_1); t_0; t_1; p], \tag{3.2}$$

para todo $(y(\cdot), v(\cdot), \tau_0, \tau_1, q)$ *tal que:*

I: $y_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ *e* $v_j(\cdot)(j = 1, \ldots, n_u)$ *satisfazem as condições de regularidade impostas a* $x_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ *e* $u_j(\cdot)(j = 1, \ldots, n_u)$, *respectivamente.*

II:

$$(y(\cdot), v(\cdot), \tau_0, \tau_1, q)$$

satisfaz as restrições (3.1b) *e* (3.1c), *quando em substituição a*

$$(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, p),$$

com $\tau_e \in \delta_e (e = 0, 1)$; $q \in Q$; $y(\tau) \in Y$, $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$; *e* $v(\tau) \in V$, $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$.

III:

$$\sum_{e=0}^{1} |\tau_e - t_e| + |q - p| + |y(\tau_0) - x(t_0)| + \int_{\tau_0}^{\tau_1} |v(\tau) - w(\tau)| d\tau < \epsilon$$

onde $w(\cdot)$ *representa uma função fixa que possui as seguintes propriedades(vide Fig. 3.1):*

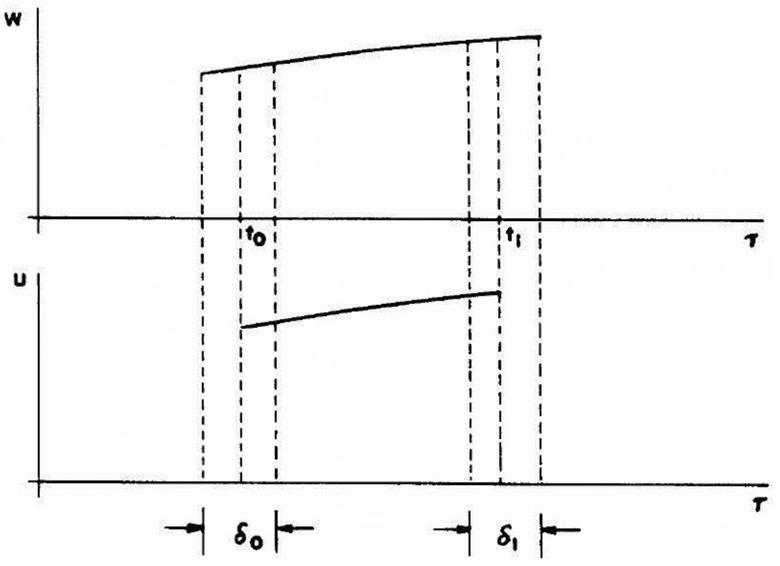

Fig. 3.1 - Construção de $w(\cdot)$ ($n_u = 1$).

i: $w(\cdot)$ *é contínua para todo* $\tau \in I_1 \triangleq \{[t_0, t_1] \cup \delta_0 \cup \delta_1\}$;

ii: $w(\tau) \in V$ *para* $\tau \in I_1$;

iii: para $\tau \in [t_0, t_1]$, $w(\cdot)$ *coincide com* $u(\cdot)$.

DEFINIÇÃO 3.2: (Mínimo Global para o Problema Ordinário de Controle Ótimo)

Quando (3.2) *é satisfeita independentemente de* ϵ, *ou seja, se podemos abolir a condição* (*III*) *anterior, diz-se que* $(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, p)$ *fornece um mínimo global para o problema* (3.1), *ou particularmente, que* $u(\cdot)$ *representa um controle globalmente ótimo.*

Deve ser notado que, para que $u(\cdot)$ seja globalmente ótimo, é necessário que ele seja localmente ótimo. Concordantemente, condições necessárias para mínimo local serão também necessárias para mínimo global.[1]

Com as definições anteriores, estamos aptos a enunciar o seguinte teorema de condições necessárias:

---

[1] Por estarmos interessados em condições necessárias para mínimo local, nos itens e capítulos subsequentes omitiremos definições de mínimo global. Sempre que desejar, o leitor poderá, retornando às definições (3.1)–(3.2), extrair essas definições por conta própria.

TEOREMA 3.1:

Para que $(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, p)$ *forneça um mínimo local para o problema* (3.1), *respeitadas as hipóteses H1–H3, devem existir multiplicadores*

$$\nu_0, \quad \nu \triangleq [\nu_1; \ldots; \nu_{n_h}]',$$

e uma função vetorial

$$\lambda(\cdot) \triangleq [\lambda_1(\cdot); \ldots; \lambda_{n_x}(\cdot)]',$$

tais que valem:

I:

$$\nu_0 + |\nu| \neq 0, \qquad \nu_0 \in \left\{0, 1\right\}; \tag{3.3a}$$

onde $|\cdot|$ *denota a norma euclidiana, e* ν_0 *representa um multiplicador associado à função objetivo.*

II: $\lambda_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ *são funções contínuas para* $\tau \in [t_0, t_1]$, *com*

(equação adjunta)
$$\dot{\lambda}(\tau) = -\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]' \lambda(\tau), \qquad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{3.3b}$$

$$\text{onde} \quad \left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\}_{i,j} \triangleq \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, \ldots, n_x)$$

(transversalidade para $x(t_0)$)
$$\lambda(t_0) = +\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left[\frac{\partial h_i}{\partial x(t_0)}\right]'; \tag{3.3c}$$

(transversalidade para $x(t_1)$)
$$\lambda(t_1) = -\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left[\frac{\partial h_i}{\partial x(t_1)}\right]'; \tag{3.3d}$$

$$\text{onde} \quad \left\{\frac{\partial h_i}{\partial x(t_e)}\right\}_j \triangleq \frac{\partial h_i}{\partial x_j(t_e)} \quad (j = 1, \ldots, n_x) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n_h; e = 0, 1);$$

III:

(equação de controle)
$$\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]' \lambda(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{3.3e}$$

$$\text{onde} \quad \left\{\frac{\partial f}{\partial u}\right\}_{i,j} \triangleq \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \qquad (i = 1, \ldots, n_x; j = 1, \ldots, n_u)$$

IV:

(otimalidade do vetor p)
$$\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left[\frac{\partial h_i}{\partial p}\right]' = 0, \tag{3.3f}$$

$$\text{onde} \qquad \left\{\frac{\partial h_i}{\partial p}\right\}_j \triangleq \frac{\partial h_i}{\partial p_j} \quad (j = 1, \ldots, n_p), \quad i = 0, 1, \ldots, n_h;$$

V:

(transversalidade para t_0 e t_1)

$$\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left\{ \left[\frac{\partial h_i}{\partial x(t_e)}\right] \dot{x}(t_e) + \frac{\partial h_i}{\partial t_e} \right\} = 0, \qquad e = 0, 1. \tag{3.3g}$$

3.4 - PROVA DO TEOREMA 3.1

Para a prova do Teorema 3.1, inicialmente reescrevemos o problema (3.1) na seguinte forma:

Encontrar

$$y(\tau) \in Y, \quad v(\tau) \in V, \quad \tau_0 \in \delta_0, \quad \tau_1 \in \delta_1, \quad \text{e} \quad q \in Q,$$

que forneçam um mínimo local para

$$\tilde{h}_0 = h_0[y(\tau_0); y(\tau_1); \tau_0; \tau_1; q] + [\Lambda^0(\tau_1)]' y(\tau_1) - [\Lambda^0(\tau_0)]' y(\tau_0) - \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left\{ [\Lambda^0(\tau)]' \dot{y}(\tau) + [\dot{\Lambda}^0(\tau)]' y(\tau) \right\} d\tau; \tag{3.4a}$$

sujeito a

$$\tilde{h}_i = h_i[y(\tau_0); y(\tau_1); \tau_0; \tau_1; q] + [\Lambda^i(\tau_1)]' y(\tau_1) - [\Lambda^i(\tau_0)]' y(\tau_0) - \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left\{ [\Lambda^i(\tau)]' \dot{y}(\tau) + [\dot{\Lambda}^i(\tau)]' y(\tau) \right\} d\tau, \qquad i = 1, \ldots, n_h; \tag{3.4b}$$

e

$$\dot{y}(\tau) = f[y(\tau), v(\tau), \tau], \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{3.4c}$$

onde

$$\Lambda^i(\cdot) \in E^{n_x} \triangleq [\Lambda_1^i(\cdot); \ldots; \Lambda_{n_x}^i(\cdot)]', \qquad i = 0, 1, \ldots, n_h;$$

denotam $n_h + 1$ funções vetoriais contínuas e diferenciáveis.[2]

As funções $\Lambda^i(\cdot)(i = 0, 1, \ldots, n_h)$ aparecem aqui como funções fixas definidas para todo $\tau \in I_1$, embora, por enquanto, arbitrárias. Note que

$$\tilde{h}_i = h_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n_h;$$

[2] A construção das funções $\tilde{h}_i(i{=}0,1,\ldots,n_h)$ foi baseada em Hestenes [40], Cap. 5, §7.

qualquer que seja a escolha de $\Lambda^i(\cdot)(i = 0, 1, \ldots, n_h)$. Em um ponto adiante no desenvolvimento, o critério para a escolha destas funções será estabelecido. A conveniência da utilização destas funções ficará clara no momento desta escolha.

Reescrito o problema segundo as expressões (3.4), expressamos as variáveis candidatas $y(\cdot)$, $v(\cdot)$, τ_0, τ_1 e q na forma

$$y(\tau) = z(\tau) + \zeta(\tau), \qquad \tau \in [\tau_0, \tau_1]; \tag{3.5a}$$

$$v(\tau) = w(\tau) + \phi(\tau), \qquad \tau \in [\tau_0, \tau_1]; \tag{3.5b}$$

$$\tau_0 = t_0 + \Delta t_0; \tag{3.5c}$$

$$\tau_1 = t_1 + \Delta t_1; \tag{3.5d}$$

$$q = p + \Delta p; \tag{3.5e}$$

onde t_0, t_1 e p representam os valores ótimos de τ_0, τ_1 e q, e onde $z(\cdot)$ e $w(\cdot)$ são funções vetoriais que têm as seguintes propriedades:

i: $w(\cdot)$ obedece ao estabelecido na Definição 3.1;

ii: $z(\cdot)$ é a solução contínua de (3.4c) sobre I_1, com condição de contorno $z(t_0) = x(t_0)$.

Note que, em decorrência das duas propriedades acima, $z(\cdot)$ coincide com $x(\cdot)$ sobre $[t_0, t_1]$. Quanto às grandezas $\zeta(\cdot)$, $\phi(\cdot)$, Δt_0, Δt_1, e Δp, elas têm os seus significados definidos a partir da conceituação das demais grandezas envolvidas nas equações (3.5).

A substituição de (3.5a) e (3.5b) em (3.4c), fornece

$$\dot{z}_i(\tau) + \dot{\zeta}_i(\tau) = f_i[z(\tau) + \zeta(\tau); w(\tau) + \phi(\tau); \tau], \qquad i = 1, \ldots, n_x; \tag{3.6a}$$

ou

$$\dot{\zeta}(\tau) = F[\zeta(\tau); \phi(\tau); \tau], \quad \tau \in [\tau_0, \tau_1]; \tag{3.6b}$$

onde

$$F \triangleq [F_1; \ldots; F_{n_x}]'$$

com

$$F_i[\zeta(\tau); \phi(\tau); \tau] = f_i[y(\tau); v(\tau); \tau] - \dot{z}_i(\tau), \quad \tau \in [\tau_0, \tau_1], \qquad i = 1, \ldots, n_x. \tag{3.6c}$$

Assim, para cada escolha de $\phi(\cdot)$, obtendo $\zeta(\cdot)$ como solução de (3.6b), teremos a satisfação de (3.4c). Ou seja, (3.6b) define $\zeta(\cdot)$ como função de $\phi(\cdot)$, a menos de uma condição de contorno(vide

Pontryagin [61], págs. 18–22). Com isto em mente, para deduzirmos as condições necessárias, tomaremos como grandezas arbitrárias,

$$\phi(\cdot), \quad \Delta t_0, \quad \Delta t_1, \quad \Delta p \ \text{ e } \ \zeta(\tau_0),$$

onde

$$\zeta(\tau_0) \triangleq y(\tau_0) - z(\tau_0); \tag{3.7a}$$

de modo que

$$y(\tau_0) = z(\tau_0) + \zeta(\tau_0). \tag{3.7b}$$

A escolha de $\zeta(\tau_0)$ representará a especificação de uma condição de contorno para a solução de (3.6b).

Em outras palavras, qualquer conjunto candidato

$$(y(\cdot), v(\cdot), \tau_0, \tau_1, q),$$

definido conforme (3.5), com $\zeta(\cdot)$ escolhida como solução de (3.6b), em função de $\phi(\cdot)$, com condição de contorno conforme (3.7b), satisfará os vínculos dinâmicos (3.4c).

Deste modo, no desenvolvimento que se segue,

$$\phi(\cdot), \quad \Delta t_0, \quad \Delta t_1, \quad \Delta p \ \text{ e } \ \zeta(\tau_0),$$

podem ser consideradas como variações independentes, enquanto $\zeta(\cdot)$ é função das grandezas anteriores, em conformidade com (3.6b).

Por outro lado, para as variações em questão, adotaremos expressões parametrizadas na forma:

$$\phi(\tau) = \beta_0 U^0(\tau) + \sum_{i=1}^{n_h} \beta_i U^i(\tau), \quad \tau \in [\tau_0, \tau_1]; \tag{3.8a}$$

$$\Delta t_0 = \beta_0 T_1^0 + \sum_{i=1}^{n_h} \beta_i T_0^i; \tag{3.8b}$$

$$\Delta t_1 = \beta_0 T_1^0 + \sum_{i=1}^{n_h} \beta_i T_1^i; \tag{3.8c}$$

$$\Delta p = \beta_0 P^0 + \sum_{i=1}^{n_h} \beta_i P^i; \tag{3.8d}$$

$$\zeta(\tau_0) = \beta_0 X^0 + \sum_{i=1}^{n_h} \beta_i X^i; \tag{3.8e}$$

onde

$$U^i(\cdot) \triangleq [U_1^i(\cdot); \ldots; U_{n_u}^i(\cdot)]', \qquad i = 0, 1, \ldots, n_h;$$

$$P^i \triangleq [P_1^i; \ldots; P_{n_p}^i]', \qquad i = 0, 1, \ldots, n_h;$$

$$X^i \triangleq [X_1^i; \ldots; X_{n_x}^i]', \qquad i = 0, 1, \ldots, n_h.$$

O porque da adoção das expressões (3.8) ficará claro mais adiante. Por enquanto basta observar que a forma adotada através das expressões (3.8) não representa nenhuma limitação para as variações $\phi(\cdot)$, Δt_0, Δt_1, Δp e $\zeta(\tau_0)$. Isto permanece garantido ainda que as funções vetoriais $U^i(\cdot)$, os vetores P^i e X^i, e os escalares T_0^i e T_1^i sejam fixados para todos os valores de i, exceto um valor particular, por exemplo $i = 0$.

Devemos observar também que, uma vez fixados $U^i(\cdot)$, X^i, $T_e^i(e = 0, 1)$, P^i e $\Lambda^i(\cdot)$ para $i = 0, 1, \ldots, n_h$, as expressões (3.4a) e (3.4b) passam a representar funções de $\beta_i(i = 0, 1, \ldots, n_h)$. Sejam estas funções denotadas na forma

$$\tilde{h}_i = g_i[\beta_0, \beta], \qquad i = 0, 1, \ldots, n_h; \tag{3.9}$$

onde

$$\beta \triangleq [\beta_1; \ldots; \beta_{n_h}]'.$$

As expressões (3.9) conduzirão adiante à utilização do teorema de função implícita anunciado no Apêndice A.

Notemos ainda que

$$\tau_0\Big|_{(\beta_0=0,\beta=0)} = t_0; \tag{3.10a}$$

$$\tau_1\Big|_{(\beta_0=0,\beta=0)} = t_1; \tag{3.10b}$$

$$q\Big|_{(\beta_0=0,\beta=0)} = p; \tag{3.10c}$$

$$v(\tau)\Big|_{(\beta_0=0,\beta=0)} = w(\tau) = u(\tau), \qquad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{3.10d}$$

$$y(\tau)\Big|_{(\beta_0=0,\beta=0)} = z(\tau) = x(\tau), \qquad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{3.10e}$$

$$y(\tau_0)\Big|_{(\beta_0=0,\beta=0)} = z(t_0) = x(t_0); \tag{3.10f}$$

e

$$y(\tau_1)\Big|_{(\beta_0=0,\beta=0)} = z(t_1) = x(t_1). \tag{3.10g}$$

Isto significa que

$$g_i[0, 0] = h_i[x(t_0); x(t_1); t_0; t_1; p], \qquad i = 0, 1, \ldots, n_h; \tag{3.11a}$$

e que, levando-se em consideração (3.1c),

$$g_i[0,0] = 0, \qquad i = 1, \ldots, n_h. \tag{3.11b}$$

Para a aplicação do teorema de função implícita (vide Teorema A.1 no Apêndice A), devemos primeiramente calcular as derivadas parciais das funções $g_i (i = 0, 1, \ldots, n_h)$ em relação a $\beta_j (j = 0, 1, \ldots, n_h)$. Calculando estas derivadas, obtemos, com o auxílio da regra de Leibnitz (vide Amazigo e Rubenfeld [1], págs. 156–157) aplicada às expressões (3.4a) e (3.4b):

$$\frac{\partial g_i}{\partial \beta_j} = \frac{\partial \tilde{h}_i}{\partial \beta_j} = A_1 + A_2 - A_3 - A_4, \qquad i, j = 0, 1, \ldots, n_h; \tag{3.12a}$$

onde:

$$A_1 = \left[\frac{\partial h_i}{\partial y(\tau_0)}\right]\frac{\partial y(\tau_0)}{\partial \beta_j} + \left[\frac{\partial h_i}{\partial y(\tau_1)}\right]\frac{\partial y(\tau_1)}{\partial \beta_j} + \left[\frac{\partial h_i}{\partial \tau_0}\right]\frac{\partial \tau_0}{\partial \beta_j} + \left[\frac{\partial h_i}{\partial \tau_1}\right]\frac{\partial \tau_1}{\partial \beta_j} + \left[\frac{\partial h_i}{\partial q}\right]\frac{\partial q}{\partial \beta_j}; \tag{3.12b}$$

$$A_2 = \left[\frac{\partial \Lambda^i(\tau_1)}{\partial \beta_j}\right]' y(\tau_1) + [\Lambda^i(\tau_1)]'\frac{\partial y(\tau_1)}{\partial \beta_j} - \left[\frac{\partial \Lambda^i(\tau_0)}{\partial \beta_j}\right]' y(\tau_0) - [\Lambda^i(\tau_0)]'\frac{\partial y(\tau_0)}{\partial \beta_j}; \tag{3.12c}$$

$$A_3 = \int_{\tau_0}^{\tau_1}\left\{\left[\left.\frac{\partial \Lambda^i(\cdot)}{\partial \beta_j}\right|_\tau\right]' \dot{y}(\tau) + [\Lambda^i(\tau)]'\left.\frac{\partial \dot{y}(\cdot)}{\partial \beta_j}\right|_\tau + \left[\left.\frac{\partial \dot{\Lambda}^i(\cdot)}{\partial \beta_j}\right|_\tau\right]' y(\tau) + [\dot{\Lambda}^i(\tau)]'\left.\frac{\partial y(\cdot)}{\partial \beta_j}\right|_\tau\right\} d\tau; \tag{3.12d}$$

$$A_4 = \left\{[\Lambda^i(\tau_1)]'\dot{y}(\tau_1) - [\dot{\Lambda}^i(\tau_1)]'y(\tau_1)\right\}\frac{\partial \tau_1}{\partial \beta_j} - \left\{[\Lambda^i(\tau_0)]'\dot{y}(\tau_0) + [\dot{\Lambda}^i(\tau_0)]'y(\tau_0)\right\}\frac{\partial \tau_0}{\partial \beta_j}. \tag{3.12e}$$

Para a manipulação das expressões (3.12) notar que, para $j = 0, 1, \ldots, n_h$, vale:

$$\frac{\partial y(\cdot)}{\partial \beta_j} = \frac{\partial \zeta(\cdot)}{\partial \beta_j}; \tag{3.13a}$$

$$\frac{\partial v(\cdot)}{\partial \beta_j} = \frac{\partial \phi(\cdot)}{\partial \beta_j}; \tag{3.13b}$$

$$\frac{\partial \dot{y}(\cdot)}{\partial \beta_j} = \frac{\partial \dot{\zeta}(\cdot)}{\partial \beta_j}; \qquad \text{ou, considerando (3.6}b\text{)},$$

$$\frac{\partial \dot{y}(\cdot)}{\partial \beta_j} = \left[\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right]'\frac{\partial \zeta(\cdot)}{\partial \beta_j} + \left[\frac{\partial F}{\partial \phi}\right]'\frac{\partial \phi(\cdot)}{\partial \beta_j} = \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]'\frac{\partial \zeta(\cdot)}{\partial \beta_j} + \left[\frac{\partial f}{\partial v}\right]'\frac{\partial \phi(\cdot)}{\partial \beta_j}; \tag{3.13c}$$

$$\frac{\partial \Lambda^i(\cdot)}{\partial \beta_j} = \frac{\partial \Lambda^i(\cdot)}{\partial \beta_j} = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, n_h; \tag{3.13d}$$

pois $\Lambda^i(\cdot)$ são funções fixas do tempo;

$$\frac{\partial y(\tau_0)}{\partial \beta_j} = \frac{\partial z(\tau_0)}{\partial \beta_j} + \frac{\partial \zeta(\tau_0)}{\partial \beta_j} = \frac{\partial z(\tau_0)}{\partial \tau_0}\frac{\partial \tau_0}{\partial \beta_j} + \frac{\partial \zeta(\tau_0)}{\partial \beta_j} = \dot{z}(\tau_0)\frac{\partial \tau_0}{\partial \beta_j} + \frac{\partial \zeta(\tau_0)}{\partial \beta_j}; \tag{3.13e}$$

$$\frac{\partial y(\tau_1)}{\partial \beta_j} = \frac{\partial z(\tau_1)}{\partial \beta_j} + \frac{\partial \zeta(\tau_1)}{\partial \beta_j} = \frac{\partial z(\tau_1)}{\partial \tau_1}\frac{\partial \tau_1}{\partial \beta_j} + \frac{\partial \zeta(\tau_1)}{\partial \beta_j} = \dot{z}(\tau_1)\frac{\partial \tau_1}{\partial \beta_j} + \frac{\partial \zeta(\tau_1)}{\partial \beta_j}; \tag{3.13f}$$

$$\frac{\partial \Lambda^i(\tau_0)}{\partial \beta_j} = \frac{\partial \Lambda^i(\tau_0)}{\partial \tau_0}\frac{\partial \tau_0}{\partial \beta_j} = \dot{\Lambda}^i(\tau_0)\frac{\partial \tau_0}{\partial \beta_j}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n_h; \tag{3.13g}$$

$$\frac{\partial \Lambda^i(\tau_1)}{\partial \beta_j} = \frac{\partial \Lambda^i(\tau_1)}{\partial \tau_1}\frac{\partial \tau_1}{\partial \beta_j} = \dot{\Lambda}^i(\tau_1)\frac{\partial \tau_1}{\partial \beta_j}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n_h; \tag{3.13h}$$

$$\frac{\partial q}{\partial \beta_j} = \frac{\partial \Delta p}{\partial \beta_j}. \tag{3.13i}$$

Recorrendo às expressões (3.8), obtemos ainda, para $j = 0, 1, \ldots, n_h$:

$$\frac{\partial \phi(\cdot)}{\partial \beta_j} = U^j(\cdot); \tag{3.14a}$$

$$\frac{\partial \zeta(\tau_0)}{\partial \beta_j} = X^j; \tag{3.14b}$$

$$\frac{\partial \tau_0}{\partial \beta_j} = T_0^j; \tag{3.14c}$$

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial \beta_j} = T_1^j; \tag{3.14d}$$

e

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \beta_j} = P^j. \tag{3.14e}$$

Não é necessário desenvolver uma expressão para

$$\frac{\partial \zeta(\tau_1)}{\partial \beta_j},$$

devido à escolha que se fará para $\Lambda^i(\cdot)$, conforme ficará claro daqui a pouco.

Substituindo as expressões (3.13) em (3.12), e considerando (3.14), obtemos, após alguns cancelamentos:

$$\frac{\partial g_i}{\partial \beta_j} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 - A_6, \qquad i, j = 0, 1, \ldots, n_h; \tag{3.15a}$$

onde:

$$A_1 = \left[\frac{\partial h_i}{\partial y(\tau_0)} - [\Lambda^i(\tau_0)]'\right] X^j; \tag{3.15b}$$

$$A_2 = \left[\frac{\partial h_i}{\partial y(\tau_1)} + [\Lambda^i(\tau_1)]'\right] \frac{\partial \zeta(\tau_1)}{\partial \beta_j}; \tag{3.15c}$$

$$A_3 = \left[\frac{\partial h_i}{\partial q}\right] \frac{\partial \Delta p}{\partial \beta_j}; \tag{3.15d}$$

$$A_4 = \left\{\left[\frac{\partial h_i}{\partial y(\tau_0)}\right] \dot{z}(\tau_0) + \frac{\partial h_i}{\partial \tau_0} + [\Lambda^i(\tau_0)]'[\dot{y}(\tau_0) - \dot{z}(\tau_0)]\right\} T_0^j; \tag{3.15e}$$

$$A_5 = \left\{\frac{\partial h_i}{\partial y(\tau_1)} \dot{z}(\tau_1) + \frac{\partial h_i}{\partial \tau_1} - [\Lambda^i(\tau_1)]'[\dot{y}(\tau_1) - \dot{z}(\tau_1)]\right\} T_1^j; \tag{3.15f}$$

$$A_6 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left\{\left[\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]' \Lambda^i(\tau) + \dot{\Lambda}^i(\tau)\right]' \frac{\partial \zeta(\cdot)}{\partial \beta_j}\bigg|_\tau + \left[\left[\frac{\partial f}{\partial v}\right]' \Lambda^i(\tau)\right]' U^j(\tau)\right\} d\tau. \tag{3.15g}$$

Particularmente, estamos interessados nas derivadas parciais avaliadas em

$$(\beta_0, \beta) = (0, 0).$$

Neste caso, no lugar de (3.15) escrevemos

$$\frac{\partial g_i}{\partial \beta_j}\bigg|_{(0,0)} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 - A_6, \qquad i,j = 0,1,\ldots,n_h; \tag{3.16a}$$

onde:

$$A_1 = \left[\frac{\partial h_i}{\partial x(t_0)} - [\Lambda^i(t_0)]'\right] X^j; \tag{3.16b}$$

$$A_2 = \left[\frac{\partial h_i}{\partial x(t_1)} + [\Lambda^i(\tau_1)]'\right] \frac{\partial \zeta(\tau_1)}{\partial \beta_j}\bigg|_{(0,0)}; \tag{3.16c}$$

$$A_3 = \left[\frac{\partial h_i}{\partial p}\right] P^j; \tag{3.16d}$$

$$A_4 = \left\{\left[\frac{\partial h_i}{\partial x(t_0)}\right]\dot{x}(t_0) + \frac{\partial h_i}{\partial t_0}\right\} T_0^j; \tag{3.16e}$$

$$A_5 = \left\{\left[\frac{\partial h_i}{\partial x(t_1)}\right]\dot{x}(t_1) + \frac{\partial h_i}{\partial t_1}\right\} T_1^j; \tag{3.16f}$$

$$A_6 = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]' \Lambda^i(\tau) + \dot{\Lambda}^i(\tau)\right]' \frac{\partial \zeta(\cdot)}{\partial \beta_j}\bigg|_{(\tau,\beta_0=0,\beta=0)} + [\Lambda^i(\tau)]' \left[\frac{\partial f}{\partial u}\right] U^j(\tau) \right\} d\tau. \tag{3.16g}$$

Na obtenção de (3.16) foram feitos alguns cancelamentos em decorrência de se ter

$$\dot{y}(\tau_0)\Big|_{(\beta_0=0,\beta=0)} = \dot{z}(\tau_0)\Big|_{(\beta_0=0,\beta=0)} = \dot{x}(t_0), \tag{3.17a}$$

e

$$\dot{y}(\tau_1)\Big|_{(\beta_0=0,\beta=0)} = \dot{z}(\tau_1)\Big|_{(\beta_0=0,\beta=0)} = \dot{x}(t_1). \tag{3.17b}$$

Agora, a fim de nos livrarmos da presença, em (3.16), de

$$\frac{\partial \zeta(\tau_1)}{\partial \beta_j}\bigg|_{(0,0)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \zeta(\tau)}{\partial \beta_j}\bigg|_{(\tau,\beta_0=0,\beta=0)} \qquad \text{para} \qquad j = 0,1,\ldots,n_h;$$

iremos nos servir da arbitrariedade na escolha das funções $\Lambda^i(\cdot)$. Escolhamos estas funções como sendo as soluções contínuas das equações diferenciais

$$\dot{\Lambda}^i(\tau) = -\left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]' \Lambda^i(\tau), \quad \tau \in I_1 \qquad i = 0,1,\ldots,n_h; \tag{3.18a}$$

tendo como condição de contorno

$$\Lambda^i(t_1) = -\frac{\partial h_i}{\partial x(t_1)}, \qquad i = 0,1,\ldots,n_h. \tag{3.18b}$$

A teoria de equações diferenciais nos garante a existência e unicidade de tais funções, dentro das hipóteses adotadas (vide, por exemplo, Pontryagin et al. [61], págs. 18–23 e Cap. 4).

Com esta escolha, as expressões (3.16) podem ser reescritas como:

$$\left.\frac{\partial g_i}{\partial \beta_j}\right|_{(0,0)} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5, \qquad i,j = 0,1,\ldots,n_h; \tag{3.19a}$$

onde

$$A_1 = \left[\frac{\partial h_i}{\partial x(t_0)} - [\Lambda^i(t_0)]'\right] X^j; \tag{3.19b}$$

$$A_2 = \left[\frac{\partial h_i}{\partial p}\right] P^j; \tag{3.19c}$$

$$A_3 = \left\{\left[\frac{\partial h_i}{\partial x(t_0)}\right]\dot{x}(t_0) + \frac{\partial h_i}{\partial t_0}\right\} T_0^j; \tag{3.19d}$$

$$A_4 = \left\{\left[\frac{\partial h_i}{\partial x(t_1)}\right]\dot{x}(t_1) + \frac{\partial h_i}{\partial t_1}\right\} T_1^j; \tag{3.19e}$$

$$A_5 = -\int_{t_0}^{t_1} \left\{[\Lambda^i(\tau)]'\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right] U^j(\tau)\right\} d\tau. \tag{3.19f}$$

Visando o processo final de dedução das condições necessárias, façamos neste momento as seguintes adoções:

$$X^j = \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_0)}\right]' - \Lambda^j(t_0); \qquad j = 0,1,\ldots,n_h; \tag{3.20a}$$

$$P^j = \left[\frac{\partial h_j}{\partial p}\right]'; \qquad j = 0,1,\ldots,n_h; \tag{3.20b}$$

$$T_0^j = \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_0)}\right]\dot{x}(t_0) + \frac{\partial h_j}{\partial t_0}; \qquad j = 0,1,\ldots,n_h; \tag{3.20c}$$

$$T_1^j = \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_1)}\right]\dot{x}(t_1) + \frac{\partial h_j}{\partial t_1}; \qquad j = 0,1,\ldots,n_h; \tag{3.20d}$$

e

$$U^j(\tau) = -\left[\frac{\partial f}{\partial w}\right]' \Lambda^j(\tau), \qquad \tau \in I_1 \quad j = 0,1,\ldots,n_h. \tag{3.20e}$$

Levando-se as expressões (3.20) em conta, a equação (3.19) pode ser reescrita como

$$\left.\frac{\partial g_i}{\partial \beta_j}\right|_{(0,0)} = [X^i]'[X^j] + [P^i]'[P^j] + T_0^i T_0^j + T_1^i T_1^j + $$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \left\{[U^i(\tau)]'[U^j(\tau)]\right\} d\tau, \qquad i,j = 0,1,\ldots,n_h. \tag{3.21}$$

Considere a definição da seguinte matriz de derivadas parciais:

$$B \triangleq \left[\frac{\partial g}{\partial \beta}\right], \quad \left\{\frac{\partial g}{\partial \beta}\right\}_{i,j} \triangleq \frac{\partial g_i}{\partial \beta_j} \quad (i,j = 1,\ldots,n_h). \tag{3.22a}$$

De acordo com (3.21), a matriz B definida assim, pode ser escrita como

$$B = \sum_{i=0}^{5} B_i, \tag{3.23a}$$

onde

$$B_1 \triangleq [X]'[X]; \tag{3.23b}$$

$$B_2 \triangleq [P]'[P]; \tag{3.23c}$$

$$B_3 \triangleq [T_0]'[T_0]; \tag{3.23d}$$

$$B_4 \triangleq [T_1]'[T_1]; \tag{3.23e}$$

e

$$B_5 \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \Big\{[U(\tau)]'[U(\tau)]\Big\} d\tau; \tag{3.23f}$$

e onde

$$X \triangleq \big[X^1; \ldots; X^{n_h}\big]; \tag{3.23g}$$

$$P \triangleq \big[P^1; \ldots; P^{n_h}\big]; \tag{3.23h}$$

$$T_0 \triangleq \big[T^1; \ldots; T^{n_h}\big]; \tag{3.23i}$$

$$T_1 \triangleq \big[T^1; \ldots; T^{n_h}\big]; \tag{3.23j}$$

e

$$U(\cdot) \triangleq [U^1(\cdot); \ldots; U^{n_h}(\cdot)]. \tag{3.23k}$$

Neste ponto invocamos o leitor a observar os seguintes fatos:

a) As matrizes $B_i (i = 1, ..., 5)$ são, por construção, definidas não-negativas. Consequentemente B também é definida não-negativa, por construção.

b) Para que a matriz B seja semi-definida positiva, é necessário que as matrizes B_i $(i = 1, ..., 5)$ sejam todas simultaneamente semi-definidas positivas. Caso contrário a matriz B será definida positiva.

c) Se as restrições (3.1b) não estão presentes no problema (3.1), não faz sentido a definição da matriz B .

Estas três observações levam à consideração das seguintes possibilidades:

Possibilidade I:

No caso da matriz B ser semi-definida positiva, existirá um vetor de coeficientes

$$\nu \triangleq [\nu_1; \ldots; \nu_{n_h}]',$$

não nulo, tal que sejam simultaneamente verdadeiras

$$X\nu = 0; \tag{3.24a}$$

$$P\nu = 0; \tag{3.24b}$$

$$T_0\nu = 0; \tag{3.24c}$$

$$T_1\nu = 0; \tag{3.24d}$$

e

$$U\nu(\tau) = 0; \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{3.24e}$$

ou, equivalentemente,

$$\sum_{i=1}^{n_h} \nu_i X^i = 0; \tag{3.25a}$$

$$\sum_{i=1}^{n_h} \nu_i P^i = 0; \tag{3.25b}$$

$$\sum_{i=1}^{n_h} \nu_i T_0^i = 0; \tag{3.25c}$$

$$\sum_{i=1}^{n_h} \nu_i T_1^i = 0; \tag{3.25d}$$

e

$$\sum_{i=1}^{n_h} \nu_i U^i(\tau) = 0; \quad \tau \in [t_0, t_1]. \tag{3.25e}$$

De fato, se B é semi-definida positiva, existirá um vetor ν não nulo, tal que

$$\nu' B \nu = 0. \tag{3.26a}$$

Ora, neste caso, como as matrizes $B_i (i = 1, \ldots, 5)$ são todas definidas não-negativas, na verdade devemos ter

$$\nu' B_i \nu = 0, \qquad i = 1, \ldots, 5; \tag{3.26b}$$

o que implica nas expressões (3.25), já que, em virtude de (3.23b)-(3.23f),

$$\nu' B_1 \nu = [X\nu]'[X\nu], \tag{3.26c}$$

$$\nu' B_2 \nu = [P\nu]'[P\nu], \tag{3.26d}$$

$$\nu' B_3 \nu = [T_0\nu]'[T_0\nu], \tag{3.26e}$$

$$\nu' B_4 \nu = [T_1\nu]'[T_1\nu], \tag{3.26f}$$

e

$$\nu' B_5 \nu = \int_{t_0}^{t_1} \Big\{[U(\tau)\nu]'[U(\tau)\nu]\Big\} d\tau. \tag{3.26g}$$

Possibilidade II:

A matriz B é definida positiva. Neste caso teremos

$$\det \left[\frac{\partial g}{\partial \beta}\right] \neq 0, \tag{3.27a}$$

e podemos invocar o teorema de função implícita enunciado no Apêndice A (Teorema A.1) para afirmarmos que, para todo β_0 tal que

$$|\beta_0| \leq \delta, \tag{3.27b}$$

δ suficientemente pequeno, sempre existirá uma função vetorial contínua

$$\beta(\beta_0) \triangleq [\beta_1(\beta_0); \ldots; \beta_{n_h}(\beta_0)]',$$

tal que

$$\bar{g}_i(\beta_0) \triangleq g_i[\beta_0; \beta(\beta_0)] = 0, \qquad i = 1, \ldots, n_h. \tag{3.27c}$$

Isto leva ao seguinte resultado:

TEOREMA 3.2:

Seja, no desenvolvimento precedente,

$$\det \left[\frac{\partial g}{\partial \beta}\right] \neq 0, \tag{3.28a}$$

e seja

$$\nu \triangleq [\nu_1; \ldots; \nu_{n_h}]',$$

a solução única de

$$\left[\frac{\partial g_i}{\partial \beta}\right] \nu = -\frac{\partial g_0}{\partial \beta_i}, \qquad i = 1, \ldots, n_h. \tag{3.28b}$$

Então, se

$$(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, p)$$

fornece um mínimo local para o problema (3.1), deverá ocorrer:

$$X^0 + \sum_{i=1}^{n_h} \nu_i X^i = 0; \tag{3.29a}$$

$$P^0 + \sum_{i=1}^{n_h} \nu_i P^i = 0; \tag{3.29b}$$

$$T_0^0 + \sum_{i=1}^{n_h} \nu_i T_0^i = 0; \tag{3.29c}$$

$$T_1^0 + \sum_{i=1}^{n_h} \nu_i T_1^i = 0; \tag{3.29d}$$

e

$$U^0(\tau) + \sum_{i=1}^{n_h} \nu_i U^i(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]. \tag{3.29e}$$

Prova:

Ora, não é difícil confirmar que, para que

$$(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, p)$$

represente um mínimo local para o problema (3.1),

$$(\beta_0, \beta) = (0, 0),$$

tem que fornecer um mínimo para

$$g_0[\beta_0; \beta]$$

com

$$g_i[\beta_0; \beta] = 0, \qquad i = 1, \dots, n_h.$$

De fato, se assim não fosse, existiria um $(\beta_0, \beta) \neq (0, 0)$, com

$$|\beta_0| + |\beta|$$

tão pequeno quanto se queira, tal que

$$g_0[\beta_0; \beta] < g_0[0, 0],$$

com

$$g_i[\beta_0; \beta] = 0, \qquad i = 1, \dots, n_h.$$

Concordantemente teríamos

$$h_0[y(\tau_0); y(\tau_1); \tau_0; \tau_1; q] < h_0[x(t_0); x(t_1); t_0; t_1; p],$$

com

$$h_i[y(\tau_0); y(\tau_1); \tau_0; \tau_1; q] = 0, \qquad i = 1, \ldots, n_h;$$

e com

$$\sum_{e=0}^{1} |\tau_e - t_e| + |q - p| + |y(\tau_0) - x(t_0)| + \int_{\tau_0}^{\tau_1} |v(\tau) - w(\tau)| d\tau$$

tão pequeno quanto se queira, o que é um absurdo, de acordo com a Definição 3.1 .

Notemos que isto deve valer para qualquer escolha de

$$X^i, \quad P^i, \quad T_0^i, \quad T_1^i \quad \text{e } U^i(\cdot), \qquad i = 0, 1, \ldots, n_h.$$

Feita esta primeira observação, consideremos a definição da seguinte operação:

Sendo

$$\omega \triangleq [Z^1; Z^2; Z^3; Z^4; Z^5(\cdot)]' \in \Omega,$$

$$Z^1 \in E^{n_x}; \quad Z^2 \in E^{n_p}; \quad Z^3 \in E^1; \quad Z^4 \in E^1; \quad Z^5(\cdot) : I \subset E^1 \longmapsto E^{n_u};$$

definimos, para $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$:[3]

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle \triangleq \sum_{k=1}^{4} [Z_1^k]'[Z_2^k] + \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ [Z_1^5(\tau)]'[Z_2^5(\tau)] \Big\} d\tau. \tag{3.30}$$

Com relação a (3.30),convidamos o leitor a observar que valem as seguintes propriedades:

P1: $\langle \omega, \omega \rangle \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$;

P2: $\langle \omega, \omega \rangle = 0$, se, e somente se,

$$\omega = [Z^1; Z^2; Z^3; Z^4; Z^5(\cdot)]' = [0; 0; 0; 0; 0]';$$

P3: Para todo $\alpha, \beta \in E^1$, e $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega$ vale

$$\langle \omega_1, \alpha\omega_2 + \beta\omega_3 \rangle = \alpha\langle \omega_1, \omega_2 \rangle + \beta\langle \omega_1, \omega_3 \rangle.$$

[3] Note que a operação $\langle \cdot \, , \cdot \rangle$ definida através de (3.30) representa um produto interno.

Voltando à nossa dedução de condições necessárias, observemos que, de acordo com (3.30), se definimos

$$\eta_i \triangleq [X^i; P^i; T_0^i; T_1^i; U^i(\cdot)], \qquad i = 0, 1, \ldots, n_h; \tag{3.31a}$$

então teremos

$$\left.\frac{\partial g_i}{\partial \beta_j}\right|_{(0,0)} = \langle \eta_i, \eta_j \rangle, \qquad i, j = 0, 1, \ldots, n_h. \tag{3.31b}$$

Seja agora

$$\bar{\eta} \triangleq [\bar{X}; \bar{P}; \bar{T}_0; \bar{T}_1; \bar{U}(\cdot)] \in \Omega$$

escolhido como

$$\bar{\eta} = \eta_0 + \sum_{i=1}^{n_h} \nu_i \eta_i, \tag{3.32}$$

com

$$\nu = [\nu_1; \ldots; \nu_{n_h}]'$$

em (3.32) sendo a solução indicada em (3.28*b*).

Comparando (3.31*b*) com (3.28*b*), podemos escrever

$$\sum_{i=1}^{n_h} \nu_i \langle \eta_i, \eta_j \rangle + \langle \eta_0, \eta_j \rangle = 0, \qquad j = 1, \ldots, n_h. \tag{3.33}$$

Por outro lado, de (3.32), considerando a propriedade P3 definida anteriormente, obtemos

$$\langle \bar{\eta}, \eta_j \rangle = \langle \eta_0, \eta_j \rangle + \sum_{i=1}^{n_h} \nu_i \langle \eta_i, \eta_j \rangle, \qquad j = 1, \ldots, n_h; \tag{3.34}$$

o que comparado com (3.33) implica em

$$\langle \bar{\eta}, \eta_j \rangle = 0, \qquad j = 1, \ldots, n_h. \tag{3.35}$$

Consideremos agora, no lugar de (3.8), as expressões

$$\phi(\tau) = \gamma_0 \bar{U}(\tau) + \sum_{i=1}^{n_h} \gamma_i U^i(\tau), \qquad \tau \in [\tau_0, \tau_1]; \tag{3.36a}$$

$$\Delta t_0 = \gamma_0 \bar{T}_0 + \sum_{i=1}^{n_h} \gamma_i T_0^i; \tag{3.36b}$$

$$\Delta t_1 = \gamma_0 \bar{T}_1 + \sum_{i=1}^{n_h} \gamma_i T_1^i; \tag{3.36c}$$

$$\Delta p = \gamma_0 \bar{P} + \sum_{i=1}^{n_h} \gamma_i P^i; \tag{3.36d}$$

e

$$\zeta(\tau_0) = \gamma_0 \bar{X} + \sum_{i=1}^{n_h} \gamma_i X^i; \tag{3.36e}$$

onde, conforme (3.31a) e (3.32),

$$\bar{U}(\tau) = U^0(\tau) + \sum_{j=1}^{n_h} \nu_j U^j(\tau), \quad \tau \in [\tau_0, \tau_1]; \tag{3.36f}$$

$$\bar{T}_0 = T_0^0 + \sum_{j=1}^{n_h} \nu_j T_0^j; \tag{3.36g}$$

$$\bar{T}_1 = T_1^0 + \sum_{j=1}^{n_h} \nu_j T_1^j; \tag{3.36h}$$

$$\bar{P} = P^0 + \sum_{j=1}^{n_h} \nu_j P^j; \tag{3.36i}$$

e

$$\bar{X} = X^0 + \sum_{j=1}^{n_h} \nu_j X^j. \tag{3.36j}$$

Seja ainda

$$\tilde{\eta} \triangleq \bar{\eta} + \sum_{i=1}^{n_h} \gamma_i \eta_i. \tag{3.37}$$

O desenvolvimento feito anteriormente, desde as equações (3.8) até as equações (3.23), pode ser aplicado às equações (3.36) de forma idêntica, exceto pela troca de

$$[X^0; P^0; T_0^0; T_1^0; U^0(\cdot)] \qquad \text{por} \qquad [\bar{X}; \bar{P}; \bar{T}_0; \bar{T}_1; \bar{U}(\cdot)],$$

de

$$[\beta_0; \beta] \qquad \text{por} \qquad [\gamma_0; \gamma],$$

e de

$$g[\,\cdot\,] \qquad \text{por} \qquad \tilde{g}[\,\cdot\,].$$

Em vista disto, o leitor poderá fazer em sequência, sem muito esforço, as seguintes observações:

a) A função

$$\tilde{g}_0[\gamma_0; \gamma]$$

tem mínimo local em

$$[\gamma_0; \gamma] = [0, 0]; \tag{3.38}$$

b) Temos

$$\tilde{g}_i[0, 0] = 0, \qquad i = 1, \ldots, n_h; \tag{3.39}$$

c) São verdadeiras as expressões

$$\left.\frac{\partial \tilde{g}_0}{\partial \gamma_0}\right|_{(0,0)} = \langle \bar{\eta}, \bar{\eta} \rangle; \tag{3.40a}$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial \gamma_0}\right|_{(0,0)} = \langle \eta_i, \bar{\eta} \rangle, \qquad i = 1, \ldots, n_h; \tag{3.40b}$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial \gamma_j}\right|_{(0,0)} = \langle \eta_i, \eta_j \rangle, \qquad i, j = 1, \ldots, n_h. \tag{3.40c}$$

Comparando (3.31b) com (3.40c) vemos que

$$\left.\frac{\partial g_i}{\partial \beta_j}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial \gamma_j}\right|_{(0,0)}, \qquad i, j = 1, \ldots, n_h; \tag{3.41}$$

o que significa que a condição (3.27a) implica em

$$\det \left[\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \gamma}\right] \neq 0, \tag{3.42a}$$

$$\text{onde} \qquad \left\{\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \gamma}\right\}_{i,j} \triangleq \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial \gamma_j} \quad (i, j = 1, \ldots, n_h). \tag{3.42b}$$

Ora, comparando (3.40b) com (3.35) obtemos

$$\left.\frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial \gamma_0}\right|_{(0,0)} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n_h; \tag{3.43}$$

o que, juntamente com (3.42a), nos permite recorrer ao Teorema A.3 para deduzir como verdadeira a expressão

$$\left.\frac{\partial \tilde{g}_0}{\partial \gamma_0}\right|_{(0,0)} = 0. \tag{3.44}$$

Por sua vez, (3.44) levada em (3.40a), fornece

$$\langle \bar{\eta}, \bar{\eta} \rangle = 0. \tag{3.45}$$

A equação (3.45), finalmente, considerando a propriedade P2 anterior, implica em ser $\bar{\eta}$, na verdade, o elemento nulo, o que resulta nas equações (3.29a)–(3.29d), conforme desejávamos demonstrar.

Possibilidade III:

Na ausência das restrições (3.1*b*) no problema (3.1), não há lugar para a definição da matriz B. Nesta situação especial, as equações (3.8) se escreverão:

$$\phi(\tau) = \beta_0 U^0(\tau), \quad \tau \in [\tau_0, \tau_1]; \tag{3.46a}$$

$$\Delta t_0 = \beta_0 T_0^0; \tag{3.46b}$$

$$\Delta t_1 = \beta_0 T_1^0; \tag{3.46c}$$

$$\Delta p = \beta_0 P^0; \tag{3.46d}$$

e

$$\zeta(\tau_0) = \beta_0 X^0. \tag{3.46e}$$

Aplicando desenvolvimento análogo àquele feito entre as equações (3.8) e (3.21), embora desta vez bastante simplificado, obtemos:

i: a função $g_0[\beta_0]$ atingirá valor mínimo para $\beta_0 = 0$, com

$$g_0[0] = h_0[x(t_0); x(t_1); t_0; t_1; p]; \tag{3.47a}$$

ii: vale

$$\frac{dg_0}{d\beta_0} = [X^0]'[X^0] + [P^0]'[P^0] + T_0^0 T_0^0 + T_1^0 T_1^0 + \int_{t_0}^{t_1} \Big\{[U^0(\tau)]'[U^0(\tau)]\Big\} d\tau. \tag{3.47b}$$

Neste caso podemos recorrer diretamente ao Teorema A.2, para deduzirmos como condição necessária para a solução ótima,

$$\frac{dg_0}{d\beta_0} = 0, \tag{3.48}$$

o que levado em (3.47*b*), por sua vez, implica em

$$X^0 = 0; \tag{3.49a}$$

$$P^0 = 0; \tag{3.49b}$$

$$T_0^0 = 0; \tag{3.49c}$$

$$T_1^0 = 0; \tag{3.49d}$$

e

$$U^0(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{3.49e}$$

sendo que, dentro das equações (3.49), aparece a variável adjunta $\Lambda^0(\cdot)$, que continuará satisfazendo às equações (3.18), como no desenvolvimento anterior.

É muito fácil perceber que as equações (3.25), (3.29) e (3.49), correspondentes às situações I, II e III que acabamos de analisar, podem ser reunidas num único conjunto de equações, escrevendo-se como condições necessárias para a solução do problema (3.1), as seguintes relações:

i:

$$\nu_0 + |\nu| \neq 0, \qquad \nu_0 \in \left\{0, 1\right\}; \tag{3.50a}$$

ii:

$$\nu_0 X^0 + \sum_{i=1}^{n_h} \nu_i X^i = 0; \tag{3.50b}$$

iii:

$$\nu_0 P^0 + \sum_{i=1}^{n_h} \nu_i P^i = 0; \tag{3.50c}$$

iv:

$$\nu_0 T_0^0 + \sum_{i=1}^{n_h} \nu_i T_0^i = 0; \tag{3.50d}$$

v:

$$\nu_0 T_1^0 + \sum_{i=1}^{n_h} \nu_i T_1^i = 0; \tag{3.50e}$$

vi:

$$\nu_0 U^0(\tau) + \sum_{i=1}^{n_h} \nu_i U^i(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{3.50f}$$

onde ν_0 pode assumir os valores $\{0, 1\}$, como discriminado em (3.50a), e as demais grandezas já foram definidas anteriormente.

A obtenção das expressões (3.3a)–(3.3g), completando a prova do Teorema 3.1, se estabelece, a partir das equações (3.50), com o seguinte procedimento:

i: Expande-se as equações (3.50) através da substituição das expressões (3.20);

ii: Inclui-se entre as condições necessárias as expressões (3.18), com (3.18a), em particular, avaliada sobre $[t_0, t_1]$;

iii: Recorre-se à definição

$$\lambda(\cdot) \triangleq \sum_{i=0}^{n_h} \Lambda^i(\cdot).$$

3.5 - COMENTÁRIOS

No fechamento deste capítulo, considere as seguintes observações a respeito dos resultados aqui obtidos:

a) O conjunto de soluções satisfazendo as equações (3.25), e o conjunto daquelas satisfazendo as equações (3.29), não são disjuntos. De fato, pode haver casos em que uma solução satisfaz simultaneamente aos dois conjuntos de equações. Uma situação típica onde isto poderá ocorrer é aquela onde estão presentes restrições irrelevantes.[4]

b) As soluções que valem com $\nu_0 = 1$, são geralmente rotuladas como "soluções normais". Aquelas para as quais devemos ter necessariamente $\nu_0 = 0$, são conhecidas como "soluções anormais", para as quais a influencia do índice de performance fica descaracterizada, em vista do anulamento de ν_0. O estudo da questão da "normalidade de soluções" constitui uma sub-área na teoria de controle ótimo (vide, por exemplo, Hestenes [40], págs. 270-283).

c) A situação III, que culminou nas equações (3.49), não é analisada em Blum [9], o que representa uma limitação no desenvolvimento feito naquela referência.

d) A utilização das funções suporte $w(\cdot)$ e $z(\cdot)$ constitui um dos aspectos essenciais para garantir a consistencia teórica do presente desenvolvimento.

---

[4] Chamamos de restrição irrelevante aquela que é satisfeita naturalmente, quando ignorada durante a solução do problema. A presença de restrições irrelevantes muitas vezes só é detetável a posteriori.

CAPÍTULO 4

PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO COM RESTRIÇÕES DE CONTORNO MÚLTIPLO

4.1 - INTRODUÇÃO.

Dando sequência ao estudo, consideraremos neste capítulo a solução de problemas com restrições de contorno múltiplo. Por "restrições de contorno múltiplo", entendemos restrições de contorno que dependem explicitamente do vetor de estado, avaliado sobre um conjunto de instantes que se compõe de um instante inicial, um instante final, e instantes intermediários, os quais também podem aparecer explicitamente nas restrições. Naturalmente, como no capítulo anterior, admitimos a presença de um vetor adicional de parâmetros.

A possibilidade de tratar restrições de contorno múltiplo, além de estender a generalidade dos problemas analisados, tem a propriedade de unificar o tratamento das restrições de contorno. De fato, restrições de contorno duplo, como aquelas presentes no problema (3.1), e restrições intermediárias — do tipo $\theta[x(t_i);t_i] = 0$ — representam casos particulares de restrições de contorno múltiplo. O tratamento de restrições desta natureza constitui o primeiro ramo de generalidade dos resultados obtidos no presente trabalho. Nos capítulos seguintes abordaremos outros ramos, quais sejam, o tratamento de restrições não-diferenciais, e a solução de problemas com dinâmica fracionada.

A dedução se fará seguindo dois passos. No primeiro considera-se a existência de um único instante intermediário. No segundo estende-se os resultados prevendo-se um número arbitrário de instantes intermediários. Alguns comentários fecham o capítulo.

4.2 - PROBLEMAS ENVOLVENDO UM ÚNICO INSTANTE INTERMEDIÁRIO.

4.2.1 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.

Considere, no lugar do problema (3.1), o seguinte problema de controle ótimo:

Encontrar valores ótimos para

$$(y(\cdot); v(\cdot); \tau_0; \tau_1; \tau_2; q),$$

os quais denotaremos por

$$(x(\cdot); u(\cdot); t_0; t_1; t_2; p),$$

tais que

$$h_0[x(t_0); x(t_1); x^+(t_1); x(t_2); t_0; t_1; t_2; p] \tag{4.1a}$$

seja um mínimo, com

$$h_i[x(t_0); x(t_1); x^+(t_1); x(t_2); t_0; t_1; t_2; p] = 0, \qquad i = 1, \ldots, n_h; \tag{4.1b}$$

e

$$\dot{x}(\tau) = f[x(\tau); u(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_0, t_2]; \tag{4.1c}$$

onde

$$\begin{aligned}
&t_e \in \delta_e \subset E^1, \quad e = 0, 1, 2;\\
&p \in Q \subset E^{n_p};\\
&x(\tau) \in Y \subset E^{n_x}, \qquad \tau \in [t_0, t_2];\\
&u(\tau) \in V \subset E^{n_u}, \qquad \tau \in [t_0, t_2];\\
&h_i : E^{4n_x} \times E^3 \times E^{n_p} \longmapsto E^1, \qquad i = 0, 1, \ldots, n_h;\\
&f \triangleq [f_1; \ldots; f_{n_x}]' : E^{n_x} \times E^{n_u} \times E^1 \longmapsto E^{n_x};
\end{aligned}$$

sendo $\delta_e (e = 0, 1, 2)$, Q, Y e V conjuntos abertos.

Aqui, como no capítulo anterior, estamos interessados na obtenção de condições necessárias a serem satisfeitas pela solução desejada. As condições de regularidade para as variáveis dinâmicas $x(\cdot)$ e $u(\cdot)$, e para as funções $h_i (i = 0, 1, \ldots, n_h)$ e $f_j (j = 1, \ldots, n_x)$, ficarão estabelecidas a partir do conjunto de hipóteses indicadas a seguir.

4.2.2 - HIPÓTESES

Para a dedução de condições necessárias para o problema (4.1), considera-se:

H4: Os instantes $t_e (e = 0, 1, 2)$ devem satisfazer a desigualdade

$$t_0 < t_1 < t_2;$$

H5: $x_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$, devem ser funções contínuas para

$$\tau \in (t_{e-1}, t_e), \qquad e = 1, 2;$$

com

$$x(t_0) = x^+(t_0);$$

e

$$x(t_e) = x^-(t_e), \qquad e = 1, 2;$$

H6: $u_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_u)$, devem ser funções contínuas para

$$\tau \in (t_{e-1}, t_e), \qquad e = 1, 2;$$

com

$$u(t_0) = u^+(t_0);$$

e

$$u(t_e) = u^-(t_e), \qquad e = 1, 2;$$

H7: As funções $h_i(i = 0, 1, \ldots, n_h)$,$f_j(j = 1, \ldots, n_x)$, e suas derivadas parciais primeiras, são todas contínuas em relação a todos os seus argumentos, nos domínios considerados.

Com relação às hipoteses anteriores, é pertinente fazer as seguintes observações:

a) As hipóteses H5 e H6 implicam em serem $x_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ e $u_k(\cdot)(k = 1, \ldots, n_u)$ funções contínuas à esquerda para $\tau \in [t_0, t_2]$;

b) As hipóteses H5–H7, associadas à restrição (4.1c), implicam em serem as funções $x_i(\cdot)$ $(i = 1, \ldots, n_x)$, na verdade, suaves para $\tau \in (t_{e-1}, t_e)$, $e = 1, 2$.

4.2.3 - CONDIÇÕES NECESSÁRIAS

Para o enunciado das condições necessárias para a solução do problema (4.1) considere a seguinte definição :[1]

DEFINIÇÃO 4.1: (Mínimo Local para o Problema 4.1)

Diz-se que

$$(x(\cdot); u(\cdot); t_0; t_1; t_2; p)$$

fornece um mínimo local para o problema (4.1), *e particularmente, que* $u(\cdot)$ *representa um controle localmente ótimo, quando existir um* ϵ *positivo, não importa quão pequeno ele seja, tal que*

$$h_0[y(\tau_0); y(\tau_1); y^+(\tau_1); y(\tau_2); \tau_0; \tau_1; \tau_2; q] \geq h_0[x(t_0); x(t_1); x^+(t_1); x(t_2); t_0; t_1; t_2; p], \qquad (4.2)$$

[1] Note a semelhança existente entre a presente definição, e a Definição 3.1 .

para todo $(y(\cdot); v(\cdot); \tau_0; \tau_1; \tau_2; q)$ *tal que:*

I: $y_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ *e* $v_j(\cdot)(j = 1, \ldots, n_u)$ *satisfazem às condições de regularidade impostas a* $x_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ *e* $u_j(\cdot)(j = 1, \ldots, n_u)$, *respectivamente.*

II:

$$(y(\cdot); v(\cdot); \tau_0; \tau_1; \tau_2; q)$$

satisfaz as restrições (4.1*b*) *e* (4.1*c*), *quando em substituição a*

$$(x(\cdot); u(\cdot); t_0; t_1; t_2; p),$$

com $\quad \tau_e \in \delta_e (e = 0, 1, 2); \quad q \in Q; \quad y(\tau) \in Y, \ \tau \in [\tau_0, \tau_2], \quad$ *e* $\quad v(\tau) \in V, \ \tau \in [\tau_0, \tau_2].$

III:

$$\sum_{e=0}^{2} |\tau_e - t_e| + |q - p| + |y(\tau_0) - x(t_0)| + |y^+(\tau_1) - x^+(t_1)| + \int_{\tau_0}^{\tau_2} |v(\tau) - w(\tau)| d\tau < \epsilon$$

onde $w(\cdot)$ *representa uma função fixa que possui as seguintes propriedades(vide Fig. 4.1):*

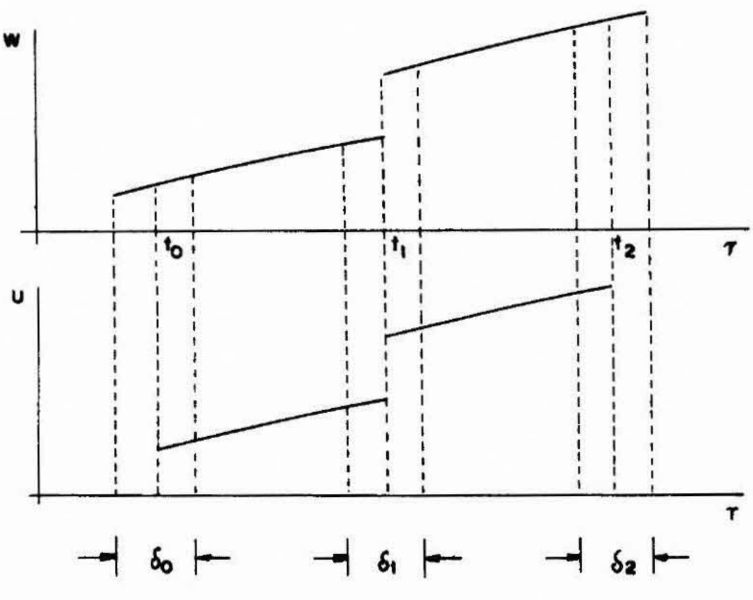

Fig. 4.1 - Construção de $w(\cdot)$ para o problema 4.1 ($n_u = 1$).

i: $w(\cdot)$ é contínua para todo $\tau \in I_T \triangleq \{[t_0, t_2] \cup \delta_0 \cup \delta_1\}, \tau \notin \{t_1\}$;

ii: $w(\tau) \in V$ para $\tau \in I_T$;

iii: para $\tau \in [t_0, t_2]$, $w(\cdot)$ coincide com $u(\cdot)$.

Estabelecidas as definições anteriores, considere o seguinte teorema de condições necessárias:

TEOREMA 4.1:

Para que

$$(x(\cdot); u(\cdot); t_0; t_1; t_2; p)$$

forneça um mínimo local para o problema (4.1), *respeitadas as hipóteses H4–H7, devem existir multiplicadores*

$$\nu_0, \qquad \nu \triangleq [\nu_1; \ldots; \nu_{n_h}]',$$

e uma função vetorial

$$\lambda \triangleq [\lambda_1(\cdot); \ldots; \lambda_{n_x}(\cdot)]',$$

tais que sejam verdadeiras as seguintes relações:

I:

$$\nu_0 + |\nu| \neq 0, \qquad \nu_0 \in \{0, 1\}; \tag{4.3a}$$

II: $\lambda_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ *são funções contínuas para todo* $\tau \in [t_0, t_2]$, *exceto, possivelmente, para* $t = t_1$, *com:*

$$\dot{\lambda}(\tau) = -\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]' \lambda(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_2]; \tag{4.3b}$$

$$\lambda(t_0) = +\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_0)}\right]'; \tag{4.3c}$$

$$\lambda(t_1) = -\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_1)}\right]'; \tag{4.3d}$$

$$\lambda^+(t_1) = +\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left[\frac{\partial h_j}{\partial x^+(t_1)}\right]'; \tag{4.3e}$$

$$\lambda(t_2) = -\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_2)}\right]'; \tag{4.3f}$$

III:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]' \lambda(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_2]; \tag{4.3g}$$

IV:

$$\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left[\frac{\partial h_j}{\partial p}\right]' = 0; \tag{4.3h}$$

V:

$$\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left\{ \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_0)}\right] \dot{x}(t_0) + \frac{\partial h_j}{\partial t_0} \right\} = 0; \tag{4.3i}$$

$$\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left\{ \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_1)}\right] \dot{x}(t_1) + \left[\frac{\partial h_j}{\partial x^+(t_1)}\right] \dot{x}^+(t_1) + \frac{\partial h_j}{\partial t_1} \right\} = 0; \tag{4.3j}$$

$$\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left\{ \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_2)}\right] \dot{x}(t_2) + \frac{\partial h_j}{\partial t_2} \right\} = 0. \tag{4.3k}$$

4.2.4 - PROVA DO TEOREMA 4.1

O procedimento de dedução das condições necessárias do Teorema 4.1 constitui uma extensão daquele adotado no capítulo anterior. A estratégia agora tem, como primeiro passo, a adoção de uma nomenclatura particionada para as funções candidatas. Para isto definimos, em correspondência ao vetor de estado,

$$x^e(\tau) \triangleq x(\tau), \quad \tau \in (\tau_{e-1}, \tau_e), \qquad e = 1, 2; \tag{4.4a}$$

$$x^1(\tau_0) \triangleq x(\tau_0), \tag{4.4b}$$

$$x^1(\tau_1) \triangleq x(\tau_1), \tag{4.4c}$$

$$x^2(\tau_1) \triangleq x^+(\tau_1), \tag{4.4d}$$

$$x^2(\tau_2) \triangleq x(\tau_2); \tag{4.4e}$$

e em correspondência ao vetor de controle,

$$u^e(\tau) \triangleq u(\tau), \quad \tau \in (\tau_{e-1}, \tau_e), \qquad e = 1, 2; \tag{4.4f}$$

$$u^1(\tau_0) \triangleq u(\tau_0), \tag{4.4g}$$

$$u^1(\tau_1) \triangleq u(\tau_1), \tag{4.4h}$$

$$u^2(\tau_1) \triangleq u^+(\tau_1), \tag{4.4i}$$

$$u^2(\tau_2) \triangleq u(\tau_2). \tag{4.4j}$$

Fazendo uso das definições expressadas em (4.4), podemos reenunciar o problema (4.1) como:

Encontrar valores ótimos para

$$(y^e(\cdot)(e=1,2); v^e(\cdot)(e=1,2); \tau_0; \tau_1; \tau_2; q),$$

os quais denotaremos por

$$(x^e(\cdot)(e=1,2); u^e(\cdot)(e=1,2); t_0; t_1; t_2; p),$$

tais que

$$h_0[x^1(t_0); x^1(t_1); x^2(t_1); x^2(t_2); t_0; t_1; t_2; p] \tag{4.5a}$$

seja mínimo, com

$$h_i[x^1(t_0); x^1(t_1); x^2(t_1); x^2(t_2); t_0; t_1; t_2; p] = 0, \qquad i = 1, \ldots, n_h; \tag{4.5b}$$

e

$$\dot{x}^e(\tau) = f[x^e(\tau); u^e(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1,2; \tag{4.5c}$$

onde

$$t_e \in \delta_e \subset E, \quad e = 0,1,2;$$

$$p \in Q \subset E^{n_p};$$

$$x^e(\tau) \in Y \subset E^{n_x}, \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1,2;$$

$$u^e(\tau) \in V \subset E^{n_u}, \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1,2.$$

Naturalmente as funções $h_i (i = 0, 1, \ldots, n_h)$, $f_j (j = 1, \ldots, n_x)$, e os conjuntos $\delta_e (e = 0, 1, 2)$, Q, Y e V, continuam como antes.

Em virtude das hipóteses H4–H7, valem para o problema (4.5) as seguintes propriedades:

i: $x_i^e(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x; e = 1, 2)$ são funções contínuas para $\tau \in [t_{e-1}, t_e]$, $\quad e = 1, 2$;

ii: $u_j^e(\cdot)(j = 1, \ldots, n_u; e = 1, 2)$ são funções contínuas para $\tau \in [t_{e-1}, t_e]$, $\quad e = 1, 2$.

Em conformidade com a Definição 4.1, para que

$$(x^e(\cdot)(e=1,2); u^e(\cdot)(e=1,2); t_0; t_1; t_2; p)$$

leve à solução do problema (4.5), deverá existir um ϵ positivo, não importa quão pequeno ele seja, tal que

$$h_0[y^1(\tau_0); y^1(\tau_1); y^2(\tau_1); y^2(\tau_2); \tau_0; \tau_1; \tau_2; q] \geq h_0[x^1(t_0); x^1(t_1); x^2(t_1); x^2(t_2); t_0; t_1; t_2; p], \tag{4.6}$$

para todo $(y^e(\cdot)(e=1,2); v^e(\cdot)(e=1,2); \tau_0; \tau_1; \tau_2; q)$ tal que:

I: $y_i^e(\cdot)(i=1,\ldots,n_x; e=1,2)$ e $v_j^e(\cdot)(j=1,\ldots,n_u; e=1,2)$ satisfazem as condições de regularidade impostas a $x_i^e(\cdot)(i=1,\ldots,n_x; e=1,2)$ e $u_j(\cdot)(j=1,\ldots,n_u; e=1,2)$, respectivamente.

II:

$$(y^e(\cdot)(e=1,2); v^e(\cdot)(e=1,2); \tau_0; \tau_1; \tau_2; q)$$

satisfaz as restrições (4.5*b*) e (4.5*c*), quando em substituição a

$$(x^e(\cdot)(e=1,2); u^e(\cdot)(e=1,2); t_0; t_1; t_2; p),$$

com $\tau_e \in \delta_e(e=0,1,2)$; $q \in Q$; $y^e(\tau) \in Y$, $\tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e]$, $e=1,2$; e $v^e(\tau) \in V$, $\tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e]$, $e=1,2$.

III:

$$\sum_{e=0}^{2} |\tau_e - t_e| + |q-p| + \sum_{e=1}^{2} |y^e(\tau_{e-1}) - x^e(t_{e-1})| + \sum_{e=1}^{2} \int_{\tau_{e-1}}^{\tau_e} |v^e(\tau) - w^e(\tau)| d\tau < \epsilon$$

onde $w^e(\cdot)$ representam funções fixas que possuem as seguintes propriedades(vide Fig. 4.2):

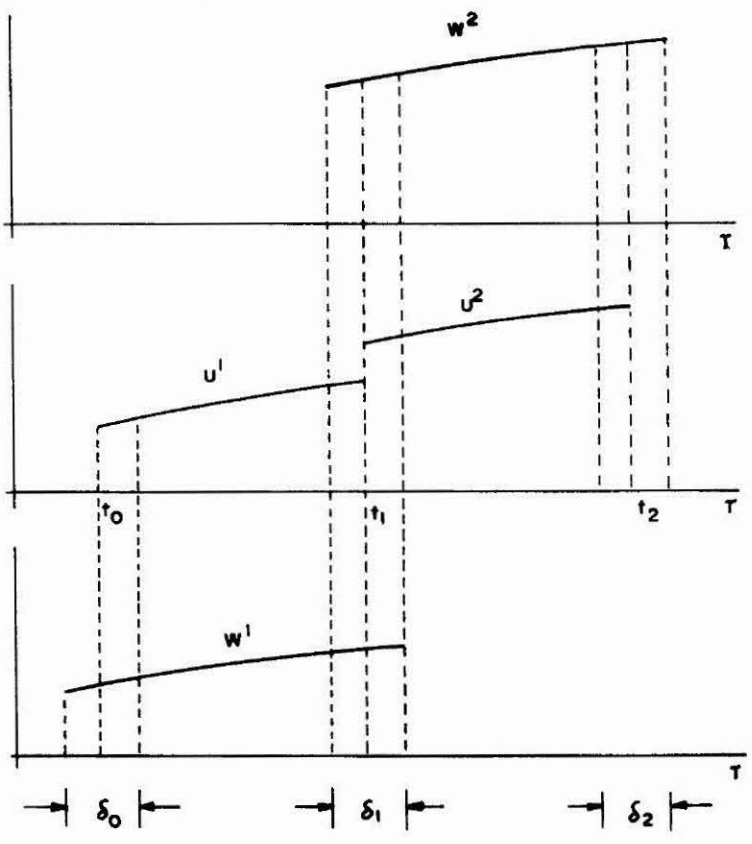

Fig. 4.2 - Construção de $w^e(\cdot)(e=1,2)$ para o problema 4.5 ($n_u = 1$) .

i: $w^e(\cdot)(e=1,2)$ são contínuas para todo $\tau \in I_e \triangleq \{[t_{e-1}, t_e] \cup \delta_{e-1} \cup \delta_e\}$;

ii: $w^e(\tau)(e=1,2) \in V$ para $\tau \in I_e(e=1,2)$;

iii: para $\tau \in [t_{e-1}, t_e]$, $w^e(\cdot)$ coincide com $u^e(\cdot)$, $e = 1, 2$.

Note, no enunciado do problema (4.5), que os pares

$$[x^1(\cdot); u^1(\cdot)] \quad \text{e} \quad [x^2(\cdot); u^2(\cdot)]$$

são tratados como se fossem independentes um do outro, exceto no que diz respeito às condições de contorno (4.5b), embora tenham ambos que satisfazer às mesmas equações diferenciais, representadas pelas equações (4.5c).[2]

Uma vez adotada a nomenclatura particionada, conforme as expressões (4.4), podemos recorrer ao artifício das variáveis adjuntas, como no capítulo anterior, e escrever, no lugar do problema (4.5), o seguinte problema:

Encontrar valores para

$$y^e(\cdot)(e=1,2), \quad v^e(\cdot)(e=1,2), \quad \tau_e(e=0,1,2), \quad \text{e} \quad q$$

que forneçam um mínimo local para

$$\begin{aligned}\tilde{h}_0 = {} & h_0[y^1(\tau_0); y^1(\tau_1); y^2(\tau_1); y^2(\tau_2); \tau_0; \tau_1; \tau_2; q] + \\ & + \sum_{e=1}^{2} \Big\{ [\Lambda^{(e,0)}(\tau_e)]' y^e(\tau_e) - [\Lambda^{(e,0)}(\tau_{e-1})]' y^e(\tau_{e-1}) - \\ & - \int_{\tau_{e-1}}^{\tau_e} \Big\{ [\Lambda^{(e,0)}(\tau)]' \dot{y}^e(\tau) + [\dot{\Lambda}^{(e,0)}(\tau)]' y^e(\tau) \Big\} d\tau \Big\},\end{aligned} \tag{4.7a}$$

sujeito a

$$\begin{aligned}\tilde{h}_i = {} & h_i[y^1(\tau_0); y^1(\tau_1); y^2(\tau_1); y^2(\tau_2); \tau_0; \tau_1; \tau_2; q] + \\ & + \sum_{e=1}^{2} \Big\{ [\Lambda^{(e,i)}(\tau_e)]' y^e(\tau_e) - [\Lambda^{(e,i)}(\tau_{e-1})]' y^e(\tau_{e-1}) - \\ & - \int_{\tau_{e-1}}^{\tau_e} \Big\{ [\Lambda^{(e,i)}(\tau)]' \dot{y}^e(\tau) + [\dot{\Lambda}^{(e,i)}(\tau)]' y^e(\tau) \Big\} d\tau \Big\} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n_h;\end{aligned} \tag{4.7b}$$

[2] Invocamos o leitor a observar, daqui em diante, a facilidade que a presente metodologia oferece para o tratamento de problemas nos quais a estrutura das equações diferenciais mudam a partir de determinado instante. Problemas desta natureza serão considerados no Capítulo 6.

e

$$\dot{y}^e(\tau) = f[y^e(\tau); v^e(\tau); \tau], \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \qquad e = 1, 2; \tag{4.7c}$$

onde

$$\Lambda^{(e,i)}(\cdot) \in E^{n_x} \triangleq [\Lambda_1^{(e,i)}(\cdot); \ldots; \Lambda_{n_x}^{(e,i)}(\cdot)]', \qquad e = 1, 2; \quad i = 0, 1, \ldots, n_h; \tag{4.7d}$$

são funções fixas definidas para todo $\tau \in I_e (e = 1, 2)$, sendo I_e, conforme já definido anteriormente, conjuntos abertos que contêm ambos, δ_{e-1} e δ_e , $e = 1, 2$.

Imitando os passos do Capítulo 3, expressamos as variáveis candidatas $y^e(\cdot)(e = 1, 2)$, $v^e(\cdot)(e = 1, 2)$, $\tau_e(e = 0, 1, 2)$, e q, na forma

$$y^e(\tau) = z^e(\tau) + \zeta^e(\tau), \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \qquad e = 1, 2; \tag{4.8a}$$

$$v^e(\tau) = w^e(\tau) + \phi^e(\tau), \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \qquad e = 1, 2; \tag{4.8b}$$

$$\tau_e = t_e + \Delta t_e; \qquad e = 0, 1, 2; \tag{4.8c}$$

$$q = p + \Delta p; \tag{4.8d}$$

onde $t_e(e = 0, 1, 2)$ e p representam os valores ótimos de $\tau_e(e = 0, 1, 2)$ e q, e onde $z^e(\cdot)(e = 1, 2)$ e $w^e(\cdot)(e = 1, 2)$ são funções vetoriais para as quais devem valer:

i: $w^e(\cdot)(e = 1, 2)$ obedecem ao já estabelecido anteriormente;

ii: $z^e(\cdot)(e = 1, 2)$ são as soluções contínuas de

$$\dot{z}^e(\tau) = f[z^e(\tau); w^e(\tau); \tau], \quad \tau \in I_e, \qquad e = 1, 2;$$

tendo como condição de contorno

$$z^e(t_{e-1}) = x^e(t_{e-1}), \qquad e = 1, 2.$$

Observe que, em virtude das duas propriedades acima, $w^e(\cdot)$ e $z^e(\cdot)$ coincidem com as soluções ótimas $x^e(\cdot)$ e $u^e(\cdot)$, para $\tau \in [t_{e-1}, t_e]$, $e = 1, 2$. Portanto, também são verdadeiras:

$$z^1(t_0) = x(t_0); \qquad w^1(t_0) = u(t_0); \tag{4.9a}$$

$$z^1(t_1) = x(t_1); \qquad w^1(t_1) = u(t_1); \tag{4.9b}$$

$$z^2(t_1) = x^+(t_1); \qquad w^2(t_1) = u^+(t_1); \tag{4.9c}$$

$$z^2(t_2) = x(t_2); \qquad w^2(t_2) = u(t_2). \tag{4.9d}$$

Como no Capítulo 3, os significados de $\zeta^e(\cdot)(e = 1,2)$ e $\phi^e(\cdot)(e = 1,2)$, bem como as propriedades que as mesmas devem satisfazer, e os significados de $\Delta t_e(e = 0,1,2)$ e Δp, ficam definidos a partir da conceituação das demais grandezas envolvidas nas equações (4.8).

O raciocínio utilizado no Capítulo 3, levando às equações (3.9) e (3.11), é também aqui aplicável, de modo que, no desenvolvimento que se segue, tomaremos

$$\phi^e(\cdot)(e = 1,2), \quad \zeta^e(\tau_{e-1})(e = 1,2), \quad \Delta t_e(e = 0,1,2), \quad \text{e} \quad \Delta p$$

como variações independentes, sendo que $\zeta^e(\cdot)(e = 1,2)$ ficam como funções destas grandezas, a partir da solução das equações diferenciais

$$\dot{\zeta}^e(\tau) = F^e[\zeta^e(\tau);\phi^e(\tau);\tau], \quad \tau \in [\tau_{e-1},\tau_e], \qquad e = 1,2; \tag{4.10a}$$

onde

$$F^e[\zeta^e(\tau);\phi^e(\tau);\tau] = f[y^e(\tau);v^e(\tau);\tau] - \dot{z}^e(\tau), \qquad e = 1,2; \tag{4.10b}$$

tendo como condição de contorno a especificação de $\zeta^e(\tau_{e-1})$.

Em correspondência com as equações (3.8), adotaremos as seguintes expressões parametrizadas:

$$\phi^e(\tau) = \beta_0 U^{(e,0)}(\tau) + \sum_{j=1}^{n_h} \beta_j U^{(e,j)}(\tau), \quad \tau \in [\tau_{e-1},\tau_e], \qquad e = 1,2; \tag{4.11a}$$

$$\zeta^e(\tau_{e-1}) = \beta_0 X^{(e,0)} + \sum_{j=1}^{n_h} \beta_j X^{(e,j)}, \qquad e = 1,2; \tag{4.11b}$$

$$\Delta t_e = \beta_0 T_e^0 + \sum_{j=1}^{n_h} \beta_j T_e^j, \qquad e = 0,1,2; \tag{4.11c}$$

e

$$\Delta p = \beta_0 P^0 + \sum_{j=1}^{n_h} \beta_j P^j, \tag{4.11d}$$

onde

$$U^{(e,j)}(\cdot) \triangleq [U_1^{(e,j)}(\cdot);\ldots;U_{n_u}^{(e,j)}(\cdot)]', \qquad e = 1,2; \quad j = 0,1,\ldots,n_h; \tag{4.11e}$$

$$X^{(e,j)} \triangleq [X_1^{(e,j)};\ldots;X_{n_x}^{(e,j)}]', \qquad e = 1,2; \quad j = 0,1,\ldots,n_h; \tag{4.11f}$$

$$P^j \triangleq [P_1^j;\ldots;P_{n_p}^j]', \qquad j = 0,1,\ldots,n_h. \tag{4.11g}$$

Recordemos os comentários do Capítulo 3 e observemos que, para $j = 0,1,\ldots,n_h$,

$$U^{(e,j)}(\cdot)(e = 1,2), \quad X^{(e,j)}(e = 1,2), \quad T_e^j(e = 0,1,2), \quad \text{e} \quad P^j,$$

representam grandezas que serão escolhidas convenientemente em momento oportuno. Além disso, uma vez arbitrados

$$U^{(e,j)}(\cdot)(e=1,2), \quad X^{(e,j)}(e=1,2), \quad T_e^j(e=0,1,2), \quad \text{e} \quad P^j,$$

$$\text{para} \qquad j=0,1,\ldots,n_h;$$

as espressões (4.7a) e (4.7b) passam a representar funções de $\beta_j(j=0,1,\ldots,n_h)$. Sejam estas funções denotadas por

$$\tilde{h}_j = g_j[\beta_0;\beta], \qquad j=0,1,\ldots,n_h; \tag{4.12a}$$

onde

$$\beta \triangleq [\beta_1;\ldots;\beta_{n_h}]'. \tag{4.12b}$$

Devemos notar ainda que, como antes,

$$g_j[0,0] = h_j[x^1(t_0);x^1(t_1);x^2(t_1);x^2(t_2);t_0;t_1;t_2;p], \qquad j=0,1,\ldots,n_h; \tag{4.13a}$$

com

$$g_j[0,0]=0, \qquad j=1,\ldots,n_h, \tag{4.13b}$$

devido a (4.5b). Aqui também será utilizado o teorema de função implícita enunciado no Apêndice A.

Na sequência da dedução, precisamos calcular as derivadas parciais

$$\frac{\partial g_i}{\partial \beta_j}, \qquad i,j=0,1,\ldots,n_h.$$

Para isto devemos observar, em correspondência com as equações (3.13) e (3.14), que, para $j=0,1,\ldots,n_h$, vale:

$$\frac{\partial y^e(\cdot)}{\partial \beta_j} \equiv \frac{\partial \zeta^e(\cdot)}{\partial \beta_j}, \qquad e=1,2; \tag{4.14a}$$

$$\frac{\partial v^e(\cdot)}{\partial \beta_j} \equiv \frac{\partial \phi^e(\cdot)}{\partial \beta_j}, \qquad e=1,2; \tag{4.14b}$$

$$\frac{\partial \dot{y}^e(\cdot)}{\partial \beta_j} \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial y^e}\right]'\frac{\partial \zeta^e(\cdot)}{\partial \beta_j} + \left[\frac{\partial f}{\partial v^e}\right]'\frac{\partial \phi^e(\cdot)}{\partial \beta_j}, \qquad e=1,2; \tag{4.14c}$$

$$\frac{\partial \Lambda^{(e,i)}(\cdot)}{\partial \beta_j} \equiv \frac{\partial \dot{\Lambda}^{(e,i)}(\cdot)}{\partial \beta_j} \equiv 0, \qquad e=1,2; \quad i=0,1,\ldots,n_h; \tag{4.14d}$$

$$\frac{\partial y^e(\tau_{e-1})}{\partial \beta_j} = [\dot{z}^e(\tau_{e-1})]'\frac{\partial \tau_{e-1}}{\partial \beta_j} + \frac{\partial \zeta^e(\tau_{e-1})}{\partial \beta_j}, \qquad e=1,2; \tag{4.14e}$$

$$\frac{\partial y^e(\tau_e)}{\partial \beta_j} = [\dot{z}^e(\tau_e)]'\frac{\partial \tau_e}{\partial \beta_j} + \frac{\partial \zeta^e(\tau_e)}{\partial \beta_j}, \qquad e=1,2; \tag{4.14f}$$

$$\frac{\partial \Lambda^{(e,i)}(\tau_{e-1})}{\partial \beta_j} = [\dot{\Lambda}^{(e,i)}(\tau_{e-1})]' \frac{\partial \tau_{e-1}}{\partial \beta_j}, \qquad e = 1,2; \quad i = 0,1,\ldots,n_h; \tag{4.14g}$$

$$\frac{\partial \Lambda^{(e,i)}(\tau_e)}{\partial \beta_j} = [\dot{\Lambda}^{(e,i)}(\tau_e)]' \frac{\partial \tau_e}{\partial \beta_j}, \qquad e = 1,2; \quad i = 0,1,\ldots,n_h; \tag{4.14h}$$

$$\frac{\partial q}{\partial \beta_j} = \frac{\partial \Delta p}{\partial \beta_j}; \tag{4.14i}$$

$$\frac{\partial \phi^e(\cdot)}{\partial \beta_j} \equiv U^{(e,j)}(\cdot), \qquad e = 1,2; \tag{4.14j}$$

$$\frac{\partial \zeta^e(\tau_{e-1})}{\partial \beta_j} = X^{(e,j)}, \qquad e = 1,2; \tag{4.14k}$$

$$\frac{\partial \tau_e}{\partial \beta_j} = T_e^j, \qquad e = 0,1,2; \tag{4.14l}$$

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \beta_j} = P^j. \tag{4.14m}$$

Derivando as expressões (4.12) obtemos:

$$\frac{\partial g_i}{\partial \beta_j} = \frac{\partial \tilde{h}_i}{\partial \beta_j} = A_1 + A_2 + A_3 - \sum_{e=1}^{2} \left\{ \int_{\tau_{e-1}}^{\tau_e} \left\{ A_4 + A_5 \right\} d\tau + A_6 - A_7 \right\},$$
$$i,j = 0,1,\ldots,n_h; \tag{4.15a}$$

onde

$$A_1 = \left[\frac{\partial h_i}{\partial y^1(\tau_0)} \right] \frac{\partial y^1(\tau_0)}{\partial \beta_j} + \left[\frac{\partial h_i}{\partial y^1(\tau_1)} \right] \frac{\partial y^1(\tau_1)}{\partial \beta_j}; \tag{4.15b}$$

$$A_2 = \left[\frac{\partial h_i}{\partial y^2(\tau_1)} \right] \frac{\partial y^2(\tau_1)}{\partial \beta_j} + \left[\frac{\partial h_i}{\partial y^2(\tau_2)} \right] \frac{\partial y^2(\tau_2)}{\partial \beta_j}; \tag{4.15c}$$

$$A_3 = \left[\frac{\partial h_i}{\partial \tau_0} \right] \frac{\partial \tau_0}{\partial \beta_j} + \left[\frac{\partial h_i}{\partial \tau_1} \right] \frac{\partial \tau_1}{\partial \beta_j} + \left[\frac{\partial h_i}{\partial \tau_2} \right] \frac{\partial \tau_2}{\partial \beta_j} + \left[\frac{\partial h_i}{\partial q} \right] \frac{\partial q}{\partial \beta_j}; \tag{4.15d}$$

$$A_4 = \left[\frac{\partial \Lambda^{(e,i)}(\cdot)}{\partial \beta_j} \right]' \Big|_\tau \dot{y}^e(\tau) + [\Lambda^{(e,i)}(\tau)]' \frac{\partial \dot{y}^e(\cdot)}{\partial \beta_j} \Big|_\tau; \tag{4.15e}$$

$$A_5 = \left[\frac{\partial \dot{\Lambda}^{(e,i)}(\cdot)}{\partial \beta_j} \right]' \Big|_\tau y^e(\tau) + [\dot{\Lambda}^{(e,i)}(\tau_e)]' \frac{\partial y^e(\cdot)}{\partial \beta_j} \Big|_\tau; \tag{4.15f}$$

$$A_6 = \left\{ [\Lambda^{(e,i)}(\tau_e)]' \dot{y}^e(\tau_e) + [\dot{\Lambda}^{(e,i)}(\tau_e)]' y^e(\tau_e) \right\} \frac{\partial \tau_e}{\partial \beta_j}; \tag{4.15g}$$

$$A_7 = \left\{ [\Lambda^{(e,i)}(\tau_{e-1})]' \dot{y}^e(\tau_{e-1}) + [\dot{\Lambda}^{(e,i)}(\tau_{e-1})]' y^e(\tau_{e-1}) \right\} \frac{\partial \tau_{e-1}}{\partial \beta_j}. \tag{4.15h}$$

Com a substituição das expressões (4.14), e após alguns cancelamentos, encontramos:

$$\frac{\partial g_i}{\partial \beta_j} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 - A_7, \qquad i,j = 0,1,\ldots,n_h; \tag{4.16a}$$

onde

$$A_1 = \sum_{e=1}^{2} \Big[\frac{\partial h_i}{\partial y^e(\tau_{e-1})} - [\Lambda^{(e,i)}(\tau_{e-1})]' \Big] X^{(e,j)}; \tag{4.16b}$$

$$A_2 = \sum_{e=1}^{2} \Big[\frac{\partial h_i}{\partial y^e(\tau_e)} + [\Lambda^{(e,i)}(\tau_e)]' \Big] \frac{\partial \zeta^e(\tau_e)}{\partial \beta_j}; \tag{4.16c}$$

$$A_3 = \Big\{ \Big[\frac{\partial h_i}{\partial y^1(\tau_1)} \Big] \dot z^1(\tau_0) + \frac{\partial h_i}{\partial \tau_0} + [\Lambda^{(1,i)}(\tau_0)]'[\dot y^1(\tau_0) - \dot z^1(\tau_0)] \Big\} T_0^j; \tag{4.16d}$$

$$A_4 = \Big\{ \Big[\frac{\partial h_i}{\partial y^1(\tau_1)} \Big] \dot z^1(\tau_1) + \Big[\frac{\partial h_i}{\partial y^2(\tau_1)} \Big] \dot z^2(\tau_1) + \frac{\partial h_i}{\partial \tau_1} +$$

$$+ [\Lambda^{(2,i)}(\tau_1)]'[\dot y^2(\tau_1) - \dot z^2(\tau_1)] - [\Lambda^{(1,i)}(\tau_1)][\dot y^1(\tau_1) - \dot z^1(\tau_1)] \Big\} T_1^j; \tag{4.16e}$$

$$A_5 = \Big\{ \Big[\frac{\partial h_i}{\partial y^2(\tau_2)} \Big] \dot z^2(\tau_2) + \frac{\partial h_i}{\partial \tau_2} - [\Lambda^{(2,i)}(\tau_2)]'[\dot y^2(\tau_2) - \dot z^2(\tau_2)] \Big\} T_2^j; \tag{4.16f}$$

$$A_6 = \Big[\frac{\partial h_i}{\partial q} \Big] P^j. \tag{4.16g}$$

$$A_7 = \sum_{e=1}^{2} \int_{\tau_{e-1}}^{\tau_e} \Big\{ \Big[\Big[\frac{\partial f}{\partial y^e} \Big]' \Lambda^{(e,i)}(\tau) + \dot\Lambda^{(e,i)}(\tau) \Big]' \frac{\partial \zeta^e(\cdot)}{\partial \beta_j} \Big|_\tau +$$

$$+ [\Lambda^{(e,i)}(\tau)]' \Big[\frac{\partial f}{\partial v^e} \Big] U^{(e,j)}(\tau) \Big\} d\tau. \tag{4.16h}$$

Avaliando (4.16) para $[\beta_0; \beta]' = [0; 0]'$, obtemos:

$$\frac{\partial g_i}{\partial \beta_j} \Big|_{(\beta_0=0, \beta=0)} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 - A_7 \qquad i, j = 0, 1, \ldots, n_h; \tag{4.17a}$$

onde

$$A_1 = \sum_{e=1}^{2} \Big[\frac{\partial h_i}{\partial x^e(t_{e-1})} - [\Lambda^{(e,i)}(t_{e-1})]' \Big] X^{(e,j)}; \tag{4.17b}$$

$$A_2 = \sum_{e=1}^{2} \Big[\frac{\partial h_i}{\partial x^e(t_e)} + [\Lambda^{(e,i)}(t_e)]' \Big] \frac{\partial \zeta^e(\tau_e)}{\partial \beta_j} \Big|_{(0,0)}; \tag{4.17c}$$

$$A_3 = \Big\{ \Big[\frac{\partial h_i}{\partial x^1(t_0)} \Big] \dot x^1(t_0) + \frac{\partial h_i}{\partial t_0} \Big\} T_0^j; \tag{4.17d}$$

$$A_4 = \Big\{ \Big[\frac{\partial h_i}{\partial x^1(t_1)} \Big] \dot x^1(t_1) + \Big[\frac{\partial h_i}{\partial x^2(t_1)} \Big] \dot x^2(t_1) + \frac{\partial h_i}{\partial t_1} \Big\} T_1^j; \tag{4.17e}$$

$$A_5 = \Big\{ \Big[\frac{\partial h_i}{\partial x^2(t_2)} \Big] \dot x^2(t_2) + \frac{\partial h_i}{\partial t_2} \Big\} T_2^j; \tag{4.17f}$$

$$A_6 = \Big[\frac{\partial h_i}{\partial p} \Big]' P^j; \tag{4.17g}$$

$$A_7 = \sum_{e=1}^{2} \int_{t_{e-1}}^{t_e} \Big\{ \Big[\Big[\frac{\partial f}{\partial x^2} \Big]' \Lambda^{(e,i)}(\tau) + \dot\Lambda^{(e,i)}(\tau) \Big]' \frac{\partial \zeta^e(\cdot)}{\partial \beta_j} \Big|_{(\tau, \beta_0=0, \beta=0)} +$$

$$+ [\Lambda^{(e,i)}(\tau)]' \Big[\frac{\partial f}{\partial u^e} \Big] U^{(e,j)}(\tau) \Big\} d\tau. \tag{4.17h}$$

Seguindo o raciocínio do Capítulo 3, escolhamos agora as funções

$$\Lambda^{(e,i)}(\cdot), \qquad e = 1, 2; \quad i = 0, 1, \ldots, n_h;$$

como sendo as soluções contínuas de

$$\dot{\Lambda}^{(e,i)}(\tau) = -\left[\frac{\partial f}{\partial z^e}\right]' \Lambda^{(e,i)}(\tau), \quad \tau \in I_e; \tag{4.18a}$$

com condição de contorno,

$$\Lambda^{(e,i)}(t_e) = -\frac{\partial h_i}{\partial x^e(t_e)}, \qquad e = 1,2; \quad i = 0,1,\ldots,n_h. \tag{4.18b}$$

Esta escolha permite reescrever a equação (4.17) na forma reduzida:

$$\left.\frac{\partial g_i}{\partial \beta_j}\right|_{(0,0)} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 - A_6, \qquad i,j = 0,1,\ldots,n_h; \tag{4.19a}$$

onde

$$A_1 = \sum_{e=1}^{2}\left[\frac{\partial h_i}{\partial x^e(t_{e-1})} - [\Lambda^{(e,i)}(t_{e-1})]'\right] X^{(e,j)}; \tag{4.19b}$$

$$A_2 = \left\{\left[\frac{\partial h_i}{\partial x^1(t_0)}\right]\dot{x}^1(t_0) + \frac{\partial h_i}{\partial t_0}\right\} T_0^j; \tag{4.19c}$$

$$A_3 = \left\{\left[\frac{\partial h_i}{\partial x^1(t_1)}\right]\dot{x}^1(t_1) + \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^2(t_1)}\right]\dot{x}^2(t_1) + \frac{\partial h_i}{\partial t_1}\right\} T_1^j; \tag{4.19d}$$

$$A_4 = \left\{\left[\frac{\partial h_i}{\partial x^2(t_2)}\right]\dot{x}^2(t_2) + \frac{\partial h_i}{\partial t_2}\right\} T_2^j; \tag{4.19e}$$

$$A_5 = \left[\frac{\partial h_i}{\partial p}\right] P^j; \tag{4.19f}$$

$$A_6 = \sum_{e=1}^{2}\int_{t_{e-1}}^{t_e}\left\{[\Lambda^{(e,i)}(\tau)]'\left[\frac{\partial f}{\partial u^e}\right] U^{(e,j)}(\tau)\right\} d\tau. \tag{4.19g}$$

Em correspondência com o desenvolvimento do capítulo anterior, escolhemos, para $j = 0,1,\ldots,n_h$:

$$X^{(e,j)} = \left[\frac{\partial h_j}{\partial x^e(t_{e-1})}\right]' - \Lambda^{(e,j)}(t_{e-1}), \qquad e = 1,2; \tag{4.20a}$$

$$T_0^j = \left[\frac{\partial h_j}{\partial x^1(t_0)}\right]\dot{x}^1(t_0) + \frac{\partial h_j}{\partial t_0}; \tag{4.20b}$$

$$T_1^j = \left[\frac{\partial h_j}{\partial x^1(t_1)}\right]\dot{x}^1(t_1) + \left[\frac{\partial h_j}{\partial x^2(t_1)}\right]\dot{x}^2(t_1) + \frac{\partial h_j}{\partial t_1}; \tag{4.20c}$$

$$T_2^j = \left[\frac{\partial h_j}{\partial x^2(t_2)}\right]\dot{x}^2(t_2) + \frac{\partial h_j}{\partial t_2}; \tag{4.20d}$$

$$P^j = \left[\frac{\partial h_j}{\partial p}\right]'; \tag{4.20e}$$

$$U^{(e,j)}(\tau) = -\left[\frac{\partial f}{\partial w^e}\right]' \Lambda^{(e,j)}(\tau), \quad \tau \in I_e, \qquad e = 1,2. \tag{4.20f}$$

Com esta escolha, podemos escrever

$$\frac{\partial g_i}{\partial \beta_j}\bigg|_{(0,0)} = \sum_{e=1}^{2}[X^{(e,i)}]'[X^{(e,j)}] + \sum_{e=0}^{2} T_e^i T_e^j + [P^i]'[P^j] +$$
$$+ \sum_{e=1}^{2} \int_{t_{e-1}}^{t_e} \Big\{ [U^{(e,i)}(\tau)]'[U^{(e,j)}(\tau)] \Big\} d\tau, \qquad i,j = 0,1,\ldots,n_h. \tag{4.21}$$

À semelhança do capítulo anterior, podemos escrever a matriz de derivadas parciais

$$\left[\frac{\partial g}{\partial \beta}\right], \qquad \left\{\frac{\partial g}{\partial \beta}\right\}_{i,j} \triangleq \frac{\partial g_i}{\partial \beta_j} \quad (i,j=1,\ldots,h),$$

na forma

$$B \triangleq \left[\frac{\partial g}{\partial \beta}\right] = \sum_{k=1}^{4} B_k, \tag{4.22a}$$

onde

$$B_1 \triangleq \sum_{e=1}^{2} B_1^e, \tag{4.22b}$$

$$\text{com} \quad B_1^e \triangleq [X^e]'[X^e], \quad e=1,2; \qquad \text{e} \qquad X^e \triangleq [X^{(e,1)};\ldots;X^{(e,n_h)}], \quad e=1,2; \tag{4.22c}$$

$$B_2 \triangleq \sum_{e=0}^{2} B_2^e, \tag{4.22d}$$

$$\text{com} \quad B_2^e \triangleq [T_e]'[T_e], \quad e=0,1,2; \qquad \text{e} \qquad T_e \triangleq [T_e^1;\ldots;T_e^{n_h}]; \quad e=0,1,2; \tag{4.22e}$$

$$B_3 \triangleq [P]'[P], \tag{4.22f}$$

$$\text{onde} \qquad P \triangleq [P^1;\ldots;P^{n_h}]; \tag{4.22g}$$

e

$$B_4 \triangleq \sum_{e=1}^{2} B_4^e, \tag{4.22h}$$

com

$$B_4^e \triangleq \int_{t_{e-1}}^{t_e} \Big\{ [U^e(\tau)]'[U^e(\tau)] \Big\} d\tau, \quad \text{e} \quad U^e(\cdot) \triangleq [U^{(e,1)}(\cdot);\ldots;U^{(e,n_h)}(\cdot)], \quad e=1,2. \tag{4.22i}$$

Daqui para frente, continuando a seguir o mesmo raciocínio do capítulo anterior, admitimos três possibilidades distintas, as quais reunidas levam ao seguinte conjunto de condições necessárias:

i:

$$\nu_0 + |\nu| \neq 0, \qquad \nu_0 \in \Big\{0,1\Big\}; \tag{4.23a}$$

ii:

$$\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j X^{(e,j)} = 0, \qquad e = 1, 2; \tag{4.23b}$$

iii:

$$\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j T_e^j = 0, \qquad e = 0, 1, 2; \tag{4.23c}$$

iv:

$$\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j P^j = 0; \tag{4.23d}$$

v:

$$\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j U^{(e,j)}(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1, 2. \tag{4.23e}$$

As equações (4.23) são expandidas de forma semelhante ao Capítulo 3. Posteriormente fazemos uso, sucessivamente, das definições

$$\lambda^e(\tau) \triangleq \sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \Lambda^{(e,j)}(\tau), \quad \tau \in I_e, \qquad e = 1, 2; \tag{4.24a}$$

e

$$\lambda(\tau) \triangleq \lambda^e(\tau) \quad \text{para} \quad \tau \in (t_{e-1}, t_e), \qquad e = 1, 2; \tag{4.24b}$$

$$\lambda(t_0) \triangleq \lambda^1(t_0); \tag{4.24c}$$

$$\lambda(t_1) \triangleq \lambda^1(t_1); \tag{4.24d}$$

$$\lambda^+(t_1) \triangleq \lambda^2(t_1); \tag{4.24e}$$

$$\lambda(t_2) \triangleq \lambda^2(t_2); \tag{4.24f}$$

as quais, com manipulações análogas àquelas do capítulo anterior, levam às equações (4.3), completando a prova do Teorema 4.1.

4.2.5 - ANÁLISE DE UMA SITUAÇÃO PARTICULAR

Suponha que as restrições (4.1*b*) possuam a seguinte estrutura particular:

$$h_j = \psi_j = 0, \qquad j = 0, \ldots, n_\psi; \tag{4.25a}$$

$$h_j = \theta_k = 0, \qquad k = 1, \ldots, n_x; \quad j = n_\psi + k; \tag{4.25b}$$

onde

$$\psi_j = \psi_j[x(t_0); x(t_2); t_0; t_2; p], \qquad j = 0, \ldots, n_\psi; \tag{4.25c}$$

e

$$\theta_k = x_k^+(t_1) - x_k(t_1), \qquad k = 1, \ldots, n_x. \tag{4.25d}$$

Neste caso, o problema (4.1) pode ser interpretado como sendo o problema (3.1) acrescido de uma quina em um instante intermediário livre, denotado aqui por t_1. Sobre este instante, as variáveis de controle e as derivadas das variáveis de estado estão liberadas para sofrer uma descontinuidade de tamanho arbitrário. As únicas restrições de contorno associadas ao instante t_1 são as restrições (4.25d), que estabelecem a continuidade do vetor de estado neste instante.

Para o presente caso, as equações (4.3c)–(4.3f), e (4.3h) assumem a seguinte estrutura particular:

$$\lambda(t_0) = +\sum_{j=0}^{n_\psi} \nu_j \left[\frac{\partial \psi_j}{\partial x(t_0)}\right]'; \tag{4.26a}$$

$$\lambda(t_1) = \eta; \tag{4.26b}$$

$$\lambda^+(t_1) = \eta; \tag{4.26c}$$

$$\lambda(t_2) = -\sum_{j=0}^{n_\psi} \nu_j \left[\frac{\partial \psi_j}{\partial x(t_2)}\right]'; \tag{4.26d}$$

$$\sum_{j=0}^{n_\psi} \nu_j \left[\frac{\partial \psi_j}{\partial p}\right]' = 0; \tag{4.26e}$$

onde

$$\eta \triangleq [\nu_{n_\psi+1}; \ldots; \nu_{n_\psi+n_x}]'. \tag{4.26f}$$

As equações (4.3i)–(4.3k), por sua vez, se escreverão:

$$\sum_{j=0}^{n_\psi} \nu_j \left\{ \left[\frac{\partial \psi_j}{\partial x(t_0)}\right] \dot{x}(t_0) + \frac{\partial \psi_j}{\partial t_0} \right\} = 0; \tag{4.27a}$$

$$\sum_{k=1}^{n_x} \eta_k \left\{ -\dot{x}_k(t_1) + \dot{x}_k^+(t_1) \right\} = 0; \tag{4.27b}$$

e

$$\sum_{j=0}^{n_\psi} \nu_j \left\{ \left[\frac{\partial \psi_j}{\partial x(t_2)}\right] \dot{x}(t_2) + \frac{\partial \psi_j}{\partial t_2} \right\} = 0. \tag{4.27c}$$

Levando-se em consideração (4.26b),(4.26c) e (4.26f), (4.27b) pode ser reescrita como

$$[\lambda^+(t_1)]'\dot{x}^+(t_1) = [\lambda(t_1)]'\dot{x}(t_1). \tag{4.28a}$$

Por outro lado, a comparação de (4.26b) e (4.26c) fornece ainda

$$\lambda^+(t_1) = \lambda(t_1). \tag{4.28b}$$

Com a consideração das equações (4.3b), (4.26a), (4.26b) e (4.26c), observa-se que, no presente caso,

se $\quad \nu_j = 0, \quad j = 0, \ldots, n_\psi;$

então (4.3a) é violada.

Reunindo todas estas considerações, chega-se à conclusão de que, para o presente problema, as equações (4.3a)–(4.3k) podem ser substituidas por:

I:

$$\nu_0 + |\nu| \neq 0, \qquad \nu_0 \in \{0, 1\}; \tag{4.29a}$$

onde[3]

$$\nu \triangleq [\nu_1; \ldots; \nu_{n_\psi}]'; \tag{4.29b}$$

II:

$$\dot{\lambda}(\tau) = -\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]' \lambda(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_2]; \tag{4.29c}$$

$$\lambda(t_0) = \sum_{j=0}^{n_\psi} \nu_j \left[\frac{\partial \psi_j}{\partial x(t_0)}\right]'; \tag{4.29d}$$

$$\lambda^+(t_1) = \lambda(t_1); \tag{4.29e}$$

$$\lambda(t_2) = -\sum_{j=0}^{n_\psi} \nu_j \left[\frac{\partial \psi_j}{\partial x(t_2)}\right]'; \tag{4.29f}$$

III:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]' \lambda(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_2]; \tag{4.29g}$$

[3] Observe que aqui o vetor ν foi redefinido suprimindo-se as suas n_x últimas componentes.

IV:

$$\sum_{j=0}^{n_\psi} \nu_j \left[\frac{\partial \psi_j}{\partial p}\right]' = 0; \tag{4.29h}$$

V:

$$\sum_{j=0}^{n_\psi} \nu_j \left\{ \left[\frac{\partial \psi_j}{\partial x(t_0)}\right] \dot{x}(t_0) + \frac{\partial \psi_j}{\partial t_0} \right\} = 0; \tag{4.29i}$$

$$[\lambda^+(t_1)]'\dot{x}^+(t_1) = [\lambda(t_1)]'\dot{x}(t_1); \tag{4.29j}$$

$$\sum_{j=0}^{n_\psi} \nu_j \left\{ \left[\frac{\partial \psi_j}{\partial x(t_2)}\right] \dot{x}(t_2) + \frac{\partial \psi_j}{\partial t_2} \right\} = 0. \tag{4.29k}$$

As equações (4.29) representam a versão das equações (4.3) para este problema particular.

4.2.6 - COMENTÁRIOS

a) As equações (4.29e) e (4.29j) compõem o que no cálculo variacional denomina-se "condições de quina de Weierstrass-Erdmann" (vide Bolza [10], págs. 36–41, Bliss [8], pág. 143, ou Hestenes [40], pág. 59).

b) A função

$$H(\tau) \triangleq [\lambda(\tau)]'\dot{x}(\tau)$$

é definida na literatura com o nome de "função hamiltoniana". A equação (4.29j) estabelece a sua continuidade no problema (4.25).[4]

c) As equações (4.29e) e (4.29j) continuam válidas ainda no caso de algumas componentes do vetor de estado sofrerem descontinuidades de tamanho livre em t_1. De fato, suponha que a $\bar{k}$-ésima componente do vetor de estado possa ter este tipo de descontinuidade. Isto implica na omissão da restrição

$$\theta_{\bar{k}} = x_{\bar{k}}^+(t_1) - x_{\bar{k}}(t_1) = 0,$$

entre as equações (4.25).

É fácil confirmar que, nesta hipótese, as equações (4.29e) e (4.29j) continuam válidas. A diferença agora é que, com a retirada de

$$x_{\bar{k}}^+(t_1) = x_{\bar{k}}(t_1),$$

[4] Mais adiante serão feitos comentários adicionais a respeito da continuidade da hamiltoniana.

passamos a ter

$$\lambda_{\bar{k}}^{+}(t_1) = \lambda_{\bar{k}}(t_1) = 0.$$

Obviamente, o raciocínio continua válido se a descontinuidade livre se estender a mais de uma variável de estado.

4.3 - PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO COM RESTRIÇÕES DE CONTORNO DEPENDENTES EXPLICITAMENTE DE UM CONJUNTO DE INSTANTES INTERMEDIÁRIOS

4.3.1 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Neste item prossegue-se na generalização dos resultados a serem obtidos neste trabalho, estudando-se uma classe de problemas de controle ótimo onde as restrições de contorno dependem explicitamente de um cojunto de instantes intermediários. Um número arbitrário, embora finito, de descontinuidades nas variáveis de controle ou de estado, poderá ocorrer.

Assim, considere o seguinte problema:

Encontrar valores ótimos para

$$(y(\cdot), v(\cdot), \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{N+1}, q),$$

os quais denotaremos por

$$(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}, p),$$

tais que

$$h_0[x(t_0); x(t_1); x^+(t_1); \ldots; x(t_N); x^+(t_N); x(t_{N+1}); t_0; t_1; \ldots; t_{N+1}; p] \qquad (4.30a)$$

seja um mínimo, com:

$$h_i[x(t_0); x(t_1); x^+(t_1); \ldots; x(t_N); x^+(t_N); x(t_{N+1}); t_0; t_1; \ldots; t_{N+1}; p] = 0,$$

$$i = 1, \ldots, n_h; \qquad (4.30b)$$

e

$$\dot{x}(\tau) = f[x(\tau); u(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}]; \qquad (4.30c)$$

com

$$t_e \in \delta_e \subset E^1, \qquad e = 0, 1, \ldots, N+1;$$

$$p \in Q \subset E^{n_p};$$

$$x(\tau) \in Y \subset E^{n_x}, \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}];$$

$$u(\tau) \in V \subset E^{n_u}, \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}];$$

$$h_i : E^{(2N+2)n_x} \times E^{N+2} \times E^{n_p} \longmapsto E^1, \qquad i = 0, 1, \ldots, n_h;$$

$$f \triangleq [f_1; \ldots; f_{n_x}]' : E^{n_x} \times E^{n_u} \times E^1 \longmapsto E^{n_x};$$

sendo $\delta_e (e = 0, 1, \ldots, N+1)$, Y, V e Q conjuntos abertos.

As variáveis $t_e (e = 0, 1, \ldots, N+1)$ têm que satisfazer a determinados limites, os quais serão especificados nas hipóteses adiante. Condições de regularidade para as variáveis $x(\cdot)$ e $u(\cdot)$, e para as funções $h_i (i = 0, 1, \ldots, n_h)$ e $f_j (j = 1, \ldots, n_x)$, também serão especificadas nas hipóteses.

4.3.2 - HIPÓTESES

Com relação ao problema (4.30), considera-se:

H8: Os instantes $t_e (e = 1, \ldots, N)$ devem ser não coincidentes, dois a dois, e satisfazer as desigualdades

$$t_0 < t_e < t_{N+1}, \qquad e = 1, \ldots, N;$$

H9: $x_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ devem ser funções contínuas para todo

$$\tau \in (t_{e-1}, t_e), \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

com $\quad x(t_0) \triangleq x^+(t_0);$

$$x(t_e) \triangleq x^-(t_e), \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

H10: $u_j(\cdot)(j = 1, \ldots, n_u)$ devem ser funções contínuas por partes[5], para todo

$$\tau \in (t_{e-1}, t_e), \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

[5] Por "funções contínuas por partes", entendemos funções que admitem no intervalo considerado um número finito de descontinuidades ordinárias (vide Whittaker e Watson [71], pág. 42) — ou de primeira espécie, segundo alguns autores (vide Pontryagin et al. [62], págs. 10–11).

$$\text{com} \qquad u(t_0) \triangleq u^+(t_0);$$

$$u(\tau) = u^-(\tau), \quad \tau \in (t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

H11: As funções $h_i(i = 0, 1, \ldots, n_h)$ e $f_j(j = 1, \ldots, n_x)$, e suas derivadas parciais primeiras, são todas contínuas em relação a todos os seus argumentos, nos domínios considerados.

Devemos observar pelas hipóteses H8–H11, que descontinuidades nas variáveis de estado só poderão ocorrer sobre os instantes $t_e(e = 1, \ldots, N)$. Para $\tau \neq t_e(e = 1, \ldots, N)$ poderão ocorrer descontinuidades somente no vetor de controle, o que possivelmente levará a descontinuidades nas derivadas de estado. Este tipo de descontinuidade ocorrerá em pontos que são denominados "pontos de quina implícita". Sobre estes pontos deverão ser respeitadas certas condições, as quais serão deduzidas adiante.

Os instantes $t_e(e = 0, 1, \ldots, N+1)$ são admitidos todos móveis, de modo que, se para determinado valor de e , t_e for fixo, isto deverá estar embutido no problema através do vínculo

$$h_j = t_e - \bar{t}_e = 0,$$

com $\bar{t}_e$ correspondendo ao valor fixo mencionado.

4.3.3 - CONDIÇÕES NECESSÁRIAS

Para a apresentação das condições necessárias para a solução do problema (4.30), considere a seguinte definição :

DEFINIÇÃO 4.2: (Mínimo Local para o Problema 4.30)

Diz-se que

$$(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}, p)$$

fornece um mínimo local para o problema (4.30), *e particularmente, que* $u(\cdot)$ *representa um controle localmente ótimo, quando existir um* ϵ *positivo, não importa quão pequeno ele seja, tal que*

$$\begin{aligned} &h_0[y(\tau_0); y(\tau_1); y^+(\tau_1); \ldots; y(\tau_N); y^+(\tau_N); y(\tau_{N+1}); \tau_0; \tau_1; \ldots; \tau_{N+1}; q] \geq \\ &h_0[x(t_0); x(t_1); x^+(t_1); \ldots; x(t_N); x^+(t_N); x(t_{N+1}); t_0; t_1; \ldots; t_{N+1}; p], \end{aligned} \tag{4.31}$$

para todo $(y(\cdot), v(\cdot), \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{N+1}, q)$ *tal que:*

I: $y_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ *e* $v_j(\cdot)(j = 1, \ldots, n_u)$ *satisfazem as condições de regularidade impostas a* $x_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ *e* $u_j(\cdot)(j = 1, \ldots, n_u)$, *respectivamente.*

II:

$$(y(\cdot), v(\cdot), \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{N+1}, q)$$

satisfaz as restrições (4.30b) e (4.30c), quando em substituição a

$$(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}, p),$$

com $\tau_e \in \delta_e(e = 0, 1, \ldots, N+1)$; $q \in Q$; $y(\tau) \in Y$, $\tau \in [\tau_0, \tau_{N+1}]$; *e* $v(\tau) \in V$, $\tau \in [\tau_0, \tau_{N+1}]$.

III:

$$\sum_{e=0}^{N+1} |\tau_e - t_e| + |q - p| + |y(\tau_0) - x(t_0)| + \sum_{e=1}^{N} |y^+(\tau_e) - x^+(t_e)| + \int_{\tau_0}^{\tau_{N+1}} |v(\tau) - w(\tau)| d\tau < \epsilon$$

onde $w(\cdot)$ *representa uma função fixa que possui as seguintes propriedades:*

i: $w(\cdot)$ *é contínua por partes para todo* $\tau \in I_T \triangleq \{[t_0, t_{N+1}] \cup \delta_0 \cup \delta_1 \ldots \cup \delta_{N+1}\}$;

ii: $w(\tau) \in V$ *para* $\tau \in I_T$;

iii: para $\tau \in [t_0, t_{N+1}]$, $w(\cdot)$ *coincide com* $u(\cdot)$.

Tendo como referência a Definição 4.2, considere o seguinte teorema de condições necessárias:

TEOREMA 4.2 :

Para que $(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}, p)$ *forneça um mínimo local para o problema (4.30), respeitadas as hipóteses H8–H11, devem existir multiplicadores*

$$\nu_0, \qquad \nu \triangleq [\nu_1; \ldots; \nu_{n_h}]',$$

e uma função vetorial

$$\lambda(\cdot) \triangleq [\lambda_1(\cdot); \ldots; \lambda_{n_x}(\cdot)]',$$

tais que se verifiquem:

I:

$$\nu_0 + |\nu| \neq 0, \qquad \nu_0 \in \{0,1\}; \tag{4.32a}$$

II: $\lambda_i(\cdot)(i = 1,\ldots,n_x)$ *são contínuas para todo* $\tau \in (t_{e-1}, t_e)$, $(e = 1,\ldots,N+1)$ *com:*

$$\dot{\lambda}(\tau) = -\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]'\lambda(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}]; \tag{4.32b}$$

$$\lambda(t_0) = \sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_0)}\right]'; \tag{4.32c}$$

$$\lambda(t_e) = -\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_e)}\right]', \qquad e = 1,\ldots,N; \tag{4.32d}$$

$$\lambda^+(t_e) = \sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left[\frac{\partial h_j}{\partial x^+(t_e)}\right]', \qquad e = 1,\ldots,N; \tag{4.32e}$$

$$\lambda(t_{N+1}) = -\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_{N+1})}\right]'; \tag{4.32f}$$

III:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]'\lambda(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}]; \tag{4.32g}$$

IV:

$$\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left[\frac{\partial h_j}{\partial p}\right]' = 0; \tag{4.32h}$$

V: A função

$$H \triangleq \sum_{i=1}^{n_x} \lambda_i(\tau)\dot{x}_i(\tau) \tag{4.32i}$$

é contínua para todo $\tau \in (t_{e-1}, t_e)$, $e = 1,\ldots,N+1;$

$$\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left\{ \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_0)}\right]\dot{x}(t_0) + \frac{\partial h_j}{\partial t_0} \right\} = 0; \tag{4.32j}$$

$$\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left\{ \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_e)}\right]\dot{x}(t_e) + \left[\frac{\partial h_j}{\partial x^+(t_e)}\right]\dot{x}^+(t_e) + \frac{\partial h_j}{\partial t_e} \right\} = 0, \qquad e = 1,\ldots,N; \tag{4.32k}$$

$$\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left\{ \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_{N+1})}\right]\dot{x}(t_{N+1}) + \frac{\partial h_j}{\partial t_{N+1}} \right\} = 0. \tag{4.32l}$$

4.3.4 - PROVA DAS CONDIÇÕES NECESSÁRIAS

Para provar as condições necessárias estabelecidas no Teorema 4.2, inicialmente devemos notar que, pela hipótese H10, para $\tau \in (t_{e-1}, t_e)$, $e = 1, \ldots, N+1$, podemos ter descontinuidades nas variáveis de controle, possivelmente acompanhadas de descontinuidades nas derivadas de estado. Afim de utilizar os mecanismos de dedução anteriores, os pontos sobre os quais ocorre este tipo de descontinuidade, os quais não coincidem com $t_e (e = 1, \ldots, N)$, deverão — para efeito de dedução — ser explicitados na formulação do problema. Isto se faz acrescentando-se ao problema as restrições

$$\theta^k \triangleq x^+(t'_k) - x(t'_k) = 0, \qquad k = 1, \ldots, N'; \tag{4.33a}$$

onde

$$\theta^k \triangleq [\theta_1^k; \ldots; \theta_{n_x}^k]', \tag{4.33b}$$

ou seja

$$\theta_i^k = x_i^+(t'_k) - x_i(t'_k), \qquad k = 1, \ldots, N'; \quad i = 1, \ldots, n_x. \tag{4.33c}$$

e $t'_k \in \delta'_k, \quad k = 1, \ldots, N'$, denotando $\delta'_k (k = 1, \ldots, N')$ conjuntos abertos contidos em $[t_0, t_{N+1}]$.[6]

As restrições (4.33) estabelecem a continuidade do vetor de estado nos instantes $t'_k (k = 1, \ldots, N')$, os quais são distintos entre si e tais que

$$t'_k \in [t_0, t_{N+1}], \qquad k = 1, \ldots, N';$$

e

$$t'_k \notin \left\{ t_0, t_1, \ldots, t_{N+1} \right\}, \qquad k = 1, \ldots, N'.$$

É importante observar que as restrições (4.33) estabelecem as únicas restrições associadas com os instantes $t'_k (k = 1, \ldots, N')$.

Com o objetivo de nos servirmos dos mecanismos de dedução dos itens anteriores, nós vamos agrupar os conjuntos

$$\left\{ t_0, t_1, \ldots, t_{N+1} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ t'_1, \ldots, t'_{N'} \right\}$$

em um conjunto único ordenado, a saber,

$$\left\{ \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{M+1} \right\}, \tag{4.34a}$$

[6] Observe que os conjuntos $\delta'_k (k=1,\ldots,N')$ não necessitam ser conhecidos a priori. Eles são definidos aqui apenas com o intuito de preservar a consistência teórica da dedução.

onde

$$M = N + N'; \tag{4.34b}$$

e

$$\xi_{e-1} < \xi_e, \qquad e = 1, \ldots, M + 1. \tag{4.34c}$$

Naturalmente, pelas hipóteses anteriores teremos

$$\xi_0 = t_0 \tag{4.34d}$$

e

$$\xi_{M+1} = t_{N+1}. \tag{4.34e}$$

Correspondentemente, os conjuntos

$$\left\{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{N+1}\right\} \quad \text{e} \quad \left\{\delta_1', \ldots, \delta_{N'}'\right\}$$

serão agrupados no conjunto

$$\left\{\bar{\delta}_0, \bar{\delta}_1, \ldots, \bar{\delta}_{M+1}\right\}. \tag{4.34f}$$

Neste ponto passamos a seguir passos análogos aos do item anterior. Começamos por adotar uma nomenclatura particionada para os vetores de estado e de controle, com as seguintes definições:

i:

$$x^e(\cdot) \triangleq [x_1^e(\cdot); \ldots; x_{n_x}^e(\cdot)]', \qquad e = 1, \ldots, M + 1; \tag{4.35a}$$

são funções vetoriais contínuas para $\tau \in [t_{e-1}, t_e]$, tais que

$$x^e(\tau) = x(\tau), \quad \tau \in (t_{e-1}, t_e), \qquad e = 1, \ldots, M + 1; \tag{4.35b}$$

$$x^1(\xi_0) = x(\xi_0); \tag{4.35c}$$

$$x^e(\xi_e) = x(\xi_e), \qquad e = 1, \ldots, M + 1; \tag{4.35d}$$

e

$$x^{e+1}(\xi_e) = x^+(\xi_e), \qquad e = 1, \ldots, M; \tag{4.35e}$$

ii:

$$u^e(\cdot) \triangleq [u_1^e(\cdot); \ldots; u_{n_u}^e(\cdot)]', \qquad e = 1, \ldots, M + 1; \tag{4.36a}$$

são funções vetoriais contínuas para $\tau \in [t_{e-1}, t_e]$, tais que

$$u^e(\tau) = u(\tau), \quad \tau \in (t_{e-1}, t_e), \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{4.36b}$$

$$u^1(\xi_0) = u(\xi_0); \tag{4.36c}$$

$$u^e(\xi_e) = u(\xi_e), \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{4.36d}$$

e
$$u^{e+1}(\xi_e) = u^+(\xi_e), \qquad e = 1, \ldots, M. \tag{4.36e}$$

Considerando as novas restrições — explicitadas através de (4.33) — e a nova notação estabelecida através das expressões (4.34)–(4.36), podemos reescrever o problema (4.30) como:

Encontrar valores ótimos para

$$(y^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1), v^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1), \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{M+1}, q),$$

os quais denotaremos por

$$(x^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1), u^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1), \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{M+1}, p),$$

tais que

$$\bar{h}_0[x^1(\xi_0); x^1(\xi_1); x^2(\xi_1); \ldots; x^M(\xi_M); x^{M+1}(\xi_M); x^{M+1}(\xi_{M+1}); \xi_0; \xi_1; \ldots; \xi_{M+1}; p] \tag{4.37a}$$

atinja um valor mínimo, com

$$\bar{h}_i[x^1(\xi_0); x^1(\xi_1); x^2(\xi_1); \ldots; x^M(\xi_M); x^{M+1}(\xi_M); x^{M+1}(\xi_{M+1}); \xi_0; \xi_1; \ldots; \xi_{M+1}; p] = 0,$$

$$i = 1, \ldots, n_{\bar{h}}; \tag{4.37b}$$

e

$$\dot{x}^e(\tau) = f[x^e(\tau); u^e(\tau); \tau], \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{4.37c}$$

onde

$$\bar{h}_i = h_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n_h; \tag{4.37d}$$

$$\bar{h}_i = \theta_j^k, \qquad k = 1, \ldots, N'; \quad j = 1, \ldots, n_x; \quad i = n_h + (k-1)n_x + j; \tag{4.37e}$$

e

$$\xi_e \in \bar{\delta}_e \subset E^1, \qquad e = 0, 1, \ldots, M+1;$$

$$p \in Q \subset E^{n_p};$$

$$x^e(\tau) \in Y \subset E^{n_x}, \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1;$$

$$u^e(\tau) \in V \subset E^{n_u}, \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1;$$

$$h_i : E^{(2N+2)n_x} \times E^{N+2} \times E^{n_p} \longmapsto E^1, \qquad i = 0, 1, \ldots, n_{\bar{h}};$$

sendo $\bar{\delta}_e(e = 0, 1, \ldots, M + 1)$, conforme as definições anteriores, conjuntos abertos. As funções $f_i(i = 1, \ldots, n_x)$ e os conjuntos Y,V e Q continuam como no problema (4.30).

À luz das definições anteriores, e das hipóteses H8–H11, as seguintes afirmativas são verdadeiras:

i: Os instantes $\xi_e(e = 0, 1, \ldots, M + 1)$ satisfazem a $\xi_e < \xi_{e+1}, \quad e = 0, 1, \ldots, M$;

ii: $x_i^e(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x; e = 1, \ldots, M + 1)$ são funções contínuas para todo $\tau \in [t_{e-1}, t_e]$;

iii: $u_k^e(\cdot)(k = 1, \ldots, n_u; e = 1, \ldots, M + 1)$ são funções contínuas para todo $\tau \in [t_{e-1}, t_e]$.

Além disso, para que o problema (4.37) permita ,por sua vez, resolver o problema (4.30), tem que existir um ϵ positivo, não importa quão pequeno ele seja, tal que

$$\bar{h}_0[y^1(\tau_0); y^1(\tau_1); y^2(\tau_1); \ldots; y^M(\tau_M); y^{M+1}(\tau_M); y^{M+1}(\tau_{M+1}); \tau_0; \tau_1; \ldots; \tau_{M+1}; q] \geq$$
$$\bar{h}_0[x^1(\xi_0); x^1(\xi_1); x^2(\xi_1); \ldots; x^M(\xi_M); x^{M+1}(\xi_M); x^{M+1}(\xi_{M+1}); \xi_0; \xi_1; \ldots; \xi_{M+1}; p], \quad (4.38)$$

para todo $(y^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M + 1), v^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M + 1), \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{M+1}, q)$ tal que:

I: $y_i^e(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ e $v_j^e(\cdot)(j = 1, \ldots, n_u)$ satisfazem as condições de regularidade das funções $x_i^e(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ e $u_j^e(\cdot)(j = 1, \ldots, n_u)$, respectivamente.

II:

$$(y^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M + 1), v^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M + 1), \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{M+1}, q)$$

satisfaz as restrições (4.37b) e (4.37c), quando em substituição a

$$(x^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M + 1), u^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M + 1), \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{M+1}, p),$$

com $\tau_e \in \bar{\delta}_e(e = 0, 1, \ldots, M + 1)$; $q \in Q$; $y^e(\tau) \in Y$, $\tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e]$, $e = 1, \ldots, M + 1$; e $v^e(\tau) \in V$, $\tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e]$, $e = 1, \ldots, M + 1$.

III:

$$\sum_{e=0}^{M+1} |\tau_e - \xi_e| + |q - p| + |y^1(\tau_0) - x^1(t_0)| + \sum_{e=1}^{M} |y^{e+1}(\tau_e) - x^{e+1}(t_e)| + \sum_{e=1}^{M+1} \int_{\tau_{e-1}}^{\tau_e} |v^e(\tau) - w^e(\tau)| d\tau < \epsilon$$

onde $w^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1)$ representam funções fixas que possuem as seguintes propriedades:

i: $w^e(\cdot)$ são contínuas para todo

$$\tau \in \bar{I}_e \triangleq \left\{[\xi_{e-1}, \xi_e] \cup \bar{\delta}_{e-1} \cup \bar{\delta}_e\right\}, \quad e = 1, \ldots, M+1;$$

ii: $w^e(\tau) \in V$ para $\tau \in \bar{I}_e$, $\quad e = 1, \ldots, M+1$;

iii: para $\tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e]$, $\quad w^e(\cdot)$ coincide com $u^e(\cdot)$, $\quad e = 1, \ldots, M+1$.

Recorrendo ao artifício das variáveis adjuntas, como no item anterior, podemos reescrever o problema (4.37) na seguinte forma:

Encontrar valores ótimos para

$$y^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1), \quad v^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1), \quad \tau_e(e = 0, 1, \ldots, M+1), \quad \text{e} \quad q,$$

que forneçam um mínimo local para

$$\begin{aligned}\tilde{h}_0 = \bar{h}_0[&y^1(\tau_0); y^1(\tau_1); y^2(\tau_1); \ldots; y^M(\tau_M); y^{M+1}(\tau_M); y^{M+1}(\tau_{M+1}); \tau_0; \tau_1; \ldots; \tau_{M+1}; q] + \\ &+ \sum_{e=1}^{M+1} \Bigg\{ [\Lambda^{(e,0)}(\tau_e)]' y^e(\tau_e) - [\Lambda^{(e,0)}(\tau_{e-1})]' y^e(\tau_{e-1}) - \\ &- \int_{\tau_{e-1}}^{\tau_e} \left\{ [\Lambda^{(e,0)}(\tau)]' \dot{y}^e(\tau) + [\dot{\Lambda}^{(e,0)}(\tau)]' y^e(\tau) \right\} d\tau \Bigg\}, \end{aligned} \tag{4.39a}$$

sujeito a

$$\begin{aligned}\tilde{h}_i = \bar{h}_i[&y^1(\tau_0); y^1(\tau_1); y^2(\tau_1); \ldots; y^M(\tau_M); y^{M+1}(\tau_M); y^{M+1}(\tau_{M+1}); \tau_0; \tau_1; \ldots; \tau_{M+1}; q] + \\ &+ \sum_{e=1}^{M+1} \Bigg\{ [\Lambda^{(e,i)}(\tau_e)]' y^e(\tau_e) - [\Lambda^{(e,i)}(\tau_{e-1})]' y^e(\tau_{e-1}) - \\ &- \int_{\tau_{e-1}}^{\tau_e} \left\{ [\Lambda^{(e,i)}(\tau)]' \dot{y}^e(\tau) + [\dot{\Lambda}^{(e,i)}(\tau)]' y^e(\tau) \right\} d\tau \Bigg\} = 0, \quad i = 1, \ldots, n_{\bar{h}}; \end{aligned} \tag{4.39b}$$

e

$$\dot{y}^e(\tau) = f[y^e(\tau); v^e(\tau); \tau], \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \quad e = 1, \ldots, M+1; \tag{4.39c}$$

onde $\Lambda^{(e,i)}(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1; i = 0, 1, \ldots, n_{\bar{h}})$ são funções vetoriais contínuas fixas, definidas para todo $\tau \in \bar{I}_e(e = 1, \ldots, M+1)$. Em completa analogia com as equações (4.5), as variáveis $y^e(\cdot), v^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1)$; $\tau_e(e = 0, 1, \ldots, M+1)$, e q, são expressadas como

$$y^e(\tau) = z^e(\tau) + \zeta^e(\tau), \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \quad e = 1, \ldots, M+1; \tag{4.40a}$$

$$v^e(\tau) = w^e(\tau) + \phi^e(\tau), \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \quad e = 1, \ldots, M+1; \tag{4.40b}$$

$$\tau_e = \xi_e + \Delta\xi_e, \quad e = 0, 1, \ldots, M+1; \tag{4.40c}$$

$$q = p + \Delta p. \tag{4.40d}$$

Conforme já sabemos, $\xi_e(e = 0, 1, \ldots, M+1)$ e p, representam os valores ótimos de $\tau_e(e = 0, 1, \ldots, M+1)$ e q respectivamente. As grandezas $z^e(\cdot)$ e $w^e(\cdot)$, $e = 1, \ldots, M+1$, são funções fixas satisfazendo as seguintes propriedades:

i: $w^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1)$, obedecem as propriedades já estabelecidas;

ii: $z^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1)$ são as soluções contínuas de (4.37c) sobre $\tau \in \bar{I}_e$, $e = 1, \ldots, M+1$; tendo como condições de contorno

$$z^e(\xi_{e-1}) = x^e(\xi_{e-1}), \qquad e = 1, \ldots, M+1.$$

Como consequência das propriedades acima, $z^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1)$ coincidem com $x^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1)$ para $\tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e](e = 1, \ldots, M+1)$. Os significados das funções $\zeta^e(\cdot)$ e $\phi^e(\cdot)$, $e = 1, \ldots, M+1$, bem como suas propriedades, e os significados de $\Delta\xi_e(e = 0, 1, \ldots, M+1)$ e Δp, ficam definidos a partir da conceituação das demais grandezas envolvidas nas equações (4.40).

Utilizando o mesmo raciocínio do item anterior, $\zeta^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1)$ ficam determinadas a partir da solução das equações diferenciais

$$\dot{\zeta}^e(\tau) = F^e[\zeta^e(\tau); \phi^e(\tau); \tau], \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{4.41a}$$

onde

$$F^e[\zeta^e(\tau); \phi^e(\tau); \tau] = f[y^e(\tau); v^e(\tau); \tau] - \dot{z}^e(\tau), \tag{4.41b}$$

com condições pré-estabelecidas para

$$\tau = \tau_{e-1}, \qquad e = 1, \ldots, M+1.$$

Em correspondência com as expressões (4.11) adotamos:

$$\phi^e(\tau) = \beta_0 U^{(e,0)}(\tau) + \sum_{j=1}^{n_{\hat{k}}} \beta_j U^{(e,j)}(\tau), \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{4.42a}$$

$$\Delta\xi_e = \beta_0 T_e^0 + \sum_{j=1}^{n_{\hat{k}}} \beta_j T_e^j, \qquad e = 0, 1, \ldots, M+1; \tag{4.42b}$$

$$\Delta p = \beta_0 P^0 + \sum_{j=1}^{n_{\hat{k}}} \beta_j P^j; \tag{4.42c}$$

e

$$\zeta^e(\tau_{e-1}) = \beta_0 X^{(e,0)} + \sum_{j=1}^{n_{\hat{k}}} \beta_j X^{(e,j)}, \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{4.42d}$$

onde:

$$U^{(e,j)}(\cdot) \triangleq [U_1^{(e,j)}(\cdot);\ldots;U_{n_u}^{(e,j)}(\cdot)]', \qquad j=0,1,\ldots,n_{\bar{h}}; \quad e=1,\ldots,M+1; \tag{4.42e}$$

$$P^j \triangleq [P_1^j;\ldots;P_{n_p}^j]', \qquad j=0,1,\ldots,n_{\bar{h}}; \tag{4.42f}$$

$$X^{(e,j)} \triangleq [X_1^{(e,j)};\ldots;X_{n_x}^{(e,j)}]', \qquad j=0,1,\ldots,n_{\bar{h}}; \quad e=1,\ldots,M+1. \tag{4.42g}$$

Desde que se arbitre

$$U^{(e,j)}(\cdot), \quad X^{(e,j)}, \qquad e=1,\ldots,M+1; \quad j=0,1,\ldots,n_{\bar{h}};$$

$$P^j, \qquad j=0,1,\ldots,n_{\bar{h}};$$

$$T_e^j, \qquad e=0,1,\ldots,M+1; \quad j=0,1,\ldots,n_{\bar{h}};$$

as expressões (4.39a) e (4.39b) passam a representar funções de $\beta_j (j=0,1,\ldots,n_{\bar{h}})$ as quais denotaremos como

$$\tilde{h}_j = g_j[\beta_0;\beta], \qquad j=0,1,\ldots,n_{\bar{h}} \tag{4.43a}$$

onde

$$\beta \triangleq [\beta_1;\ldots;\beta_{n_{\bar{h}}}]', \tag{4.43b}$$

sendo que

$$g_j[0,0] = \bar{h}_j[x^1(\xi_0);x^1(\xi_1);x^2(\xi_1);\ldots;x^M(\xi_M);x^{M+1}(\xi_M);x^{M+1}(\xi_{M+1});\xi_0;\xi_1;\ldots;\xi_{M+1};p],$$

$$j=0,1,\ldots,n_{\bar{h}}; \tag{4.43c}$$

com

$$g_j[0,0]=0, \qquad j=1,\ldots,n_{\bar{h}}. \tag{4.43d}$$

As derivadas parciais de $g_i(i=0,1,\ldots,n_{\bar{h}})$ em relação a $\beta_j(j=0,1,\ldots,n_{\bar{h}})$ são calculadas em absoluta analogia com o item anterior.

Escolhendo as funções $\Lambda^{(e,j)}(\cdot)$ como sendo as soluções contínuas de

$$\dot{\Lambda}^{(e,j)}(\tau) = \left[\frac{\partial f}{\partial z^e}\right]' \Lambda^{(e,j)}(\tau), \quad \tau \in \bar{I}_e; \tag{4.44a}$$

com condição de contorno

$$\Lambda^{(e,j)}(\xi_e) = -\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x^e(\xi_e)}, \qquad e=1,\ldots,M+1; \quad j=0,1,\ldots,n_{\bar{h}}; \tag{4.44b}$$

obtemos, depois de desenvolvimento análogo aos já conhecidos:

$$\left.\frac{\partial g_i}{\partial \beta_j}\right|_{(0,0)} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 - A_6, \qquad i,j = 0,1,\ldots,n_{\bar{h}}; \tag{4.45.a}$$

onde:

$$A_1 = \sum_{e=1}^{M+1}\left[\frac{\partial \bar{h}_i}{\partial x^e(\xi_{e-1})} - [\Lambda^{(e,i)}(\xi_{e-1})]'\right]X^{(e,j)}; \tag{4.45b}$$

$$A_2 = \left\{\left[\frac{\partial \bar{h}_i}{\partial x^1(\xi_0)}\right]\dot{x}^1(\xi_0) + \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \xi_0}\right\}T_0^j; \tag{4.45c}$$

$$A_3 = \sum_{e=1}^{M}\left\{\left[\frac{\partial \bar{h}_i}{\partial x^e(\xi_e)}\right]\dot{x}^e(\xi_e) + \left[\frac{\partial \bar{h}_i}{\partial x^{e+1}(\xi_e)}\right]\dot{x}^{e+1}(\xi_e) + \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \xi_e}\right\}T_e^j; \tag{4.45d}$$

$$A_4 = \left\{\left[\frac{\partial \bar{h}_i}{\partial x^{M+1}(\xi_{M+1})}\right]\dot{x}^{M+1}(\xi_{M+1}) + \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \xi_{M+1}}\right\}T_{M+1}^j; \tag{4.45e}$$

$$A_5 = \left[\frac{\partial \bar{h}_i}{\partial p}\right]P^j; \tag{4.45f}$$

$$A_6 = \sum_{e=1}^{M+1}\int_{\xi_{e-1}}^{\xi_e}\left\{[\Lambda^{(e,i)}(\tau)]'\left[\frac{\partial f}{\partial u^e}\right]U^{(e,j)}(\tau)\right\}d\tau. \tag{4.45g}$$

Finalmente, escolhendo-se, para $j = 0,1,\ldots,n_{\bar{h}}$,

$$X^{(e,j)} = \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x^e(\xi_{e-1})}\right]' - \Lambda^{(e,j)}(\xi_{e-1}), \qquad e = 1,\ldots,M+1; \tag{4.46a}$$

$$T_0^j = \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x^1(\xi_0)}\right]\dot{x}^1(\xi_0) + \frac{\partial \bar{h}_j}{\partial \xi_0}; \tag{4.46b}$$

$$T_e^j = \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x^e(\xi_e)}\right]\dot{x}^e(\xi_e) + \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x^{e+1}(\xi_e)}\right]\dot{x}^{e+1}(\xi_e) + \frac{\partial \bar{h}_j}{\partial \xi_e}, \qquad e = 1,\ldots,M; \tag{4.46c}$$

$$T_{M+1}^j = \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x^{M+1}(\xi_{M+1})}\right]\dot{x}^{M+1}(\xi_{M+1}) + \frac{\partial \bar{h}_j}{\partial \xi_{M+1}}; \tag{4.46d}$$

$$P^j = \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial p}\right]'; \tag{4.46e}$$

$$U^{(e,j)}(\tau) = -\left[\frac{\partial f}{\partial w^e}\right]'\Lambda^{(e,j)}(\tau), \quad \tau \in \bar{I}_e, \quad e = 1,\ldots,M+1; \tag{4.46f}$$

podemos reescrever (4.45) como

$$\left.\frac{\partial g_i}{\partial \beta_j}\right|_{(0,0)} = \sum_{e=1}^{M+1}[X^{(e,i)}]'[X^{(e,j)}] + \sum_{e=0}^{M+1} T_e^i T_e^j + [P^i]'[P^j] +$$

$$+\sum_{e=1}^{M+1}\int_{\xi_{e-1}}^{\xi_e}\left\{[U^{(e,i)}(\tau)]'[U^{(e,j)}(\tau)]\right\}d\tau, \qquad i,j = 0,1,\ldots,n_{\bar{h}}. \tag{4.47}$$

Com raciocínio absolutamente análogo ao item (4.2), obtemos como condição necessária para a solução do problema (4.37), a existência de multiplicadores

$$\eta_0, \qquad \eta \triangleq [\eta_1;\ldots;\eta_{n_{\bar{h}}}]',$$

tais que valem:

i:

$$\eta_0 + |\eta| \neq 0, \qquad \eta_0 \in \Big\{0,1\Big\}; \tag{4.48a}$$

ii:

$$\sum_{j=0}^{n_{\hat{h}}} \eta_j T_e^j = 0, \qquad e = 0,1,\dots,M+1; \tag{4.48b}$$

iii:

$$\sum_{j=0}^{n_{\hat{h}}} \eta_j X^{(e,j)} = 0, \qquad e = 1,\dots,M+1; \tag{4.48c}$$

iv:

$$\sum_{j=0}^{n_{\hat{h}}} \eta_j P^j = 0; \tag{4.48d}$$

v:

$$\sum_{j=0}^{n_{\hat{h}}} \eta_j U^{(e,j)}(\tau) = 0, \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \qquad e = 1,\dots,M+1. \tag{4.48e}$$

Definindo os vetores de multiplicadores

$$\lambda^e(\tau) \triangleq \sum_{j=0}^{n_{\hat{h}}} \eta_j \Lambda^{(e,j)}(\tau), \quad \tau \in \bar{I}_e, \qquad e = 1,\dots,M+1; \tag{4.49}$$

e, posteriormente, o vetor

$$\lambda(\tau) \triangleq \lambda^e(\tau), \quad \tau \in (\xi_{e-1}, \xi_e), \qquad e = 1,\dots,M+1; \tag{4.50a}$$

com

$$\lambda(\xi_0) = \lambda^1(\xi_0); \tag{4.50b}$$

$$\lambda^-(\xi_e) = \lambda(\xi_e) = \lambda^e(\xi_e), \qquad e = 1,\dots,M; \tag{4.50c}$$

$$\lambda^+(\xi_e) = \lambda^{e+1}(\xi_e), \qquad e = 1,\dots,M; \tag{4.50d}$$

e

$$\lambda(\xi_{M+1}) = \lambda^{M+1}(\xi_{M+1}); \tag{4.50e}$$

e recorrendo às expressões (4.44) e (4.48), de maneira semelhante àquela feita no item (4.2), podemos deduzir como condições necessárias para a solução do problema (4.30):

I:

$$\eta_0 + |\eta| \neq 0, \qquad \eta_0 \in \{0,1\}; \tag{4.51a}$$

II:

$$\dot{\lambda}(\tau) = -\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]'\lambda(\tau), \quad \tau \in [\xi_0, \xi_{M+1}]; \tag{4.51b}$$

$$\lambda(\xi_0) = \sum_{j=0}^{n_k} \eta_j \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x(\xi_0)}\right]'; \tag{4.51c}$$

$$\lambda(\xi_e) = -\sum_{j=0}^{n_k} \eta_j \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x(\xi_e)}\right]', \qquad e = 1,\ldots,M; \tag{4.51d}$$

$$\lambda^+(\xi_e) = \sum_{j=0}^{n_k} \eta_j \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x^+(\xi_e)}\right]', \qquad e = 1,\ldots,M; \tag{4.51e}$$

$$\lambda(\xi_{M+1}) = -\sum_{j=0}^{n_k} \eta_j \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x(\xi_{M+1})}\right]'; \tag{4.51f}$$

III:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]'\lambda(\tau) = 0, \quad \tau \in [\xi_0, \xi_{M+1}]; \tag{4.51g}$$

IV:

$$\sum_{j=0}^{n_k} \eta_j \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial p}\right]' = 0; \tag{4.51h}$$

V:

$$\sum_{j=0}^{n_k} \eta_j \left\{ \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x(\xi_0)}\right]\dot{x}(\xi_0) + \frac{\partial \bar{h}_j}{\partial \xi_0} \right\} = 0; \tag{4.51i}$$

$$\sum_{j=0}^{n_k} \eta_j \left\{ \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x(\xi_e)}\right]\dot{x}(\xi_e) + \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x^+(\xi_e)}\right]\dot{x}^+(\xi_e) + \frac{\partial \bar{h}_j}{\partial \xi_e} \right\} = 0, \qquad e = 1,\ldots M; \tag{4.51j}$$

$$\sum_{j=0}^{n_k} \eta_j \left\{ \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x(\xi_{M+1})}\right]\dot{x}(\xi_{M+1}) + \frac{\partial \bar{h}_j}{\partial \xi_{M+1}} \right\} = 0. \tag{4.51k}$$

Neste ponto convidamos o leitor a rever as manipulações efetuadas no item 4.2.5, as quais servirão de base para a dedução final que agora faremos.

Analisemos as equações (4.51d) e (4.51e) para os valores de ξ_e correspondentes aos instantes implícitos de quina (t'_k, $k = 1,\ldots,N'$). É muito fácil confirmar que nestes instantes teremos, decorrente de (4.33c) e (4.37e) levadas a (4.51d) e (4.51e):

$$\lambda_i^+(\xi_e) = \lambda_i(\xi_e) = \eta_k, \tag{4.52a}$$

$$\text{com } k \text{ dependendo de } e \quad \text{e de } i \quad \text{e} \qquad \xi_e \in \left\{t'_1, ..., t'_{N'}\right\}.$$

De acordo com (4.37e), as equações (4.52a) se aplicam para

$$k = n_h + 1, \ldots, n_{\bar{h}}.$$

Por outro lado, em analogia com (4.28a), obtemos

$$[\lambda^+(\xi_e)]'\dot{x}^+(\xi_e) = [\lambda(\xi_e)]'\dot{x}(\xi_e), \tag{4.52b}$$

para todo $\xi_e \in \left\{t'_l, \ldots, t'_{N'}\right\}$.

De acordo com a notação original, (4.52a) e (4.52b) podem ser reescritas como

$$\lambda^+(t'_k) = \lambda(t'_k), \qquad k = 1, \ldots, N'; \tag{4.53a}$$

$$[\lambda^+(t'_k)]'\dot{x}^+(t'_k) = [\lambda(t'_k)]'\dot{x}(t'_k), \qquad k = 1, \ldots, N'. \tag{4.53b}$$

Em virtude das equações (4.52a), a condição (4.51a) será violada se tivermos[7]

$$\eta_j = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, n_h.$$

Levando-se isto em consideração, e definindo

$$\nu_j \triangleq \eta_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, n_h;$$

$$\nu \triangleq [\nu_1; \ldots; \nu_{n_h}]';$$

obtemos como condições necessárias para o problema (4.30), aquelas estabelecidas pelo Teorema 4.2, conforme desejávamos demonstrar.

4.3.5 - COMENTÁRIOS

a) Deve ser notado que, para a presente dedução, o ordenamento estabelecido através da montagem do conjunto

$$\left\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{M+1}\right\},$$

não necessita ser conhecido a priori.

[7] Observe que aqui j está variando de 0 até n_h e não até $n_{\bar{h}}$.

b) Em vista da definição (4.32*i*) e das equações (4.32*c*)-(4.32*f*), as equações (4.32*j*)-(4.32*l*) podem ser reescritas como:

$$[\lambda(t_0)]'\dot{x}(t_0) + \sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \frac{\partial h_j}{\partial t_0} = 0; \tag{4.54a}$$

$$[\lambda(t_e)]'\dot{x}(t_e) - [\lambda^+(t_e)]'\dot{x}^+(t_e) + \sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \frac{\partial h_j}{\partial t_e} = 0, \qquad e = 1, \ldots, N; \tag{4.54b}$$

$$-[\lambda(t_{N+1})]'\dot{x}(t_N) + \sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \frac{\partial h_j}{\partial t_{N+1}} = 0. \tag{4.54c}$$

c) Grande parte dos trabalhos onde se deduz condições necessárias para a solução de problemas de controle ótimo, não inclui dentro de seus resultados a continuidade da função H definida em (4.32*i*), para $\tau \in (t_{e-1}, t_e)$, $e = 1, \ldots, N+1$, como estabelecido no enunciado do Teorema 4.2 .

4.4 - OUTROS COMENTÁRIOS

a) A forma pela qual se fez neste capítulo o particionamento das variáveis de estado, de controle, e das funções adjuntas, acompanhada da definição das funções

$$z^e(\cdot), w^e(\cdot), \qquad e = 1, \ldots, M+1;$$

as quais são compostas de um arco coincidente com a solução ótima, e de dois prolongamentos, constitui um dos aspectos originais introduzidos no presente capítulo.

b) Com respeito à definição das funções

$$x^e(\cdot), u^e(\cdot), \qquad e = 1, \ldots, M+1;$$

ela, acoplada ao fracionamento do intervalo $[t_0, t_{N+1}]$, constituirá o principal mecanismo que permitirá a dedução de condições necessárias para problemas com dinâmica fracionada, conforme veremos no Capítulo 6.

CAPÍTULO 5

PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO COM VÍNCULOS DE CONTORNO MÚLTIPLO E RESTRIÇÕES NÃO-DIFERENCIAIS

5.1 - INTRODUÇÃO

A dedução de condições necessárias terá continuidade neste capítulo admitindo-se a presença de restrições não-diferenciais no problema em estudo. Particularmente serão considerados vínculos do tipo

$$\varphi[x(\tau); u(\tau); \tau] = 0, \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}]; \tag{5.1a}$$

os quais são conhecidos na literatura como restrições não-diferenciais de igualdade, mistas nas variáveis de estado e de controle.

Restrições de desigualdade na forma

$$\varphi[x(\tau); u(\tau); \tau] \leq 0, \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}]; \tag{5.1b}$$

ou

$$k_1(\tau) \leq \varphi[x(\tau); u(\tau); \tau] \leq k_2(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}]; \tag{5.1c}$$

poderão também ser embutidas no problema, utilizando-se variáveis de folga, conforme será descrito posteriormente.

No final do capítulo explica-se como que outros tipos de restrição, com o auxílio de manipulações bastante conhecidas na literatura, podem ser incorporadas ao problema analisado. Este é o caso, por exemplo, das restrições no estado.

Conforme já comentado no Capítulo 2, o tratamento de restrições não-diferenciais tem despertado muito interesse no meio científico, tendo sido, talvez, a maior motivação na elaboração do princípio de máximo de Pontryagin.

Do ponto de vista geométrico, as restrições não-diferenciais obrigam a trajetória ótima a se manter dentro de uma variedade do espaço euclidiano $E^{n_x+n_u+1}$, no caso das restrições de igualdade(vide Fig. 5.1), ou a não ultrapassar uma fronteira deste espaço no caso das restrições de desigualdade.

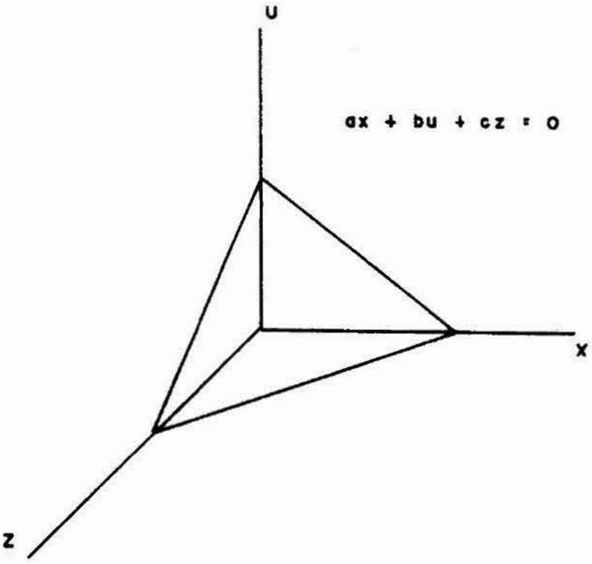

Fig. 5.1 - Esboço de uma restrição não-diferencial.

A exemplo do capítulo anterior, por uma questão de clareza, a dedução se fará por etapas. Assim, inicialmente considera-se um problema relativamente simples, tendo como objetivo introduzir os mecanismos do tratamento das restrições não-diferenciais. Cumprida esta etapa, passa-se à solução de um problema cujo grau de generalidade corresponde aos objetivos do capítulo.

Como no estudo do problema ordinário de controle ótimo, a base da dedução é a aplicação de um teorema de função implícita, só que desta vez, conforme será visto adiante, de uma maneira mais elaborada que aquela do Capítulo 3.

5.2 - PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO COM RESTRIÇÕES NÃO-DIFERENCIAIS E RESTRIÇÕES DE CONTORNO DUPLO

Afim de introduzir a metodologia de tratamento das restrições não-diferenciais, do ponto de vista de condições necessárias, iremos considerar neste item um problema com estrutura simples. Trata-se do problema analisado no Capítulo 3, acrescido de um vetor de restrições não-diferenciais de igualdade.

5.2.1 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere o seguinte problema de controle ótimo:

Encontrar valores ótimos para

$$(y(\cdot), v(\cdot), \tau_0, \tau_1, q),$$

a saber,

$$(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, p),$$

tais que

$$h_0[x(t_0); x(t_1); t_0; t_1; p] \tag{5.2a}$$

seja um mínimo, com:

$$h_i[x(t_0); x(t_1); t_0; t_1; p] = 0, \qquad i = 1, \ldots, n_h; \tag{5.2b}$$

$$c_k[x(\tau); u(\tau); \tau] = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1], \qquad k = 1, \ldots, n_c; \tag{5.2c}$$

e

$$\dot{x}(\tau) = f[x(\tau); u(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{5.2d}$$

onde

$$t_e \in \delta_e \subset E^1, \qquad e = 0, 1;$$

$$p \in Q \subset E^{n_p};$$

$$x(\tau) \in Y \subset E^{n_x}, \quad \tau \in [t_0, t_1];$$

$$u(\tau) \in V \subset E^{n_u}, \quad \tau \in [t_0, t_1];$$

$$h_i : E^{2n_x} \times E^2 \times E^{n_p} \longmapsto E^1, \qquad i = 0, 1, \ldots, n_h;$$

$$c_k : E^{n_x} \times E^{n_u} \times E^1 \longmapsto E^1, \qquad k = 1, \ldots, n_c;$$

$$f \triangleq [f_1; \ldots; f_{n_x}]' : E^{n_x} \times E^{n_u} \times E^1 \longmapsto E^{n_x};$$

sendo $\delta_e(e = 0, 1)$, Q, Y e V conjuntos abertos.

Condições de regularidade para $x(\cdot)$, $u(\cdot)$ $h_i(i = 0, 1, \ldots, n_h)$, $c_k(k = 1, \ldots, n_c)$ e $f_j(j = 1, \ldots, n_x)$, ficarão estabelecidas a partir do conjunto de hipóteses que será indicado a seguir.

5.2.2 - HIPÓTESES

Na solução do problema (5.2) são tomadas como hipóteses:

H16: Os instantes t_0, t_1 devem satisfazer a desigualdade $t_0 < t_1$;

H17: $x_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ devem ser funções contínuas para todo $\tau \in [t_0, t_1]$;

H18: $u_j(\cdot)(j = 1, \ldots, n_u)$ devem ser funções contínuas[1]para todo $\tau \in [t_0, t_1]$;

H19: As funções $h_i(i = 0, 1, \ldots, n_h)$, $f_j(j = 1, \ldots, n_x)$, $c_k(k = 1, \ldots, n_c)$, e suas derivadas parciais primeiras, são todas contínuas em relação a todos os seus argumentos, nos domínios considerados;

H20: Existe uma partição do vetor $u(\cdot)$, na forma

$$\bar{u}(\cdot) \triangleq [a(\cdot); b(\cdot)]',$$

onde

$$n_b = n_c; \quad n_a = n_u - n_c;$$

não necessariamente ordenada[2], tal que a matriz de derivadas parciais

$$\left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial b}\right], \qquad \left\{\frac{\partial \bar{c}}{\partial b}\right\}_{i,j} \triangleq \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial b_j} \quad (i, j = 1, \ldots, n_c);$$

onde

$$\bar{c}_k[x; a; b; \tau] \triangleq c_k[x; u; \tau], \qquad k = 1, \ldots, n_c;$$

avaliada sobre a solução ótima, é inversível para todo $\tau \in [t_0, t_1]$.[3]

Com relação às hipóteses acima devemos observar que:

a) A hipótese H20 estabelece a inversibilidade da matriz

$$\left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial b}\right]$$

somente sobre a solução do problema. Entretanto, como o determinante de uma matriz é uma função contínua de seus elementos, e considerando a regularidade das funções

---

1 Esta condição será relaxada adiante

2 Isto significa que as n_c componentes de b não correspondem necessariamente às n_c últimas componentes de u.

3 Note que a distinção entre c_k e $\bar{c}_k(k=1,\ldots,n_c)$ se faz necessária em virtude da partição $[a;b]$ não ser, obrigatoriamente, ordenada em relação a u.

$\bar{c}_k(k = 1, \ldots, n_c)$,[4] a inversibilidade da matriz

$$\left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial b}\right]$$

continua valendo sobre uma vizinhança da solução ótima;

b) Em virtude do caráter primordialmente didático do presente problema, propositadamente não se considera a possibilidade de ocorrência de quinas. Posteriormente a existência de quinas será levada em consideração.

5.2.3 - CONDIÇÕES NECESSÁRIAS

Para o enunciado das condições necessárias para a solução do problema (5.2), considere a definição seguinte:

DEFINIÇÃO 5.1: (Mínimo Local para o Problema 5.2)

Diz-se que

$$(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, p)$$

fornece um mínimo local para o problema (5.2), *e particularmente, que* $u(\cdot)$ *representa um controle localmente ótimo, quando existir um* ϵ *positivo, não importa quão pequeno ele seja, tal que*

$$h_0[y(\tau_0); y(\tau_1); \tau_0; \tau_1; q] \geq h_0[x(t_0); x(t_1); t_0; t_1; p], \tag{5.3}$$

para todo $(y(\cdot), v(\cdot), \tau_0, \tau_1, q)$ *tal que:*

I: $y_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ *e* $v_j(\cdot)(j = 1, \ldots, n_u)$ *satisfazem às condições de regularidade impostas a* $x_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ *e* $u_j(\cdot)(j = 1, \ldots, n_u)$, *respectivamente.*

II:

$$(y(\cdot), v(\cdot), \tau_0, \tau_1, q)$$

satisfaz as restrições (5.2*b*)–(5.2*d*), *quando em substituição a*

$$(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, p),$$

com $\quad \tau_e \in \delta_e(e = 0, 1); \quad q \in Q; \quad y(\tau) \in Y, \ \tau \in [\tau_0, \tau_1]; \quad$ *e* $\quad v(\tau) \in V, \ \tau \in [\tau_0, \tau_1].$

[4] **Naturalmente, as condições de regularidade de $\bar{c}_k$ são as mesmas de c_k.**

III:

$$\sum_{e=0}^{1}|\tau_e - t_e| + |q-p| + |y(\tau_0) - x(t_0)| + \int_{\tau_0}^{\tau_1} |v(\tau) - w(\tau)|d\tau < \epsilon$$

onde $w(\cdot)$ representa uma função fixa que possui as seguintes propriedades:

i: $w(\cdot)$ *é contínua para todo* $\tau \in I_1 \triangleq \{[t_0, t_1] \cup \delta_0 \cup \delta_1\}$;

ii: $w(\tau) \in V$ *para* $\tau \in I_1$;

iii: para $\tau \in [t_0, t_1]$, $w(\cdot)$ *coincide com* $u(\cdot)$.

Com base na Definição 5.1, considere o seguinte teorema de condições necessárias :

TEOREMA 5.1 :

Respeitadas as hipóteses H16–H20, para que

$$(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, p)$$

forneça um mínimo local para o problema (5.2), *devem existir multiplicadores*

$$\nu_0, \qquad \nu \triangleq [\nu_1; \ldots; \nu_{n_h}]',$$

e funções vetoriais

$$\lambda(\cdot) \triangleq [\lambda_1(\cdot); \ldots; \lambda_{n_x}(\cdot)]';$$

$$\mu(\cdot) \triangleq [\mu_1(\cdot); \ldots; \mu_{n_c}(\cdot)]';$$

tais que se verifiquem:

I:

$$\nu_0 + |\nu| \neq 0, \qquad \nu_0 \in \{0, 1\}; \tag{5.4a}$$

II: $\lambda_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ *são funções contínuas para todo* $\tau \in [t_0, t_1]$, *com:*

$$\dot{\lambda}(\tau) = -\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]' \lambda(\tau) - \left[\frac{\partial c}{\partial x}\right]' \mu(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{5.4b}$$

$$\lambda(t_0) = \sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_0)}\right]'; \tag{5.4c}$$

$$\lambda(t_1) = -\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_1)}\right]'; \tag{5.4d}$$

III:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]'\lambda(\tau)+\left[\frac{\partial c}{\partial u}\right]'\mu(\tau)=0,\quad \tau\in[t_0,t_1]; \tag{5.4e}$$

IV:

$$\sum_{j=0}^{n_h}\nu_j\left[\frac{\partial h_j}{\partial p}\right]'=0; \tag{5.4f}$$

V:

$$\sum_{j=0}^{n_h}\nu_j\left\{\left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_0)}\right]\dot{x}(t_0)+\frac{\partial h_j}{\partial t_0}\right\}=0; \tag{5.4g}$$

$$\sum_{j=0}^{n_h}\nu_j\left\{\left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_1)}\right]\dot{x}(t_1)+\frac{\partial h_j}{\partial t_1}\right\}=0. \tag{5.4h}$$

5.2.4 - PROVA DAS CONDIÇÕES NECESSÁRIAS

Considerando a inversibilidade da matriz

$$\left[\frac{\partial\bar{c}}{\partial b}\right],$$

para $\tau\in[t_0,t_1]$, e o fato de serem as funções $\bar{c}_j\,(j=1,\ldots,n_c)$ de classe C^1, no domínio considerado, podemos recorrer ao Teorema A.1 para afirmarmos a existência de funções

$$\beta_k=B_k[y;\alpha;\rho],\qquad k=1,\ldots,n_c; \tag{5.5a}$$

para todo $(y;\alpha;\rho)$ pertencente a uma vizinhança $\Omega(\tau)$ em torno de $(x(\tau);a(\tau);\tau)$, tais que

$$\bar{c}_k[y;\alpha;\beta;\rho]=0,\qquad k=1,\ldots,n_c. \tag{5.5b}$$

O Teorema A.1 garante ainda que as funções B_k são também de classe C^1, e que dentro de uma vizinhança em torno de

$$(x;a;\tau)=(x(\tau);a(\tau);\tau),$$

teremos

$$\bar{c}[x;a;B[x;a;\tau];\tau]=0, \tag{5.5c}$$

$$B\triangleq[B_1(\cdot);\ldots;B_{n_c}(\cdot)]',$$

se, e somente se,

$$B_k[x;a;\tau]=b_k,\qquad k=1,\ldots,n_c. \tag{5.5d}$$

Naturalmente o teorema se aplica para todo

$$(x; a; \tau)$$

sobre a solução, de maneira que temos

$$B_k[x(\tau); a(\tau); \tau] = b_k(\tau), \qquad k = 1, \ldots, n_c; \tag{5.5e}$$

para todo $\tau \in [t_0, t_1]$, o que garante a satisfação de (5.2c).

Considerando as equações (5.5), podemos reescrever o problema (5.2) como:

Encontrar valores ótimos para

$$(y(\cdot), v(\cdot), \tau_0, \tau_1, q),$$

a saber,

$$(x(\cdot), a(\cdot), t_0, t_1, p),$$

de modo que

$$h_0[x(t_0); x(t_1); t_0; t_1; p] \tag{5.6a}$$

seja um mínimo, com

$$h_i[x(t_0); x(t_1); t_0; t_1; p] = 0, \qquad i = 1, \ldots, n_h; \tag{5.6b}$$

e

$$\dot{x}(\tau) = F[x(\tau); a(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_0, t_1] \tag{5.6c}$$

onde

$$t_e \in \delta_e \subset E^1, e = 0, 1;$$

$$p \in Q \subset E^{n_p};$$

$$x(\tau) \in Y \subset E^{n_x};$$

e

$$a(\tau) \in U_a \subset E^{n_a};$$

sendo

$$F_i[x(\tau); a(\tau); \tau] \triangleq \bar{f}_i\Big[x(\tau); a(\tau); B[x(\tau); a(\tau); \tau]; \tau\Big], \qquad i = 1, \ldots, n_x; \tag{5.6d}$$

onde

$$\bar{f}_i[x(\tau); a(\tau); b(\tau); \tau] \triangleq f_i[x(\tau); u(\tau); \tau] \tag{5.6e}$$

ou seja, as funções $F_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ são obtidas substituindo-se $b(\cdot)$ pelas funções $B(\cdot)$ em $f_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$.

Como consequência das hipóteses H17–H19, e da regularidade das funções $B_k(\cdot)(k = 1, \ldots, n_c)$, são verificadas as seguintes propriedades:

i: As funções $x_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ e $a_j(\cdot)(j = 1, \ldots, n_a)$ são contínuas para todo $\tau \in [t_0, t_1]$;

ii: As funções $h_i(i = 0, 1, \ldots, n_h)$, $F_j(j = 1, \ldots, n_x)$, e suas derivadas parciais primeiras, são contínuas em relação a todos os seus argumentos.

À luz dos fatos anteriores, e das Definições 3.1 e 5.1 , é fácil reconhecer que, para que $(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, p)$ forneça um um mínimo local para o problema (5.2), é necessário que $(x(\cdot), a(\cdot), t_0, t_1, p)$ forneça um mínimo local para o problema (5.6). Além disso, as propriedades acima, juntamente com a hipóteses H16, garantem a aplicabilidade do Teorema 3.1. Ou seja, podemos afirmar que, para que

$$(x(\cdot), a(\cdot), t_0, t_1, p)$$

seja uma solução para o problema (5.6), devem existir multiplicadores

$$\nu_0, \qquad \nu \triangleq [\nu_1; \ldots; \nu_{n_h}]',$$

e uma função vetorial

$$\lambda(\cdot) \triangleq [\lambda_1(\cdot); \ldots; \lambda_{n_x}(\cdot)]',$$

tais que se verifiquem:

I:

$$\nu_0 + |\nu| \neq 0, \qquad \nu_0 \in \{0, 1\}; \tag{5.7a}$$

II: $\lambda(\cdot)$ é a solução contínua de

$$\dot{\lambda}(\tau) = -\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]' \lambda(\tau), \quad \tau \in (t_0, t_1); \tag{5.7b}$$

com

$$\lambda(t_0) = \sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left[\frac{\partial h_i}{\partial x(t_0)}\right]'; \tag{5.7c}$$

$$\lambda(t_1) = -\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left[\frac{\partial h_i}{\partial x(t_1)}\right]'; \tag{5.7d}$$

III:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial a}\right]' \lambda(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{5.7e}$$

IV:

$$\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left[\frac{\partial h_i}{\partial p}\right]' = 0; \tag{5.7f}$$

V:

$$\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left\{ \left[\frac{\partial h_i}{\partial x(t_0)}\right] \dot{x}(t_0) + \frac{\partial h_i}{\partial t_0} \right\} = 0; \tag{5.7g}$$

$$\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left\{ \left[\frac{\partial h_i}{\partial x(t_1)}\right] \dot{x}(t_1) + \frac{\partial h_i}{\partial t_1} \right\} = 0. \tag{5.7h}$$

Agora, afim de efetuarmos algumas manipulações nas equações (5.7), definamos a função vetorial

$$\mu(\cdot) \triangleq [\mu_1(\cdot); \ldots; \mu_{n_c}(\cdot)]',$$

como sendo a solução única de

$$\left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial b}\right]' \lambda(\tau) + \left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial b}\right]' \mu(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]. \tag{5.8}$$

A inversibilidade da matriz

$$\left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial b}\right]$$

garante a existência e unicidade de $\mu(\cdot)$ como solução de (5.8), sendo $\mu(\cdot)$, pela regularidade das demais funções envolvidas em (5.8), contínuas sobre todo o intervalo $[t_0, t_1]$.

De (5.6d) tiramos que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + \left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial b}\right]\left[\frac{\partial B}{\partial x}\right]; \tag{5.9a}$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial a} + \left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial b}\right]\left[\frac{\partial B}{\partial a}\right]; \tag{5.9b}$$

o que, levado a (5.7b) e (5.7e) fornece

$$\dot{\lambda}(\tau) = -\left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right]' \lambda(\tau) - \left[\frac{\partial B}{\partial x}\right]' \left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial b}\right]' \lambda(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{5.10a}$$

e

$$\left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial a}\right]' \lambda(\tau) + \left[\frac{\partial B}{\partial a}\right]' \left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial b}\right]' \lambda(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]. \tag{5.10b}$$

Substituindo em (5.10a) e (5.10b) o valor de

$$\left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial b}\right]' \lambda(\tau)$$

fornecido por (5.8), encontramos

$$\dot{\lambda}(\tau) = -\left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right]' \lambda(\tau) + \left[\frac{\partial B}{\partial x}\right]' \left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial x}\right]' \mu(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{5.11a}$$

e

$$\left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial a}\right]' \lambda(\tau) - \left[\frac{\partial B}{\partial a}\right]' \left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial b}\right]' \mu(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]. \tag{5.11b}$$

Por outro lado, com base nas equações (5.5a) e (5.5b), deduzimos:

$$d\beta = \left[\frac{\partial B}{\partial y}\right] dy + \left[\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right] d\alpha + \left[\frac{\partial B}{\partial \rho}\right] d\rho \tag{5.12a}$$

e

$$d\bar{c} = \left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial y}\right] dy + \left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial \alpha}\right] d\alpha + \left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial \beta}\right] d\beta + \left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial \rho}\right] d\rho. \tag{5.12b}$$

A substituição de (5.12a) em (5.12b) leva a

$$\begin{aligned} d\bar{c} = &\left\{\left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial y}\right] + \left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial \beta}\right]\left[\frac{\partial B}{\partial y}\right]\right\} dy + \left\{\left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial \alpha}\right] + \left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial \beta}\right]\left[\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right]\right\} d\alpha + \\ &+ \left\{\left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial \rho}\right] + \left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial \beta}\right]\left[\frac{\partial B}{\partial \rho}\right]\right\} d\rho \end{aligned} \tag{5.13}$$

Ora, devido a (5.5b) devemos ter

$$d\bar{c} = 0, \tag{5.14a}$$

o que, de acordo com (5.13), implica em

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial y} = -\left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial \beta}\right]\left[\frac{\partial B}{\partial y}\right]; \tag{5.14b}$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \alpha} = -\left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial \beta}\right]\left[\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right]; \tag{5.14c}$$

e

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \rho} = -\left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial \beta}\right]\left[\frac{\partial B}{\partial \rho}\right]. \tag{5.14d}$$

As condições (5.14) valem para todo

$$(y, \alpha, \rho) \in \Omega(\tau),$$

e em particular para

$$(y, \alpha, \rho) = (\boldsymbol{x}(\tau); \boldsymbol{a}(\tau); \tau).$$

Além disso, este fato se verifica para qualquer $\tau \in [t_0, t_1]$, o que nos permite concluir que, para todo $\tau \in [t_0, t_1]$, vale:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = -\left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial b}\right]\left[\frac{\partial B}{\partial x}\right]; \tag{5.15a}$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial a} = -\left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial b}\right]\left[\frac{\partial B}{\partial a}\right]; \tag{5.15b}$$

e

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \tau} = -\left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial b}\right]\left[\frac{\partial B}{\partial \tau}\right]. \tag{5.15c}$$

A subtituição de (5.15a) e (5.15b) em (5.11a) e (5.11b) respectivamente, fornece

$$\dot{\lambda}(\tau) = -\left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right]'\lambda(\tau) - \left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial x}\right]'\mu(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1] \tag{5.16a}$$

e

$$\left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial a}\right]'\lambda(\tau) + \left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial a}\right]'\mu(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]. \tag{5.16b}$$

As equações (5.8) e (5.16b) podem ser reunidas para fornecer

$$\left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}}\right]'\lambda(\tau) + \left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{u}}\right]'\mu(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1], \tag{5.17}$$

onde, conforme a hipótese H20,

$$\bar{u}(\cdot) = [a(\cdot); b(\cdot)]'.$$

Reagrupando as variáveis de controle segundo o vetor de controle $u(\cdot)$, e rearranjando as equações (5.17) por linhas, obtemos

$$\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]'\lambda(\tau) + \left[\frac{\partial c}{\partial u}\right]'\mu(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]. \tag{5.18}$$

Por outro lado, como

$$\left.\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right|_{(x;\bar{u};\tau)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x;u;\tau)}, \tag{5.19a}$$

e

$$\left.\frac{\partial \bar{c}}{\partial x}\right|_{(x;\bar{u};\tau)} = \left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{(x;u;\tau)}, \tag{5.19b}$$

podemos escrever no lugar de (5.16a),

$$\dot{\lambda}(\tau) = -\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]'\lambda(\tau) - \left[\frac{\partial c}{\partial x}\right]'\mu(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1]. \tag{5.20}$$

A substituição das equações (5.7b) e (5.7e) por (5.20) e (5.18), respectivamente, completa a prova do Teorema 5.1.

5.3 - PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO COM VÍNCULOS DE CONTORNO MÚLTIPLO E RESTRIÇÕES NÃO-DIFERENCIAIS

Neste item associa-se idéias utilizadas nos capítulos anteriores, com aquelas do item precedente, para deduzir condições necessárias para um problema que prevê a presença simultânea de restrições não-diferenciais, como aquelas tratadas no item anterior, e restrições de contorno múltiplo, como aquelas tratadas no Capítulo 4.

5.3.1 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere, desta vez, o seguinte problema de controle ótimo:

Encontrar valores ótimos para

$$(y(\cdot), v(\cdot), \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{N+1}, q),$$

a saber,

$$(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}, p),$$

de modo que

$$h_0[x(t_0); x(t_1); x^+(t_1); \ldots; x(t_N); x^+(t_N); x(t_{N+1}); t_0; t_1; \ldots; t_{N+1}; p] \qquad (5.21a)$$

corresponda a um mínimo, com:

$$h_i[x(t_0); x(t_1); x^+(t_1); \ldots; x(t_N); x^+(t_N); x(t_{N+1}); t_0; t_1; \ldots; t_{N+1}; p] = 0,$$

$$i = 1, \ldots, n_h; \qquad (5.21b)$$

$$c_k[x(\tau); u(\tau); \tau] = 0, \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}], \qquad k = 1, \ldots, n_c; \qquad (5.21c)$$

e

$$\dot{x}(\tau) = f[x(\tau); u(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}]; \qquad (5.21d)$$

onde,

$$t_e \in \delta_e \subset E^1, \qquad e = 0, 1, \ldots, N+1;$$

$$p \in Q \subset E^{n_p};$$

$$x(\tau) \in Y \subset E^{n_x}, \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}];$$

$$u(\tau) \in V \subset E^{n_u}, \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}];$$

$$h_i : E^{(2N+2)n_x} \times E^{(2N+2)} \times E^{n_p} \longmapsto E^1, \qquad i = 0, 1, \ldots, n_h;$$

$$c_k : E^{n_x} \times E^{n_u} \times E^1 \longmapsto E^1, \qquad k = 1, \ldots, n_c;$$

$$f \triangleq [f_1; \ldots; f_{n_x}]' : E^{n_x} \times E^{n_u} \times E^1 \longmapsto E^{n_x};$$

sendo $\delta_e(e = 0, 1, \ldots, N+1)$, Q, Y e V conjuntos abertos.

As condições de regularidade para as variáveis $x(\cdot)$, $u(\cdot)$, e para as funções $h_i(i = 0, 1, \ldots, n_h)$, $c_k(k = 1, \ldots, n_c)$ e $f_j(j = 1, \ldots, n_x)$ serão inseridas dentro do conjunto de hipóteses que será anunciado a seguir.

5.3.2 - HIPÓTESES

Para a dedução de condições necessárias para o problema (5.21) serão consideradas as seguintes hipóteses:

H21: Os instantes $t_e(e = 0, 1, \ldots, N+1)$ devem ser não coincidentes, dois a dois, e satisfazer as desigualdades

$$t_0 < t_e < t_{N+1}, \qquad e = 1, \ldots, N;$$

H22: $x_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ devem ser funções contínuas para todo

$$\tau \in [t_0, t_{N+1}], \quad \tau \notin \left\{t_1, \ldots, t_N\right\};$$

com

$$x(t_0) = x^+(t_0);$$

$$x(t_e) = x^-(t_e), \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

H23: $u_j(\cdot)(j = 1, \ldots, n_u)$ devem ser funções contínuas por partes para todo

$$\tau \in [t_0, t_{N+1}], \quad \tau \notin \left\{t_1, \ldots, t_N\right\};$$

com

$$u(t_0) = u^+(t_0);$$

$$u(t_e) = u^-(t_e), \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

H24: As funções $h_i(i = 0, 1, \ldots, n_h)$, $f_j(j = 1, \ldots, n_x)$, $c_k(k = 1, \ldots, n_c)$, e suas derivadas parciais primeiras, são todas contínuas em relação a todos os seus argumentos, nos domínios considerados;

H25: A matriz de derivadas parciais

$$\left[\frac{\partial c}{\partial u}\right], \qquad \left\{\frac{\partial c}{\partial u}\right\}_{i,j} \triangleq \frac{\partial c_i}{\partial u_j} \qquad (i = 1, \ldots, n_c; j = 1, \ldots, n_u)$$

avaliada sobre a solução $(x(\cdot), u(\cdot))$, tem posto n_c, para $\tau \in [t_0, t_{N+1}]$.

5.3.3 - CONDIÇÕES NECESSÁRIAS

Para o enunciado das condições necessárias para a solução do problema (5.21), considere a seguinte definição :

DEFINIÇÃO 5.2: (Mínimo Local para o Problema 5.21)

Diz-se que

$$(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}, p)$$

fornece um mínimo local para o problema (5.21), *e particularmente, que* $u(\cdot)$ *representa um controle localmente ótimo, quando existir um* ϵ *positivo, não importa quão pequeno ele seja, tal que*

$$h_0[y(\tau_0); y(\tau_1); y^+(\tau_1); \ldots; y(\tau_N); y^+(\tau_N); y(\tau_{N+1}); \tau_0; \tau_1; \ldots; \tau_{N+1}; q] \geq$$
$$h_0[x(t_0); x(t_1); x^+(t_1); \ldots; x(t_N); x^+(t_N); x(t_{N+1}); t_0; t_1; \ldots; t_{N+1}; p], \qquad (5.22)$$

para todo $(y(\cdot), v(\cdot), \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{N+1}, q)$ *tal que:*

I: $y_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ *e* $v_j(\cdot)(j = 1, \ldots, n_u)$ *satisfazem às condições de regularidade impostas a* $x_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ *e* $u_j(\cdot)(j = 1, \ldots, n_u)$, *respectivamente.*

II:

$$(y(\cdot), v(\cdot), \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{N+1}, q)$$

satisfaz as restrições (5.21b), (5.21c) e (5.21d), quando em substituição a

$$(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}, p),$$

com $\tau_e \in \delta_e (e = 0, 1, \ldots, N+1)$; $q \in Q$; $y(\tau) \in Y$, $\tau \in [\tau_0, \tau_{N+1}]$; *e* $v(\tau) \in V$, $\tau \in [\tau_0, \tau_{N+1}]$.

III:

$$\sum_{e=0}^{N+1} |\tau_e - t_e| + |q - p| + |y(\tau_0) - x(t_0)| + \sum_{e=1}^{N} |y^+(\tau_e) - x^+(t_e)| + \int_{\tau_0}^{\tau_{N+1}} |v(\tau) - w(\tau)| d\tau < \epsilon$$

onde $w(\cdot)$ representa uma função fixa que possui as seguintes propriedades:

i: *$w(\cdot)$ é contínua por partes para todo* $\tau \in I_T \triangleq \{[t_0, t_{N+1}] \cup \delta_0 \cup \delta_1 \ldots \cup \delta_{N+1}\}$;

ii: $w(\tau) \in V$ *para* $\tau \in I_T$;

iii: *para* $\tau \in [t_0, t_{N+1}]$, *$w(\cdot)$ coincide com $u(\cdot)$.*

Tendo como referência a Definição 5.2, considere o seguinte teorema de condições necessárias:

TEOREMA 5.2 :

Respeitadas as hipóteses H21–H25, para que

$$(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}, p)$$

forneça um mínimo local para o problema (5.21), devem existir multiplicadores

$$\nu_0, \qquad \nu \triangleq [\nu_1; \ldots; \nu_{n_h}]',$$

e funções vetoriais

$$\lambda(\cdot) \triangleq [\lambda_1(\cdot); \ldots; \lambda_{n_x}(\cdot)]',$$

$$\mu(\cdot) \triangleq [\mu_1(\cdot); \ldots; \mu_{n_c}(\cdot)]',$$

tais que se verifiquem:

I:

$$\nu_0 + |\nu| \neq 0, \qquad \nu_0 \in \{0, 1\}; \tag{5.23a}$$

II: $\lambda_i(\cdot)(i=1,\ldots,n_x)$ *são funções contínuas para todo*

$$\tau \in [t_0, t_{N+1}], \quad \tau \notin \left\{t_1, \ldots, t_N\right\};$$

com:

$$\dot{\lambda}(\tau) = -\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]' \lambda(\tau) - \left[\frac{\partial c}{\partial x}\right]' \mu(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}]; \tag{5.23b}$$

$$\lambda(t_0) = \sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_0)}\right]'; \tag{5.23c}$$

$$\lambda(t_e) = -\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_e)}\right]', \qquad e = 1, \ldots, N; \tag{5.23d}$$

$$\lambda^+(t_e) = \sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left[\frac{\partial h_j}{\partial x^+(t_e)}\right]', \qquad e = 1, \ldots, N; \tag{5.23e}$$

$$\lambda(t_{N+1}) = -\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_{N+1})}\right]'; \tag{5.23f}$$

III:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]' \lambda(\tau) + \left[\frac{\partial c}{\partial u}\right]' \mu(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}]; \tag{5.23g}$$

IV:

$$\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left[\frac{\partial h_j}{\partial p}\right]' = 0; \tag{5.23h}$$

V: A função

$$H \triangleq \sum_{i=1}^{n_x} \lambda_i(\tau) \dot{x}_i(\tau), \tag{5.23i}$$

é contínua para

$$\tau \in [t_0, t_{N+1}], \quad \tau \notin \left\{t_1, \ldots, t_N\right\};$$

$$\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left\{ \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_0)}\right] \dot{x}(t_0) + \frac{\partial h_j}{\partial t_0} \right\} = 0; \tag{5.23j}$$

$$\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left\{ \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_e)}\right] \dot{x}(t_e) + \left[\frac{\partial h_j}{\partial x^+(t_e)}\right] \dot{x}^+(t_e) + \frac{\partial h_j}{\partial t_e} \right\} = 0, \qquad e = 1, \ldots, N; \tag{5.23k}$$

$$\sum_{j=0}^{n_h} \nu_j \left\{ \left[\frac{\partial h_j}{\partial x(t_{N+1})}\right] \dot{x}(t_{N+1}) + \frac{\partial h_j}{\partial t_{N+1}} \right\} = 0. \tag{5.23l}$$

5.3.4 - PROVA DAS CONDIÇÕES NECESSÁRIAS

A demonstração do Teorema 5.2 se faz as custas da reunião dos mecanismos utilizados nas provas anteriores, acrescidos de pequenas extensões que aqui se fazem necessárias.

O primeiro passo a ser dado consiste em verificar a possibilidade de, para um dado instante τ, se definir um vetor de controle rearranjado, a saber

$$\bar{u}(\tau) \triangleq [\bar{u}_1(\tau); \ldots; \bar{u}_{n_u}(\tau)]', \tag{5.24a}$$

com

$$\bar{c}_k[x(\tau); \bar{u}(\tau); \tau] \triangleq c_k[x(\tau); u(\tau); \tau], \qquad k = 1, \ldots, n_c; \tag{5.24b}$$

tal que $\bar{u}(\tau)$ possa ser particionado na forma

$$\bar{u}(\tau) \triangleq [a(\tau), b(\tau)]' \tag{5.24c}$$

onde

$$a(\tau) \triangleq [\bar{u}_1(\tau); \ldots; \bar{u}_{n_a}(\tau)]', \tag{5.24d}$$

$$b(\tau) \triangleq [\bar{u}_{n_a+1}(\tau); \ldots; \bar{u}_{n_u}(\tau)]', \tag{5.24e}$$

com

$$n_a + n_b = n_u; \tag{5.24f}$$

$$n_b = n_c; \tag{5.24g}$$

e de modo que a matriz de derivadas parciais

$$\left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial b}\right], \qquad \left\{\frac{\partial \bar{c}}{\partial b}\right\}_{i,j} \triangleq \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial b_j} \quad (i, j = 1, \ldots, n_c) \tag{5.24h}$$

seja inversível.

Naturalmente, a hipótese H25 garante a existência de particionamentos $\bar{u}(\tau)$ para todo $\tau \in [t_0, t_{N+1}]$. Entretanto, a hipótese H25 não nos garante que exista um rearranjamento único $\bar{u}(\tau)$ aplicável para todo $\tau \in [t_0, t_{N+1}]$. De fato, pela hipótese H25, $b(\tau)$ não necessita ser composto pelas mesmas componentes de $u(\tau)$ para valores distintos de τ. Isto nos obriga a prever rearranjamentos diferentes de $u(\tau)$ sobre sub-intervalos de tempo distintos, contidos em $[t_0, t_{N+1}]$.

Por causa disto adotaremos aqui um fracionamento do problema (5.21) que subentende uma conceituação de instantes de quina implícita um pouco diferente daquela adotada anteriormente. Assim é que convidamos o leitor a verificar a veracidade da seguinte afirmativa:

Para o problema (5.21), respeitadas as hipóteses H21–H25, existe um conjunto ordenado de instantes

$$\left\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{M+1}\right\},$$

tal que

$$\xi_e \in \left\{t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}\right\} \cup \left\{t'_1, \ldots, t'_{N'}\right\}, \qquad e = 0, 1, \ldots, M+1; \tag{5.25a}$$

$$\xi_0 \triangleq t_0; \tag{5.25b}$$

$$\xi_{M+1} \triangleq t_{N+1}; \tag{5.25c}$$

$$\xi_{e-1} < \xi_e, \qquad e = 1, \ldots, M+1; \quad (M = N + N') \tag{5.25d}$$

e tal que valem as seguintes propriedades:

i: $x_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ são funções contínuas para todo

$$\tau \in (\xi_{e-1}, \xi_e), \qquad e = 1, \ldots, M+1;$$

$$x(\xi_0) = x^+(\xi_0); \tag{5.26a}$$

$$x(\xi_e) = x^-(\xi_e), \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{5.26b}$$

$$x(\xi_e) = x^+(\xi_e), \qquad \text{para} \quad \xi_e \in \left\{t'_1, \ldots, t'_{N'}\right\}; \tag{5.26c}$$

ii: $u_j(\cdot)(j = 1, \ldots, n_u)$ são funções contínuas para

$$\tau \in (\xi_{e-1}, \xi_e), \qquad e = 1, \ldots, M+1;$$

$$u(\xi_0) = u^+(\xi_0); \tag{5.27a}$$

$$u(\xi_e) = u^-(\xi_e), \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{5.27b}$$

iii: Para cada valor de e, $e = 1, \ldots, M+1$, existe um particionamento do vetor de controle, não necessariamente ordenado,

$$\bar{u}^e(\cdot) \triangleq [a^e(\cdot); b^e(\cdot)]', \tag{5.28a}$$

$$n_{b^e} = n_b = n_c;$$

tal que a matriz de derivadas parciais

$$\left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial b^e}\right], \qquad \left\{\frac{\partial \bar{c}}{\partial b^e}\right\}_{i,j} \triangleq \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial b^e_j} \quad (i, j = 1, \ldots, n_c); \tag{5.28b}$$

seja inversível para todo

$$\tau \in [\xi_0, \xi_1], \qquad \text{se} \quad e = 1,$$

$$\tau \in (\xi_{e-1}, \xi_e], \qquad \text{se} \quad e > 1.$$

Devemos notar que sobre os instantes de quina implícita, aqui representados pelo conjunto

$$\left\{t'_1, \ldots, t'_{N'}\right\},$$

o vetor de controle sofre descontinuidade, podendo, eventualmente, ocorrer também alteração no seu particionamento.

Com estas considerações estamos aptos a reenunciar o problema (5.21) na seguinte forma fracionada:

Encontrar valores ótimos para

$$(y^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1); v^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1); \tau_0; \tau_1; \ldots; \tau_{M+1}; q),$$

a saber,

$$(x^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1); u^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1); \xi_0; \xi_1; \ldots; \xi_{M+1}; p),$$

tais que

$$\bar{h}_0[x^1(\xi_0); x^1(\xi_1); \ldots; x^{M+1}(\xi_M); x^{M+1}(\xi_{M+1}); \xi_0; \xi_1; \ldots; \xi_{M+1}; p] \tag{5.29a}$$

seja um mínimo, com

$$\bar{h}_i[x^1(\xi_0); x^1(\xi_1); \ldots; x^{M+1}(\xi_M); x^{M+1}(\xi_{M+1}); \xi_0; \xi_1; \ldots; \xi_{M+1}; p] = 0,$$

$$i = 1, \ldots, n_{\bar{h}}; \tag{5.29b}$$

$$\bar{c}^e_k[x^e(\tau); \bar{u}^e(\tau); \tau] = 0, \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \qquad k = 1, \ldots, n_c; \quad e = 1, \ldots, M+1; \tag{5.29c}$$

e

$$\dot{x}^e(\tau) = \bar{f}^e[x^e(\tau); \bar{u}^e(\tau); \tau], \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{5.29d}$$

onde

$$x^e(\tau) \triangleq \begin{cases} x(\tau), & \tau \in (\xi_{e-1}, \xi_e] \\ x^+(\tau), & \tau = \xi_{e-1} \end{cases} \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{5.29e}$$

$$\bar{u}^e(\tau) \triangleq \begin{cases} \bar{u}(\tau), & \tau \in (\xi_{e-1}, \xi_e] \\ \bar{u}^+(\tau), & \tau = \xi_{e-1} \end{cases} \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{5.29f}$$

$$\bar{h}_i(\cdot) \triangleq h_i(\cdot), \qquad i = 0, 1, \ldots, n_h; \tag{5.29g}$$

$$\bar{h}_i(\cdot) \triangleq x_k^{e+1}(\xi_e) - x_k^e(\xi_e),$$

$$\text{para} \qquad i = n_h + n_x(j-1) + k; \quad k = 1, \ldots, n_x; \qquad \xi_e = t'_j(j = 1, \ldots, N'); \tag{5.29h}$$

$$\bar{c}_k^e[x^e(\tau); \bar{u}^e(\tau); \tau] \triangleq c_k[x(\tau); u(\tau); \tau], \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e]; \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{5.29i}$$

$$\bar{f}_k^e[x^e(\tau); \bar{u}^e(\tau); \tau] \triangleq f_k[x(\tau); u(\tau); \tau], \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e]; \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{5.29j}$$

$$\xi_e \in \bar{\delta}_e \subset E^1, \qquad e = 0, 1, \ldots, M+1;$$

$$x^e(\tau) \in Y \subset E^{n_x}, \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1;$$

$$\bar{u}^e(\tau) \in V \subset E^{n_u}, \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1;$$

$$p \in Q \subset E^{n_p};$$

sendo $\bar{\delta}_e(e = 0, 1, \ldots, M+1)$, Y, V e Q, conjuntos abertos.[5]

Para a definição dos conjuntos $\bar{\delta}_e(e = 0, 1, \ldots, M+1)$, o leitor deve seguir a mesma orientação do item 4.3.

Considerando a inversibilidade das matrizes

$$\left[\frac{\partial \bar{c}^e}{\partial b^e}\right], \qquad e = 1, \ldots, M+1;$$

garantida pela propriedade (iii) anterior, e o fato de serem as funções $\bar{c}_j^e(j = 1, \ldots, n_c; e = 1, \ldots, M+1)$ de classe C^1, nos domínios considerados, de forma análoga a do item 5.2, podemos mais uma vez recorrer ao Teorema A.1 para afirmarmos a existência,

$$\text{para} \quad e = 1, \ldots, M+1,$$

de funções

$$\beta_k^e = B_k^e[y^e; \alpha^e; \rho], \tag{5.30a}$$

definidas para todo $(y^e; \alpha^e; \rho)$ pertencente a uma vizinhança de $(x^e(\tau); a^e(\tau); \tau)$, tais que

$$\bar{c}_k^e[y^e; \alpha^e; \beta^e; \rho] = 0, \qquad k = 1, \ldots, n_c. \tag{5.30b}$$

O Teorema A.1 garante que as funções $B_k^e(k = 1, \ldots, n_c)$ são também de classe C^1, e estabelece ainda que, dentro de uma vizinhança em torno de

$$(x^e; a^e; \tau) = (x^e(\tau); a^e(\tau); \tau),$$

[5] Convidamos o leitor a notar que o desenvolvimento feito aqui se aplica, com ligeiras adaptações, a problemas com dinâmica fracionada. Aqui em particular temos, para $e = 1, \ldots, M+1$; $\bar{f}_i^e = \bar{f}_i(i = 1, \ldots, n_x)$ e $\bar{c}_k^e = \bar{c}_k(k = 1, \ldots, n_c)$. No entanto, o desenvolvimento se aplica a situações nas quais isto não ocorre.

$$\bar{c}_k^e[x^e; a^e; B^e[x^e; a^e; \tau]; \tau] = 0, \qquad k = 1, \ldots, n_c; \tag{5.30c}$$

se, e somente se,

$$B_k^e[x^e; a^e; \tau] = b_k^e, \qquad k = 1, \ldots, n_c. \tag{5.30d}$$

A relação (5.30d) é verdadeira para todo

$$(x^e; a^e; \tau)$$

sobre a solução, de forma que temos

$$B_k^e[x^e(\tau); a^e(\tau); \tau] = b_k^e(\tau), \qquad k = 1, \ldots, n_c; \tag{5.30e}$$

$$\text{para todo} \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e].$$

Considerando as expressões (5.30) e as definições anteriores, podemos reescrever o problema (5.29) na seguinte forma:

Encontrar valores ótimos para

$$(y^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1); v^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1); \tau_0; \tau_1; \ldots; \tau_{M+1}; q),$$

a saber,

$$(x^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1); a^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1); \xi_0; \xi_1; \ldots; \xi_{M+1}; p),$$

de modo que

$$\bar{h}_0[x^1(\xi_0); x^1(\xi_1); \ldots; x^{M+1}(\xi_M); x^{M+1}(\xi_{M+1}); \xi_0; \xi_1; \ldots; \xi_{M+1}; p] \tag{5.31a}$$

seja um mínimo, com

$$\bar{h}_i[x^1(\xi_0); x^1(\xi_1); \ldots; x^{M+1}(\xi_M); x^{M+1}(\xi_{M+1}); \xi_0; \xi_1; \ldots; \xi_{M+1}; p] = 0, \quad i = 1, \ldots, n_{\bar{h}}; \tag{5.31b}$$

e

$$\dot{x}^e(\tau) = F^e[x^e(\tau); a^e(\tau); \tau], \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{5.31c}$$

onde

$$\xi_e \in \bar{\delta}_e \subset E, \qquad e = 0, 1, \ldots, M+1;$$

$$x^e(\tau) \in Y \subset E^{n_x}, \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1;$$

$$a^e(\tau) \in U_a \subset E^{n_a}, \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1;$$

$$p \in Q \subset E^{n_p}.$$

As funções

$$F_j^e(j=1,\ldots,n_x;\quad e=1,\ldots,M+1)$$

são obtidas substituindo-se em

$$\bar{f}_j^e(j=1,\ldots,n_x;\quad e=1,\ldots,M+1),$$

os argumentos $b^e(\tau)$ pelas funções

$$B^e[x^e(\tau);a^e(\tau);\tau] \qquad (e=1,\ldots,M+1).$$

Pedimos ao leitor observar que, em virtude das hipóteses H21–H25, das propriedades já citadas, e das condições de regularidade das funções $B_k^e(k=1,\ldots,n_c;\ e=1,\ldots,M+1)$, são verdadeiras as seguintes propriedades:

i:

$$\xi_{e-1}<\xi_e, \qquad e=1,\ldots,M+1;$$

ii: Para cada $e=1,\ldots,M+1$, as funções $x_j^e(\cdot)$ $(j=1,\ldots,n_x)$ são contínuas para todo

$$\tau\in[\xi_{e-1},\xi_e];$$

iii: Para cada $e=1,\ldots,M+1$, as funções $a_j^e(\cdot)(j=1,\ldots,n_a)$ são contínuas para todo

$$\tau\in[\xi_{e-1},\xi_e];$$

iv: As funções $\bar{h}_i(i=0,1,\ldots,n_{\bar{h}}), F_j^e(j=1,\ldots,n_x+n_a; e=1,\ldots,M+1)$, e suas derivadas parciais primeiras, estão definidas e são contínuas em relação a todos os seus argumentos, nos domínios considerados.

v: À luz da Definição 5.2 e das propriedades (i)–(iv) , e considerando as manipulações anteriores, para que

$$(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1,\ldots,t_{N+1},p)$$

forneça um mínimo local para o problema (5.21), é necessário que

$$(x^e(\cdot)(e=1,\ldots,M+1);a^e(\cdot)(e=1,\ldots,M+1);\xi_0;\xi_1;\ldots;\xi_{M+1};p)$$

forneça um mínimo local para o problema (5.31).[6]

Tendo em vista as propriedades (i)–(v) acima, com um tratamento semelhante àquele aplicado ao problema (4.30), deduzimos como condições necessárias para o problema (5.31) a existência de um vetor de multiplicadores

$$\gamma_0, \qquad \gamma \triangleq [\gamma_1; \ldots; \gamma_{n_{\bar{h}}}]'$$

e funções vetoriais

$$\lambda^e(\cdot) \triangleq [\lambda_1(\cdot); \ldots; \lambda_{n_x}(\cdot)]', \qquad e = 1, \ldots, M+1;$$

tais que se verifiquem:

I:

$$\gamma_0 + |\gamma| \neq 0, \qquad \gamma_0 \in \{0, 1\}; \tag{5.32a}$$

II: $\lambda_i^e(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x; e = 1, \ldots, M+1)$ são funções contínuas para todo

$$\tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e],$$

com:

$$\dot{\lambda}^e(\tau) = -\left[\frac{\partial F^e}{\partial x^e}\right]' \lambda^e(\tau), \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{5.32b}$$

$$\lambda^e(\xi_{e+1}) = \sum_{j=0}^{n_{\bar{h}}} \gamma_j \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x^e(\xi_{e-1})}\right]', \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{5.32c}$$

$$\lambda^e(\xi_e) = -\sum_{j=0}^{n_{\bar{h}}} \gamma_j \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x^e(\xi_e)}\right]', \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{5.32d}$$

III:

$$\left[\frac{\partial F^e}{\partial a^e}\right]' \lambda^e(\tau) = 0, \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{5.32e}$$

IV:

$$\sum_{j=0}^{n_{\bar{h}}} \gamma_j \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial p}\right]' = 0; \tag{5.32f}$$

V:

$$\sum_{j=0}^{n_{\bar{h}}} \gamma_j \left\{ \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x^1(\xi_0)}\right] \dot{x}^1(\xi_0) + \frac{\partial \bar{h}_j}{\partial \xi_0} \right\} = 0; \tag{5.32g}$$

[6] Para a verificação da propriedade (v), se necessário, reveja os itens 4.3 e 5.2.

$$\sum_{j=0}^{n_{\bar{h}}} \gamma_j \left\{ \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x^e(\xi_e)} \right] \dot{x}^e(\xi_e) + \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x^{e+1}(\xi_e)} \right] \dot{x}^{e+1}(\xi_e) + \frac{\partial \bar{h}_j}{\partial \xi_e} \right\} = 0, \qquad e = 1, \ldots, M; \qquad (5.32h)$$

$$\sum_{j=0}^{n_{\bar{h}}} \gamma_j \left\{ \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x^{M+1}(\xi_{M+1})} \right] \dot{x}^{M+1}(\xi_{M+1}) + \frac{\partial \bar{h}_j}{\partial \xi_{M+1}} \right\} = 0. \qquad (5.32i)$$

Continuando a nossa dedução, neste ponto vamos aplicar sobre as equações (5.32) manipulações que representam uma extensão daquelas adotadas no item 5.2.

Para isto definimos as funções vetoriais

$$\mu^e(\cdot) \triangleq [\mu_1(\cdot); \ldots; \mu_{n_c}(\cdot)]', \qquad e = 1, \ldots, M+1; \qquad (5.33a)$$

como sendo as soluções das equações

$$\left[\frac{\partial \bar{c}^e}{\partial b^e} \right]' \mu^e(\tau) + \left[\frac{\partial \bar{f}^e}{\partial b^e} \right] \lambda^e(\tau) = 0, \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1; \qquad (5.33b)$$

onde

$$\left\{ \frac{\partial \bar{c}^e}{\partial b^e} \right\}_{i,j} \triangleq \frac{\partial \bar{c}_i^e}{\partial b_j^e} \quad (i, j = 1, \ldots, c); \qquad (5.33c)$$

e

$$\left\{ \frac{\partial \bar{f}^e}{\partial b^e} \right\}_{i,j} \triangleq \frac{\partial \bar{f}_i^e}{\partial b_j^e} \qquad (i = 1, \ldots, n_x; j = 1, \ldots, n_c). \qquad (5.33d)$$

A inversibilidade das matrizes

$$\left[\frac{\partial \bar{c}^e}{\partial b^e} \right] \qquad \text{para} \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1;$$

garante a existência e unicidade da solução correspondente a cada valor de e. Além disso, pela regularidade das demais funções envolvidas em (5.33b), $\mu^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1)$ serão contínuas para todo $\tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e]$.

Com o mesmo raciocínio que no item 5.2 forneceu as equações (5.9a) e (5.9b) obtemos:

$$\frac{\partial F^e}{\partial x^e} = \frac{\partial \bar{f}^e}{\partial a^e} + \left[\frac{\partial \bar{f}^e}{\partial b^e} \right] \left[\frac{\partial B^e}{\partial x^e} \right], \qquad e = 1, \ldots, M+1; \qquad (5.34a)$$

e

$$\frac{\partial F^e}{\partial a^e} = \frac{\partial \bar{f}^e}{\partial a^e} + \left[\frac{\partial \bar{f}^e}{\partial b^e} \right] \left[\frac{\partial B^e}{\partial a^e} \right], \qquad e = 1, \ldots, M+1. \qquad (5.34b)$$

Através de processo análogo ao da obtenção das equações (5.15), deduzimos também:

$$\left[\frac{\partial \bar{c}^e}{\partial x^e} \right] = -\left[\frac{\partial \bar{c}^e}{\partial b^e} \right] \left[\frac{\partial B^e}{\partial x^e} \right], \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1; \qquad (5.35a)$$

$$\left[\frac{\partial \bar{c}^e}{\partial a^e}\right] = -\left[\frac{\partial \bar{c}^e}{\partial b^e}\right]\left[\frac{\partial B^e}{\partial a^e}\right], \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{5.35b}$$

$$\left[\frac{\partial \bar{c}^e}{\partial \tau}\right] = -\left[\frac{\partial \bar{c}^e}{\partial b^e}\right]\left[\frac{\partial B^e}{\partial \tau}\right], \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1. \tag{5.35c}$$

Com o mesmo procedimento que no item 5.2 permitiu passar das equações (5.7*b*), (5.7*e*) e (5.8) para (5.18) e (5.20), obtemos:

$$\dot{\lambda}^e(\tau) = -\left[\frac{\partial f^e}{\partial x^e}\right]' \lambda^e(\tau) - \left[\frac{\partial c^e}{\partial x^e}\right]' \mu^e(\tau), \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{5.36a}$$

e

$$\left[\frac{\partial f^e}{\partial u^e}\right]' \lambda^e(\tau) + \left[\frac{\partial c^e}{\partial u^e}\right]' \mu^e(\tau) = 0, \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1. \tag{5.36b}$$

A montagem das equações (5.36*b*) em particular, como aconteceu na obtenção das equações (5.18), envolve rearranjamento de equações por linhas. As equações (5.36*a*) e (5.36*b*) substituem (5.32*b*), (5.32*e*) e (5.33*b*).

Aplicando raciocínio semelhante àquele que no Capítulo 4 permitiu obter as expressões (4.52) a partir das expressões (4.51), deduzimos que vale,

$$\text{para todo } e \text{ tal que } \xi_e \in \left\{t'_1, \ldots, t'_{N'}\right\}:$$

i:

$$\lambda^{e+1}(\xi_e) = \lambda^e(\xi_e); \tag{5.37a}$$

ii:

$$[\lambda^{e+1}(\xi_e)]' \dot{x}^{e+1}(\xi_e) = [\lambda^e(\xi_e)]' \dot{x}^e(\xi_e). \tag{5.37b}$$

À semelhança do Capítulo 4, pode-se verificar também, sem dificuldades, que, se tivermos

$$\gamma_j = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, n_h;$$

então (5.32*a*) é violada.

Assim, para chegarmos às expressões (5.23), devemos definir:

i: os multiplicadores

$$\nu_0, \qquad \nu \triangleq [\nu_1; \ldots; \nu_{n_h}]',$$

com a imposição

$$\nu_j = \gamma_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, n_h; \tag{5.38a}$$

ii: as funções vetoriais

$$\lambda(\cdot) \triangleq [\lambda_1(\cdot); \ldots; \lambda_{n_x}(\cdot)]';$$

e

$$\mu(\cdot) \triangleq [\mu_1(\cdot); \ldots; \mu_{n_c}(\cdot)]';$$

impondo-se:

$$\lambda(\tau) = \lambda^e(\tau), \quad \tau \in (\xi_{e-1}, \xi_e), \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{5.38b}$$

$$\lambda(t_0) = \lambda^1(t_0); \tag{5.38c}$$

$$\lambda(\tau) = \lambda^e(\xi_e), \quad \tau = \xi_e, \quad \xi_e \in \left\{\xi_1, \ldots, \xi_M\right\}; \tag{5.38d}$$

$$\lambda^+(\tau) = \lambda^{e+1}(\xi_e), \quad \tau = \xi_e, \quad \xi_e \in \left\{\xi_1, \ldots, \xi_M\right\}; \tag{5.38e}$$

$$\lambda(t_{N+1}) = \lambda^{M+1}(\xi_{M+1}); \tag{5.38f}$$

$$\mu(\tau) = \mu^e(\tau), \quad \tau \in (\xi_{e-1}, \xi_e), \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{5.38g}$$

$$\mu(t_0) = \mu^1(t_0); \tag{5.38h}$$

$$\mu(\tau) = \mu^e(\xi_e), \quad \tau = \xi_e, \quad \xi_e \in \left\{\xi_1, \ldots, \xi_M\right\}; \tag{5.38i}$$

$$\mu^+(\tau) = \mu^{e+1}(\xi_e), \quad \tau = \xi_e, \quad \xi_e \in \left\{\xi_1, \ldots, \xi_M\right\}; \tag{5.38j}$$

$$\mu(t_{N+1}) = \mu^{M+1}(\xi_{M+1}); \tag{5.38k}$$

iii: a função escalar

$$H(\tau) \triangleq \sum_{i=1}^{n_x} \lambda_i(\tau)\dot{x}_i(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}]. \tag{5.38l}$$

Feito isto, a recuperação das equações (5.23) se processa, a partir das expressões (5.38), substituindo-se os multiplicadores $\gamma_j (j = 0, 1, \ldots, n_h)$, e as funções $\lambda^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1)$ e $\mu^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1)$, pelos multiplicadores $\nu_j(j = 0, 1, \ldots, n_h)$, e pelas funções $\lambda(\cdot)$ e $\mu(\cdot)$, respectivamente. A continuidade da função vetorial $\lambda(\cdot)$, e da função escalar $H(\cdot)$,

$$\text{para todo} \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}], \quad \tau \notin \left\{t_1, \ldots, t_N\right\};$$

se estabelece às custas de (5.37a) e (5.37b).

Isto completa a prova do Teorema 5.2.

5.3.5 - COMENTÁRIOS

a) A estrutura apresentada na formulação do problema (5.21) tem maior poder de generalidade do que pode parecer à primeira vista. De fato, existem outros tipos de restrição que não estão explicitamente consideradas no problema (5.21) e que, no entanto, podem ser incorporadas a ele às custas de pequenas manipulações. No item 5.5 serão apresentados os casos mais comuns.

b) Na verdade a hipótese H25 não é de todo essencial para a validade dos resultados obtidos. De fato, existem casos nos quais, ainda que ela não se verifique, continuam a valer as condições necessárias estabelecidas pelo Teorema 5.2. A título de exemplo, uma situação onde isto ocorre é quando no conjunto de restrições não-diferenciais existem algumas que são irrelevantes — entenda-se aqui como "restrição irrelevante" aquela que é satisfeita automaticamente quando ignorada na formulação do problema — enquanto as demais formam um conjunto que satisfaz a hipótese H25.

Para entender isto, suponha que, associada ao problema (5.21), exista uma restrição adicional

$$c_{n_c+1}[x(\tau); u(\tau); \tau] = 0, \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}]; \tag{5.39}$$

do tipo irrelevante. Supor que (5.39) seja irrelevante implica em afirmar que a solução de (5.21) satisfaz automaticamente (5.39).

Consideremos agora as expressões (5.23) escritas formalmente para o problema aumentado, ou seja, para o problema (5.21) acrescido da restrição (5.39). As condições assim obtidas representam de fato condições necessárias para o problema aumentado.

Para comprovar isto, basta fazer igual a zero os multiplicadores associados a (5.39), o que formalmente equivale a ignorar a restrição (5.39) no problema aumentado. Isto proporciona a recuperação das condições necessárias para o problema (5.21), que por sua vez representam condições necessárias verdadeiras para o problema aumentado, já que, por hipótese, (5.39) é irrelevante.

5.4 - TRATAMENTO DE PROBLEMAS COM UM CONJUNTO DE RESTRIÇÕES QUE VIOLA A HIPÓTESE H25

O objetivo deste item é indicar como que, em alguns casos, problemas que não atendem à hipótese H25 podem ser manipulados, afim de permitir a obtenção de condições necessárias utilizando a metodologia aqui desenvolvida.

5.4.1 - TRATAMENTO DE RESTRIÇÕES DE IGUALDADE NO ESTADO

Considere em determinado problema a presença de uma restrição não-diferencial do tipo

$$s[x(\tau);\tau] = 0, \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}]; \qquad s : E^{n_x} \times E^1 \longmapsto E^1. \tag{5.40}$$

Admitimos que s possui todas as propriedades de regularidade necessárias para o tratamento que se fará.

A restrição (5.40), por si só, já é o suficiente para a violação da hipótese H25, já que

$$\text{posto } \left\{ \left[\frac{\partial s}{\partial u} \right] \right\} = 0.$$

Suponha ainda que para um intervalo

$$(t_1, t_2] \subset [t_0, t_{N+1}],$$

o vetor de estado e sua derivada temporal sejam contínuos. Derivando (5.40) no tempo obtemos

$$\dot{s} = \left[\frac{\partial s}{\partial x} \right]' \dot{x}(\tau) + \frac{\partial s}{\partial \tau} = 0, \quad \tau \in (t_1, t_2]; \tag{5.41a}$$

ou, equivalentemente,

$$\dot{s} = \left[\frac{\partial s}{\partial x} \right]' f + \frac{\partial s}{\partial \tau}, \quad \tau \in (t_1, t_2]; \tag{5.41b}$$

se considerarmos que

$$\dot{x}(\tau) = f[x(\tau); u(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}]. \tag{5.41c}$$

Naturalmente,

$$\text{para} \quad \tau \in (t_1, t_2],$$

a restrição (5.40) é substituível por (vide Pontryagin [62], págs. 264–270):

$$s[x(t_2), t_2] = 0; \tag{5.42a}$$

$$s^1[x(\tau); u(\tau); \tau] = 0, \quad \tau \in (t_1, t_2]; \tag{5.42b}$$

onde

$$s^1 \triangleq \left[\frac{\partial s}{\partial x}\right]' f + \frac{\partial s}{\partial \tau}. \tag{5.42c}$$

Admitindo que $x(\cdot)$ e $\dot{x}(\cdot)$ sejam contínuas por partes para $\tau \in [t_0, t_{N+1}]$, podemos aplicar este procedimento sobre todo o intervalo $[t_0, t_{N+1}]$ [7], e subsequentemente substituir (5.40) pelo conjunto de restrições

$$\theta^k = s[x(\bar{t}_k); \bar{t}_k] = 0, \qquad k = 1, \ldots, \bar{N}; \qquad \bar{t}_{\bar{N}+1} = t_{N+1}; \tag{5.43a}$$

$$s^1[x(\tau); u(\tau); \tau] = 0, \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}]; \tag{5.43b}$$

sendo que a restrição (5.43*b*) deverá substituir (5.40) no conjunto de restrições não diferenciais, enquanto que as restrições (5.43*a*) deverão ser incluidas entre as restrições de contorno. Aqui, $\bar{t}_k(k = 1, \ldots, \bar{N})$ representam os instantes para os quais as variáveis de estado presentes explicitamente em (5.40), ou suas derivadas, podem sofrer descontinuidades.

Observe que $s^1(\cdot)$ poderá ou não depender explicitamente do vetor de controle. Caso esta dependência explícita ocorra, existe uma possibilidade da substituição de (5.40) por (5.43*b*) no conjunto de restrições não-diferenciais levar à satisfação da hipótese H25, como desejávamos.

Caso contrário, ou seja, se $s^1(\cdot)$ não depender explicitamente do vetor de controle, e desde que a regularidade das funções envolvidas o permita, o procedimento de derivação no tempo poderá ser repetido reiteradamente, tantas vezes quanto necessário, até que a dependência explícita ocorra (compare com Bryson et al. [11]).

5.4.2 - PROBLEMAS COM RESTRIÇÕES NÃO-DIFERENCIAIS DEPENDENTES EXPLICITAMENTE DO CONTROLE E TRATÁVEIS POR DERIVAÇÃO

Se a hipótese de diferenciabilidade por partes é aplicável a determinada variável de controle, então ela é suscetível de ser tratada como uma variável de estado adicional. Isto, em determinados casos, pode permitir o tratamento de restrições não-diferenciais através de derivação no tempo, ainda que elas dependam explicitamente do vetor de controle. Vamos ilustrar isto através de um exemplo.

---

7 Convém lembrar que

$$x^+(t_0) = x(t_0) \quad \text{e} \quad \dot{x}^+(t_0) = \dot{x}(t_0).$$

Suponha que em determinado problema se tenha a seguinte dinâmica,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 & = u_2 \end{cases} \text{, para } \tau \in [t_0, t_{N+1}]; \tag{5.44a}$$

com a restrição não-diferencial

$$c_1 = x_1(u_2)^2 + \ell x_1 = 0, \quad \ell > 0 \text{ (conhecido)}, \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}]; \tag{5.44b}$$

onde

$$x \triangleq [x_1; x_2]', \qquad u \triangleq [u_1; u_2]'.$$

Com relação à restrição (5.44*b*) temos:

$$\frac{\partial c_1}{\partial u_1} = 0; \tag{5.44c}$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial u_2} = 2x_1 u_2. \tag{5.44d}$$

Na eventualidade da solução ótima envolver arcos com

$$x_1(\cdot) \equiv 0,$$

a hipótese H25 é violada.

Admitindo ser $u_2(\cdot)$ continuamente diferenciável, podemos manipular (5.44*b*) através da derivação no tempo. Teremos:

$$\dot{c}_1 = (x_2 + u_1)((u_2)^2 + \ell) + 2x_1 u_2 \dot{u}_2. \tag{5.45}$$

Tratando $u_2(\cdot)$ como uma variável de estado adicional — em princípio sujeita a descontinuidades — a ser aqui denotada por $x_3(\cdot)$, e definindo

$$\bar{u}_1 \triangleq u_1$$

$$\bar{u}_2 \triangleq u_3,$$

podemos reescrever o problema em estudo com a dinâmica

$$\dot{x}_1 = x_2 + \bar{u}_1, \tag{5.46a}$$

$$\dot{x}_2 = x_3, \tag{5.46b}$$

$$\dot{x}_3 = \bar{u}_2, \tag{5.46c}$$

tendo como restrição não-diferencial

$$\bar{c}_1 = (x_2 + \bar{u}_1)((x_3)^2 + \ell) + 2x_1x_3\bar{u}_2 = 0. \qquad (5.46d)$$

Às restrições de contorno deverão ser acrescentadas

$$x_1(\bar{t}_k)[x_3(\bar{t}_k)]^2 + \ell x_1(\bar{t}_k) = 0, \qquad i = 1, \ldots, \bar{N} + 1; \qquad (5.46e)$$

com $\bar{t}_{\bar{N}+1} = t_{N+1}$, e $\bar{t}_k(k = 1, \ldots, \bar{N})$ correspondendo aos instantes de descontinuidade, ou de $x_1(\cdot)$, ou de $x_3(\cdot)$.

Como a constante ℓ é, por hipótese, positiva, (5.46d) satisfaz a hipótese H25. Deste modo, pode ser que as manipulações efetuadas venham proporcionar o solucionamento do problema com os teoremas anteriores. Naturalmente, isso vai depender de uma análise do problema completo.

5.5 - OUTROS TIPOS DE RESTRIÇÃO

Existem outros tipos de restrição que podem ser incorporadas ao problema (5.21) depois de previamente manipuladas. Neste item apresentamos os casos mais comuns.

5.5.1 - RESTRIÇÕES DE DESIGUALDADE

A incorporação de restrições de desigualdade se faz às custas da utilização de variáveis auxiliares artificiais, as quais permitem representar uma desigualdade na forma de igualdade.

Para ver isto, suponha a restrição de contorno de desigualdade

$$\psi_j[\,\cdot\,] \leq 0. \qquad (5.47a)$$

Com o auxílio de uma variável adicional, podemos escrever (5.47a) na forma alternativa

$$\psi_j[\,\cdot\,] + (\omega)^2 = 0, \qquad \omega \in E^1, \qquad (5.47b)$$

que é equivalente a (5.47a) — e não uma aproximação para ela — mas está na forma de uma igualdade.

Para restrições não-diferenciais pode-se aplicar o mesmo procedimento, com a diferença de que neste caso a variável ω passa a ser dependente do tempo. Em outras palavras, no lugar de

$$c_j[x(\tau); u(\tau); \tau] \leq 0, \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}], \qquad (5.48a)$$

se escreverá

$$c_j[x(\tau); u(\tau); \tau] + [\omega(\tau)]^2 = 0, \qquad \omega(\tau) \in E^1, \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}]. \tag{5.48b}$$

No caso de (5.47*b*) incorpora-se ω ao vetor de parametros p. No caso de (5.48*b*) incorpora-se $\omega(\cdot)$ ao vetor de controle.

Esta forma de expressar uma restrição de desigualdade é conhecida na literatura como representação do tipo Valentine.[8] Existem representações com o mesmo espírito que também podem ser utilizadas. Por exemplo, no caso de desigualdade dupla, ou seja, restrições do tipo

$$k_1 \leq \psi_j[\,\cdot\,] \leq k_2, \tag{5.49a}$$

sugerimos

$$\psi_j[\,\cdot\,] - \frac{k_1 + k_2}{2} - \frac{k_2 - k_1}{2} sen(\omega) = 0, \quad \omega \in E^1. \tag{5.49b}$$

Correspondentemente,

$$k_1(\tau) \leq c_j[\,\cdot\,] \leq k_2(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}], \tag{5.50a}$$

pode ser substituida por

$$c_j[\,\cdot\,] - \frac{k_1(\tau) + k_2(\tau)}{2} - \frac{k_2(\tau) - k_1(\tau)}{2} sen[\omega(\tau)] = 0, \quad \omega(\tau) \in E, \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}]. \tag{5.50b}$$

Observe que as transformações acima são conciliáveis com as hipóteses adotadas nas demonstrações anteriores.

5.5.2 - PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO ENVOLVENDO INTEGRAIS

Considere uma integral do tipo

$$\int_{t_i}^{t_j} \ell[x(\tau); u(\tau); \tau] d\tau. \tag{5.51}$$

Seja agora a variável adicional $z(\cdot)$ definida como sendo a solução contínua da equação diferencial

$$\dot{z}(\tau) = \ell[x(\tau); u(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}], \tag{5.52a}$$

com

$$z(t_i) = 0. \tag{5.52b}$$

8 vide, por exemplo, Hestenes [40], pág. 39.

De acordo com (5.52a) e (5.52b), tem-se

$$z(t_j) = \int_{t_1}^{t_j} \ell[x(\tau); u(\tau); \tau] d\tau. \tag{5.53}$$

Isto significa que, quando as expressões que caracterizam um problema envolverem uma integral do tipo (5.51), esta poderá ser substituida por

$$z(t_j),$$

sendo $z(\cdot)$ definida como uma variável de estado adicional, contínua para $\tau \in [t_0, t_{N+1}]$, e satisfazendo as equações (5.52).

Artifícios deste tipo têm sido frequentemente utilizado na formulação de problemas de controle ótimo, notadamente na manipulação de vínculos isoperimétricos, e para a passagem de índices de desempenho da forma de Bolza (ou de Lagrange) para a forma de Mayer.[9]

A presente manipulação não cria nenhum conflito com as hipóteses adotadas ao longo do trabalho, e nem torna inócuas as condições necessárias obtidas.

5.5.3 - PROBLEMAS COM FUNÇÕES DINÂMICAS DEPENDENTES EXPLICITAMENTE DE PARÂMETROS

Suponha que em determinado problema de controle ótimo, um parâmetro α esteja presente como argumento explícito, ou nos vínculos diferenciais, ou nos vínculos não-diferenciais.

Neste caso, afim de tornar os resultados anteriores aplicáveis, substitui-se α por

$$x_{n+1}(\tau),$$

nos vínculos dinâmicos e nos vínculos não-diferenciais, e por

$$x_{n+1}(t_0)$$

nos vínculos de contorno, onde $x_{n+1}(\cdot)$ denota uma variável de estado adicional, definida como sendo a solução contínua de

$$\dot{x}_{n+1}(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}]. \tag{5.54}$$

Naturalmente, (5.54) deverá ser incluida no problema como um vínculo dinâmico.

9 vide Pontryagin [62], Cap. 1, §2.

Como nos demais casos, este procedimento é inteiramente conciliável com as hipóteses anteriores, e não compromete o caráter prático das condições necessárias precedentes.

5.6 - OUTROS COMENTÁRIOS

a) Não foram encontrados na literatura resultados equivalentes aos obtidos no item 5.3. Notadamente, a previsão de descontinuidades nas variáveis de estado em problemas com restrições não-diferenciais, é, pelo que parece, um dos aspectos relevantes do presente desenvolvimento.

b) A metodologia de dedução aqui adotada se presta muito bem para o tratamento de problemas com dinâmica fracionada. Isto fica transparente ao longo dos itens 4.3, no capítulo anterior, e 5.3., neste capítulo, sobretudo ao se construir os problemas (4.37) e (5.29), respectivamente. Em particular, a definição das funções

$$x^e(\cdot), \quad u^e(\cdot), \qquad e = 1, \ldots, M+1;$$

acoplada ao fracionamento do intervalo $[t_0, t_{N+1}]$, constituirá o principal mecanismo que permitirá, no Capítulo 6, a dedução de condições necessárias para problemas com dinâmica fracionada.

CAPÍTULO 6

PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO COM DINÂMICA FRACIONADA

6.1 - INTRODUÇÃO

Dando sequência ao nosso estudo, consideramos neste capítulo a solução de problemas com dinâmica fracionada. Por "problemas com dinâmica fracionada" queremos caracterizar problemas de controle ótimo cuja dinâmica é composta por uma sequência de sub-problemas. Para cada sub-problema, correspondendo a um sub-intervalo de tempo, temos um vetor de estado e um vetor de controle próprios, os quais estão relacionados através de um conjunto de equações diferenciais, e de um conjunto de vínculos não-diferenciais, também próprios de cada sub-intervalo. As dinâmicas em sub-intervalos adjacentes são independentes umas das outras, estando amarradas apenas através das restrições de contorno, podendo os respectivos vetores de estado ou de controle ter o número de componentes diferente de um sub-problema para outro.

O fracionamento da dinâmica em problemas de otimização pode surgir como uma conveniência, ou mesmo como uma necessidade, seja em tratamentos analíticos, seja em tratamentos numéricos. Isto é particularmente verdadeiro dentro da dinâmica espacial, uma vez que veículos espaciais estão sujeitos a sofrer mudanças em sua configuração ao longo de uma missão, ou então, ser obrigados a percorrer regiões onde as forças atuantes possuem características diferentes.

Mantendo a filosofia dos capítulos precedentes, condições necessárias são deduzidas por etapas sucessivas. Inicialmente superpõe-se dinâmica fracionada e restrições de contorno múltiplo, tomando-se como base resultados do Capítulo 4. Posteriormente acrescenta-se ao problema restrições não-diferenciais, fazendo-se referência ao Capítulo 5. Por último, amplia-se um pouco a generalidade dos resultados considerando-se a presença de instantes intermediários com quinas explícitas, e a ocorrência de lapsos de tempo. Alguns comentários fecham o capítulo.

6.2 - PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO COM RESTRIÇÕES DE CONTORNO MÚLTIPLO E DINÂMICA FRACIONADA

Iniciando a consideração de problemas com dinâmica fracionada, admite-se neste item, como ponto de partida, que restrições de contorno múltiplo estejam presentes. No próximo item o problema será ampliado, prevendo-se a presença também de restrições não-diferenciais.

6.2.1 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere o problema de controle ótimo de encontrar valores ótimos para

$$(y^e(\cdot)(e=1,\ldots,N+1); v^e(\cdot)(e=1,\ldots,N+1); \tau_0; \tau_1; \ldots; \tau_{N+1}; q),$$

a saber,

$$(x^e(\cdot)(e=1,\ldots,N+1); u^e(\cdot)(e=1,\ldots,N+1); t_0; t_1; \ldots; t_{N+1}; p),$$

tais que

$$h_0[x^1(t_0); x^1(t_1); \ldots; x^{N+1}(t_N); x^{N+1}(t_{N+1}); t_0; t_1; \ldots; t_{N+1}; p] \qquad (6.1a)$$

corresponda a um mínimo, com:

$$h_i[x^1(t_0); x^1(t_1); \ldots; x^{N+1}(t_N); x^{N+1}(t_{N+1}); t_0; t_1; \ldots; t_{N+1}; p] = 0, \qquad i = 1, \ldots, n_h; \qquad (6.1b)$$

e

$$\dot{x}^e(\tau) = f^e[x^e(\tau); u^e(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1, \ldots, N+1; \qquad (6.1c)$$

onde:

$$t_e \in \delta_e \subset E^1, \qquad e = 0, 1, \ldots, N+1;$$

$$p \in Q \subset E^{n_p};$$

$$x^e(\tau) \in Y^e \subset E^{n_{xe}}, \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

$$u^e(\tau) \in V^e \subset E^{n_{ue}}, \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

$$h_i : E^{2n_{x1}} \times \ldots \times E^{2n_{xN+1}} \times E^{N+2} \times E^{n_p} \longmapsto E^1, \qquad i = 0, 1, \ldots, n_h;$$

$$f^e \triangleq [f_1; \ldots; f_{n_{xe}}]' : E^{n_{xe}} \times E^{n_{ue}} \times E^1 \longmapsto E^{n_{xe}} \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

sendo $\delta_e(e = 0, 1, \ldots, N+1)$, $Y^e(e = 1, \ldots, N+1)$, $V^e(e = 1, \ldots, N+1)$, e Q, conjuntos abertos.

É conveniente observar que aqui está sendo considerada uma sequência de $N + 1$ intervalos de tempo, de maneira que os instantes $t_e(e = 0, 1, \ldots, N+1)$ estão em ordem crescente. Para cada intervalo $[t_{e-1}, t_e]$ há um vetor de estado

$$x^e(\cdot) \triangleq [x_1^e(\cdot); \ldots; x_{n_{xe}}^e(\cdot)]',$$

e um vetor de controle

$$u^e(\cdot) \triangleq [u_1^e(\cdot); \ldots; u_{n_{ue}}^e(\cdot)]',$$

sendo que os vetores de estado, ou os vetores de controle, de intervalos distintos, têm suas dimensões próprias, não necessariamente iguais.

Condições de regularidade para os vetores de estado $x^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1)$, para os vetores de controle $u^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1)$, e para as funções $h_i(i = 0, 1, \ldots, n_h)$ e $f_j^e(j = 1, \ldots, n_{x^e}; e = 1, \ldots, N+1)$, ficarão estabelecidas através das hipóteses que serão explicitadas adiante.

6.2.2 - HIPÓTESES

Com relação ao problema (6.1), adota-se:

H26: Os instantes $t_e(e = 0, 1, \ldots, N+1)$ satisfazem as desigualdades:

$$t_{e-1} < t_e, \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

H27: $x_i^e(\cdot)(i = 1, \ldots, n_{x^e}; e = 1, \ldots, N+1)$ devem ser funções contínuas para todo

$$\tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

H28: $u_j^e(\cdot)(j = 1, \ldots, n_{u^e}; e = 1, \ldots, N+1)$ devem ser funções contínuas por partes, para todo

$$\tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

H29: As funções $h_i(i = 0, 1, \ldots, n_h)$, $f_j^e(j = 1, \ldots, n_{x^e}; e = 1, \ldots, N+1)$ e suas derivadas parciais primeiras, estão definidas e são todas contínuas em relação a todos os seus argumentos, nos domínios considerados.

6.2.3 - CONDIÇÕES NECESSÁRIAS

No enunciado das condições necessárias para a solução do problema (6.1), considere a seguinte definição :

DEFINIÇÃO 6.1: (Mínimo Local para o Problema 6.1)

Diz-se que

$$(x^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1); u^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1); t_0; t_1; \ldots; t_{N+1}; p)$$

fornecem um mínimo local para o problema (6.1), *e particularmente, que* $u^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1)$ *representam controles localmente ótimos, quando existir um* ϵ *positivo, não importa quão pequeno ele seja, tal que*

$$h_0[y^1(\tau_0); y^1(\tau_1); \ldots; y^{N+1}(\tau_N); y^{N+1}(\tau_{N+1}); \tau_0; \tau_1; \ldots; \tau_{N+1}; q] \geq$$
$$h_0[x^1(t_0); x^1(t_1); \ldots; x^{N+1}(t_N); x^{N+1}(t_{N+1}); t_0; t_1; \ldots; t_{N+1}; p]. \qquad (6.2)$$

para todo $(y^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1); v^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1); \tau_0; \tau_1; \ldots; \tau_{N+1}; q)$ *tal que:*

I: $y^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1)$ *e* $v^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1)$ *satisfazem às condições de regularidade impostas a* $x^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1)$ *e* $u^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1)$, *respectivamente.*

II:

$$(y^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1); v^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1); \tau_0; \tau_1; \ldots; \tau_{N+1}; q)$$

satisfazem as restrições (6.1*b*) *e* (6.1*c*), *quando em substituição a*

$$(x^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1); u^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1); t_0; t_1; \ldots; t_{N+1}; p).$$

com $\tau_e \in \delta_e(e = 0, 1, \ldots, N+1)$; $q \in Q$; $y^e(\tau) \in Y^e$, $\tau \in [t_{e-1}, t_e]$, $(e = 1, \ldots, N+1)$; *e* $v^e(\tau) \in V$, $\tau \in [t_{e-1}, t_e]$, $(e = 1, \ldots, N+1)$.

III:

$$\sum_{e=0}^{N+1} |\tau_e - t_e| + |q - p| + \sum_{e=1}^{N+1} |y^e(\tau_{e-1}) - x^e(t_{e-1})| + \sum_{e=1}^{N+1} \int_{\tau_{e-1}}^{\tau_e} |v^e(\tau) - w^e(\tau)| d\tau < \epsilon$$

onde $w^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1)$ *representam funções fixas que possuem as seguintes propriedades:*

i: $w^e(\cdot)$ *são contínuas por partes para todo* $\tau \in I_e \triangleq \{[t_{e-1}, t_e] \cup \delta_{e-1} \cup \delta_e\}$;

ii: $w^e(\tau) \in V^e$ *para* $\tau \in I_e$;

iii: para $\tau \in [t_{e-1}, t_e]$, $w^e(\cdot)$ *coincide com* $u^e(\cdot)$.

Estabelecida a Definição 6.1, considere o seguinte teorema de condições necessárias:

TEOREMA 6.1:

Respeitadas as hipóteses H26–H29, para que

$$(x^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1); u^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1); t_0; t_1; \ldots; t_{N+1}; p)$$

forneçam um mínimo local para o problema (6.1), devem existir multiplicadores

$$\nu_0, \qquad \nu \triangleq [\nu_1; \ldots; \nu_{n_h}]',$$

e funções vetoriais

$$\lambda^e(\cdot) \triangleq [\lambda_1^e(\cdot); \ldots; \lambda_{n_{xe}}^e(\cdot)]', \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

tais que se verifiquem:

I:

$$\nu_0 + |\nu| \neq 0, \qquad \nu_0 \in \left\{0, 1\right\}; \tag{6.3a}$$

II: $\lambda_i^e(\cdot)(i = 1, \ldots, n_{xe}; e = 1, \ldots, N+1)$ são funções contínuas para todo

$$\tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

com:

$$\dot{\lambda}^e(\tau) = -\left[\frac{\partial F^e}{\partial x^e}\right]' \lambda^e(\tau), \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1, \ldots, N+1; \tag{6.3b}$$

$$\lambda^e(t_{e-1}) = \sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^e(t_{e-1})}\right]', \qquad e = 1, \ldots, N+1; \tag{6.3c}$$

$$\lambda^e(t_e) = -\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^e(t_e)}\right]', \qquad e = 1, \ldots, N+1; \tag{6.3d}$$

III:

$$\left[\frac{\partial f^e}{\partial u^e}\right]' \lambda^e(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1, \ldots, N+1; \tag{6.3e}$$

IV:

$$\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left[\frac{\partial h_i}{\partial p}\right]' = 0; \tag{6.3f}$$

V: As funções

$$H^e(\tau) \triangleq \sum_{i=1}^{n_{xe}} \lambda_i^e(\tau) \dot{x}_i^e(\tau), \qquad e = 1, \ldots, N+1; \tag{6.3g}$$

são contínuas para todo

$$\tau \in [t_{e-1}, t_e];$$

$$\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left\{ \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^1(t_0)}\right] \dot{x}^1(t_0) + \frac{\partial h_i}{\partial t_0} \right\} = 0; \tag{6.3h}$$

$$\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left\{ \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^e(t_e)} \right] \dot{x}^e(t_e) + \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^{e+1}(t_e)} \right] \dot{x}^{e+1}(t_e) + \frac{\partial h_i}{\partial t_e} \right\} = 0, \quad e = 1, \ldots, N; \tag{6.3i}$$

$$\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left\{ \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^{N+1}(t_{N+1})} \right] \dot{x}^{N+1}(t_{N+1}) + \frac{\partial h_i}{\partial t_{N+1}} \right\} = 0. \tag{6.3j}$$

6.2.4 - PROVA DAS CONDIÇÕES NECESSÁRIAS

A prova do Teorema 6.1 segue passos semelhantes aos do item 4.3.4. Aqui apresentaremos apenas um resumo das passagens, as quais servirão de monitoramento para aqueles interessados em repetir os pormenores da dedução. Para os interessados somente numa visão sintética do processo, consideramos que uma superposição do resumo aqui apresentado, com as passagens correspondentes no item 4.3.4, é satisfatória.

Assim, para a presente dedução, devem ser seguidos os seguintes passos:

Passo 1:

Considerando a possibilidade de existência de quinas implícitas, constroi-se inicialmente um problema equivalente ao problema (6.1), que no presente caso, em correspondência com o problema (4.37), se escreverá:

Encontrar valores ótimos para

$$(y^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1); v^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1); \tau_0; \tau_1; \ldots; \tau_{M+1}; q),$$

os quais denotaremos por

$$(\chi^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1); \Upsilon^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1); \xi_0; \xi_1; \ldots; \xi_{M+1}; p),$$

tais que

$$\bar{h}_0[\chi^1(\xi_0); \chi^1(\xi_1); \ldots; \chi^{M+1}(\xi_M); \chi^{M+1}(\xi_{M+1}); \xi_0; \xi_1; \ldots; \xi_{M+1}; p] \tag{6.4a}$$

atinja um valor mínimo, com:

$$\bar{h}_i[\chi^1(\xi_0); \chi^1(\xi_1); \ldots; \chi^{M+1}(\xi_M); \chi^{M+1}(\xi_{M+1}); \xi_0; \xi_1; \ldots; \xi_{M+1}; p] = 0,$$

$$i = 1, \ldots, n_{\bar{h}}; \tag{6.4b}$$

e

$$\dot{\chi}^e(\tau) = \ell^e[\chi^e(\tau); \Upsilon^e(\tau); \tau], \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{6.4c}$$

onde

$$\xi_e \in \bar{\delta}_e \subset E^1, \qquad e = 0, 1, \ldots, M+1;$$

$$p \in Q \subset E^{n_p};$$

$$\chi^e(\tau) \in Y^m \subset E^{n_{x^m}}, \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e] \subset [t_{m-1}, t_m], \qquad e = 1, \ldots, M+1;$$

$$\Upsilon^e(\tau) \in V^m \subset E^{n_{u^m}}, \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \subset [t_{m-1}, t_m], \qquad e = 1, \ldots, M+1;$$

$$\bar{h}_i : E^{2n_{\chi^1}} \times \ldots \times E^{2n_{\chi^{M+1}}} \times E^{N+2} \times E^{n_p} \longmapsto E^1, \qquad i = 0, 1, \ldots, n_{\bar{h}};$$

sendo $\bar{\delta}_e(e = 0, 1, \ldots, M+1)$, $Y^m(m = 1, \ldots, N+1)$, $V^m(m = 1, \ldots, N+1)$, e Q, conjuntos abertos.

Para a compreenção da montagem do problema (6.4), considere os seguintes esclarecimentos:

a) Os valores ótimos de τ_e, a saber,

$$\xi_e, \qquad e = 0, 1, \ldots, M+1;$$

obedecem a

$$\xi_{e-1} < \xi_e, \qquad e = 1, \ldots, M+1;$$

$$\xi_e \in \left\{t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}\right\} \cup \left\{t'_1, \ldots, t'_{N'}\right\};$$

e

$$\xi_e \in \bar{\delta}_e, \qquad e = 0, 1, \ldots, M+1;$$

onde

$$\{t'_1, \ldots, t'_{N'}\}$$

representa o conjunto de instantes de quina implícita, e

$$\bar{\delta}_e, \qquad e = 0, 1, \ldots, M+1;$$

denotam conjuntos abertos, definidos em absoluta analogia com o item 4.3.4.

b) No lugar das variáveis dinâmicas ótimas

$$x^m(\cdot)(m = 1, \ldots, N+1) \qquad \text{e} \qquad u^m(\cdot)(m = 1, \ldots, N+1);$$

temos

$$\chi^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1) \qquad \text{e} \qquad \Upsilon^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1);$$

respectivamente, enquanto no lugar de

$$f^m(\cdot)(m = 1, \ldots, N+1); \qquad \text{temos} \qquad \ell^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1).$$

Ou seja,

$$\text{sendo} \quad m \quad \text{e} \quad e \quad \text{tais que}$$

$$[t_{m-1}, t_m] \supset [\xi_{e-1}, \xi_e],$$

então:

$$\chi^e(\tau) = x^m(\tau), \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e];$$

$$\Upsilon^e(\tau) = u^m(\tau), \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e];$$

$$\ell^e(\tau) = f^m(\tau), \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e].$$

O motivo desta mudança na notação é que, com a explicitação das quinas implícitas, passamos a ter $M+1$ sub-intervalos de tempo, no lugar dos $N+1$ originais. Nos Capítulos 4 e 5 isto não foi necessário porque lá foi feito um único fracionamento do intervalo $[t_0, t_{N+1}]$. Aqui, diferentemente, já sendo o problema original fracionado, tornou-se necessário um segundo fracionamento, donde a necessidade da nova notação.

c)

$$\bar{h}_i = h_i, \quad \text{para} \quad i = 0, 1, \ldots, n_h; \tag{6.4d}$$

$$\text{e para} \quad i = n_h + 1, \ldots, n_{\bar{h}},$$

as funções $\bar{h}_i$ representam as restrições introduzidas com as quinas implícitas, conforme já efetuado nos desenvolvimentos anteriores.

Passo 2:

A partir do problema (6.4), se escreve, em analogia com o problema (4.39), o seguinte problema:

Encontrar valores ótimos para

$$(y^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1); v^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1); \tau_0; \tau_1; \ldots; \tau_{M+1}; q)$$

os quais devem fornecer um mínimo local para

$$\tilde{h}_0 = \bar{h}_0[y^1(\tau_0); y^1(\tau_1); \ldots; y^{M+1}(\tau_M); y^{M+1}(\tau_{M+1}); \tau_0; \tau_1; \ldots; \tau_{M+1}; q]+$$

$$+\sum_{e=1}^{M+1}\left\{[\Lambda^{(e,0)}(\tau_e)]'y^e(\tau_e) - [\Lambda^{(e,0)}(\tau_{e-1})]'y^e(\tau_{e-1}) -\right.$$

$$\left. - \int_{\tau_{e-1}}^{\tau_e}\left\{[\Lambda^{(e,0)}(\tau)]'\dot{y}^e(\tau) + [\dot{\Lambda}^{(e,0)}(\tau)]'y^e(\tau)\right\}d\tau\right\} \tag{6.5a}$$

sujeito a

$$\tilde{h}_i = \bar{h}_i[y^1(\tau_0); y^1(\tau_1); \ldots; y^{M+1}(\tau_M); y^{M+1}(\tau_{M+1}); \tau_0; \tau_1; \ldots; \tau_{M+1}; q]+$$

$$+\sum_{e=1}^{M+1}\left\{[\Lambda^{(e,i)}(\tau_e)]'y^e(\tau_e) - [\Lambda^{(e,i)}(\tau_{e-1})]'y^e(\tau_{e-1}) -\right.$$

$$\left. - \int_{\tau_{e-1}}^{\tau_e}\left\{[\Lambda^{(e,i)}(\tau)]'\dot{y}^e(\tau) + [\dot{\Lambda}^{(e,i)}(\tau)]'y^e(\tau)\right\}d\tau\right\} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n_{\bar{h}}; \tag{6.5b}$$

e

$$\dot{y}^e(\tau) = f^e[y^e(\tau); v^e(\tau); \tau], \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1. \tag{6.5c}$$

No problema (6.5),

$$\Lambda^{(e,i)}(\cdot)(i = 0, 1, \ldots, n_{\bar{h}}; e = 1, \ldots, M+1)$$

são funções vetoriais contínuas fixas, definidas para todo $\tau \in \bar{I}_e(e = 1, \ldots, M+1)$, sendo

$$\bar{I}_e \triangleq \left\{[t_{e-1}, t_e] \cup \bar{\delta}_{e-1} \cup \bar{\delta}_e\right\}, \qquad e = 1, \ldots, M+1;$$

conjuntos abertos.

Passo 3:

Em correspondência com as expressões (4.40),(4.41) e (4.42), utilizadas na prova do Teorema 4.2, construimos:

$$y^e(\tau) = \varrho^e(\tau) + \zeta^e(\tau), \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{6.6a}$$

$$v^e(\tau) = \vartheta^e(\tau) + \phi^e(\tau), \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{6.6b}$$

$$\tau_e = \xi_e + \Delta\xi_e, \qquad e = 0, 1, \ldots, M+1; \tag{6.6c}$$

$$q = p + \Delta p; \tag{6.6d}$$

onde

$$\phi^e(\tau) = \beta_0 U^{(e,0)}(\tau) + \sum_{j=1}^{n_{\bar{h}}} \beta_j U^{(e,j)}(\tau), \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1; \qquad (6.6e)$$

$$\Delta\xi_e = \beta_0 T_e^0 + \sum_{j=1}^{n_{\bar{h}}} \beta_j T_e^j, \qquad e = 0, 1, \ldots, M+1; \qquad (6.6f)$$

$$\Delta p = \beta_0 P^0 + \sum_{j=1}^{n_{\bar{h}}} \beta_j P^j; \qquad (6.6g)$$

e

$$\dot{\zeta}^e(\tau) = F^e[\zeta^e(\tau); \phi^e(\tau); \tau], \quad \tau \in [\tau_{e-1}, \tau_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1; \qquad (6.6h)$$

com

$$\zeta^e(\tau_{e-1}) = \beta_0 X^{(e,0)} + \sum_{j=1}^{n_{\bar{h}}} \beta_j X^{(e,j)}, \qquad e = 1, \ldots, M+1; \qquad (6.6i)$$

sendo que

$$F^e[\zeta^e(\tau); \phi^e(\tau); \tau] \triangleq \ell^e[y^e(\tau); v^e(\tau); \tau] - \dot{\varrho}^e(\tau), \qquad e = 1, \ldots, M+1; \qquad (6.6j)$$

$$U^{(e,j)}(\tau) \triangleq [U_1^{(e,j)}(\tau); \ldots; U_{n_{ue}}^{(e,j)}(\tau)]', \quad j = 0, 1, \ldots, n_{\bar{h}}; \quad e = 1, \ldots, M+1; \qquad (6.6k)$$

$$P^j \triangleq [P_1^j; \ldots; P_{n_p}^j]'; \qquad j = 0, 1, \ldots, n_{\bar{h}}; \qquad (6.6l)$$

$$X^{(e,j)} \triangleq [X_1^{(e,j)}; \ldots; X_{n_{xe}}^{(e,j)}]'; \qquad j = 0, 1, \ldots, n_{\bar{h}}; \quad e = 1, \ldots, M+1. \qquad (6.6m)$$

Nas expressões (6.6), à semelhança dos capítulos anteriores, $\vartheta^e(\cdot)$ e $\varrho^e(\cdot)$ são as funções suporte para $\Upsilon^e(\cdot)$ e $\chi^e(\cdot)$, respectivamente, ou seja, são as próprias funções $\Upsilon^e(\cdot)$ e $\chi^e(\cdot)$ acrescidas de prolongamentos fixos.

Passo 4:

Com a definição de

$$\beta_0, \qquad \beta \triangleq [\beta_1; \ldots; \beta_{n_{\bar{h}}}]',$$

as funções $\tilde{h}_i (i = 0, 1, \ldots, n_{\bar{h}})$ podem ser vistas como funções de $\beta_j (j = 0, 1, \ldots, n_{\bar{h}})$, denotadas

$$g_i[\beta_0; \beta], \qquad i = 0, 1, \ldots, n_{\bar{h}};$$

como feito nas deduções anteriores. Sendo assim, calcula-se as derivadas parciais destas funções em relação a $\beta_j (j = 0, 1, \ldots, n_h)$ e, posteriormente, avalia-se estas derivadas em

$$(\beta_0, \beta) = (0, 0),$$

obtendo-se expressões semelhantes a (4.45). Para isto, repetindo o procedimento de dedução do Capítulo 4, escolhe-se as funções $\Lambda^{(e,j)}(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1; j = 0, 1, \ldots, n_{\bar{h}})$ como sendo as soluções contínuas de

$$\Lambda^{(e,j)}(\tau) = \left[\frac{\partial \ell^e}{\partial \varrho^e}\right]' \Lambda^{(e,j)}(\tau), \quad \tau \in \bar{I}_e \supset [\xi_{e-1}, \xi_e], \tag{6.7a}$$

tendo como condição de contorno

$$\Lambda^{(e,j)}(\xi_e) = -\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial \chi^e(\xi_e)}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n_{\bar{h}}; \quad e = 1, \ldots, M+1. \tag{6.7b}$$

Passo 5:

Ainda seguindo raciocínio absolutamente análogo ao do item (4.4), escolhe-se:

$$X^{(e,j)} = \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial \chi^e(\xi_{e-1})}\right]' - \Lambda^{(e,j)}(\xi_{e-1}), \quad j = 0, 1, \ldots, n_{\bar{h}}; \quad e = 1, \ldots, M+1; \tag{6.8a}$$

$$T_0^j = \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial \chi^1(\xi_0)}\right] \dot{\chi}^1(\xi_0) + \frac{\partial \bar{h}_j}{\partial \xi_0}, \quad j = 0, 1, \ldots, n_{\bar{h}}; \tag{6.8b}$$

$$T_e^j = \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial \chi^e(\xi_e)}\right] \dot{\chi}^e(\xi_e) + \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial \chi^{e+1}(\xi_e)}\right] \dot{\chi}^{e+1}(\xi_e) + \frac{\partial \bar{h}_j}{\partial \xi_e}, \quad j = 0, 1, \ldots, n_{\bar{h}}; \quad e = 1, \ldots, M; \tag{6.8c}$$

$$T_{M+1}^j = \left[\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial \chi^{M+1}(\xi_{M+1})}\right] \dot{\chi}^{M+1}(\xi_{M+1}) + \frac{\partial \bar{h}_j}{\partial \xi_{M+1}}, \quad j = 0, 1, \ldots, n_{\bar{h}}; \tag{6.8d}$$

$$P^j = \frac{\partial \bar{h}_j}{\partial p}, \quad j = 0, 1, \ldots, n_{\bar{h}}; \tag{6.8e}$$

e

$$U^{(e,j)}(\tau) = -\left[\frac{\partial \ell^e}{\partial \vartheta^e}\right]' \Lambda^{(e,j)}(\tau), \quad \tau \in \bar{I}_e, \quad j = 0, 1, \ldots, n_{\bar{h}}; \quad e = 1, \ldots, M+1; \tag{6.8f}$$

o que nos leva a obter como condições necessárias para a solução do problema (6.4), a existência de multiplicadores

$$\eta_0, \qquad \eta \triangleq [\eta_1; \ldots; \eta_{n_{\bar{h}}}]',$$

tais que valem:

I:

$$\eta_0 + |\eta| \neq 0, \qquad \eta_0 \in \{0, 1\}; \tag{6.9a}$$

II:

$$\sum_{i=0}^{n_{\bar{h}}} \eta_i T_e^i = 0, \qquad e = 0, 1, \ldots, M+1; \tag{6.9b}$$

III:

$$\sum_{i=0}^{n_{\xi}} \eta_i X^{(e,i)} = 0, \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{6.9c}$$

IV:

$$\sum_{i=0}^{n_{\xi}} \eta_i P^i = 0; \tag{6.9d}$$

V:

$$\sum_{i=0}^{n_{\xi}} \eta_i U^{(e,i)}(\tau) = 0, \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1. \tag{6.9e}$$

Passo 6:

Efetuados os passos anteriores, define-se — para $e = 1, \ldots, M+1$ — os vetores de multiplicadores

$$\Gamma^e(\tau) \triangleq \sum_{i=0}^{n_{\xi}} \eta_i \Lambda^{(e,i)}(\tau), \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \qquad e = 1, \ldots, M+1; \tag{6.10}$$

efetuando-se manipulações semelhantes às do item 4.3.4.

Passo 7:

Por último, afim de chegar às expressões (6.3), processa-se o tratamento dos instantes de quina implícita. Isto, em particular, levará à definição dos multiplicadores

$$\nu_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n_h;$$

e das funções

$$\lambda^e(\tau), \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

e

$$H^e(\tau) \triangleq \sum_{i=1}^{n_{xe}} \lambda^e(\tau) \dot{x}^e(\tau), \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1, \ldots, N+1. \tag{6.11}$$

As funções $\lambda^e(\cdot)$ são obtidas através do agrupamento, sobre o intervalo $[t_{e-1}, t_e]$, das funções $\Gamma^k(\cdot)$ definidas em (6.10), para os sub-intervalos

$$[\xi_{k-1}, \xi_k],$$

os quais unidos compõem o intervalo $[t_{e-1}, t_e]$. Desta maneira, enquanto tem-se

$$M+1 \quad \text{funções} \quad \Gamma^k(\cdot),$$

tem-se apenas

$$N+1 \quad \text{funções} \quad \lambda^e(\cdot).$$

Os instantes ξ_k interiores a cada intervalo $[t_{e-1}, t_e]$ considerado, são instantes de quina implícita, de modo que, à semelhança dos resultados anteriores, deduz-se que as funções

$$\lambda^e(\cdot)(e=1,\ldots,N+1) \qquad \text{e} \qquad H^e(\cdot)(e=1,\ldots,N+1),$$

são contínuas para todo $\tau \in [t_{e-1}, t_e]$.

Isto completa a prova do Teorema 6.1.

6.3 - PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO COM RESTRIÇÕES DE CONTORNO MÚLTIPLO, RESTRIÇÕES NÃO-DIFERENCIAIS E DINÂMICA FRACIONADA

Conforme já antecipado, iremos considerar agora a presença simultânea de restrições de contorno múltiplo e de restrições não-diferenciais. Com isto, chegaremos ao nível de generalidade que se pretende atingir com este trabalho.

6.3.1 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Seja o problema de controle ótimo de encontrar valores ótimos para

$$(y^e(\cdot)(e=1,\ldots,N+1); v^e(\cdot)(e=1,\ldots,N+1); \tau_0; \tau_1; \ldots; \tau_{N+1}; q),$$

a saber,

$$(x^e(\cdot)(e=1,\ldots,N+1); u^e(\cdot)(e=1,\ldots,N+1); t_0; t_1; \ldots; t_{N+1}; p),$$

tais que

$$h_0[x^1(t_0); x^1(t_1); \ldots; x^{N+1}(t_N); x^{N+1}(t_{N+1}); t_0; t_1; \ldots; t_{N+1}; p] \tag{6.12a}$$

corresponda a um mínimo, com:

$$h_i[x^1(t_0); x^1(t_1); \ldots; x^{N+1}(t_N); x^{N+1}(t_{N+1}); t_0; t_1; \ldots; t_{N+1}; p] = 0, \quad i=1,\ldots,n_h; \tag{6.12b}$$

$$c_k^e[x^e(\tau); u^e(\tau); \tau] = 0, \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad k=1,\ldots,n_{c^e}; \quad e=1,\ldots,N+1; \tag{6.12c}$$

e

$$\dot{x}^e(\tau) = f^e[x^e(\tau); u^e(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1, \ldots, N+1; \tag{6.12d}$$

onde:

$$t_e \in \delta_e \subset E^1, \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

$$p \in Q \subset E^{n_p};$$

$$x^e(\tau) \in Y^e \subset E^{n_{x^e}}, \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

$$u^e(\tau) \in V^e \subset E^{n_{u^e}}, \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

$$h_i : E^{2n_{x^1}} \times \ldots \times E^{2n_{x^{N+1}}} \times E^{N+2} \times E^{n_p} \longmapsto E^1, \qquad i = 0, 1, \ldots, n_h;$$

$$c_k^e : E^{n_{x^e}} \times E^{n_{u^e}} \times E^1 \longmapsto E^1, \qquad k = 1, \ldots, n_{c^e}; \quad e = 1, \ldots, N+1;$$

$$f^e \triangleq [f_1; \ldots; f_{n_{x^e}}]' : E^{n_{x^e}} \times E^{n_{u^e}} \times E^1 \longmapsto E^{n_{x^e}}, \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

sendo $\delta_e(e = 0, 1, \ldots, N+1)$, $Y^e(e = 1, \ldots, N+1)$, $V^e(e = 1, \ldots, N+1)$, e Q, conjuntos abertos.

Condições de regularidade para os vetores de estado $x^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1)$, para os vetores de controle $u^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1)$, e para as funções $h_i(i = 0, 1, \ldots, n_h)$, $c_k^e(k = 1, \ldots, n_{c^e}; e = 1, \ldots, N+1)$ e $f^e(e = 1, \ldots, N+1)$, ficarão estabelecidas através das hipóteses a seguir.

6.3.2 - HIPÓTESES

Com relação ao problema (6.12), devemos considerar:

H30: Os instantes $t_e(e = 0, 1, \ldots, N+1)$ satisfazem as desigualdades

$$t_{e+1} < t_e, \qquad e = 1, \ldots, N;$$

H31: $x_j^e(\cdot)(j = 1, \ldots, n_{x^e}; e = 1, \ldots, N+1)$ devem ser funções contínuas para todo

$$\tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

H32: $u_j^e(\cdot)(j = 1, \ldots, n_{u^e}; e = 1, \ldots, N+1)$ devem ser funções contínuas por partes (contínuas à esquerda) para todo

$$\tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

H33: As funções $h_i(i = 0, 1, \ldots, n_h)$, $f_j^e(j = 1, \ldots, n_{x^e}; e = 1, \ldots, N+1)$, $c_k^e(k = 1, \ldots, n_{c^e}; e = 1, \ldots, N+1)$, e suas derivadas parciais primeiras, estão definidas e são todas contínuas em relação a todos os seus argumentos, nos domínios considerados;

H34: As matrizes de derivadas parciais

$$\left[\frac{\partial c^e}{\partial u^e}\right], \qquad \left\{\frac{\partial c^e}{\partial u^e}\right\}_{i,j} \triangleq \frac{\partial c^e{}_i}{\partial u^e{}_j} \qquad (i = 1, \ldots, n_{c^e}; j = 1, \ldots, n_{u^e}),$$

avaliadas sobre a solução $(x^e(\cdot), u^e(\cdot))$, têm posto n_{c^e} , para $\tau \in [t_{e-1}, t_e]$;

6.3.3 - CONDIÇÕES NECESSÁRIAS

No enunciado das condições necessárias para a solução do problema (6.12), considere a seguinte definição :

DEFINIÇÃO 6.2: (Mínimo Local para o Problema 6.12)

Diz-se que

$$(x^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1); u^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1); t_0; t_1; \ldots; t_{N+1}; p)$$

fornecem um mínimo local para o problema (6.12), *e particularmente, que* $u^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1)$ *representam controles localmente ótimos, quando existir um* ϵ *positivo, não importa quão pequeno ele seja, tal que*

$$\begin{aligned} &h_0[y^1(\tau_0); y^1(\tau_1); \ldots; y^{N+1}(\tau_N); y^{N+1}(\tau_{N+1}); \tau_0; \tau_1; \ldots; \tau_{N+1}; q] \geq \\ &h_0[x^1(t_0); x^1(t_1); \ldots; x^{N+1}(t_N); x^{N+1}(t_{N+1}); t_0; t_1; \ldots; t_{N+1}; p], \end{aligned} \tag{6.13}$$

para todo $(y^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1); v^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1); \tau_0; \tau_1; \ldots; \tau_{N+1}; q)$ *tal que:*

I: $y^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1)$ *e* $v^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1)$ *satisfazem as condições de regularidade impostas a* $x^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1)$ *e* $u^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1)$, *respectivamente;*

II:

$$(y^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1); v^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1); \tau_0; \tau_1; \ldots; \tau_{N+1}; q)$$

satisfazem as restrições (6.12*b*)–(6.12*d*), *quando em substituição a*

$$(x^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1); u^e(\cdot)(e = 1, \ldots, N+1); t_0; t_1; \ldots; t_{N+1}; p),$$

com $\tau_e \in \delta_e(e = 0, 1, \ldots, N+1)$; $q \in Q$; $y^e(\tau) \in Y^e$, $\tau \in [t_{e-1}, t_e]$, $(e = 1, \ldots, N+1)$; *e* $v(\tau) \in V$, $\tau \in [t_{e-1}, t_e]$, $(e = 1, \ldots, N+1)$;

III:

$$\sum_{e=0}^{N+1} |\tau_e - t_e| + |q-p| + \sum_{e=1}^{N+1} |y^e(\tau_{e-1}) - x^e(t_{e-1})| + \sum_{e=1}^{N+1} \int_{\tau_{e-1}}^{\tau_e} |v^e(\tau) - w^e(\tau)| d\tau < \epsilon,$$

onde $w^e(\cdot)(e = 1,\ldots,N+1)$ representam funções fixas que possuem as seguintes propriedades:

i: $w^e(\cdot)$ são contínuas por partes para todo $\tau \in I_e \triangleq \{[t_{e-1}, t_e] \cup \delta_{e-1} \cup \delta_e\}$;

ii: $w^e(\tau) \in V^e$ para $\tau \in I_e$;

iii: para $\tau \in [t_{e-1}, t_e]$, $w^e(\cdot)$ coincide com $u^e(\cdot)$.

De posse da Definição 6.2, considere o seguinte teorema de condições necessárias:

TEOREMA 6.2:

Respeitadas as hipóteses H30–H34, para que

$$(x^e(\cdot)(e = 1,\ldots,N+1); u^e(\cdot)(e = 1,\ldots,N+1); t_0; t_1; \ldots; t_{N+1}; p)$$

forneçam um mínimo local para o problema (6.12), devem existir multiplicadores

$$\nu_0, \qquad \nu \triangleq [\nu_1; \ldots; \nu_{n_k}]',$$

e funções vetoriais

$$\lambda^e(\cdot) \triangleq [\lambda_1^e(\cdot); \ldots; \lambda_{n_{x^e}}^e(\cdot)]', \qquad e = 1,\ldots,N+1;$$

$$\mu^e(\cdot) \triangleq [\mu_1^e(\cdot); \ldots; \mu_{n_{c^e}}^e(\cdot)]', \qquad e = 1,\ldots,N+1;$$

tais que se verifiquem:

I:

$$\nu_0 + |\nu| \neq 0, \qquad \nu_0 \in \{0, 1\}; \tag{6.14a}$$

II: $\lambda_i^e(\cdot)(i = 1,\ldots,n_{x^e}; e = 1,\ldots,N+1)$ são funções contínuas para todo

$$\tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1,\ldots,N+1;$$

com:

$$\dot{\lambda}^e(\tau) = -\left[\frac{\partial f^e}{\partial x^e}\right]' \lambda^e(\tau) - \left[\frac{\partial c^e}{\partial x^e}\right]' \mu^e(\tau), \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1,\ldots,N+1; \tag{6.14b}$$

$$\lambda^e(t_{e-1}) = \sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^e(t_{e-1})}\right]', \qquad e = 1, \ldots, N+1; \tag{6.14c}$$

$$\lambda^e(t_e) = -\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^e(t_e)}\right]', \qquad e = 1, \ldots, N+1; \tag{6.14d}$$

III:

$$\left[\frac{\partial f^e}{\partial u^e}\right]' \lambda^e(\tau) + \left[\frac{\partial c^e}{\partial u^e}\right]' \mu^e(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1, \ldots, N+1; \tag{6.14e}$$

IV:

$$\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left[\frac{\partial h_i}{\partial p}\right]' = 0; \tag{6.14f}$$

V: As funções

$$H^e(\tau) \triangleq \sum_{j=1}^{n_{x^e}} \lambda_j^e(\tau) \dot{x}_j^e(\tau), \tag{6.14g}$$

são contínuas para todo $\tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1, \ldots, N+1;$

$$\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left\{ \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^1(t_0)}\right] \dot{x}^1(t_0) + \frac{\partial h_i}{\partial t_0} \right\} = 0; \tag{6.14h}$$

$$\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left\{ \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^e(t_e)}\right] \dot{x}^e(t_e) + \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^{e+1}(t_e)}\right] \dot{x}^{e+1}(t_e) + \frac{\partial h_i}{\partial t_e} \right\} = 0, \quad e = 1, \ldots, N; \tag{6.14i}$$

$$\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left\{ \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^{N+1}(t_{N+1})}\right] \dot{x}^{N+1}(t_{N+1}) + \frac{\partial h_i}{\partial t_{N+1}} \right\} = 0. \tag{6.14j}$$

6.3.4 - PROVA DAS CONDIÇÕES NECESSÁRIAS

A demonstração do Teorema 6.2 se faz às custas dos mecanismos já utilizados nas provas anteriores. Em particular, uma referência especial deve ser feita às provas dos Teoremas 5.2 e 6.1. Deste modo consideramos dispensável um desenvolvimento detalhado, ainda que fosse nos moldes do item 6.2.4. Em vista disto, colocaremos aqui tão somente um algorítmo de dedução, acompanhado da citação das passagens anteriores às quais cada etapa do algorítmo corresponde.

Assim, a fim de deduzir as expressões (6.14) deve-se, de posse do problema (6.12), e considerando as hipóteses H30–H34, seguir os seguintes passos:

Passo 1:

Reescreve-se o problema (6.12), prevendo a presença de quinas implícitas, seguindo o mesmo raciocínio que no item 5.3.4 permitiu passar do problema (5.21) para o problema (5.29). Aqui, em analogia com a montagem do problema (6.4), isto implicará numa mudança de notação, onde, no lugar de

$$x^m(\cdot)(m = 1, \ldots, N+1) \qquad \text{e} \qquad u^m(\cdot)(m = 1, \ldots, N+1);$$

teremos

$$\chi^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1) \qquad \text{e} \qquad \Upsilon^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1);$$

enquanto no lugar de

$$f^m(\cdot)(m = 1, \ldots, N+1); \qquad \text{e} \qquad c^m(\cdot)(m = 1, \ldots, N+1);$$

teremos

$$\ell^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1) \qquad \text{e} \qquad \varphi^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1).$$

Passo 2:

Recorre-se ao Teorema de Função Implícita (Teorema A.1) para, se apoiando em um particionamento dos vetores de controle $\Upsilon^e(\cdot)(e = 1, \ldots, M+1)$, obter um problema livre de restrições não-diferenciais, nos moldes do problema (5.31).

Passo 3 :

Obtem-se condições necessárias para o problema obtido no Passo 2 de forma análoga à dedução das expressões (5.32) no item 5.3.4. Tendo em vista a nova notação, estas condições necessárias deverão ser escritas utilizando-se

$$\Gamma^e(\cdot), \qquad \text{em vez de} \qquad \lambda^e(\cdot).$$

Passo 4 :

Define-se as funções vetoriais

$$\sigma^e(\cdot), \qquad e = 1, \ldots, M+1;$$

de maneira análoga às expressões (5.33) do item 5.3.4, e efetua-se as mesmas passagens que no item 5.3.4 levaram às equações (5.36), e que aqui levarão às equações:

$$\dot{\Gamma}^e(\tau) = -\left[\frac{\partial \ell^e}{\partial \chi^e}\right]' \Gamma^e(\tau) - \left[\frac{\partial \varphi^e}{\partial \chi^e}\right]' \sigma^e(\tau), \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \quad e = 1, \ldots, M+1; \tag{6.15a}$$

$$\left[\frac{\partial \ell^e}{\partial \Upsilon^e}\right]' \Gamma^e(\tau) + \left[\frac{\partial \varphi^e}{\partial \Upsilon^e}\right]' \sigma^e(\tau) = 0, \quad \tau \in [\xi_{e-1}, \xi_e], \quad e = 1, \ldots, M+1. \tag{6.15b}$$

Passo 5 :

Define-se

$$\lambda^e(\cdot) \triangleq [\lambda_1^e(\cdot); \ldots; \lambda_{n_{xe}}^e(\cdot)]', \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

e

$$\mu^e(\cdot) \triangleq [\mu_1^e(\cdot); \ldots; \mu_{n_{ce}}^e(\cdot)]', \qquad e = 1, \ldots, N+1;$$

e manipula-se os instantes de quina implícita, deduzindo a continuidade das funções $\lambda^e(\cdot)$ e $H^e(\cdot)$ para $\tau \in [t_{e-1}, t_e]$, $e = 1, \ldots, N+1$, chegando-se às expressões (6.14).

As funções $\lambda^e(\cdot)$ e $\mu^e(\cdot)$ são obtidas através do agrupamento, sobre o intervalo $[t_{e-1}, t_e]$, de todas as funções $\Gamma^k(\cdot)$ e $\sigma^k(\cdot)$ tais que $[\xi_{k-1}, \xi_k] \subset [t_{e-1}, t_e]$.

Isto completa a prova do Teorema 6.2.

6.4 - ALGUMAS GENERALIZAÇÕES ADICIONAIS

Neste item, através de algumas considerações adicionais, estende-se um pouco mais a abrangência dos resultados anteriores.

6.4.1 - PROBLEMAS COM QUINAS EXPLÍCITAS ENVOLVENDO INSTANTES INTERMEDIÁRIOS

A primeira consideração adicional a se fazer, se refere à possibilidade das restrições de contorno dos problemas (6.1) ou (6.12), envolverem instantes de quina explícita não coincidentes com os instantes de mutação da dinâmica. Na verdade, estes instantes de quina explícita podem ser vistos como casos especiais de mutação, onde a dinâmica do problema tem estrutura idêntica à esquerda e à direita da mesma.

O que se pretende mostrar é que, dentro de um exame mais cuidadoso, pode-se concluir que o problema (6.1) — ou (6.12) — no fundo prevê esta possibilidade. De fato, suponha que para

$$\tau \in [t_{\bar{e}}, t_{\bar{e}+k}],$$

o problema seja descrito pela mesma dinâmica.

Desde que os instantes

$$t_j, \qquad \bar{e} \leq j \leq \bar{e} + k,$$

estejam sequenciados, os resultados obtidos no item 6.3 continuam válidos, sem a necessidade de qualquer consideração adicional.

Portanto, a existência de quinas explícitas já está embutida nos problemas (6.1) e (6.12).

6.4.2 - PROBLEMAS COM QUINAS EXPLÍCITAS NÃO-SEQUENCIADAS

Desde que a dinâmica à esquerda e à direita de um ponto de mutação seja a mesma, como acontece nos instantes de quina explícita, a dedução anterior continua válida ainda que os instantes de quina explícita não estejam sequenciados.

De fato, depois do acompanhamento das deduções anteriores é muito fácil ver isto. Tão somente devemos acrescentar às condições anteriores pequenas modificações, as quais vamos agora descrever.

Suponha que

$$\text{para} \quad t_{\bar{e}} < t_j < t_{\bar{e}+k},$$

tenhamos os

$$t_j, \quad j = \bar{e} + 1, \ldots, \bar{e} + k - 1;$$

não sequenciados, correspondendo a cada um, uma quina explícita, de modo que

$$\text{para} \qquad \tau \in [t_{\bar{e}}, t_{\bar{e}+k}],$$

o problema possui a mesma dinâmica.

Seja

$$\left\{\xi_{\bar{e}}, \xi_{\bar{e}+1}, \ldots, \xi_{\bar{e}+k}\right\}$$

um conjunto que representa o sequenciamento de

$$\left\{t_{\bar{e}}, t_{\bar{e}+1}, \ldots, t_{\bar{e}+k}\right\}.$$

Naturalmente teremos

$$\xi_{\bar{e}} = t_{\bar{e}} \qquad \text{e} \qquad \xi_{\bar{e}+k} = t_{\bar{e}+k}.$$

Neste caso, para aproveitarmos as expressões (6.14) basta, para $\tau \in [t_{\bar{e}}, t_{\bar{e}+k}]$, no lugar de (6.14*b*), (6.14*c*), (6.14*d*), (6.14*e*), (6.14*g*) e (6.14*i*), respectivamente, escrevermos:

i:

$$\dot{\lambda}^m(\tau) = -\left[\frac{\partial f^m}{\partial x^m}\right]' \lambda^m(\tau) - \left[\frac{\partial c^m}{\partial x^m}\right]' \mu^m(\tau), \quad \tau \in [\xi_{m-1}, \xi_m], \quad m = \bar{e}+1, \ldots, \bar{e}+k; \qquad (6.14b')$$

$$\lambda^m(\xi_{m-1}) = \sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^m(\xi_{m-1})}\right]', \qquad m = \bar{e}, \ldots, \bar{e}+k; \qquad (6.14c')$$

$$\lambda^m(\xi_m) = -\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^m(\xi_m)}\right]', \qquad m = \bar{e}, \ldots, \bar{e}+k; \qquad (6.14d')$$

$$\left[\frac{\partial f^m}{\partial u^m}\right]' \lambda^m(\tau) + \left[\frac{\partial c^m}{\partial u^m}\right]' \mu^m(\tau) = 0, \quad \tau \in [\xi_{m-1}, \xi_m], \quad m = \bar{e}, \ldots, \bar{e}+k; \qquad (6.14e')$$

ii: As funções

$$H^m(\tau) \triangleq \sum_{j=1}^{n_{x^m}} \lambda_j^m(\tau) \dot{x}_j^m(\tau), \qquad (6.14g')$$

são contínuas para todo

$$\tau \in [\xi_{m-1}, \xi_m], \qquad m = \bar{e}, \ldots, \bar{e}+k;$$

$$\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left\{ \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^m(\xi_m)}\right] \dot{x}^m(\xi_m) + \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^{m+1}(\xi_m)}\right] \dot{x}^{m+1}(\xi_m) + \frac{\partial h_i}{\partial \xi_m} \right\} = 0, \quad m = \bar{e}, \ldots, \bar{e}+k. \quad (6.14i')$$

Em outras palavras, continuam válidas as expressões (6.14), exceto que para

$$e = \bar{e}, \ldots, \bar{e}+k;$$

os instantes $t_{\bar{e}}$ deverão receber uma reindexação que considere o não sequenciamento previsto.[1]

[1] Note que $x^m(\cdot)$ representa aqui o vetor de estado no m-ésimo intervalo de tempo sequenciado. Por isso a reindexação não afeta o vetor de estado. Já o m-ésimo instante de quina sequenciada, é representado por ξ_m, e não por t_m.

6.4.3 - PROBLEMAS COM LAPSO DE TEMPO

Nos problemas considerados ao longo do capítulo, até aqui, tem-se uma sequência de sub-intervalos a cada qual correspondendo uma dinâmica, sendo todos sequencialmente conectados, de modo que o final de um sub-intervalo coincide com o início do próximo. Agora, afim de ampliar um pouco mais a generalidade do presente desenvolvimento, consideremos a possibilidade de ocorrer alguns lapsos no interior do intervalo total $[t_0, t_{N+1}]$, ou seja, admitamos a possibilidade do final de um sub-arco não coincidir com o início do sub-arco seguinte, existindo deste modo entre eles um "vazio".

A dedução de condições necessárias para problemas desta natureza tem muito pouco a acrescentar sobre aquelas feitas nos itens 6.1 e 6.2. Na verdade, sem dificuldade, é possível confirmar que as condições necessárias a serem deduzidas para este caso, podem ser formalmente recuperadas a partir das condições necessárias anteriores, simplesmente introduzindo nelas um "buraco" sobre cada intervalo de lapso correspondente.

Para melhor compreender isto, considere que nos problema (6.12) os intervalos

$$[t_{e-1}, t_e] \quad \text{para} \quad e \in \left\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k\right\}$$

correspondam aos intervalos de lapso, ou seja, suponha que estes intervalos representem "vazios" sobre os quais a dinâmica existente é irrelevante para o problema. Naturalmente,

$$t_{e-1} \quad \text{e} \quad t_e \qquad \text{para} \quad e \in \left\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k\right\},$$

correpondem ao início e término de cada lapso, respectivamente.

Os lapsos introduzidos implicam nas seguintes alterações na formulação do problema (6.12):[2]

i: $x^e(\cdot)$ e $u^e(\cdot)$ para $e \in \left\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k\right\}$, deixarão de ser argumento do problema;

ii: Como consequência natural de (i), as funções $h_i (i = 0, 1, \ldots, n_h)$ nas expressões (6.12a) e (6.12b) deixarão de ter como argumento $x^e(t_{e-1})$ e $x^e(t_e)$, para todo $e \in \left\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k\right\}$;

iii: As equações (6.12c) e (6.12d) serão omitidas para os valores de e tais que

$$e \in \left\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k\right\}.$$

[2] Alterações correspondentes podem ser aplicadas ao problema (6.1).

Correspondendo a estas alterações no problema, teremos as seguintes alterações nas condições necessárias:

i: A definição das funções vetoriais

$$\lambda^e(\cdot) \quad \text{e} \quad u^e(\cdot),$$

é omitida para todo $e \in \left\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k\right\}$;

ii: As equações (6.14b)-(6.14e) não serão mais definidas para os valores de $e \in \left\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k\right\}$;

iii: As funções $H^e(\cdot)$, conforme (6.12g), não serão mais definidas para $e \in \left\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k\right\}$;

iv: Para os valores de e, tais que

$$e \in \left\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k\right\},$$

a expressão (6.14i) será desmembrada em:

$$\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left\{ \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^e(t_e)}\right] \dot{x}^e(t_e) + \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^{e+1}(t_e)}\right] \dot{x}^{e+1}(t_e) + \frac{\partial h_i}{\partial t_e} \right\} = 0,$$

$$\text{para} \qquad e = 1, \ldots, N, \qquad e \notin \left\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k\right\}, \qquad e+1 \notin \left\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k\right\}; \tag{6.16a}$$

$$\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left\{ \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^e(t_e)}\right] \dot{x}^e(t_e) + \frac{\partial h_i}{\partial t_e} \right\} = 0, \qquad e+1 \in \left\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k\right\}; \tag{6.16b}$$

$$\sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \left\{ \left[\frac{\partial h_i}{\partial x^{e+1}(t_e)}\right] \dot{x}^{e+1}(t_e) + \frac{\partial h_i}{\partial t_e} \right\} = 0, \qquad e \in \left\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k\right\}. \tag{6.16c}$$

Note que em (6.16b) estão sendo tomados os valores de e anteriores a $\left\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k\right\}$.

6.5 - COMENTÁRIOS

Para fechar o capítulo, considere os seguintes comentários:

a) Considerando as expressões (6.3c) e (6.3d), pode-se alternativamente reescrever (6.3h), (6.3i) e (6.3j) como:

$$[\lambda^1(t_0)]'\dot{x}^1(t_0) + \sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \frac{\partial h_i}{\partial t_0} = 0; \tag{6.3h'}$$

$$[\lambda^{e+1}(t_e)]'\dot{x}^{e+1}(t_e) - [\lambda^e(t_e)]'\dot{x}^e(t_e) + \sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \frac{\partial h_i}{\partial t_e} = 0, \qquad e = 1, \ldots, N; \tag{6.3i'}$$

$$-[\lambda^{N+1}(t_{N+1})]'\dot{x}^{N+1}(t_{N+1}) + \sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \frac{\partial h_i}{\partial t_{N+1}} = 0. \qquad (6.3j')$$

b) Observe que as expressões (6.14c), (6.14d), (6.14h), (6.14i) e (6.14j) são idênticas a (6.3c), (6.3d), (6.3h), (6.3i) e (6.3j). Isto significa que (6.3h'), (6.3i') e (6.3j') podem servir também como forma alternativa para (6.14h), (6.14i) e (6.14j).

c) Naturalmente este mesmo raciocínio pode ser levado ao item (6.5) . Assim as expressões (6.16a)–(6.16c) podem ser reescritas como:

$$[\lambda^{e+1}(t_e)]'\dot{x}^{e+1}(t_e) - [\lambda^{e}(t_e)]'\dot{x}^{e}(t_e) + \sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \frac{\partial h_i}{\partial t_e} = 0,$$

para $\quad e = 1, \ldots, N, \quad e \notin \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k\}, \quad e+1 \notin \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k\}; \qquad (6.16a')$

$$-[\lambda^{e}(t_e)]'\dot{x}^{e}(t_e) + \sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \frac{\partial h_i}{\partial t_e} = 0, \qquad e+1 \in \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k\}; \qquad (6.16b')$$

$$[\lambda^{e+1}(t_e)]'\dot{x}^{e+1}(t_e) + \sum_{i=0}^{n_h} \nu_i \frac{\partial h_i}{\partial t_e} = 0, \qquad e \in \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k\}. \qquad (6.16c')$$

d) No Capítulo 8, condições necessárias para problemas com lapso de tempo são utilizadas para, através de um processo limite, obter solução para um problema que em princípio não poderia ser solucionado com os resultados obtidos neste trabalho (vide item 8.6 , no Capítulo 8).

e) Segundo nossa pesquisa bibliográfica, os resultados obtidos ao longo deste capítulo são inéditos, não tendo sido encontradas na literatura existente, condições necessárias que se apliquem ao problema (6.12). Isto será comentado novamente, durante a discussão que será feita no Capítulo 9.

CAPÍTULO 7

CONSIDERAÇÕES SOBRE A TEORIA EXISTENTE

Estando concluidas as deduções teóricas que se pretendia, estabelece-se neste capítulo algumas considerações envolvendo a teoria existente. Julga-se que, após ter feito a leitura dos capítulos anteriores, o leitor esteja melhor preparado para explorar determinados pontos, os quais serão discutidos a seguir.

7.1 - SOBRE A OBTENÇÃO DE CONDIÇÕES NECESSÁRIAS COM O AUXÍLIO DE FUNÇÕES LAGRANGEANAS

Considere para o problema (3.1) a montagem do seguinte funcional lagrangeano,

$$L[x(\cdot);u(\cdot);\lambda(\cdot);\nu_0;\nu;t_0;t_1;p] \triangleq \sum_{i=0}^{n_h} \nu_i h_i + \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \sum_{j=1}^{n_x} \lambda_j(\tau) \Big[f_j[x(\tau);u(\tau);\tau] - \dot{x}_j(\tau) \Big] \Big\} d\tau, \tag{7.1}$$

$$\text{onde} \qquad \nu_0 + |\nu| \neq 0, \qquad \nu_0 \in \{0, 1\}.$$

A tarefa de determinar condições necessárias para uma solução estacionária de (7.1), tomadas para as funções envolvidas as hipóteses adotadas no Capítulo 3, constitui um problema elementar do cálculo de variações.

Por outro lado, como não é difícil provar, a solução do problema (3.1) deve ser estacionária para o funcional (7.1). De fato, adotando-se as condições de regularidade previstas no Capítulo 3, calculando-se a variação de (7.1) em relação às variáveis envolvidas, e recorrendo-se ao "*lema fundamental do cálculo de variações*", obtem-se como condições necessárias para uma solução estacionária de (7.1), resultados equivalentes aos do Teorema 3.1.

Assim, a montagem de (7.1) fornece uma maneira simples para se recuperar, a posteriori, via cálculo de variações, condições necessárias para o problema (3.1).

Conforme é deixado ao leitor a tarefa de verificar, desde que tomados alguns cuidados, este procedimento pode ser estendido aos problemas tratados nos Capítulos 4, 5 e 6.

Não obstante existam textos na literatura de controle ótimo onde a montagem formal de uma lagrangeana, e sua posterior variação, são utilizadas como procedimento de dedução de condições necessárias(vide Citron [13], Caps. 2 e 3), julga-se pertinente prevenir que tal procedimento seja encarado somente como uma forma de recuperar resultados já provados verdadeiros. De fato, a variação do funcional (7.1) (ou similares, nos casos estendidos aos Capítulos 4, 5 e 6), vista, não como um tratamento justificado a posteriori, mas como uma alternativa à dedução do Capítulo 3, carece de uma fundamentação teórica muito mais complexa do que pode parecer a primeira vista (Vide, por exemplo, Luemberger [48]).

A título de melhor esclarecimento, considere como ilustração a dedução de condições necessárias para a solução do problema (5.21). Uma aplicação precipitada, para este fim, do procedimento em discussão, poderia levar à seguinte conjectura:

"*Não poderia a hipótese H25 , presente no desenvolvimento do Capítulo 5, ser abolida?*"

À luz do procedimento em discussão, esta conjectura é bastante plausível, uma vez que os cálculos a serem efetuados não confrontam com a hipótese H25. Entretanto, apoiando-se em contra-exemplos, é fácil derrubá-la (caso seja de interesse, verifique exemplo resolvido por Jacobson et al. em [42], págs. 274–279).

7.2 - SOBRE A UTILIZAÇÃO DO FUNCIONAL OBJETIVO NA FORMA DE MAYER

Considere um problema de otimização dinâmica com o seguinte funcional objetivo:

$$J = h_0[x(t_0); x(t_1); t_0; t_1; p] + \left[\int_{t_0}^{t_1} \ell[x(\tau); u(\tau); \tau] d\tau\right]^2. \tag{7.2}$$

A colocação do funcional acima na forma de Mayer pode ser feita, prontamente, com o procedimento explicado no item 5.6.2. De fato, definindo a variável de estado adicional $x_{n_x+1}(\cdot)$ através de

$$\dot{x}_{n_x+1}(\tau) = \ell[x(\tau); u(\tau); \tau], \quad \tau \in [\tau_0, \tau_1]; \tag{7.3a}$$

$$x_{n_x+1}(t_0) = 0; \tag{7.3b}$$

podemos escrever, no lugar de (7.2),

$$J = h_0[x(t_0); x(t_1); t_0; t_1; p] + \left[x_{n_x+1}(t_1)\right]^2; \tag{7.3c}$$

que está na forma de Mayer.

Ainda com o auxílio de (7.3a) e (7.3b), pode-se colocar na forma de Mayer funcionais do tipo

$$J = \phi\left[x(t_0); x(t_1); t_0; t_1; p; \int_{t_0}^{t_1} \ell[x(\tau); u(\tau); \tau] d\tau\right] \tag{7.4}$$

que representa uma forma bastante genérica.

Não é difícil imaginar formas ainda mais genéricas para as quais o emprego de expressões como (7.3*a*) e (7.3*b*) permite colocá-las na forma de Mayer.

À luz dos problemas (4.30) ou (5.21), a utilização de expressões semelhantes a (7.3*a*)–(7.3*b*) proporciona colocar na forma de Mayer funcionais do tipo

$$J = \phi[x(t_0); x(t_1); x^+(t_1); \ldots; x(t_N); x^+(t_N); x(t_{N+1}); t_0; t_1; \ldots; t_{N+1}; p; I_1; \ldots; I_{N+1}], \qquad (7.5a)$$

$$\text{onde} \qquad I_e \triangleq \int_{t_{e-1}}^{t_e} \ell_e[x(\tau); u(\tau); \tau] d\tau, \qquad e = 1, \ldots, N+1; \qquad (7.5b)$$

ou até mais genéricos, conforme não é difícil concluir.

Observe que, na manipulação de funcionais conforme as expressões (7.4) ou (7.5), exceto em situações muito particulares, nenhum proveito se tem a tirar da possibilidade de tratar diretamente funcionais na forma de Bolza.

O que se está pretendendo com o presente raciocínio, é defender a idéia de que, do ponto de vista de padronização, e particularmente para a dedução de condições necessárias, parece mais prático tomar o funcional objetivo na forma de Mayer do que na forma de Bolza,[1] como feito ao longo dos Capítulos 3,4,5 e 6.

7.3 - SOBRE A UTILIZAÇÃO DAS FUNÇÕES SUPORTE DO CONTROLE E DO ESTADO ÓTIMOS

Para melhor avaliar a extensão da originalidade contida na utilização das funções suporte do controle e do estado ótimos, seria interessante que o leitor comparasse o desenvolvimento feito ao longo do Capítulo 3, com aquele feito por Gelfand e Fomin em [32], Cap. 3, págs. 55–59, onde a idéia, em essência, está presente.

Conforme já comentado anteriormente, a utilização das funções suporte do controle e do estado —funções $w(\cdot)$ e $z(\cdot)$, no Capítulo 3 — constitui um dos aspectos essenciais para a preservação da consistencia matemática das deduções aqui realizadas. Uma pesquisa na literatura existente, inclusive entre livros clássicos sobre cálculo de variações, propiciaria ao leitor a oportunidade de constatar que existem textos — alguns muito difundidos — com inconsistências teóricas

[1] Naturalmente existem circunstâncias em que pode-se tirar vantagem da forma de Bolza. É o que acontece, por exemplo, na solução de problemas lineares-quadráticos, sobretudo no que diz respeito ao tratamento numérico.

decorrentes da não utilização deste artifício, ou de artifícios substitutivos. É o que acontece, por exemplo, em Elsgolts [28], Cap. 7, págs. 341–352, um livro bastante referenciado e muito utilizado em cursos acadêmicos, por possuir — de fato — grande valor didático.[2]

7.4 - SOBRE O PRINCÍPIO DE MÁXIMO DE PRONTRYAGIN E AS CONDIÇÕES DE CONTINUIDADE DA FUNÇÃO HAMILTONIANA

Ao longo dos capítulos precedentes, foram feitos comentários a respeito das condições de continuidade da hamiltoniana, chamando-se a atenção para a ausência de tais condições em determinados estudos teóricos. É possível que tal fato tenha sua origem na avaliação incompleta, por parte de alguns autores, das implicações contidas no "princípio de máximo de Pontryagin", um resultado importante na teoria de controle ótimo, que serviu de base para muitos estudos posteriores. Pretende-se, neste item, tomando-se como referência uma das versões do princípio de máximo de Pontryagin, justificar esta suspeita.

7.4.1 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Para a apresentação do princípio de máximo, Pontryagin et al.(vide [62], Cap. 1, §7) consideram o problema de encontrar valores ótimos para

$$(y(\cdot), v(\cdot), \tau_0, \tau_1),$$

a saber

$$(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1),$$

tais que,

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0[x(\tau); u(\tau); \tau] d\tau \tag{7.6a}$$

seja mínimo, sujeito às equações diferenciais

$$\dot{x}_i(\tau) = f_i[x(\tau); u(\tau); \tau], \quad \tau \in [t_0, t_1], \qquad i = 1, \ldots, n_x; \tag{7.6b}$$

com:

$$x(t_0) = x^o; \tag{7.6c}$$

[2] No nosso entender, Elsgolts comete um pequeno engano em [28], ao não considerar que uma extremante $y(x, C_1, C_2)$ (vide notação do autor em [28], Cap. 7, págs. 341–342) em um problema variacional com contornos fixos, não está definida fora do intervalo de integração $[x_0, x_1]$. De fato, uma extremante tem que satisfazer a equação de Euler-Lagrange do problema variacional somente sobre o seu intervalo de definição. Assim, a comparação de duas extremantes distintas — uma definida sobre $[x_o, x_1]$, outra definida sobre $[x_0+dx_0, x_1+dx_1]$ — exige a construção de prolongamentos.

$$x(t_1) = x^1; \tag{7.6d}$$

sendo x^o, x^1 conhecidos e t_0, t_1 livres.

O vetor de controle $u(\cdot)$ deve satisfazer a restrição

$$u \in U, \tag{7.6e}$$

podendo $U \subset E^{n_u}$ ser aberto ou fechado.[3]

7.4.2 - HIPÓTESES

Para a dedução do princípio de máximo para o problema (7.6), Pontryagin et al. adotam as seguintes hipóteses:

H1: As variáveis de estado $x_i(\cdot)(i = 1, \ldots, n_x)$ devem ser funções contínuas para todo $\tau \in [t_0, t_1]$;

H2: As variáveis de controle $u_j(\cdot)(j = 1, \ldots, n_u)$ devem ser funções contínuas por partes[4] para todo $\tau \in [t_0, t_1]$;

H3: As funções $f_i(i = 0, 1, \ldots, n_x)$, $\partial f_i / \partial \tau (i = 0, 1, \ldots, n_x)$ e $\partial f_i / \partial x_j (i, j = 0, 1, \ldots, n_x)$ estão definidas e são contínuas em relação a todos os seus argumentos, para todo $x \in X$ (um sub-conjunto aberto do E^{n_x}), $u \in U$ e $\tau \in [t_0, t_1]$.

7.4.3 - CONDIÇÕES NECESSÁRIAS (PRINCÍPIO DE MÁXIMO)

Para a solução do problema (7.6) vale o seguinte resultado:

TEOREMA 7.1 :(Teorema 4 de [P4], págs. 60–61, reformulado)

Para que $(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$ resolva o problema (7.6), respeitadas as hipóteses H1–H3 anteriores, é necessário que exista uma função vetorial não nula contínua

$$\lambda(\cdot) \triangleq \left[\lambda_0(\cdot); \lambda_1(\cdot); \ldots; \lambda_{n_x}(\cdot)\right],$$

---

3 Em [62], Pontryagin et al. consideram também problemas com $x(t_0)$ e $x(t_1)$ móveis, e problemas com t_0 e t_1 fixos. Aqui, por nos ser satisfatório, basta que se considere problemas com $x(t_0)$, $x(t_1)$ fixos e t_0, t_1 livres.

4 Para o presente propósito, a hipótese de $u(\cdot)$ ser contínua por partes é satisfatória. Para considerações mais detalhadas a respeito da definição de uma classe de controles admissíveis para o princípio de máximo, vide [62], pág. 75.

satisfazendo as equações

$$\dot{\lambda}_i(\tau) = -\sum_{j=0}^{n_x} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \lambda_j(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1], \quad i = 0, 1, \ldots, n_x; \tag{7.7a}$$

tal que:

I: Para todo $\tau \in [t_0, t_1]$ *, a função*

$$H[\lambda(\tau); x(\tau); v(\tau); \tau] \triangleq \sum_{i=0}^{n_x} \lambda_i(\tau) f_i[x(\tau); v(\tau); \tau], \tag{7.7b}$$

vista como uma função da variável $v(\tau)$*, atinge seu valor supremo para* $v(\tau) \in U$ *no ponto* $v(\tau) = u(\tau)$*, ou seja,*

$$H[\lambda(\tau); x(\tau); u(\tau); \tau] \geq H[\lambda(\tau); x(\tau); v(\tau); \tau] \tag{7.7c}$$

para todo $v(\tau) \in U, \quad \tau \in [t_0, t_1]$;

II: São verdadeiras as relações

$$\lambda_0(\tau) = const. \leq 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{7.7d}$$

e

$$H[\lambda(\tau); x(\tau); u(\tau); \tau] = \int_{t_0}^{\tau} \sum_{j=0}^{n_x} \frac{\partial f_j}{\partial \tau} [x(\tau'); u(\tau'); \tau'] \lambda_j(\tau') d\tau'. \tag{7.7e}$$

Além disso acontece que, se $\lambda(\cdot)$, $x(\cdot)$ *e* $u(\cdot)$ *satisfazem* (7.6*b*), (7.7*a*) *e* (7.7*c*), *a função* $\lambda_0(\cdot)$ *é constante, e a função* $H[\lambda(\tau); x(\tau); u(\tau); \tau]$ *pode diferir da integral indicada em* (7.7*e*) *somente por uma constante. Desse modo, é suficiente verificar* (7.7*d*) *ou* (7.7*e*) *em um único instante* $\tau \in [t_0, t_1]$. *Ou seja, no lugar de* (7.7*d*) *e* (7.7*e*) *é suficiente verificar, por exemplo, as relações*

$$\lambda_0(t_1) \leq 0, \tag{7.7f}$$

$$H[\lambda(t_1); x(t_1); u(t_1); t_1] = 0. \tag{7.7g}$$

7.4.4 - COMENTÁRIOS

a) Observe que, de acordo com (7.7*e*), descontinuidades de primeira espécie em $u(\cdot)$ — em vista das propriedades de regularidade das demais funções envolvidas em (7.7*e*) — não poderão introduzir descontinuidades em $H[\,\cdot\,]$. Portanto, a continuidade da função hamiltoniana H está subentendida em (7.7*e*).

b) A continuidade da função hamiltoniana também pode ser deduzida de (7.7c). De fato, suponhamos o contrário, ou seja, que em determinado instante $t_i \in [t_0, t_1]$, a função $H[\cdot]$ sofra uma descontinuidade com

$$H\Big|_{t_i^+} \neq H\Big|_{t_i^-}. \tag{7.8a}$$

Considerando as hipóteses H1–H3, e a continuidade das funções $\lambda_i(\cdot)(i = 0, 1, \ldots, n_x)$, esta descontinuidade em $H[\cdot]$ tem que estar associada a uma descontinuidade no vetor de controle ótimo, com

$$u^+(t_i) \neq u^-(t_i). \tag{7.8b}$$

Considere primeiramente

$$H\Big|_{t_i^+} > H\Big|_{t_i^-}. \tag{7.8c}$$

Ora, se (7.8c) é verdadeira, como U não depende de τ, $u^-(t_i)$ não maximiza $H\Big|_{t_i^-}$, o que é um absurdo pois contraria (7.7c). De forma semelhante, invertendo a desigualdade em (7.8c), concluiríamos que $u^+(t_i)$ não maximizaria $H\Big|_{t_i^+}$, o que também seria um absurdo. Portanto, a única possibilidade é ocorrer

$$H\Big|_{t_i^+} = H\Big|_{t_i^-} \tag{7.9}$$

ainda que se tenha $u^+(t_i) \neq u^-(t_i)$, ou seja, a função hamiltoniana tem que ser contínua para todo $\tau \in [t_0, t_1]$.

c) Suponha, no caso de ser U um conjunto aberto, que as funções $\partial f_i/\partial u_j (i = 0, 1, \ldots, n_x;$ $j = 1, \ldots, n_u)$ estejam definidas e sejam contínuas. Neste caso, da condição (7.7c) pode-se deduzir como verdadeira

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0, \qquad j = 1, \ldots, n_u; \tag{7.10}$$

que é conhecida na literatura como equação de controle.

d) Conforme pode ser confirmado numa pesquisa bibliográfica, muitos autores apresentam condições necessárias para a solução de problemas de controle ótimo, na forma de um princípio de máximo, sem a apresentação de condições equivalentes à relação (7.7e), e sem a explicitação de condições de continuidade para a função hamiltoniana. Nesses casos, consideramos haver omissão de parte dos resultados. De fato, ainda que condições de continuidade para a hamiltoniana possam ser deduzidas a posteriori com raciocínio semelhante ao do comentário (b) anterior, consideramos, numa visão pessoal fundamentada, que esta tarefa não deve ser deixada para o usuário dos resultados.

e) É importante observar que não se pode obter a continuidade da hamiltoniana a partir de (7.10). Isto tem que ser levado em conta caso haja interesse, quando da utilização do princípio de máximo, em se trabalhar com (7.10) em substituição a (7.7c).

f) A obtenção de uma equação de controle a partir da expressão (7.7c), é possível em outras situações que não aquela prevista no comentário (c) anterior. É o que ocorre, por exemplo, nos casos em que se tem

$$U \triangleq \left\{ u \in E^{n_u}, \quad \text{tal que} \quad c_i(u) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, n_c \right\},$$

$$\text{com} \quad \text{posto} \ \left\{ \frac{\partial c}{\partial u} \right\} = n_c,$$

e nos quais se recorre ao Teorema de Khun-Tucker (vide Luemberger [48], pág. 249). Naturalmente, neste caso a equação de controle terá uma forma mais complexa do que (7.10). Apesar disso, continua valendo o exposto no comentário (e).

g) Os comentários (e) e (f) tornam mais evidente a argumentação exposta no comentário (d).

h) Aspectos interessantes relacionados com as condições de continuidade da hamiltoniana estão presentes em Cesar [12]. Fatos curiosos ligados à inclusão destas condições no conjunto de condições necessárias podem ser identificados em Reid [63], pág. 72 , e Guinn [36], pág. 188.

CAPÍTULO 8

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

8.1 - INTRODUÇÃO

Uma vez terminado o desenvolvimento teórico desejado, apresenta-se neste capítulo uma série de exemplos resolvidos. Os exemplos foram escolhidos com um enfoque didático. Por isto eles foram elaborados com a maior simplicidade que se conseguiu, compondo um total de sete exemplos , cada um visando uma característica em particular. Conta-se com a compreensão do leitor quanto à dificuldade de se elaborar exemplos resolvíveis em forma fechada, em se tratando de problemas de controle ótimo.

A fim de propiciar um maior contato com a teoria, mas sem se esquecer da preocupação de se evitar um texto excessivamente grande, alguns exemplos foram resolvidos de forma aberta, chegando-se à solução final com explicitação do raciocínio intermediário.

8.2 - SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA COM O VETOR DE ESTADO DESCONTÍNUO

Como primeiro exemplo de aplicação dos resultados obtidos nos capítulos anteriores, considere o problema de minimizar

$$J = \int_0^2 \left\{ [x_2(\tau)]^2 - 1 \right\}^2 d\tau, \tag{8.1a}$$

sujeito a:

$$x_1(0) = x_1(2) = 1; \tag{8.1b}$$

$$\dot{x}_1(\tau) = x_2(\tau); \tag{8.1c}$$

$$\dot{x}_2(\tau) = u_1(\tau). \tag{8.1d}$$

A variável de estado $x_1(\cdot)$ deve ser contínua para todo $\tau \in [0, 2]$. Diferentemente, $x_2(\cdot)$ poderá sofrer uma única descontinuidade, de valor livre, em um instante $\tau \in (0, 2)$ também livre.

Com a definição de uma variável de estado adicional, e com pequenos algebrismos já descritos no Capítulo 5, podemos reescrever o problema (8.1) como:

Encontrar valores ótimos para

$$(y(\cdot), v(\cdot), \tau_0, \tau_1, \tau_2),$$

a saber,

$$(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, t_2),$$

tais que

$$h_0 = x_3(t_2) \tag{8.2a}$$

seja mínimo, com

$$h_1 = t_0 = 0; \tag{8.2b}$$

$$h_2 = t_2 - 2 = 0; \tag{8.2c}$$

$$h_3 = x_1(t_0) - 1 = 0; \tag{8.2d}$$

$$h_4 = x_1(t_2) - 1 = 0; \tag{8.2e}$$

$$h_5 = x_3(t_0) = 0; \tag{8.2f}$$

$$h_6 = x_1^+(t_1) - x_1(t_1) = 0; \tag{8.2g}$$

$$h_7 = x_3^+(t_1) - x_3(t_1) = 0; \tag{8.2h}$$

$$\dot{x}_1(\tau) = x_2(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_2]; \tag{8.2i}$$

$$\dot{x}_2(\tau) = u_1(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_2]; \tag{8.2j}$$

$$\dot{x}_3(\tau) = \Big[[x_2(\tau)]^2 - 1\Big]^2, \quad \tau \in [t_0, t_2]. \tag{8.2k}$$

As variáveis de estado $x_i(\cdot)(i = 1, 2, 3)$ deverão ser contínuas para todo $\tau \in [t_0, t_2]$, $\tau \notin \{t_1\}$.

Ao problema (8.2) aplicam-se os resultados do item 4.3 , o que, com o auxílio do Teorema 4.2 , nos permite afirmar, como condições necessárias para a solução do problema (8.2), a existência de multiplicadores

$$\nu_0, \qquad \nu \triangleq [\nu_1; \ldots; \nu_7]',$$

e de funções $\lambda_i(\cdot)(i = 1, 2, 3)$, tais que valem:

I:

$$\nu_0 + |\nu| \neq 0, \qquad \nu_0 \in \{0, 1\}; \tag{8.3a}$$

II: $\lambda_i(\cdot)(i = 1, 2, 3)$ são contínuas para todo

$$\tau \in [t_0, t_2], \quad \tau \notin \{t_1\};$$

com

$$\dot{\lambda}_1(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_2]; \tag{8.3b}$$

$$\dot{\lambda}_2(\tau) = -\lambda_1(\tau) - 4\lambda_3(\tau)x_2(\tau)\Big[[x^2(\tau)]^2 - 1\Big], \quad \tau \in [t_0, t_2]; \tag{8.3c}$$

$$\dot{\lambda}_3(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_2]; \tag{8.3d}$$

$$\lambda_1(t_0) = \nu_3; \tag{8.3e}$$

$$\lambda_2(t_0) = 0; \tag{8.3f}$$

$$\lambda_3(t_0) = \nu_5; \tag{8.3g}$$

$$\lambda_1(t_1) = \nu_6; \tag{8.3h}$$

$$\lambda_2(t_1) = 0; \tag{8.3i}$$

$$\lambda_3(t_1) = \nu_7; \tag{8.3j}$$

$$\lambda_1^+(t_1) = \nu_6; \tag{8.3k}$$

$$\lambda_2^+(t_1) = 0; \tag{8.3l}$$

$$\lambda_3^+(t_1) = \nu_7; \tag{8.3m}$$

$$\lambda_1(t_2) = -\nu_4; \tag{8.3n}$$

$$\lambda_2(t_2) = 0; \tag{8.3o}$$

$$\lambda_3(t_2) = -\nu_0; \tag{8.3p}$$

III:

$$\lambda_2(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_2]; \tag{8.3q}$$

IV: a função

$$H(\tau) \triangleq \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\tau)\dot{x}_i(\tau) \tag{8.3r}$$

é contínua para todo $\tau \in [t_0, t_2]$, $\tau \notin \Big\{t_1\Big\}$, com

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i(t_0)\dot{x}_i(t_0) = \nu_1; \tag{8.3s}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^+(t_1)\dot{x}_i^+(t_1) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(t_1)\dot{x}_i(t_1); \tag{8.3t}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i(t_2)\dot{x}_i(t_2) = \nu_2. \tag{8.3u}$$

De (8.3*b*), (8.3*h*), (8.3*k*) e da continuidade de $\lambda_1(\cdot)$ para $\tau \neq t_1$, deduzimos:

$$\lambda_1(\tau) = c_1 = \text{const.} \qquad \text{para} \quad \tau \in [t_0, t_2]. \tag{8.4a}$$

Por outro lado, (8.3*q*) fornece

$$\lambda_2(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_2]; \tag{8.4b}$$

o que está compatível com (8.3*i*) e (8.3*l*).

De forma semelhante, considerando (8.3*d*), (8.3*j*) e (8.3*m*), juntamente com a continuidade de $\lambda_3(\cdot)$ para $\tau \in [t_0, t_2]$, $\tau \neq t_1$, deduzimos:

$$\lambda_3(\tau) = c_3 = \text{const.}, \quad \tau \in [t_0, t_2]. \tag{8.4c}$$

Levando (8.4*a*),(8.4*b*) e (8.4*c*) em (8.3*c*), obtemos:

$$0 = -c_1 - 4c_3 x_2(\tau)\Big[[x_2(\tau)]\Big]^2, \quad \tau \in [t_0, t_2]. \tag{8.4d}$$

Mas de (8.3*p*) obtemos:

$$c_3 = -\nu_0. \tag{8.4e}$$

De (8.4*e*) deduzimos que, sendo

$$\nu_0 = 0,$$

teremos

$$c_3 = 0,$$

o que, por sua vez, levado em (8.4*d*) fornece

$$c_1 = 0,$$

e que implica em

$$\lambda_1(\tau) = \lambda_2(\tau) = \lambda_3(\tau) = 0, \quad \text{para} \quad \tau \in [t_0, t_2];$$

o que viola a condição (8.3*a*), conforme pode ser facilmente confirmado com uma análise das equações (8.3*e*)–(8.3*p*), (8.3*s*) e (8.3*u*).

Portanto, o problema não admite solução irregular, e devemos ter

$$\nu_0 = 1. \tag{8.4f}$$

Em vista de (8.4f), a partir de (8.4e) obtemos

$$c_3 = -1. \tag{8.4g}$$

A substituição de (8.4g) em (8.4d) fornece

$$4x_2(\tau)\Big[[x_2(\tau)]^2 - 1\Big] = c_1 = \text{const.}\ , \qquad \tau \in [t_0, t_2]; \tag{8.4h}$$

o que revela ser $x_2(\cdot)$ uma função constante por partes, podendo assumir os valores das três raizes da equação cúbica traduzida em (8.4h).

Por outro lado, sendo $x_2(\cdot)$ constante por partes, deduzimos de (8.2j) que

$$u_1(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_2]. \tag{8.4i}$$

A equação (8.4i) revela que o problema não possui quinas implícitas. A única quina possível ocorrerá em t_1, o instante no qual $x_2(\cdot)$ está liberada para sofrer uma descontinuidade.

Considerando que

$$x_2(\tau) = \begin{cases} x_2(t_1) = \text{const.}\ , & \tau \in [t_0, t_1]; \\ x_2^+(t_1) = \text{const.}\ , & \tau \in (t_1, t_2]; \end{cases} \tag{8.5a}$$

e integrando (8.2i), encontramos:

$$x_1(\tau) = \begin{cases} x_2(t_1)\tau + 1, & \tau \in [t_0, t_1]; \\ x_2^+(t_1)[\tau - 2] + 1, & \tau \in (t_1, t_2]. \end{cases} \tag{8.5b}$$

Da continuidade de $x_1(\cdot)$ deduzimos

$$x_2(t_1)t_1 = x_2^+(t_1)[t_1 - 2]; \tag{8.6a}$$

e da equação (8.3t), que estabelece condições de continuidade para a função hamiltoniana, encontramos

$$c_1 x_2^+(t_1) - \Big[[x_2^+(t_1)]^2 - 1\Big]^2 = c_1 x_2(t_1) - \Big[[x_2(t_1)]^2 - 1\Big]^2. \tag{8.6b}$$

A equação (8.4h), por sua vez, avaliada em t_1 fornece

$$4x_2(t_1)\Big[[x_2(t_1)]^2 - 1\Big]^2 = c_1; \qquad (8.6c)$$

$$4x_2^+(t_1)\Big[[x_2^+(t_1)]^2 - 1\Big]^2 = c_1. \qquad (8.6d)$$

As equações (8.6) representam um sistema algébrico não-linear de quatro equações nas quatro incógnitas

$$c_1, x_2(t_1), x_2^+(t_1), t_1,$$

que resolvido leva a três soluções estacionárias (veja Fig. 8.1), quais sejam:

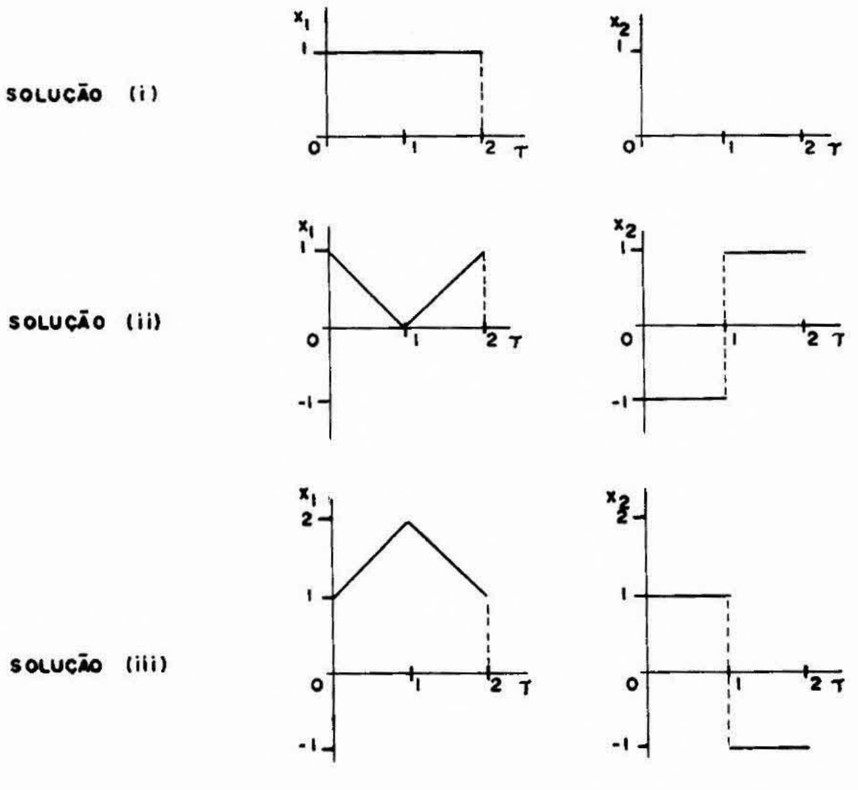

Fig. 8.1 - Soluções estacionárias para o primeiro exemplo.

i)

$$x_1(\tau) = 0, \quad \tau \in [0,2]; \qquad x_2(\tau) = 0, \quad \tau \in [0,2];$$

$$x_3(\tau) = 0, \quad \tau \in [0,2]; \qquad u_1(\tau) = 0, \quad \tau \in [0,2];$$

$$J = h_0 = 2;$$

$$\lambda_1(\tau) = \lambda_2(\tau) = 0, \quad \tau \in [0, 2]; \qquad \lambda_3(\tau) = 1, \quad \tau \in [0, 2];$$

$$\nu_0 = 1; \quad \nu_1 = -1; \quad \nu_2 = \nu_5 = \nu_7 = 1; \quad \nu_3 = \nu_4 = \nu_6 = 0.$$

ii)

$$x_1(\tau) = \begin{cases} -\tau + 1, & \tau \in [0, 1]; \\ \tau - 1, & \tau \in (1, 2]; \end{cases} \qquad x_2(\tau) = \begin{cases} -1, & \tau \in [0, 1]; \\ 1, & \tau \in (1, 2]; \end{cases}$$

$$x_3(\tau) = 0, \quad \tau \in [0, 2]; \qquad u_1(\tau) = 0, \quad \tau \in [0, 2];$$

$$t_1 = 1; \qquad J = h_0 = 0;$$

$$\lambda_1(\tau) = \lambda_2(\tau) = 0, \quad \tau \in [0, 2]; \qquad \lambda_3(\tau) = 1, \quad \tau \in [0, 2];$$

$$\nu_0 = 1; \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = \nu_6 = 0; \quad \nu_5 = \nu_7 = 1;$$

iii)

$$x_1(\tau) = \begin{cases} \tau + 1, & \tau \in [0, 1]; \\ -\tau + 2, & \tau \in (1, 2]; \end{cases} \qquad x_2(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in [0, 1]; \\ -1, & \tau \in (1, 2]; \end{cases}$$

$$x_3(\tau) = 0, \quad \tau \in [0, 2]; \qquad u_1(\tau) = 0, \quad \tau \in [0, 2];$$

$$t_1 = 1; \qquad J = h_0 = 0;$$

$$\lambda_1(\tau) = \lambda_2(\tau) = 0, \quad \tau \in [0, 2]; \qquad \lambda_3(\tau) = 1, \quad \tau \in [0, 2];$$

$$\nu_0 = 1; \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = \nu_6 = 0; \quad \nu_5 = \nu_7 = 1;$$

É possível verificar que a primeira solução estacionária, aquela com estado contínuo, se trata na verdade de um máximo local. Esta, portanto, é espúria do ponto de vista de minimização. Quanto às duas últimas, as quais possuem uma descontinuidade em $x_2(\cdot)$ para $\tau = 1$, se tratam de fato de duas soluções para o problema. Ambas fornecem para o funcional o valor zero, que se trata, como é fácil confirmar, do menor valor possível.

8.3 - UM EXEMPLO DE PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO COM SOLUÇÃO IRREGULAR.

Para exemplificar problemas com soluções irregulares, considere desta vez o problema de controle ótimo de minimizar

$$J = \frac{1}{2}[x_1(1)]^2 + \int_0^1 u_1(\tau)d\tau \tag{8.7a}$$

sujeito a:

$$x_1(1) - x_1(0) - 1 = 0; \tag{8.7b}$$

e

$$\dot{x}_1(\tau) = 1 + [u_1(\tau)]^2, \quad \tau \in [0,1]; \tag{8.7c}$$

devendo ser $x_1(\cdot)$ contínua para todo $\tau \in [0,1]$.

Às custas de pequenas manipulações, podemos reescrever o problema (8.7) como:

Encontrar valores ótimos para

$$(y_1(\cdot), y_2(\cdot), v_1(\cdot), \tau_0, \tau_1),$$

a saber,

$$(x_1(\cdot), x_2(\cdot), u_1(\cdot), t_0, t_1),$$

tais que

$$h_0 = \frac{1}{2}[x_1(t_1)]^2 + x_2(t_1) \tag{8.8a}$$

seja um mínimo, com:

$$h_1 = x_1(t_1) - x_1(t_0) - 1 = 0; \tag{8.8b}$$

$$h_2 = x_2(t_0) = 0; \tag{8.8c}$$

$$h_3 = t_1 - 1 = 0; \tag{8.8d}$$

$$h_4 = t_0 = 0; \tag{8.8e}$$

$$\dot{x}_1(\tau) = 1 + [u_1(\tau)]^2, \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{8.8f}$$

$$\dot{x}_2(\tau) = u_1(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{8.8g}$$

devendo ser $x_1(\cdot)$ e $x_2(\cdot)$ contínuas para todo $\tau \in [t_0, t_1]$.

O problema (8.8) está segundo a formulação do item 4.3. As manipulações que permitiram a passagem das equações (8.7) para as equações (8.8), estão todas entre aquelas que foram abordadas no item 5.5.

As condições necessárias para a solução do problema (8.8), de acordo com o Teorema 4.2, implicam na existência de multiplicadores

$$\nu_0, \qquad \nu \triangleq [\nu_1; \ldots; \nu_4],$$

e funções $\lambda_i(\cdot)(i = 1, 2)$, tais que se verifiquem:

I:

$$\nu_0 + |\nu| \neq 0, \qquad \nu_0 \in \Big\{0, 1\Big\}; \tag{8.9a}$$

II: $\lambda_i(\cdot)(i = 1, 2)$ são funções contínuas para $\tau \in [t_0, t_1]$, com:

$$\dot{\lambda}_1(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{8.9b}$$

$$\dot{\lambda}_2(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{8.9c}$$

$$\lambda_1(t_0) = \nu_1; \tag{8.9d}$$

$$\lambda_2(t_0) = -\nu_2; \tag{8.9e}$$

$$\lambda_1(t_1) = \nu_0 x_1(t_1) + \nu_1; \tag{8.9f}$$

$$\lambda_2(t_1) = \nu_0; \tag{8.9g}$$

III:

$$2\lambda_1(\tau)u_1(\tau) + \lambda_2(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{8.9h}$$

IV: a função

$$H(\tau) \triangleq \sum_{i=1}^{2} \lambda_i(\tau)\dot{x}_i(\tau) \tag{8.9i}$$

é contínua para todo $\tau \in [t_0, t_1]$;

$$\sum_{i=1}^{2} \lambda_i(t_0)\dot{x}_i(t_0) = -\nu_4; \tag{8.9j}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \lambda_i(t_1)\dot{x}_i(t_1) = \nu_3. \tag{8.9k}$$

Das equações (8.9b)–(8.9d) e (8.9g), e da continuidade das funções $\lambda_j(\cdot)(j = 1, 2)$, para $\tau \in [t_0, t_1]$, deduzimos imediatamente que

$$\lambda_1(\tau) = \nu_1, \quad \tau \in [0, 1]; \tag{8.10a}$$

$$\lambda_2(\tau) = \nu_0, \quad \tau \in [0, 1]. \tag{8.10b}$$

Agora, consideremos a possibilidade de ocorrer uma solução regular, ou seja, adotemos

$$\nu_0 = 1. \tag{8.11a}$$

Sob esta hipótese, a consideração simultânea de (8.10a), (8.10b), (8.11a), (8.9d) e (8.9f), fornece:

$$\lambda_2(\tau) = 1, \quad \tau \in [0,1]; \tag{8.11b}$$

$$\nu_2 = -1; \tag{8.11c}$$

$$x_1(0) = -1; \tag{8.11d}$$

$$x_1(1) = 0. \tag{8.11e}$$

A equação (8.8f), por sua vez, integrada, fornece:

$$x_1(1) = x_1(0) + 1 + \int_0^1 [u_1(\tau)]^2 d\tau. \tag{8.11f}$$

Substituindo (8.11d) e (8.11e) em (8.11f), obtemos

$$\int_0^1 [u_1(\tau)]^2 d\tau = 0,$$

o que implica em

$$u_1(\tau) = 0, \quad \tau \in [0,1]. \tag{8.11g}$$

A substituição de (8.11g) em (8.9h) leva a

$$\lambda_2(\tau) = 0, \quad \tau \in [0,1]. \tag{8.11h}$$

As equações (8.11b) e (8.11h) são incompatíveis, o que significa que o problema em estudo não possui solução regular, tornando-se falsas as equações (8.11).

Deste modo nos resta testar a possibilidade de ocorrer soluções irregulares, ou seja, adotemos

$$\nu_0 = 0. \tag{8.12a}$$

As equações (8.10) continuam valendo, donde concluimos que

$$\lambda_2(\tau) = 0, \quad \tau \in [0,1]. \tag{8.12b}$$

Levando-se em consideração (8.10a), não é difícil verificar que, se $\nu_1 = 0$, a relação (8.9a) é violada. Portanto, devemos ter $\nu_1 \neq 0$, o que levado a (8.9h) juntamente com (8.12b), fornece

$$u_1(\tau) = 0, \quad \tau \in [0,1]. \tag{8.12c}$$

Assim, teremos como solução irregular das equações (8.9):

$$x_1(\tau) = \tau + x_1(0), \quad \tau \in [0,1]; \tag{8.12d}$$

$$x_2(\tau) = 0, \quad \tau \in [0,1]; \tag{8.12e}$$

$$u_1(\tau) = 0, \quad \tau \in [0,1]; \tag{8.12f}$$

$$\lambda_1(\tau) = \nu_1 \neq 0, \quad \tau \in [0,1]; \tag{8.12g}$$

$$\lambda_2(\tau) = 0, \quad ; \tag{8.12h}$$

$$\nu_2 = 0; \quad \nu_3 = \nu_1 = -\nu_4. \tag{8.12i}$$

Os valores de $x_1(0)$ e $x_1(1)$ permanecem indeterminados (exceto pela amarração estabelecida através de (8.8b)), ou seja, as equações (8.9), por si mesmas, não são suficientes para fornecer a solução de forma completa.

Devemos observar, entretanto, que (8.12f) representa agora uma condição adicional. Diante disto, iremos incorporá-la ao problema, na tentativa de obter a solução de forma completa. Com este intuito, ao problema (8.8) incorporamos a restrição não-diferencial

$$c_1 \triangleq u_1(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]. \tag{8.8h}$$

Para o novo problema recorremos ao Teorema 5.2, que fornece como condições necessárias as mesmas expressões (8.9) anteriores, exceto que no lugar de (8.9h) devemos ter

$$2\lambda_1(\tau)u_1(\tau) + \lambda_2(\tau) + \mu_1(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]. \tag{8.9h'}$$

Não é difícil verificar que continua existindo uma solução irregular, representada pelas mesmas equações (8.12) anteriores, às quais deve-se acrescentar

$$\mu_1(\tau) = 0, \quad \tau \in [0,1]. \tag{8.12j}$$

Esta possibilidade, obviamente, representa a recuperação da situação anterior. Entretanto, o problema aumentado possuirá também uma única solução regular, qual seja:

$$x_1(\tau) = \tau - 1, \quad \tau \in [0,1]; \tag{8.13a}$$

$$x_2(\tau) = 0, \quad \tau \in [0,1]; \tag{8.13b}$$

$$u_1(\tau) = 0, \quad \tau \in [0,1]; \tag{8.13c}$$

com:

$$\lambda_1(\tau) = \nu_1, \quad \tau \in [0,1]; \tag{8.13d}$$

$$\lambda_2(\tau) = 1, \quad \tau \in [0,1]; \tag{8.13e}$$

$$\mu_1(\tau) = -1, \quad \tau \in [0,1]; \tag{8.13f}$$

$$\nu_0 = 1; \quad \nu_2 = -1; \quad \nu_1 = \nu_3 = -\nu_4. \tag{8.13g}$$

Esta solução representa de fato a solução ótima. Devemos observar que ela se tornou obtível porque, com a introdução da restrição (8.8h), a restrição (8.8b) passou a ser do tipo irrelevante, o que está refletido na arbitrariedade em se escolher o valor de ν_1 nas expressões (8.13).

Uma outra maneira de obter a solução completa do problema (8.8) decorre da observação de que, uma vez deduzida a condição subsidiária (8.8h), o problema a ser resolvido pode ser imediatamente reduzido a encontrar o valor mínimo de

$$h_0 = \frac{1}{2}[x_1(1)]^2,$$

sujeito a

$$h_1 = x_1(1) - x_1(0) - 1 = 0;$$

que se trata de um problema de programação matemática muito simples. Sua solução é

$$x_1(0) = -1;$$

$$x_1(1) = 0;$$

que coincide, de fato, com a solução obtida anteriormente.

8.4 - SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA COM RESTRIÇÃO NÃO-DIFERENCIAL DE DESIGUALDADE NO VETOR DE ESTADO

Através de um exemplo, iremos levantar neste item alguns aspectos importantes envolvendo a solução de problemas com restrições não-diferenciais de desigualdade no vetor de estado, particularmente no que se refere à utilização da técnica de representação do tipo Valentine.

Para isso, considere o problema de minimizar

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 [u_1(\tau)]^2 d\tau, \tag{8.14a}$$

sujeito às restrições

$$x_1(0) = 0; \tag{8.14b}$$

$$\dot{x}_1(\tau) = u_1(\tau), \quad \tau \in [0,1]; \tag{8.14c}$$

$$s[x_1(\tau);\tau] = x_1(\tau) - \tau + 1/2 \geq 0, \quad \tau \in [0,1]; \tag{8.14d}$$

devendo ser $x_1(\cdot)$ e $u_1(\cdot)$ contínua e contínua por partes, respectivamente, para $\tau \in [0,1]$.

Seguindo as idéias descritas anteriormente, com o auxílio de uma variável de folga, colocamos a restrição (8.14d) na forma de uma igualdade. Para isto escrevemos

$$c_1^* = x_1(\tau) - \tau + 1/2 - [z(\tau)]^2 = 0, \quad \tau \in [0,1]; \tag{8.14d'}$$

tendo $z(\cdot)$, em princípio, status de variável de controle.

Como é típico nas restrições no estado, podemos verificar facilmente que (8.14d') viola a hipótese H25 nos sub-arcos da solução ótima nos quais (8.14d) for satisfeita na igualdade.

Contudo, sendo $s[x_1(\tau);\tau]$ contínua para todo o intervalo $[0,1]$, $z(\cdot)$ pode ser tomada como contínua em $[0,1]$, assumindo assim status de variável de estado, o que permitirá reescrever o problema (8.14) como:

Minimizar

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 [u_1(\tau)]^2 d\tau, \tag{8.15a}$$

sujeito às restrições

$$x_1(0) = 0; \tag{8.15b}$$

$$\dot{x}_1(\tau) = u_1(\tau), \quad \tau \in [0,1]; \tag{8.15c}$$

$$\dot{x}_2(\tau) = u_2(\tau), \quad \tau \in [0,1]; \tag{8.15d}$$

$$x_1(\tau) - \tau + 1/2 - [u_2(\tau)]^2 = 0, \quad \tau \in [0,1]; \tag{8.15e}$$

devendo ser $x_1(\cdot)$ e $x_2(\cdot)$ contínuas, e $u_1(\cdot)$ e $u_2(\cdot)$ contínuas por partes, para $\tau \in [0,1]$, respectivamente. Deve ser notado que $x_2(\cdot)$ está aqui representando $z(\cdot)$.

Efetuando o tratamento de (8.15e) através de derivação no tempo, e após pequenas manipulações, podemos reescrever o problema (8.15) como:

Encontrar valores ótimos para

$$(y(\cdot), v(\cdot), \tau_0, \tau_1),$$

a saber,

$$(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1),$$

tais que

$$h_0 = x_3(t_1) \tag{8.16a}$$

seja um mínimo, com:

$$h_1 = t_0 = 0; \tag{8.16b}$$

$$h_2 = t_1 - 1 = 0; \tag{8.16c}$$

$$h_3 = x_1(t_0) = 0; \tag{8.16d}$$

$$h_4 = x_3(t_0) = 0; \tag{8.16e}$$

$$h_5 = x_1(t_1) - t_1 + 1/2 - [x_2(t_1)]^2 = 0; \tag{8.16f}$$

$$\dot{x}_1(\tau) = u_1(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{8.16g}$$

$$\dot{x}_2(\tau) = u_2(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{8.16h}$$

$$\dot{x}_3(\tau) = \frac{1}{2}[u_1(\tau)]^2, \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{8.16i}$$

$$c_1 = u_1(\tau) - 1 - 2x_2(\tau)u_2(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]. \tag{8.16j}$$

As variáveis $x_i(\cdot)(i = 1, 2, 3)$ devem ser contínuas para $\tau \in [t_0, t_1]$, enquanto que $u_j(\cdot)(j = 1, 2)$ devem ser contínuas por partes neste mesmo intervalo.

Notemos que o problema (8.16) está conforme a formulação (5.21). Além disso,

$$\left[\frac{\partial c}{\partial u}\right] = \left[\frac{\partial c_1}{\partial u_1}; \frac{\partial c_1}{\partial u_2}\right] = \left[1, -2x_2(\tau)\right], \quad \tau \in [t_0, t_1];$$

o que significa que

$$\text{posto } \left\{\frac{\partial c}{\partial u}\right\} = n_c = 1 \quad \text{para todo} \quad \tau \in [t_0, t_1].$$

Supondo, por hora, que $u_2(\cdot)$ assuma somente valores finitos para $\tau \in [0, 1]$ — o que, conforme concluiremos adiante, não é verdade — apliquemos o Teorema 5.2 para afirmar como condição necessária para a solução de (8.16) a existência de multiplicadores

$$\nu_0, \qquad \nu \triangleq [\nu_1; \ldots; \nu_5]',$$

e funções vetoriais

$$\lambda(\cdot) \triangleq [\lambda_1(\cdot); \ldots; \lambda_3(\cdot)]',$$

$$\mu(\cdot) \triangleq [\mu_1(\cdot)]',$$

tais que se verifiquem:

I:

$$\nu_0 + |\nu| \neq 0, \qquad \nu_0 \in \{0, 1\}; \tag{8.17a}$$

II: $\lambda_i(\cdot)(i = 1, 2, 3)$ são contínuas para todo $\tau \in [t_0, t_1]$, com:

$$\dot{\lambda}_1(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{8.17b}$$

$$\dot{\lambda}_2(\tau) = 2\mu_1(\tau)u_2(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{8.17c}$$

$$\dot{\lambda}_3(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{8.17d}$$

$$\lambda_1(t_0) = \nu_3; \tag{8.17e}$$

$$\lambda_2(t_0) = 0; \tag{8.17f}$$

$$\lambda_3(t_0) = \nu_4; \tag{8.17g}$$

$$\lambda_1(t_1) = -\nu_5; \tag{8.17h}$$

$$\lambda_2(t_1) = 2\nu_5 x_2(t_1); \tag{8.17i}$$

$$\lambda_3(t_1) = -\nu_0; \tag{8.17j}$$

III:

$$\lambda_1(\tau) + \lambda_3(\tau)u_1(\tau) + \mu_1(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{8.17k}$$

$$\lambda_2(\tau) - 2\mu_1(\tau)x_2(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{8.17l}$$

IV: a função

$$H \triangleq \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\tau)\dot{x}_i(\tau), \tag{8.17m}$$

é contínua para todo $\tau \in [t_0, t_1]$;

$$\nu_3\dot{x}_1(t_0) + \nu_4\dot{x}_3(t_0) + \nu_1 = 0; \tag{8.17n}$$

$$\nu_0\dot{x}_3(t_1) + \nu_2 + \nu_5[\dot{x}_1(t_1) - 1 - 2x_2(t_1)\dot{x}_2(t_1)] = 0. \tag{8.17o}$$

Através de uma análise das expressões (8.16)-(8.17), sob a hipótese de $u_2(\cdot)$ finita para $\tau \in [0,1]$, é possível deduzir que as soluções estacionárias podem ser compostas por dois tipos de arco, quais sejam:

i: arcos fora da fronteira com $u_1(\tau) =$ const. ;

ii: arcos sobre a fronteira com $u_1(\tau) =$ const. $= 1$.

Além disso, considerando que $x_2(t_0) \neq 0$, concluimos que a solução começa em $t_0 = 0$ com um arco fora da fronteira. É muito fácil confirmar também que a solução do problema sem a fronteira de estado é

$$x(\tau) = u(\tau) = 0, \quad \text{para} \quad \tau \in [0,1];$$

que penetra na região proibida. Logo, a fronteira é ativa, ou seja, a trajetória ótima deve tocar a fronteira.

Analisando a condição de chegada na fronteira em um instante $t_i \in (0,1]$, deduzimos de (8.16j) que, sendo $u_2^-(t_i)$ finita, então

$$u_1^-(t_i) = u_1(t_i) = 1,$$

o que é um absurdo pois, neste caso, já que

$$x_2^-(t_i) = x_2(t_i) = 0,$$

o arco à esquerda de t_i seria a própria fronteira.

Isto significa que a trajetória ótima não poderá tocar a fronteira com $u_2(\cdot)$ assumindo somente valores finitos, devendo $u_2(\cdot)$ sofrer descontinuidades de segunda espécie (ou não ordinárias[1]) com valores infinitos à esquerda e/ou à direita do ponto de contato.

Assim, concluimos que o problema (8.14) não poderá ser resolvido, via problema (8.17), com o auxílio do Teorema 5.2.

Note que as descontinuidades de segunda espécie não foram introduzidas com a derivação no tempo de (8.15e). De fato, estas descontinuidades são inerentes a $u_2(\cdot)$, e já estavam presentes no problema (8.15).

[1] Compare Pontryagin et al. [62], Cap. 1, págs. 10–11, com Whittaker e Watson [71], Cap. 2, pág. 42.

Por outro lado, temos ainda a possibilidade de considerar uma solução que se situe fora da fronteira, tendo

$$s[x(t_1); t_1] = x_1(t_1) - t_1 + 1/2 \geq 0$$

como restrição de contorno. Isto nos leva a resolver o problema de minimizar

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 [u_1(\tau)]^2 d\tau, \tag{8.18a}$$

sujeito às restrições

$$x_1(0) = 0; \tag{8.18b}$$

$$\dot{x}_1(\tau) = u_1(\tau), \quad \tau \in [0, 1]; \tag{8.18c}$$

$$x_1(1) - 1/2 - w^2 = 0; \tag{8.18d}$$

onde w é um parâmetro que cumpre o papel de variável de folga no contorno, devendo ser $x_1(\cdot)$ contínua e $u_1(\cdot)$ contínua por partes, respectivamente, para $\tau \in [0, 1]$.

O problema (8.18) pode ser resolvido com o auxílio do Teorema 4.2, obtendo-se como solução estacionária:

$$x_1(\tau) = \tau/2, \quad \tau \in [0, 1]; \tag{8.19a}$$

$$u_1(\tau) = 1/2, \quad \tau \in [0, 1]; \tag{8.19b}$$

$$J = h_0 = 1/8. \tag{8.19c}$$

É possível de se verificar, via análise geométrica (vide Fig. 8.2), que de fato (8.19) fornece um mínimo global para o problema (8.18).

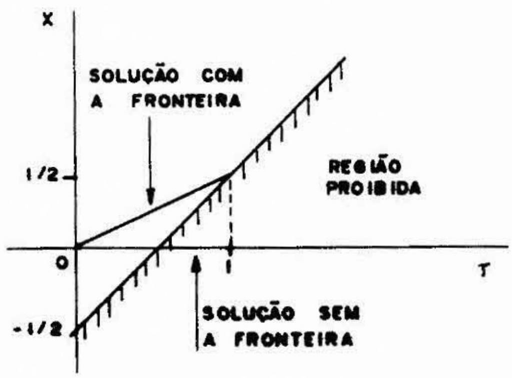

Fig. 8.2 - Soluções com e sem a fronteira de estado.

Observe que a solução desloca-se acima da fronteira de estado — logo (8.14d) está sendo respeitada — tocando-a somente no instante final $t_1 = 1$. Neste ponto a trajetória ótima não é tangente à fronteira, conforme mostra a Fig. 8.2.

Considerando que o problema (8.18) representa uma versão menos restritiva do problema (8.14), concluimos que (8.19) resolve também o problema (8.14).

Para terminar a análise, convidamos o leitor a confirmar que, não obstante a não aplicabilidade do Teorema 5.2 ao problema (8.17), a solução (8.19) satisfaz — formalmente — as expressões (8.17).

8.5 - UM EXEMPLO DE SOLUÇÃO CUJO PARTICIONAMENTO DO VETOR DE CONTROLE É ALTERADO SOBRE A TRAJETÓRIA ÓTIMA

Continuando a nossa sequência de exemplos, considere o seguinte problema de controle ótimo:

Encontrar valores ótimos para

$$(y(\cdot), v(\cdot), \tau_0, \tau_1),$$

a saber,

$$(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1),$$

tais que

$$h_0 = t_1 \tag{8.20a}$$

seja mínimo, com:

$$h_1 = x_1(t_0) - 1 = 0; \tag{8.20b}$$

$$h_2 = x_2(t_0) - 1 = 0; \tag{8.20c}$$

$$h_3 = x_1(t_1) = 0; \tag{8.20d}$$

$$h_4 = x_2(t_1) = 0; \tag{8.20e}$$

$$h_5 = t_0 = 0; \tag{8.20f}$$

$$\dot{x}_1(\tau) = x_2(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{8.20g}$$

$$\dot{x}_2(\tau) = [u_1(\tau)]^2 - [u_2(\tau)]^2, \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{8.20h}$$

$$c_1 = [u_1(\tau)]^2 + [u_2(\tau)]^2 - 1 = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]. \tag{8.20i}$$

O vetor de estado $[x_1(\cdot); x_2(\cdot)]'$ deve ser contínuo para todo $\tau \in [t_0, t_1]$, enquanto o vetor de controle $[u_1(\cdot); u_2(\cdot)]'$ deve ser contínuo por partes sobre o mesmo intervalo de tempo.

A característica especial deste problema, a qual pretendemos mostrar, está no fato da matriz

$$\left[\frac{\partial c}{\partial u}\right]$$

ter posto n_c para todo $\tau \in [t_0, t_1]$, porém com particionamentos diferentes do vetor de controle ao longo da trajetória ótima. Observe que

$$\left[\frac{\partial c}{\partial u}\right] = \left[\frac{\partial c_1}{\partial u_1}; \frac{\partial c_1}{\partial u_2}\right] = [2u_1; 2u_2];$$

e como

$$u_1(\tau) = u_2(\tau) = 0$$

viola (8.20i), qualquer que seja τ, $\partial c/\partial u$ tem posto 1 para todo $\tau \in [t_0, t_1]$.

As hipóteses H21–H25 se aplicam no caso, e o problema (8.20) se enquadra na formulação (5.20). Isto significa que o Teorema 5.2 se aplica, e podemos afirmar, como condições necessárias para a solução do problema (8.20), a existência de multiplicadores

$$\nu_0, \qquad \nu \triangleq [\nu_1; \ldots; \nu_5]',$$

e de funções vetoriais

$$\lambda(\cdot) \triangleq [\lambda_1(\cdot); \lambda_2(\cdot)]',$$

e

$$\mu(\cdot) \triangleq [\mu_1(\cdot)]',$$

tais que:

I:

$$\nu_0 + |\nu| \neq 0, \qquad \nu_0 \in \left\{0, 1\right\}; \tag{8.21a}$$

II: $\lambda_i(\cdot)(i = 1, 2)$ são contínuas para todo $\tau \in [t_0, t_1]$, com:

$$\dot{\lambda}_1(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{8.21b}$$

$$\dot{\lambda}_2(\tau) = -\lambda_1(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{8.21c}$$

$$\lambda_1(t_0) = \nu_1; \tag{8.21d}$$

$$\lambda_2(t_0) = \nu_2; \tag{8.21e}$$

$$\lambda_1(t_1) = -\nu_3; \tag{8.21f}$$

$$\lambda_2(t_1) = -\nu_4; \tag{8.21g}$$

III:

$$2\lambda_2(\tau)u_1(\tau) - 2\mu_1(\tau)u_1(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{8.21h}$$

$$-2\lambda_2(\tau)u_2(\tau) - 2\mu_1(\tau)u_2(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{8.21i}$$

IV: a função

$$H(\tau) \triangleq \sum_{i=1}^{2} \lambda_i(\tau)\dot{x}_i(\tau), \tag{8.21j}$$

é contínua para todo $\tau \in [t_0, t_1]$;

$$\nu_1\dot{x}_1(t_0) + \nu_2\dot{x}_2(t_0) + \nu_5 = 0; \tag{8.21k}$$

$$\nu_3\dot{x}_1(t_1) + \nu_4\dot{x}_2(t_1) + \nu_0 = 0. \tag{8.21l}$$

É possível verificar que as equações (8.21) não admitem soluções irregulares, e que a única solução possível é a seguinte:

$$x_1(\tau) = \begin{cases} \frac{-\tau^2}{2} + \tau + 1, & \tau \in [0, 1 + \sqrt{6}/2]; \\ \frac{(\tau - t_1)^2}{2}, & \tau \in (1 + \sqrt{6}/2, t_1]; \end{cases} \tag{8.22a}$$

$$x_2(\tau) = \begin{cases} -\tau + 1, & \tau \in [0, 1 + \sqrt{6}/2]; \\ \tau - t_1, & \tau \in (1 + \sqrt{6}/2, t_1]; \end{cases} \tag{8.22b}$$

$$[u_1(\tau)]^2 = \begin{cases} 0, & \tau \in [0, 1 + \sqrt{6}/2]; \\ 1, & \tau \in (1 + \sqrt{6}/2, t_1]; \end{cases} \tag{8.22c}$$

$$[u_2(\tau)]^2 = \begin{cases} 1, & \tau \in [0, 1 + \sqrt{6}/2]; \\ 0, & \tau \in (1 + \sqrt{6}/2, t_1]; \end{cases} \tag{8.22d}$$

$$h_0 = t_1 = 1 + \sqrt{6}. \tag{8.22e}$$

Deve ser observado que, para $\tau \in [0, 1 + \sqrt{6}/2]$, a variável de controle $u_2(\cdot)$ poderá transmutar o seu valor de -1 para $+1$, e vice-versa, um número arbitrário de vêzes. O mesmo ocorrerá com $u_1(\cdot)$ sobre o intervalo $(1 + \sqrt{6}/2, t_1]$. Em outras palavras,

$$u_2(\tau) \in \left\{-1, 1\right\} \qquad \text{para} \qquad \tau \in [0, 1 + \sqrt{6}/2];$$

$$u_1(\tau) \in \{-1, 1\} \qquad \text{para} \qquad \tau \in (1 + \sqrt{6}/2, t_1].$$

Esta solução é de fato a solução ótima do problema, o que não é difícil de se confirmar, se, por exemplo, compararmos o problema (8.20) com o exemplo resolvido em [62], Cap. 1, págs. 23–27.

O detalhe importante a se notar no presente exemplo, é o fato de que a matriz $\partial c/\partial u$ tem posto n_c para todo $\tau \in [0, t_1]$, às custas de

$$\frac{\partial c_1}{\partial u_2}, \quad \text{para} \quad \tau \in [0, 1 + \sqrt{6}/2],$$

e às custas de

$$\frac{\partial c_1}{\partial u_1}, \quad \text{para} \quad \tau \in (1 + \sqrt{6}/2, t_1].$$

Isto ilustra uma situação na qual a partição inversível da matriz $\partial c/\partial u$ não é a mesma para todo o intervalo $[t_0, t_{N+1}]$.

8.6 - SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA NÃO CONVENCIONAL UTILIZANDO O CONCEITO DE LAPSO DE TEMPO

Considere o problema de controle ótimo de minimizar

$$h_o = \frac{1}{2} \int_0^1 [u_1(\tau)]^2 d\tau, \tag{8.23a}$$

sujeito a:

$$h_1 = x_1(0) = 0; \tag{8.23b}$$

$$h_2 = x_1(1) - 1 = 0; \tag{8.23c}$$

$$\dot{x}_1(\tau) = u_1(\tau), \quad \tau \in [0, 1]; \tag{8.23d}$$

e

$$c_1^* = (\tau - 1/2)(u_1(\tau) - 2) \leq 0, \quad \tau \in [0, 1]; \tag{8.23e}$$

devendo ser $x_1(\cdot)$ contínua para todo $\tau \in [0, 1]$, e $u_1(\cdot)$ contínua por partes neste mesmo intervalo.

A restrição (8.23e), com o auxílio de uma variável de folga, pode ser reescrita como

$$c_1 = (\tau - 1/2)(u_1(\tau) - 2) + [u_2(\tau)]^2 = 0, \quad \tau \in [0, 1]. \tag{8.23e'}$$

devendo $u_2(\cdot)$, por imposição, ser contínua por partes para $\tau \in [0, 1]$.

No presente problema temos que

$$\left[\frac{\partial c}{\partial u}\right] = \left[\frac{\partial c_1}{\partial u_1}; \frac{\partial c_1}{\partial u_2}\right] = [\tau - 1/2\ ;\ 2u_2(\tau)], \quad \tau \in [0,1];$$

e infelizmente não podemos aplicar os teoremas anteriores, já que

$$\text{posto } \left\{\left[\frac{\partial c}{\partial u}\right]\right\} = 0 \quad \text{para} \quad \tau = 1/2.$$

A fim de contornar a situação, iremos introduzir no problema (8.23) um lapso de tempo que contenha $\tau = 1/2$. Para isto considere o problema de minimizar

$$h_0 = \frac{1}{2}\int_0^{1/2-\epsilon}[u_1(\tau)]^2 d\tau + \frac{1}{2}\int_{1/2+\epsilon}^{1}[u_1(\tau)]^2 d\tau, \quad \epsilon > 0, \tag{8.24a}$$

sujeito a:

$$h_1 = x_1(0) = 0; \tag{8.24b}$$

$$h_2 = x_1(1/2+\epsilon) - x_1(1/2-\epsilon) = 0; \tag{8.24c}$$

$$h_3 = x_1(1) = 0; \tag{8.24d}$$

$$\dot{x}_1(\tau) = u_1(\tau), \quad \tau \in [0, 1/2-\epsilon], \quad \tau \in [1/2+\epsilon, 1]; \tag{8.24e}$$

$$c_1 = (\tau - 1/2)[u_1(\tau) - 2] + [u_2(\tau)]^2 = 0, \quad \tau \in [0, 1/2-\epsilon], \quad \tau \in [1/2+\epsilon, 1]. \tag{8.24f}$$

Na medida em que ϵ tende a zero, o problema (8.24) tende para o problema (8.23).

O objetivo aqui é, com o auxílio dos resultados deduzidos para problemas com dinâmica fracionada, resolver o problema (8.24) e, a posteriori, avaliando o limite da solução para ϵ tendendo a zero, tentar obter a solução do problema (8.23).

Adotando a notação de dinâmica fracionada do Capítulo 6, e efetuando pequenas manipulações fáceis de serem repetidas, obtemos, em substituição ao problema (8.24):

Encontrar valores ótimos para

$$(y^e(\cdot)(e = 1,3); v^e(\cdot)(e = 1,3); \tau_0; \tau_1; \tau_2; \tau_3),$$

a saber,

$$(x^e(\cdot)(e = 1,3); u^e(\cdot)(e = 1,3); t_0; t_1; t_2; t_3),$$

tais que,

$$h_0 = x_2^1(t_1) + x_2^3(t_2) \tag{8.25a}$$

corresponda a um mínimo, com:

$$h_1 = t_0 = 0; \tag{8.25b}$$

$$h_2 = t_1 - 1/2 + \epsilon = 0; \tag{8.25c}$$

$$h_3 = t_2 - 1/2 - \epsilon = 0; \tag{8.25d}$$

$$h_4 = t_3 - 1 = 0; \tag{8.25e}$$

$$h_5 = x_1^1(t_0) = 0; \tag{8.25f}$$

$$h_6 = x_2^1(t_0) = 0; \tag{8.25g}$$

$$h_7 = x_1^3(t_2) - x_1^1(t_1) = 0; \tag{8.25h}$$

$$h_8 = x_2^3(t_2) = 0; \tag{8.25i}$$

$$h_9 = x_1^3(t_3) - 1 = 0; \tag{8.25j}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^1(\tau) = u_1^1(\tau), & \tau \in [t_0, t_1]; \\ \dot{x}_2^1(\tau) = 1/2[u_1^1(\tau)]^2, & \tau \in [t_0, t_1]; \\ c_1^1 = (\tau - 1/2)[u_1^1(\tau) - 2] + [u_2^1(\tau)]^2 = 0. & \tau \in [t_0, t_1]; \end{cases} \tag{8.25k}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^3(\tau) = u_1^3(\tau). & \tau \in [t_2, t_3]; \\ \dot{x}_2^3(\tau) = 1/2[u_1^3(\tau)]^2, & \tau \in [t_2, t_3]; \\ c_1^3 = (\tau - 1/2)[u_1^3(\tau) - 2] + [u_2^3(\tau)]^2 = 0. & \tau \in [t_2, t_3]. \end{cases} \tag{8.25l}$$

Os vetores de estado devem ser contínuos, enquanto os vetores de controle contínuos por partes, ambos em seus intervalos de definição.

Devemos notar que

$$\left[\frac{\partial c^e}{\partial u^e}\right] = [\tau - 1/2\ ;\ 2u_2^e(\tau)], \qquad e = 1,3:$$

tem posto 1 para $\tau \in [t_{e-1}, t_e]$, $e = 1,3$. Isto significa que as hipóteses H30–H33, e particularmente H34, são respeitadas. Portanto podemos aplicar o Teorema 6.2 e afirmarmos, como condição necessária para a solução do problema (8.25), a existência de multiplicadores

$$\nu_0, \qquad \nu \triangleq [\nu_1; \ldots; \nu_9]',$$

e funções vetoriais

$$\lambda^e(\cdot) \triangleq [\lambda_1^e(\cdot); \ldots; \lambda_{n_{x^e}}^e(\cdot)]'. \quad e = 1,3; \quad n_{x^1} = n_{x^3} = 2;$$

$$\mu^e(\cdot) \triangleq [\mu_1^e(\cdot); \ldots; \mu_{n_{c^e}}^e(\cdot)]', \quad e = 1,3; \quad n_{c^1} = n_{c^3} = 1;$$

tais que se verifiquem:

I:

$$\nu_0 + |\nu| \neq 0, \qquad \nu_0 \in \left\{0, 1\right\}; \tag{8.26a}$$

II: $\lambda_i^e(\cdot)(i = 1, \ldots, n_{x^e}; e = 1, 3)$ são contínuas para todo

$$\tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1, 3;$$

com:

$$\dot{\lambda}_1^e(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1, 3; \tag{8.26b}$$

$$\dot{\lambda}_2^e(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1, 3; \tag{8.26c}$$

$$\lambda_1^1(t_0) = \nu_5; \tag{8.26d}$$

$$\lambda_2^1(t_0) = \nu_6; \tag{8.26e}$$

$$\lambda_1^3(t_2) = \nu_7; \tag{8.26f}$$

$$\lambda_2^3(t_2) = \nu_8; \tag{8.26g}$$

$$\lambda_1^1(t_1) = \nu_7; \tag{8.26h}$$

$$\lambda_2^1(t_1) = -\nu_0; \tag{8.26i}$$

$$\lambda_1^3(t_3) = -\nu_9; \tag{8.26j}$$

$$\lambda_2^3(t_3) = -\nu_0; \tag{8.26k}$$

III:

$$\lambda_1^e(\tau) + \lambda_2^e(\tau)u_1^e(\tau) + \mu_1^e(\tau)[\tau - 1/2] = 0, \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1, 3; \tag{8.26l}$$

$$2\mu_1^e(\tau)u_2^e(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1, 3; \tag{8.26m}$$

IV: as funções

$$H^e(\tau) \triangleq \sum_{i=1}^{2} \lambda_i^e(\tau)\dot{x}_i^e(\tau), \quad e = 1, 3; \tag{8.26n}$$

são contínuas para todo $\tau \in [t_{e-1}, t_e]$;

$$\nu_5\dot{x}_1^1(t_0) + \nu_6\dot{x}_2^1(t_0) + \nu_1 = 0; \tag{8.26o}$$

$$-\nu_7\dot{x}_1^1(t_1) + \nu_0\dot{x}_2^1(t_1) + \nu_2 = 0; \tag{8.26p}$$

$$\nu_7\dot{x}_1^3(t_2) + \nu_8\dot{x}_2^3(t_2) + \nu_3 = 0; \tag{8.26q}$$

$$\nu_9\dot{x}_1^3(t_3) + \nu_0\dot{x}_2^3(t_3) + \nu_4 = 0. \tag{8.26r}$$

Resolvendo as equações (8.26), verifica-se que o problema não admite quinas implícitas e nem soluções irregulares, obtendo-se como única solução possível para o problema (8.24):

$$x_1(\tau) = \begin{cases} 2\tau, & \tau \in [0, 1/2 - \epsilon]; \\ \frac{-4\epsilon}{2\epsilon - 1}\tau + \frac{6\epsilon - 1}{2\epsilon - 1}, & \tau \in [1/2 + \epsilon, 1]; \end{cases} \tag{8.27a}$$

$$u_1(\tau) = \begin{cases} 2, & \tau \in [0, 1/2 - \epsilon]; \\ \frac{-4\epsilon}{1 - 2\epsilon}, & \tau \in [1/2 + \epsilon, 1]; \end{cases} \tag{8.27b}$$

$$h_0 = \frac{8\epsilon^2 - 4\epsilon + 1}{1 - 2\epsilon}. \tag{8.27c}$$

A solução existe no limite com

$$\epsilon \to 0,$$

para o qual fornece

$$x_1(\tau) = \begin{cases} 2\tau, & \tau \in [0, 1/2], \\ 1, & \tau \in (1/2, 1], \end{cases} \tag{8.28a}$$

$$u_1(\tau) = \begin{cases} 2, & \tau \in [0, 1/2], \\ 0, & \tau \in (1/2, 1], \end{cases} \tag{8.28b}$$

$$h_0 = 1, \tag{8.28c}$$

onde, por conveniência, definiu-se

$$x_1(1/2) \triangleq x_1^-(1/2);$$

$$u_1(1/2) \triangleq u_1^-(1/2).$$

A solução (8.28), como é possivel confirmar, resolve de fato o problema (8.23).

8.7 - SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA COM DINÂMICA FRACIONADA

Vejamos agora a solução de um problema com dinâmica fracionada. Para isto considere o problema de minimizar

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 [u_1^1(\tau)]^2 d\tau + \frac{1}{2}\int_1^2 [u_1^2(\tau)]^2 d\tau \tag{8.29a}$$

sujeito a

$$x_1^1(0) = 0; \tag{8.29b}$$

$$x_1^1(1) = x_1^2(1); \tag{8.29c}$$

$$x_1^2(2) = 0; \tag{8.29d}$$

$$x_2^2(2) = -1; \tag{8.29e}$$

$$\left\{ \dot{x}_1^1(\tau) = u_1^1(\tau), \quad \tau \in [0,1]; \right. \tag{8.29f}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x}_1^2(\tau) = \dot{x}_2^2(\tau), & \tau \in [1,2]; \\ \dot{x}_2^2(\tau) = u_1^2(\tau), & \tau \in [1,2]. \end{array} \right. \tag{8.29g}$$

A variável de estado $x_1^1(\cdot)$ deve ser contínua sobre o intervalo $[0,1]$, enquanto $x_1^2(\cdot)$ e $x_2^2(\cdot)$ têm que ser contínuas sobre $[1,2]$. As variáveis de controle $u_1^1(\cdot)$ e $u_1^2(\cdot)$ têm que ser contínuas por partes sobre $[0,1]$ e $[1,2]$, respectivamente.

Colocando o problema (8.29) segundo a formulação (6.1), podemos reescrevê-lo como:

Encontrar valores ótimos para

$$(y^e(\cdot)(e=1,2), v^e(\cdot)(e=1,2), \tau_0, \tau_1, \tau_2),$$

a saber,

$$(x^e(\cdot)(e=1,2), u^e(\cdot)(e=1,2), t_0, t_1, t_2),$$

tais que

$$h_0 = x_2^1(t_1) + x_3^2(t_2) \tag{8.30a}$$

seja mínimo, com:

$$h_1 = t_0 = 0; \tag{8.30b}$$

$$h_2 = t_1 - 1 = 0; \tag{8.30c}$$

$$h_3 = t_2 - 2 = 0; \tag{8.30d}$$

$$h_4 = x_1^1(t_0) = 0; \tag{8.30e}$$

$$h_5 = x_1^2(t_1) - x_1^1(t_1) = 0; \tag{8.30f}$$

$$h_6 = x_1^2(t_2) = 0; \tag{8.30g}$$

$$h_7 = x_2^2(t_2) + 1 = 0; \tag{8.30h}$$

$$h_8 = x_2^1(t_0) = 0; \tag{8.30i}$$

$$h_9 = x_3^2(t_1) = 0; \tag{8.30j}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x}_1^1(\tau) = u_1^1(\tau), & \tau \in [t_0, t_1]; \\ \dot{x}_2^1(\tau) = 1/2[u_1^1(\tau)]^2, & \tau[t_0, t_1]; \end{array} \right. \tag{8.30k}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x}_1^2(\tau) = \dot{x}_2^2, & \tau \in [t_1, t_2]; \\ \dot{x}_2^2(\tau) = u_1^2(\tau), & \tau \in [t_1, t_2]; \\ \dot{x}_3^2(\tau) = 1/2[u_1^2(\tau)]^2, & \tau \in [t_1, t_2]. \end{array} \right. \tag{8.30l}$$

Acompanhando as condições de regularidade das demais variáveis de estado, $x_2^1(\cdot)$ e $x_3^2(\cdot)$ deverão ser contínuas sobre $[t_0, t_1]$ e sobre $[t_1, t_2]$, respectivamente.

O problema (8.30) satisfaz as hipóteses H26–H29, de modo que podemos recorrer ao Teorema 6.1 para afirmarmos, como condição necessária para a sua solução, a existência de multiplicadores

$$\nu_0, \qquad \nu \triangleq [\nu_1; \ldots; \nu_9]',$$

e funções vetoriais

$$\lambda^1(\cdot) \triangleq [\lambda_1^1(\cdot); \lambda_2^1(\cdot)]',$$

e

$$\lambda^2(\cdot) \triangleq [\lambda_1^2(\cdot); \lambda_2^2(\cdot); \lambda_3^2(\cdot)]',$$

tais que se verifiquem:

I:

$$\nu_0 + |\nu| \neq 0, \qquad \nu_0 \in \left\{0, 1\right\}; \tag{8.31a}$$

II: $\lambda_i^e(\cdot)(i = 1, \ldots, n_{x^e})$ são contínuas para todo

$$\tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1, 2;$$

com

$$\begin{cases} \dot\lambda_1^1(\tau) = 0, & \tau \in [t_0, t_1]; \\ \dot\lambda_2^1(\tau) = 0, & \tau \in [t_0, t_1]; \end{cases} \tag{8.31b}$$

$$\begin{cases} \dot\lambda_1^2(\tau) = 0, & \tau \in [t_1, t_2]; \\ \dot\lambda_2^2(\tau) = -\lambda_1^2(\tau), & \tau \in [t_1, t_2]; \\ \dot\lambda_3^2(\tau) = 0, & \tau \in [t_1, t_2]; \end{cases} \tag{8.31c}$$

$$\lambda_1^1(t_0) = \nu_4; \tag{8.31d}$$

$$\lambda_2^1(t_0) = \nu_8; \tag{8.31e}$$

$$\lambda_1^2(t_1) = \nu_5; \tag{8.31f}$$

$$\lambda_2^2(t_1) = 0; \tag{8.31g}$$

$$\lambda_3^2(t_1) = \nu_9; \tag{8.31h}$$

$$\lambda_1^1(t_1) = \nu_5; \tag{8.31i}$$

$$\lambda_2^1(t_1) = -\nu_0; \tag{8.31j}$$

$$\lambda_1^2(t_2) = -\nu_6; \tag{8.31k}$$

$$\lambda_2^2(t_2) = -\nu_7; \tag{8.31l}$$

$$\lambda_3^2(t_2) = -\nu_0; \tag{8.31m}$$

III:

$$\lambda_1^1(\tau) + \lambda_2^1(\tau)u_1^l(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{8.31n}$$

$$\lambda_2^2(\tau) + \lambda_3^2(\tau)u_1^2(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_1]; \tag{8.31o}$$

IV: as funções

$$H^1(\tau) \triangleq \sum_{i=1}^{2} \lambda_i^1(\tau)\dot{x}_i^1(\tau), \tag{8.31p}$$

e

$$H^2(\tau) \triangleq \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2(\tau)\dot{x}_i^2(\tau), \tag{8.31q}$$

são contínuas para $\tau \in [t_0, t_1]$ e $\tau \in [t_1, t_2]$, respectivamente;

$$\nu_1 + \nu_4\dot{x}_1^1(t_0) + \nu_8\dot{x}_2^1(t_0) = 0; \tag{8.31r}$$

$$\nu_0\dot{x}_2^1(t_1) + \nu_2 + \nu_5\left\{-\dot{x}_1^1(t_1) + \dot{x}_1^2(t_1)\right\} + \nu_9\dot{x}_3^2(t_1) = 0; \tag{8.31s}$$

$$\nu_0\dot{x}_3^2(t_2) + \nu_3 + \nu_6\dot{x}_1^2(t_2) + \nu_7\dot{x}_2^2(t_2) = 0. \tag{8.31t}$$

Ao resolvermos as equações (8.31), encontramos como única solução possível:

$$\begin{cases} x_1^1(\tau) = \frac{3}{4}\tau, & \tau \in [0,1]; \\ x_2^1(\tau) = \frac{9}{8}\tau, & \tau \in [0,1]; \\ u_1^1(\tau) = \frac{3}{4}, & \tau \in [0,1]; \end{cases} \tag{8.32a}$$

$$\begin{cases} x_1^2(\tau) = \frac{1}{8}[1-\tau]^3 + \frac{5}{8}[1-\tau] + \frac{3}{4}, & \tau \in [1,2]; \\ x_2^2(\tau) = \frac{-3}{8}[1-\tau]^2 - \frac{5}{8}, & \tau \in [1,2]; \\ x_3^2(\tau) = \frac{-3}{8}[1-\tau]^3, & \tau \in [1,2]; \\ u_1^2(\tau) = \frac{3}{4}[1-\tau], & \tau \in [1,2]; \end{cases} \tag{8.32b}$$

$$J = h_0 = \frac{3}{8}. \tag{8.32c}$$

Este resultado corresponde, de fato, à solução ótima, o que será confirmado no próximo item, através de um desenvolvimento alternativo que dispensa a utilização do Teorema 6.1.

8.8 - UMA FORMA ALTERNATIVA DE SOLUÇÃO

Neste item, afim de comprovar os resultados do item anterior, iremos resolver o problema (8.29) através de sua decomposição em dois sub-problemas, para os quais são aplicáveis os desenvolvimentos anteriores ao Capítulo 6. Ou seja, não analizaremos o problema como um problema com dinâmica fracionada.

Para isto devemos observar inicialmente que o problema (8.29) pode ser visto como a união dos dois problemas seguintes:

i: Encontrar valores ótimos para

$$(y(\cdot), v(\cdot)),$$

a saber,

$$(x(\cdot), u(\cdot)),$$

tais que

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 [u_1(\tau)]^2 d\tau \tag{8.33a}$$

seja mínimo, com:

$$\dot{x}_1(\tau) = u_1(\tau), \quad \tau \in [0,1]; \tag{8.33b}$$

$$x_1(0) = 0; \tag{8.33c}$$

$$x_1(1) = k. \tag{8.33d}$$

O parâmetro k representa um valor fixo, correspondente a $x_1^1(1)$ ótimo no problema (8.29). Aqui, por enquanto, ele representa um valor arbitrário, ainda que fixo. A função $x_1(\cdot)$ deve ser contínua, enquanto $u_1(\cdot)$ deve ser contínua por partes, para $\tau \in [0,1]$.

O problema (8.33) pode ser colocado segundo a formulação (4.30), com o auxílio de pequenas manipulações já conhecidas. Os resultados do Teorema 4.2 são aplicáveis fornecendo como solução:

$$\begin{cases} x_1(\tau) = k\tau, & \tau \in [0,1]; \\ u_1(\tau) = k, & \tau \in [0,1]; \end{cases} \tag{8.34a}$$

$$J_1 = \frac{1}{2}k^2. \tag{8.34b}$$

ii: Encontrar valores ótimos para

$$(y_1(\cdot), y_2(\cdot), v_1(\cdot)),$$

a saber,

$$(x_1(\cdot), x_2(\cdot), u_1(\cdot)),$$

tais que

$$J_2 = \frac{1}{2}\int_1^2 [u_1(\tau)]^2 d\tau \tag{8.35a}$$

seja mínimo, com:

$$\dot{x}_1(\tau) = x_2(\tau), \quad \tau \in [1,2]; \tag{8.35b}$$

$$\dot{x}_2(\tau) = u_1(\tau), \quad \tau \in [1,2]; \tag{8.35c}$$

$$x_1(1) = k; \tag{8.35d}$$

$$x_1(2) = 0; \tag{8.35e}$$

$$x_2(2) = -1; \tag{8.35f}$$

devendo ser $x_1(\cdot)$ e $x_2(\cdot)$ contínuas, e $u_1(\cdot)$ contínua por partes, para $\tau \in [1,2]$. O parâmetro k está aqui garantindo a continuidade de $x_1(\cdot)$ através de $\tau = 1$, e representa um valor fixo, embora arbitrário.

Também o problema (8.35) pode ser resolvido com o auxílio do Teorema 4.2, depois de algumas pequenas manipulações. É fácil confirmar que ele possui como solução:

$$\begin{cases} x_1(\tau) = \frac{1-k}{2}(1-\tau)^3 + \frac{3k-1}{2}(1-\tau) + k, & \tau \in [1,2]; \\ x_2(\tau) = \frac{-3}{2}(1-k)(1-\tau)^2 + \frac{1-3k}{2}, & \tau \in [1,2]; \\ u_1(\tau) = 3(1-k)(1-\tau), & \tau \in [1,2]; \end{cases} \tag{8.36a}$$

$$J_2 = \frac{3}{2}(1-k)^2. \tag{8.36b}$$

A solução do problema (8.29) é obtida através da união das duas soluções anteriores, fornecendo

$$J = J_1 + J_2 = \frac{1}{2}[k^2 + 3(1-k)^2] \tag{8.37}$$

o que é obtido a partir de (8.34b) e de (8.36d).

Nos resta apenas descobrir qual é o valor ótimo de k, que evidentemente deverá ser aquele que minimiza (8.37). Derivando (8.37) em relação a k e igualando a zero obtemos

$$k = \frac{3}{4}, \tag{8.38a}$$

que de fato minimiza (8.37). Isto fornece como solução ótima para o problema (8.29),

$$\begin{cases} x_1(\tau) = \frac{3}{4}\tau, & \tau \in [0,1]; \\ u_1(\tau) = \frac{3}{4}, & \tau \in [0,1]; \end{cases} \tag{8.38b}$$

$$\begin{cases} x_1(\tau) = \frac{1}{8}(1-\tau)^3 + \frac{5}{8}(1-\tau) + \frac{3}{4}, & \tau \in [1,2]; \\ x_2(\tau) = \frac{-3}{8}(1-\tau)^2 - \frac{5}{8}, & \tau \in [1,2]; \\ u_1(\tau) = \frac{3}{4}(1-\tau), & \tau \in [1,2]; \end{cases} \tag{8.38c}$$

$$J = \frac{3}{8}, \tag{8.38d}$$

que coincide com a solução anterior, conforme desejávamos confirmar.

8.9 - COMENTÁRIOS

Para concluir o capítulo, gostaríamos de tecer os seguintes comentários:

a) É importante notar que a inclusão da expressão (8.8h) no problema (8.8), que representa uma condição adicional obtida a partir de uma solução irregular, ao permitir a obtenção da solução completa do problema, mostra que a análise de soluções irregulares pode levar a resultados práticos em problemas reais.

b) É oportuno comentar que o problema (8.14) satisfaz as hipóteses de Jacobson et al. [42]. No entanto, a solução do problema (8.14) não satisfaz as condições necessários deduzidas por estes autores. A este respeito convidamos o leitor a consultar Taylor [67], onde existe a explicação para o fato.

c) Existe na literatura estudos de condições necessárias para problemas que não satisfazem as hipóteses H20 ou H25. No entanto, segundo a nossa análise, nenhum destes resultados leva à obtenção da solução completa do problema (8.23), exceto talvez, às custas de deduções complementares específicas para cada problema.

d) A solução do problema (8.23) mostra que a questão do lapso de tempo pode ser utilizada como um artifício auxiliar na obtenção da solução de determinados problemas.

e) Conforme adiantado no início do capítulo, por razões didáticas, os problemas resolvidos foram todos intencionalmente simples. Isto vale em particular para o problema (8.29), cuja separabilidade, utilizada no item 8.8, foi propositadamente pré-estabelecida. Também, em alguns dos exemplos, uma análise geométrica independente dos desenvolvimentos teóricos dos capítulos anteriores, permite chegar à solução.

CAPÍTULO 9

CONCLUSÃO

9.1 - COMENTÁRIOS FINAIS

9.1.1 - QUANTO À ESTRUTURA DOS PROBLEMAS ESTUDADOS

a) Do ponto de vista da estrutura dos problemas estudados, o presente trabalho possui um grau de generalidade elevado e, sob alguns aspectos, inédito.

b) Na elaboração do trabalho adotou-se a estratégia de evitar que a estrutura do problema estudado tivesse aumento desnecessário de complexidade, o que teria implicações negativas no desenvolvimento das deduções. É com este objetivo que se adotou o índice de performance na forma de Mayer, excluindo-se do problema: i) Restrições isoperimétricas; ii) Restrições de desigualdade, seja de contorno, seja não-diferenciais; iii) Presença de parâmetros como argumento no lado direito das equações diferenciais, ou nas restrições não-diferenciais. Admite-se que estas exclusões, na prática, estariam viabilizadas através de manipulações a priori, como aquelas discriminadas no Capítulo 5.

9.1.2 - QUANTO À METODOLOGIA DE DEDUÇÃO ADOTADA

a) Os mecanismos de dedução adotados possuem aspectos originais positivos, os quais parecem favorecer a compreensão do processo, sem nenhum prejuizo para o rigor matemático. Como mais relevantes, podemos citar:

i) A forma pela qual se expressou as variáveis candidatas (como por exemplo, através das equações (3.5)) e, particularmente com a utilização dos prolongamentos dos vetores ótimos $u(\cdot)$ e $x(\cdot)$, dando origem às funções suporte $w(\cdot)$ e $z(\cdot)$;

ii) A maneira pela qual se fez o particionamento do intervalo total de tempo $[t_0, t_{N+1}]$, definindo-se vetores de estado e de controle sobre cada sub-intervalo, com

$$x^e(t_e) \triangleq x^+(t_e), \qquad e = 1, \ldots, N;$$

$$u^e(t_e) \triangleq u^+(t_e), \qquad e = 1, \ldots, N;$$

o que evitou desenvolvimentos com integrais impróprias;

iii) A consideração da possibilidade de mudança no particionamento do vetor de controle ao longo do tempo, conforme estabelecido no Capítulo 5.

b) A maneira pela qual se utilizou as variáveis adjuntas deixa uma idéia muito clara sobre o papel destas variáveis auxiliares no processo de dedução.

c) A consideração das três situações analisadas no item 3.4, trata-se de detalhe importante, ainda que sutil, negligenciado por alguns autores .

d) A invocação do raciocínio do leitor para a comprovação de determinadas evidências — feita em vários pontos ao longo do trabalho — sem o desenvolvimento aberto de algumas passagens, contribuem para um maior amadurecimento a respeito do processo de dedução, ao mesmo tempo em que torna dispensável a utilização de certos formalismos pesados. Esta postura permitiu, por exemplo, que alguns conceitos da Análise Funcional fossem utilizados de uma forma natural.[1]

e) A dedução paulatina das condições necessárias, partindo-se dos problemas mais simples para os mais complicados, contribui para o entendimento do processo de dedução.

f) Os aspectos didáticos explorados nas deduções, tais como aqueles citados em (a), (b), (d) e (e), pelo menos aparentemente, atribuem ao trabalho a característica de poder ser utilizado como um roteiro para deduções de condições necessárias para problemas não tratados aqui.

9.1.3 - QUANTO À APRESENTAÇÃO DAS CONDIÇÕES NECESSÁRIAS.

a) As hipóteses que validam os resultados são de fácil compreensão e de simples verificação, não envolvendo conceitos matemáticos avançados. Isto deve ser positivo para a aplicabilidade prática dos resultados.

[1] O fato de se evitar o formalismo próprio da Análise Funcional, não significa que um conhecimento sobre este ramo da matemática seja sem valor para o acompanhamento das deduções. Pelo contrário, o conhecimento de alguns conceitos da Análise Funcional (vide, por exemplo, Kolmogorov e Fomin [45]) certamente facilitará o acompanhamento das deduções. O que se procurou aqui, foi apenas tornar o trabalho acessível também para aqueles que não têm conhecimento desta teoria.

b) As condições necessárias presentes nos teoremas dos Capítulos 3, 4, 5 e 6 oferecem, pelo menos em princípio, condições muito satisfatórias de aplicabilidade, por envolverem somente equações diferenciais ordinárias e equações algébricas. Isto não acontece em alguns trabalhos, tais como aqueles cujos resultados envolvem medidas de Lebesgue-Stielties (vide, por exemplo, Dyukalov e Ilyutovich [26]-[27]).

c) A apresentação das condições de quina é bastante clara. Nesse aspecto, é relevante a presença das condições de continuidade da função hamiltoniana, omitida em muitos trabalhos, conforme já comentado anteriormente.

9.2 - SÍNTESE

Foram deduzidas condições necessárias para uma classe de problemas classificados como "problemas de controle ótimo com dinâmica fracionada", os quais envolvem simultaneamente restrições de contorno múltiplo e restrições não-diferenciais. Houve cuidado com três aspectos distintos a serem condiderados em estudos desta natureza, quais sejam, a forma de estruturar o problema estudado, a metodologia e fundamentos da dedução, e a apresentação das condições necessárias propriamente ditas, incluindo neste último aspecto a questão da formulação das hipóteses que validam os resultados. Chegou-se a um conjunto de condições necessárias para a solução de um problema inédito na literatura, apropriado a aplicações práticas, e suportado por hipóteses simples de serem verificadas. A metodologia de dedução é, relativamente, fácil de ser acompanhada, e com linguagem bastante acessível, sem que com isto haja comprometimento do rigor matemático. Isto abre a possibilidade de aproveitamento da metodogia para o estudo de outras classes de problemas, bem como a sua utilização na elaboração de procedimentos numéricos.

9.3 - PERSPECTIVAS

Considerando-se os aspectos positivos do presente trabalho, é de se supor que os desenvolvimentos nele contidos sejam de utilidade em estudos futuros. As seguintes extensões merecem ser citadas:

a) Ampliação na generalidade dos problemas resolvidos. Quanto a isto pode-se prever:

i) Tratamento de problemas cuja dinâmica muda de estrutura ao atravessar uma superfície representada por uma equação do tipo

$$\theta[x(\tau);\tau] = 0, \quad \tau \in [\tau_i, \tau_j];$$

ii) Estudo de problemas com retardo, visando, em primeiro plano, aplicações práticas dentro da engenharia espacial;

iii) Estudo de problemas envolvendo equações a derivadas parciais, para atender, por exemplo, áreas como "estruturas" ou "fenômenos de transporte".

b) Análise da aplicabilidade da teoria no desenvolvimento de procedimentos numéricos.

c) Estudo sobre a obtenção de soluções aproximadas e/ou sub-ótimas. A este respeito, o fracionamento do problema parece muito bem adaptado para a utilização do método dos elementos finitos, ou similares (vide, por exemplo, Pinto [60]).

d) Deduções com o relaxamento das condições de regularidade impostas sobre as funções envolvidas nos problemas.

Particularmente, parece ser de realização mais imediata o tratamento de problemas com estrutura variável. De fato, os pontos de mutação da dinâmica podem ser caracterizados no problema com a inclusão de restrições de contorno do tipo

$$\theta[x(t_e); t_e] = 0,$$

t_e se estendendo a todos os instantes de mutação. É preciso, contudo, em se tratando da dedução de condições necessárias, que se estabeleça extensões com cautela. Assim, por exemplo, no tratamento de problemas com estrutura variável, a possibilidade de ocorrer trechos da trajetória ótima sobre a curva de transição

$$\theta[x(\tau);\tau] = 0,$$

deve ser examinada com cuidado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] - Amazigo, J. C.; Rubenfeld, L.A. *Advanced calculus and its applications to the engineering and physical sciences.* New York, John Wiley and Sons, 1980.

[2] - Anorov, V. P. *Maximum principle for processes with constraints of general form. I. Automat. and Remote Control,* **28**(3): 357–367, 1967.

[3] - Anorov, V. P. *The maximum principle for processes with general-type-restrictions. II. Automat. and Remote Control,* **28**(4): 533–543, 1967.

[4] - Arsenashvili, A.I. *An optimal control problem for step-by-step systems with delay. Trudy Inst. Sistem Upravleniya Akad. Nauk Gruzin. SSR,* **24**(1): 17–28, 1985.

[5] - Arutyunov, A.V. *On the theory of the maximum principle in optimal control problems with phase constraints. Soviet Math. Doklady,* **39**(1): 1–4, 1989.

[6] - Berkovitz, L.D. *On control problems with bounded state variables. J. Math. Analysis and Appl.,* **5**: 488–498, 1962.

[7] - Berkovitz, L.D. *Optimal control theory. Amer. Math. Monthly,* **83**(4): 225–239, Apr., 1976.

[8] - Bliss, G.A. *Lectures on the calculus of variations.* Chicago, The University of Chicago Press, 1946.

[9] - Blum, E.K. *Minimization of functionals with equality constraints. J. SIAM Control, ser. A,* **3**(2): 299–316, 1965.

[10] - Bolza, O. *Lectures on the calculus of variations.* New York, Dover Publications, 1961.

[11] - Bryson Jr., A.E.; Denham, W.F.; Dreyfus, S.E. *Optimal programming problems with inequality constraints I: Necessary conditions for extremum solutions. AIAA Journal,* **1**(11): 2544–2550, 1963.

[12] - Cesar, M. de O. *Reformulation of the second Weierstrass-Erdmann condition.* *Bol. da Soc. Brasileira de Matemática*, **13**(1): 1982.

[13] - Citron, S. J. *Elements of optimal control.* New York, Holt, Rinehart and Winston, 1969.

[14] - Clarke, F.H.; Vinter, R. B. *Applications of optimal multiprocess.* *SIAM J. Control and Optimization*, **27**(5): 1048-1071, Sept. 1989.

[15] - Clarke, F.H.; Vinter, R.B. *Optimal multiprocess.* *SIAM J. Control and Optimization*, **27**(5): 1072–1091, Sept. 1989.

[16] - Denbow, C.H. *A generalized form of the problem of Bolza, In: Contributions to the Calculus of Variations, 1933-1937.* Chicago, University of Chicago Press, 1937. p. 243–275. Ph.D.Thesis, Univ. of Chicago, 1937.

[17] - Denham, W.F. *Comments on "A variational method for optimal staging".* *AIAA Journal*, **3**(11): 2175–2176, 1965.

[18] - Dubovitskii, A.J.; Milyutin, A.A. *Extremum problems with constraints.* *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **149**: 452–455, 1963.

[19] - Dubovitskii, A.J.; Milyutin, A.A. *Problems on extrema in the presence of constraints.* *Zh. Vychislit. Mat. i mat. Fiz.*, **5**: 395–453, 1965.

[20] - Dubovitskii, A.Ya.; Milyutin, A.A. *Necessary conditions for a weak extremum in optimal control problems with mixed constraints of the inequality type.* *Zh. Vychisl. Mat. i mat. Fiz.*, **8**(4): 725–779, 1968.

[21] - Dubovitskii, A.Ja.; Milyutin, A.A. *Maximum principle in a class of variations of small absolute value for optimal control problems with mixed constraints of equality and inequality.* *Soviet Math. Dokl.*, **10**(6): 1567–1571, 1969.

[22] - Dubovitskii, A.Ya.; Dubovitskii, V.A. *The maximum principle in regular optimal control problems with phase trajectory endpoints lying at the boundary of the phase constraint.* *Automat. and Remote Control*, **48**(12): 1578–1585, 1987.

[23] - Dyukalov, A.N. *An optimality test in lincar dynamic problems of economic planning. I.* *Automat. and Remote Control*, **36**(9): 1460–1470, 1975.

[24] - Dyukalov, A.N. *Optimality feature in linear dynamic problems of economic planning. II.* *Automat. and Remote Control*, **36**(11): 1867–1877, 1975.

[25] - Dyukalov, A.N. *An optimality criterion in linear dynamic optimal control problems with mixed constraints.* *Computational Math. and Math. Phys.*, **16**(4): 31–47, 1976.

[26] - Dyukalov, A.N.; Ilyutovich, A.E. *Indicator of optimality in nonlineor problems of optimal control with mixed constraints. I.* *Automat. and Remote Control*, **38**(3): 381–389, 1977.

[27] - Dyukalov, A.N.; Ilyutovich, A.E. *Features of optimality in nonlinear problems of optimal control with mixed constraints. II.* *Automat. and Remote Control*, **38**(5): 620–628, 1977.

[28] - Elsgolts, L. *Differential equations and the calculus of variations.* Moscow, Mir, 1977.

[29] - Gamkrelidze, R.V. *Time-optimal processes with restricted phase coordinates.* *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **125**: 475–478, 1959.

[30] - Gamkrelidze, R.V. *Optimal control processes with restricted phase coordinates.* *Izvest. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, **24**: 315–356, 1960.

[31] - Geering, H.P. *Constinuous-time optimal control theory for cost functionals including discrete state penalty terms.* *IEEE Trans. Aut. Control*, **21**(6): 866–869, 1976.

[32] - Gelfand, I.M.; Fomin, S.V. *Calculus of variations* traduzido por R.A. Silverman. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1963.

[33] - Getz, W.M.; Martin, D.H. *Optimal control systems with state variable jump discontinuities.* *J. Optim. Theory and Appl.*, **31**(2): 195–205, 1980.

[34] - Gollan, B. *On optimal control problems with state constraints.* *J. Optim. Theory and Appl.*, **32**(1): 75–80, 1980.

[35] - Graves, L. M. *On the Weierstrass condition for the problem of Bolza in the calculus of variations. Ann. of Math.*, **33**: 747–752, 1932.

[36] - Guinn, T. *The problem of bounded space coordinate as a problem of Hestenes. J. SIAM Control, ser. A*, **3**(2): 181–190, 1965.

[37] - Halkin, H. ; Neustadt, L.W. *General necessary conditions for optimization problems. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **56**: 1066–1072, 1966.

[38] - Hestenes, M.R. *A general problem in the calculus of variations with applications to paths of least time.* Rand, Santa Mônica, *Rand Corporation RM-100*, 1950.

[39] - Hestenes, M.R. *On variational theory and optimal control theory. J. SIAM Control, ser. A*, **3**(1): 23–48, 1965.

[40] - Hestenes, M.R. *Calculus of variations and optimal control theory.* New York, John-Wiley Sons., 1966.

[41] - Jacobson, D.H.; Lele, M.M. *A transformation technique for optimal control problems with a state variable inequality constraint. IEEE Trans. Aut. Control*, **14**(5): 457–464, Oct. 1969.

[42] - Jacobson, D.H.; Lele, M.M.; Speyer, J.L. *New necessary conditions of optimality for control problems with state variable inequality constraints. J. Math. Anal. and Appl.*, **35**(2): 255–284, 1971.

[43] - Kantoravich, L. *A new method of solving of some classes of extremal problems. Comptes Rendus (Doklady) de l'Académic des Sciences de PURSS*, **28**(3): 211–214, 1940.

[44] - Kharatishvili, G.L. *The maximum principle in optimal problems with switching. Trudy Inst. Sistem Upravleniya Akad. Nauk Gruzin. SSR*, **24**(1): 17–28, 1985.

[45] - Kolmogorov, A.N.; Fomin, S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis.* Rochester, Graylock Press, 1957.

[46] - Ledzewicz-Kowalewska, U. *A necessary condition for a problem of optimal control with equality and inequality constraints.* *Control Cybernet.*, **14**(4): 351–360, 1985.

[47] - Ledzewicz-Kowalewska, U. *The extremum principle for problems of optimal control with mixed constraints.* *Acta Univ. Lodz. Folia Math.* (2): 37–60, 1987.

[48] - Luenberger, D.G. *Optimization by vector space methods.* New York, John Wiley, 1969.

[49] - Makowski , K.; Neustadt, L.W. *Optimal control problems with mixed control-phase variable equality and inequality constraints.* *SIAM J. Control*, **12**(2): 184–228, 1974.

[50] - Mason, J.D.; Dickerson, W.D.; Smith, D.B. *A variational method for optimal staging.* *AIAA Journal*, **3**(11): 2007–2012, 1965.

[51] - Matveev, A.S. *Necessary conditions for an extremum in an optimal control problem with phase restrictions.* *Dif. Equations*, **23**(4): 427–436, 1987.

[52] - Medhin, N.G. *Necessary conditions for optimal control problems with bounded state by a penalty method.* *J. Optim. Theory and Appl.*, **52**(1): 97–110, 1987.

[53] - Miele, A.; Cloutier, J.R. *New transformation technique for optimal control problems with bounded state. Part I - Theory.* *L'Aerotecnica Missili e Spazio*, **54**: 105–116, 1975.

[54] - Miele, A.; Tietze, J.L.; Cloutier, J.R. *A hybrid approach to optimal control problems with bounded state.* *Comp. Maths. with Appl.*, **1**: 175–194, 1975.

[55] - Miele,A.; Wu, A.K.; Liu, C.T. *A transformation technique for optimal control problems with partially linear state inequality constraints.* *J. Optim. Theory and Appl.*, **28**(2): 185–212, 1979.

[56] - Nathanson, W.I. *Control problems with intermediate constraints.* *J. Optim. Theory and Appl.*, **8**(4): 256–270, 1971.

[57] - Neustadt, L.W. *An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problems. I. General theory.* *J. SIAM Control*, **4**(3): 505–527, 1966.

[58] - Neustadt, L.W. *A general theory of extremals.* *J. Comput. System Sci.*, **3**: 57–92, 1969.

[59] - Paiewonsky, B. *Optimal control: A review of theory and pratice.* *AIAA Journal*, **3**(11): 1985–2006, 1965.

[60] - Pinto, R.L.U. de F. *Estudo da solução de problemas de controle ótimo na forma de Bolza pelo método dos elementos finitos.* (Tese de Mestrado) - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 1982.

[61] - Pontryagin, L. S. *Ordinary differential equations* (traduzido por L. Kacinskas e W. B. Counts). Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1962.

[62] - Pontryagin, L.S.; Boltyanskii, V.G.; Gamkrelidze, R.V.; Mishchenko, E.F. *The mathematical theory of optimum process* (traduzido por K. N. Trirogoff, ed. por L. W. Neustadt). New York, Interscience Publishers, 1962.

[63] - Reid, W.T. *Discontinuous solutions in the non-parametric problem of Mayer in the calculus of variations.* *Am. J. Math.*, **57**: 69–93, 1935.

[64] - Reid, W.T. *A historical note on the maximum principle.* *SIAM Review*, **20**(3): 580–582, 1978.

[65] - Russak, I.B. *On problems with bounded state variable.* *J. Optim. Theory and Appl.*, **5**(2): 114–157, 1970.

[66] - Russak, I.B. *On general problems with bounded state variables.* *J. Optim. Theory and Appl.*, **6**(6): 432–452, 1970.

[67] - Taylor, I.G. *On boundary conditions for adjoint variables in problems with state variable inequality constraints.* *IEEE Trans. Aut. Control*, **19**(4): 450–452, 1974.

[68] - Troitskii, V.A. *Variational problems in the theory of optimum process.* *J. Optim. Theory and Appl.*, **8**(1): 1–14, 1971.

[69] - Valentine, F.A. *The problem of Lagrange with differential inequalities as added side conditions. In: Contributions to the calculus of variations, 1933-1937.* Chicago, University of Chicago Press, 1937 p. 407–448.

[70] - Vincent, T.L.; Mason, J.D. *Disconnected optimal trajectories. J. Optim. Theory and Appl.*, **3**(4): 263–281, 1969.

[71] - Whittaker, E. T.; Watson, G. N. *A course of modern analysis.* Cambridge, Cambridge University Press, 1927.

APÊNDICE A

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Este apêndice tem como objetivo expor alguns fundamentos matemáticos que são utilizados ao longo do presente trabalho, incluindo teoremas auxiliares acompanhados das respectivas provas.

A.1 - UM TEOREMA DE FUNÇÃO IMPLÍCITA

TEOREMA A.1 :(Teorema da Função Implícita)[1]

Suponha que as relações

$$f_i[x^o, y^o] = 0, \qquad i = 1, \ldots, n_y; \tag{A.1}$$

e

$$D[x^o, y^o] \triangleq \det\left[\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x^o,y^o)}\right] \neq 0, \tag{A.2}$$

sejam válidas em um ponto $(x^o, y^o) \in \delta$ *, onde*

$$x^o \in E^{n_x}; \quad y^o \in E^{n_y}; \quad \text{e} \quad \delta \subset E^{n_x+n_y}.$$

Então existem funções contínuas

$$y_i(x) = y_i(x_1; \ldots; x_{n_x}); \qquad i = 1, \ldots, n_y;$$

definidas sobre uma vizinhança X *em torno de* x^o *e uma constante* $\epsilon > 0$*, tais que*

$$y_i(x^o) = y_i^o; \quad f_i[x, y(x)] = 0; \qquad i = 1, \ldots, n_y; \tag{A.3}$$

e tais que as relações

$$f_i(x, y) = 0, \quad |y - y(x)| < \epsilon, \qquad i = 1, \ldots, n_y; \tag{A.4}$$

com $x \in X$ *, valem somente no caso* $y = y(x)$*. Além disso, se as funções* $f_i(\cdot)$ *são de classe* C^m *em* δ*, então as funções* $y_i(\cdot)$ *são de classe* C^m *em* X*.*

---

[1] Reenunciado do Teorema 7.1 de Hestenes [40], pág. 22.

Prova: Vide Hestenes [40], págs. 22 - 25.

A.2 - MÍNIMO LOCAL E MÍNIMO GLOBAL DE UMA FUNÇÃO ESCALAR

DEFINIÇÃO A.1:

Seja $J(\cdot) : \Gamma \subset E^n \longmapsto E^1$ *uma função real escalar. Dizemos que* $\alpha^o \in \Gamma$ *fornece um mínimo local para* $J(\cdot)$*, se existe uma vizinhança* $\delta(\epsilon) \subset \Gamma$ *em torno de* α^o *,*

$$|\alpha - \alpha^o| < \epsilon, \quad \epsilon > 0,$$

não importa quão pequeno seja ϵ*, tal que,*

$$J[\alpha] - J[\alpha^o] \geq 0, \tag{A.5}$$

para todo $\alpha \in \delta$*.*

Se $(A.5)$ *é verdadeira para todo* $\alpha \in \Gamma$*, dizemos que* α^o *é um ponto de mínimo global sobre* Γ*.*

A.3 - CONDIÇÃO NECESSÁRIA PARA A MINIMIZAÇÃO DE UMA FUNÇÃO ESCALAR SEM RESTRIÇÕES

Neste item demonstra-se um teorema sobre condições necessárias para a minimização de uma função escalar de uma variável escalar, sem restrições.

TEOREMA A.2:

Seja

$$J(\cdot) : \Gamma \subset E^1 \longmapsto E^1,$$

onde E^1 *denota o espaço euclidiano unidimensional, uma função escalar de uma variável escalar contínua com derivada primeira contínua em* Γ*. Então, uma condição necessária para que* $\gamma^o \in \Gamma$ *forneça um mínimo local para* $J(\cdot)$ *é que se tenha*

$$J'(\gamma^o) \triangleq \left.\frac{dJ(\gamma)}{d\gamma}\right|_{\gamma^o} = 0. \tag{A.6}$$

Prova:

Sendo $J(\cdot)$ uma função continuamente diferenciável, podemos expressar $J(\gamma)$ em função de sua derivada primeira como

$$J(\gamma) = J(\gamma^o) + \int_{\gamma^o}^{\gamma} \frac{dJ(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad \gamma \in \Gamma; \tag{A.7}$$

que fornece um valor exato para $J(\gamma)$ no domínio indicado.

De $(A.7)$ podemos escrever:

$$J(\gamma) - J(\gamma^o) = \int_{\gamma^o}^{\gamma} \frac{dJ(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad \gamma \in \Gamma. \tag{A.8}$$

Da definição de mínimo local, por sua vez, devemos ter

$$J(\gamma) - J(\gamma_o) \geq 0 \tag{A.9}$$

para todo $\gamma \in \delta(\epsilon) \subset \Gamma$, sendo $\epsilon > 0$, escolhido apropriadamente. Comparando $(A.8)$ e $(A.9)$, deduzimos como uma condição necessária a ser satisfeita, a relação

$$\int_{\gamma^o}^{\gamma} \frac{dJ(\tau)}{d\gamma} d\tau \geq 0, \tag{A.10}$$

para todo $\gamma \in \delta$.

Suponha agora que se tenha

$$J'(\gamma^o) = k < 0.$$

Neste caso, devido à continuidade de $J'(\cdot)$, existirá uma vizinhança $\delta_1(\epsilon_1) \subset \delta(\epsilon)$ em torno de γ^o, ϵ_1 suficientemente pequeno, tal que $J'(\gamma) < 0$ para todo $\gamma \in \delta_1$.

Seja então $\gamma^1 \in \delta_1$, um valor de γ tal que

$$\gamma^1 - \gamma^o > 0.$$

Devido aos argumentos acima, $J'(\gamma)$ será essencialmente negativa no intervalo $[\gamma^o, \gamma^1]$. Dai concluimos que

$$\int_{\gamma^o}^{\gamma^1} J'(\tau) d\tau < 0,$$

o que contraria $(A.10)$. Portanto $J'(\gamma^o) = k$ não pode ser negativa.

Seja agora

$$J'(\gamma^o) = k > 0.$$

Invocando novamente a continuidade de $J'(\cdot)$, haverá uma vizinhança $\delta_1(\epsilon_1) \subset \delta(\epsilon)$ em torno de γ^o, ϵ_1 suficientemente pequeno, tal que $J'(\gamma) > 0$ para todo $\gamma \in \delta_1$. Escolhendo desta vez um $\gamma^1 \in \delta_1$ tal que

$$\gamma^1 - \gamma^o < 0,$$

com argumentos análogos aos anteriores, conclui-se que

$$\int_{\gamma^o}^{\gamma^1} J'(\tau)d\tau < 0,$$

o que também contraria $(A.10)$.

Assim, levando as duas alternativas anteriores a um absurdo, nos resta como única alternativa possível,

$$J'(\gamma^o) = 0,$$

o que prova o teorema.

A.4 - UMA CONDIÇÃO AUXILIAR PARA MÍNIMO LOCAL

TEOREMA A.3:

Sejam

$$J_i(\cdot) : \Omega \subset E^{n+1} \longmapsto E^1; \qquad i = 0, 1, \ldots, n;$$

funções escalares contínuas com derivadas primeiras contínuas em Γ. *Seja*

$$(\gamma^o, \alpha^o) \in \Omega, \qquad \alpha^o \triangleq [\alpha_1^o; \ldots; \alpha_n^o], \qquad \gamma^o \text{ escalar},$$

um ponto de mínimo local para $J_0(\cdot)$ *sobre* Γ, *onde*

$$\Gamma \triangleq \Big\{(\gamma; \alpha) \in \Omega, \text{ tal que } J_i[\gamma; \alpha] = 0, \quad i = 1, \ldots, n\Big\}.$$

Então, se a matriz

$$\left[\frac{\partial J}{\partial \alpha^o}\right] \triangleq \left[\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right]\bigg|_{(\alpha^o, \gamma^o)}, \qquad \left\{\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right\}_{i,j} \triangleq \frac{\partial J_i}{\partial \alpha_j} \quad (i, j = 1, \ldots, n);$$

tem posto n, *e se*

$$\frac{\partial J_i}{\partial \gamma}\bigg|_{(\alpha^o, \gamma^o)} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n; \tag{A.11}$$

devemos ter

$$\frac{\partial J_o}{\partial \gamma}\bigg|_{(\alpha^o, \gamma^o)} = 0. \tag{A.12}$$

Prova:

De acordo com o enunciado do teorema temos

$$\det\left[\frac{\partial J}{\partial \alpha^o}\right] \neq 0. \qquad (A.13)$$

Isto, juntamente com as hipóteses de regularidade das funções $J_i (i = 1, \ldots, n)$, permite-nos recorrer ao Teorema A.1 para afirmarmos que existem funções

$$\alpha_i(\cdot) : E^1 \longmapsto E^1; \qquad i = 1, \ldots, n;$$

de classe C^1,tais que

$$J_i[\gamma, \alpha(\gamma)] \equiv 0, \qquad i = 1, \ldots, n; \qquad (A.14)$$

para $\gamma \in \delta^1$, sendo δ^1 uma vizinhança em torno de γ^o, e sendo

$$\alpha(\cdot) \triangleq [\alpha_1(\cdot); \ldots; \alpha_n(\cdot)]'.$$

Mas $(A.14)$ define funções de γ, as quais serão denotadas como

$$\tilde{J}_i(\gamma), \qquad i = 1, \ldots, n;$$

e que, levadas em $(A.14)$, permitem escrever

$$\tilde{J}_i(\gamma) \equiv J_i[\gamma, \alpha(\gamma)] \equiv 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \qquad (A.15)$$

Derivando $(A.15)$ obtemos

$$\frac{d\tilde{J}_i}{d\gamma} \equiv \frac{\partial J_i}{\partial \gamma} + \left[\frac{\partial J_i}{\partial \alpha}\right]\frac{d\alpha}{d\gamma} \equiv 0, \qquad i = 1, \ldots, n; \qquad (A.16)$$

onde

$$\frac{d\alpha}{d\gamma} \triangleq \left[\frac{d\alpha_1}{d\gamma}; \ldots; \frac{d\alpha_n}{d\gamma}\right]'.$$

As expressões $(A.16)$ são válidas em particular para $\gamma = \gamma^o$, donde podemos escrever que

$$\left.\frac{\partial J_i}{\partial \gamma}\right|_{\gamma^o} + \left[\frac{\partial J_i}{\partial \alpha^o}\right]\left.\frac{d\alpha}{d\gamma}\right|_{\gamma^o} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n; \qquad (A.17)$$

onde

$$\frac{\partial J_i}{\partial \alpha^o} = \left.\frac{\partial J_i}{\partial \alpha}\right|_{(\alpha(\gamma^o)=\alpha^o, \gamma^o)} = \left.\frac{\partial J_i}{\partial \alpha}\right|_{(\alpha^o, \gamma^o)}, \qquad i = 1, \ldots, n;$$

e

$$\left.\frac{\partial J_i}{\partial \gamma}\right|_{\gamma^o} = \left.\frac{\partial J_i}{\partial \gamma}\right|_{(\alpha(\gamma^o)=\alpha^o, \gamma^o)} = \left.\frac{\partial J_i}{\partial \gamma}\right|_{(\alpha^o, \gamma^o)}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Mas, levando $(A.11)$ em $(A.17)$, obtemos

$$\left[\frac{\partial J_i}{\partial \alpha^o}\right]\frac{d\alpha}{d\gamma}\Big|_{\gamma^o} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{A.18}$$

Por outro lado, a consideração simultânea de $(A.13)$ e $(A.18)$ permite escrever

$$\frac{d\alpha}{d\gamma}\Big|_{\gamma^o} = 0. \tag{A.19}$$

Para a função J_0 temos

$$\tilde{J}_0(\gamma) \equiv J_0[\gamma, \alpha(\gamma)].$$

Concordantemente, vale

$$\frac{d\tilde{J}_0(\gamma)}{d\gamma} \equiv \frac{\partial J_0}{\partial \gamma} + \left[\frac{\partial J_0}{\partial \alpha}\right]\frac{d\alpha}{d\gamma},$$

e, em particular

$$\frac{d\tilde{J}_0(\gamma)}{d\gamma}\Big|_{\gamma^o} = \frac{\partial J_0}{\partial \gamma}\Big|_{\gamma^o} + \left[\frac{\partial J_0}{\partial \alpha^o}\right]\frac{d\alpha}{d\gamma}\Big|_{\gamma^o}, \tag{A.20}$$

onde

$$\left[\frac{\partial J_0}{\partial \alpha^o}\right] = \left[\frac{\partial J_0}{\partial \alpha}\right]\Big|_{(\alpha(\gamma^o)=\alpha^o, \gamma^o)}.$$

Ora, sendo $(\gamma^o; \alpha^o)$ um ponto de mínimo local para $J_0[\,\cdot\,]$ — o que implica em γ^o fornecer um mínimo local para $\tilde{J}_0(\cdot)$ — e considerando o Teorema A.2., devemos ter

$$\frac{d\tilde{J}_0(\gamma)}{d\gamma}\Big|_{\gamma^o} = 0. \tag{A.21}$$

Levando $(A.19)$ e $(A.21)$ em $(A.20)$ obtemos

$$\frac{\partial J_0}{\partial \gamma}\Big|_{(\alpha^o, \gamma^o)} = 0,$$

conforme se desejava demonstrar.