


1. Publicação nº <i>INPE-3897-PRE/939</i>	2. Versão	3. Data <i>May., 1986</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DIN</i>	Programa <i>POPES</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>MÉTODOS NUMÉRICOS EM OTIMIZAÇÃO</i> <i>DUALIDADE EM PROGRAMAÇÃO INTEIRA</i> <i>FUNÇÕES PENALIDADES EXATAS</i>			
7. C.D.U.: <i>519.852</i>			
8. Título <i>USO DE UMA FUNÇÃO PENALIDADE EXATA PARA ELIMINAÇÃO DO "GAP" DE DUALIDADE EM PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA ZERO-UM</i>		10. Páginas: <i>09</i>	
		11. Última página: <i>08</i>	
		12. Revisada por <i>Horacio Hideki Yanasse</i>	
9. Autoria <i>Luiz Antonio Nogueira Lorena</i> <i>Acioli Antonio de Olivo</i>		13. Autorizada por <i>Marco Antonio Raupp</i> Diretor Geral	
Assinatura responsável 			
14. Resumo/Notas <i>Recentemente Barcia apresentou um algoritmo para eliminar o "gap" de dualidade entre um problema de programação linear inteira zero-um e o seu problema dual. O algoritmo define uma sequência de cortes duais que proporcionam "bounds" que convergem em um número finito de passos para o valor ótimo do problema. O objetivo desse trabalho é mostrar que se podem usar os cortes duais em um método de penalidades onde se espera em contrar uma solução aproximada em tempos computacionais reduzidos.</i>			
15. Observações <i>Trabalho a ser apresentado no III CLAIO (Congresso Latino-Iberoamericano de Investigacion Operativa e Ingenieria de Sistemas) de 18 a 22 de agosto de 1986 - Santiago-Chile.</i>			

USO DE UMA FUNÇÃO PENALIDADE EXATA PARA ELIMINAÇÃO DO "GAP" DE
DUALIDADE EM PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA ZERO-UM

Luiz Antonio Nogueira Lorena

Acioli Antonio de Olivo

Ministério da Ciência e Tecnologia - MCT

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE

Caixa Postal 515 - 12201 - São José dos Campos - SP

ABSTRACT

An algorithm to eliminate the duality gap between a binary integer linear programming and its dual has been published by Barcia. The algorithm defines a sequence of dual cuts that provide bounds converging to the optimal value of the problem in a finite number of steps. In this work it is shown that is possible to use the dual cuts in a penalty method where we can expect to find an approximate solution within reduced computational times.

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho é apresentado um método de penalidades aplicado a problemas de programação linear inteira zero-um. O objetivo principal é cobrir o "gap" de dualidade característico destes tipos de problemas.

O método baseia-se nos trabalhos de Barcia [1] e [2] que usa cortes que atuam nos subproblemas lagrangeanos do dual do problema de programação linear inteira zero-um. Faz-se a otimização do dual usando o método de subgradientes.

Na abordagem aqui usada propõe-se utilizar os cortes do problema lagrangeano com o enfoque de penalidade exata, onde não é necessário otimizar o dual.

O trabalho está organizado da seguinte forma: na seção 2 apresenta-se a teoria que justifica o presente método de penalidades; na seção 3 apresentam-se os testes computacionais; na seção 4 apresentam-se as conclusões com comentários gerais sobre o método.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Parte da teoria a ser exposta apareceu em Lorena [4] e Lorena e Oliveira [5]. O problema de programação linear inteira \bar{e} escrito como

$$(P) \quad v = \max_{x \in \{0,1\}^n} cx \\ \text{sujeito a} \quad Ax \leq b \\ x \in \{0,1\}^n,$$

onde $c \in \mathbb{R}^n$, $c \geq 0$, $b \in \mathbb{R}^m$ e A é uma matriz real $m \times n$.

Seu problema dual \bar{e}

$$(D) \quad w = \min_{\substack{\lambda \geq 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}^m}} \max_{x \in \{0,1\}^n} \{cx - \lambda(Ax - b)\}$$

A função perturbação de (P), $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \bar{\mathbb{R}} (\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$, é definida por:

$$\phi(d) = \sup_{x \in \{0,1\}^n} \{cx : Ax \leq d\}$$

Define-se a seguir um conjunto de funções que será usado para estabelecer um resultado de dualidade forte entre (P) e (D).

O conjunto de funções

$$\partial_H^b(\phi) = \{h \in H : h(d) - h(b) \geq \phi(d) - \phi(b), \forall d \in \mathbb{R}^m\}$$

é chamado H-superdiferencial de ϕ em b . H é um conjunto de funções reais finitas definidas em \mathbb{R}^m , as quais são "não-decrescentes", isto é, se $h \in H$, $h(d^1) \geq h(d^2)$, $\forall d^1, d^2 \in \mathbb{R}^m$ tais que $d_i^1 \geq d_i^2, i=1, \dots, m$. Além disto, H possui a propriedade de translação, isto é, se $h \in H$, então $h' \in H$, onde $h'(d) = h(d) + r, \forall d \in \mathbb{R}^m, r \in \mathbb{R}$.

O seguinte lema relaciona funções de H com a função perturbação ϕ através dos problemas (P) e (D).

Lema 1: $\forall h \in H, \sup_{x \in \{0,1\}^n} \{cx - h(Ax)\} =$

$$\sup_{d \in R^m} \{\phi(d) - h(d)\}.$$

Prova: $\sup_{x \in \{0,1\}^n} \{cx - h(Ax)\} = \sup_{x \in \{0,1\}^n} \{cx - \inf_{\substack{d \\ Ax \leq d}} h(d)\} =$

$$\sup_{d \in R^m} \{\sup_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ Ax \leq d}} cx - h(d)\} = \sup_{d \in R^m} \{\phi(d) - h(d)\}$$

A proposiçãõ a seguir estabelece um resultado de dualidade forte entre (P) e (D).

Proposiçãõ 1: $\sup_{x \in \{0,1\}^n} \{cx - h(Ax)\} + h(b) = \phi(b)$
se e sãõ se $h \in \partial_H^b(\phi)$.

Prova: Pelo lema 1,

$$\sup_{x \in \{0,1\}^n} \{cx - h(Ax)\} + h(b) = \sup_{d \in R^m} \{\phi(d) - h(d)\} + h(b)$$

Assim, se $\sup_{d \in R^m} \{\phi(d) - h(d)\} + h(b) = \phi(b)$,

$$\phi(d) - h(d) \leq \phi(b) - h(b), \forall d \in R^m$$

$$h(d) - h(b) \geq \phi(d) - \phi(b), \forall d \in R^m,$$

ou seja, $h \in \partial_H^b(\phi)$.

Fazendo o caminho inverso chega-se a:

$$\text{se } h \in \partial_H^b(\phi), \text{ então } \sup_{x \in \{0,1\}^n} \{cx - h(Ax)\} + h(b) = \phi(b).$$

Corolário 1: Se existir ao menos uma função h^* ,

$$h^* \in \partial_H^b(\phi), \text{ então } v = w.$$

Nã verdade, a operação de ínfimo na definição do dual (D) é super* flua para os resultados da proposição 1. Assim, pode-se definir o problema com penalidades

$$(PP) \quad p_h = \max_{h \in \{0,1\}^n} \{cx - h(Ax-b)\}$$

Corolário 2: $p_{h^*} = v$ se e sã se $h^* \in \partial_H^b(\phi)$.

Assim, a existência de uma função $h^* \in \partial_H^b(\phi)$ elimina o "gap" de dua lidade entre (P) e (D) ou (P) e (PP). Observa-se que a função linear $h(d) = \lambda d$ em geral nã pertence a $\partial_H^b(\phi)$.

Barcia [1] e [2] modifica o dual (D) atravês de uma seqüência de cortes da função objetivo do problema lagrangeano, gerando uma seqüência de problemas

$$(D_k) \quad w(k+1) = \min_{\lambda \geq 0} \max_{x \in \{0,1\}^n} \{cx - \lambda(Ax-b)\}$$

$$cx \leq \lfloor w(k) \rfloor,$$

onde $\lfloor w(k) \rfloor$ é o maior inteiro que nã excede $w(k)$, $w(0) = w$ e cada $w(k)$ é um limitante superior de v . Barcia mostra que seu processo converge para v se existir um x^* viãvel em (P), tal que para $\lambda = 0$, $(x^*, 0)$ é um ponto õti mo do problema:

$$w(k) = \min_{\lambda \geq 0} \max_{x \in \{0,1\}^n} \{cx - \lambda(Ax - b)\}$$

$$cx \leq \lfloor w(k) \rfloor.$$

Observa-se pois que os cortes do dual geram uma seqüência de cortes também no primal (P) com os problemas

$$(P_k) \quad v_{k+1} = \max_{x \in \{0,1\}^n} cx$$

$$Ax \leq b$$

$$cx \leq \lfloor w(k) \rfloor.$$

Como $w(k)$ é um limitante superior de v , a cada corte eliminam-se soluções inviáveis de (P). Assim, a seqüência de funções perturbação $\{\phi(k)\}$ converge para ϕ^* , onde:

$$\phi(k) = \sup_{x \in \{0,1\}^n} \{cx : Ax \leq d, cx \leq \lfloor w(k) \rfloor\}$$

e

$$\phi^*(b) = v, \text{ pois } h^*(d) = \lambda d \in \partial_H^b(\phi^*) \text{ para } \lambda \rightarrow 0.$$

Observa-se portanto que:

- (i) o multiplicador de Lagrange ótimo para o método de Barcia é nulo, isto é, a otimalidade estará garantida usando a função linear $h(d) = \lambda d$ quando $\lambda = 0$ "perto do ótimo";
- (ii) o corolário 2 mostra que não é necessário otimizar cada dual (D_k) , $k = 1, 2, \dots$, pois pode-se usar em $\lambda = (\bar{\lambda}, \bar{\lambda}, \dots, \bar{\lambda})$, $\bar{\lambda}$ prefixado, e fazer $\lambda_k \rightarrow 0$, o que caracteriza um método de penalidades.

Propõe-se então o seguinte algoritmo de penalidades.

Passo 1. Calcular $w(0)=w$ (resolve-se o dual ou o problema de programação linear relaxando as restrições $x \in \{0,1\}^n$ para $0 \leq x_j \leq 1, \forall j$). Fazer $\lambda(0) = (\lambda_0, \lambda_0, \dots, \lambda_0)$.

Passo 2. Resolver

$$w(k+1) = \max_{x \in \{0,1\}^n} \{cx - \lambda(k)(Ax-b)\}$$

$$cx \leq \lfloor w(k) \rfloor,$$

obtendo-se $\hat{x}(k)$.

Passo 3. Se $\hat{x}(k)$ é viável ou $\lambda_k \leq \beta$, parar.

Senão: se $\lfloor w(k) - w(k+1) \rfloor \leq \Delta$, fazer $\lambda_{k+1} = \lambda_k / \alpha$ e ir para o passo 2.

Senão fazer $\lambda_{k+1} = \lambda_k$ e ir para o passo 2.

Δ é um inteiro pequeno que depende dos dados do vetor custo. Para β foi usado 10^{-12} e para α , valores entre 1 e 2 (o mais usado foi $\alpha = 1,1$ para o qual λ_k decresce pouco a cada iteração).

Para a solução do problema da mochila no passo 2, usou-se o algoritmo de Fayard e Plateau, [3].

3. TESTES COMPUTACIONAIS

O algoritmo de penalidades foi testado em problemas gerados aleatoriamente como se segue:

- (i) os coeficientes de A e c foram gerados aleatoriamente no intervalo $[0,100]$. Os coeficientes de b foram obtidos somando a linha correspondente de A e multiplicando o resultado por $\gamma=0,1$ ou $\gamma=0,5$;
- (ii) os problemas de tamanhos 20×20 , 50×20 , 75×20 e 100×20 foram testados, conforme se pode observar na tabela 1;

(iii) na tabela 1 observam-se ainda as colunas de resultados usando do programação linear, do algoritmo Branch-and-Bound do Burroughs 6800 (MPS-Tempo), do algoritmo de penalidades e os respectivos tempos de processamento.

Uma característica diferente da de Barcia [1] foi notada, pois o método de penalidades sempre encontrou uma solução viável, embora em muitos casos não-ótima. Mesmo assim, a diferença entre os valores obtidos para a solução viável e os obtidos usando o algoritmo Branch-and-Bound não foram significativas. Para o problema 8, o resultado de penalidades foi melhor que para o Branch-and-Bound em 12 minutos de processamento.

TABELA 1

TESTES COM PROBLEMAS GERADOS ALEATORIAMENTE

PROBLEMA	TAMANHO	γ	PROGRAMAÇÃO LINEAR	B & B	TEMPO B & B (Seg.)	PENALIDADE	TEMPO PENALIDADE (seg.)	DIFERENÇA B & B
1	20 x 20	.1	159.06	99	20	99	4	0
2	50 x 20	.1	440.6	386	210	290	26	96
3	75 x 20	.1	681.27	568 ^(*)	720	470	10	98
4	100 x 20	.1	902.31	790 ^(*)	720	732	66	58
5	20 x 20	.5	716.26	679	41	663	1	16
6	50 x 20	.5	1 878.90	1 828 ^(*)	720	1 803	10	25
7	75 x 20	.5	2 837.45	2 770 ^(*)	720	2 663	17	107
8	100 x 20	.5	3 544.62	3 119 ^(*)	720	3 454	20	-335

(*) melhor valor em 12 minutos

B & B = Branch and Bound

4. COMENTÁRIOS FINAIS

Algumas dificuldades encontradas com o uso do algoritmo de penalidades relacionam-se ao "tamanho" do parâmetro λ_k . Quando este é "muito pequeno", o problema da mochila torna-se difícil e sua solução demorada através do algoritmo de Fayard e Plateau. Teoricamente a convergência para a solução ótima de (P) seria obtida, mas na prática isto nem sempre ocorre devido ao tempo excessivo gasto. Acredita-se que esse mesmo problema afete o algoritmo de Barcia.

A vantagem da presente abordagem está em sempre alcançar uma "boa" solução viável, cercado o valor ótimo de (P).

REFERÊNCIAS

- [1] P. Barcia, "The bound improving sequence algorithm". Operations Research Letters, 4:27-30, 1985.
- [2] P. Barcia, "Constructive dual methods for discrete programming". School of Combinatorial Optimization. Anais. Rio de Janeiro, July 1985.
- [3] D. Fayard, G. Plateau, "An algorithm for the solution of the 0-1 knapsack problem". Computing, 28:269-287, 1982.
- [4] L.A.N. Lorena, "Uma nova classe de funções penalidade e sua aplicação a problemas discretos". Tese de doutorado. COPPE-UFRJ, junho de 1985.
- [5] L.A.N. Lorena, P.R. Oliveira, "Uma abordagem geral de dualidade/ penalidade em programação matemática. XVIII Sobrapo. Anais. São José dos Campos, novembro de 1985.