



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

sid.inpe.br/mtc-m21b/2014/07.22.01.50 -TDI

## **USO DE GRÁFICO DE RECORRÊNCIA E REDES COMPLEXAS PARA CARACTERIZAÇÃO DE SISTEMAS COMPLEXOS DE BAIXA DIMENSÃO**

Diego Guimarães de Brito Costa

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada, orientada pelos Drs. Elbert Einstein Nehrer Macau, e Marcos Gonçalves Quiles, aprovada em 24 de julho de 2014.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP5W34M/3GML4CE>>

INPE  
São José dos Campos  
2014

**PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

**CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE (RE/DIR-204):****Presidente:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

**Membros:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Dr. Amauri Silva Montes - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espaciais (ETE)

Dr. André de Castro Milone - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dr. Joaquim José Barroso de Castro - Centro de Tecnologias Espaciais (CTE)

Dr. Manoel Alonso Gan - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr<sup>a</sup> Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

**BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

**REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Maria Tereza Smith de Brito - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

**EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Maria Tereza Smith de Brito - Serviço de Informação e Documentação (SID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

sid.inpe.br/mtc-m21b/2014/07.22.01.50 -TDI

## **USO DE GRÁFICO DE RECORRÊNCIA E REDES COMPLEXAS PARA CARACTERIZAÇÃO DE SISTEMAS COMPLEXOS DE BAIXA DIMENSÃO**

Diego Guimarães de Brito Costa

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada, orientada pelos Drs. Elbert Einstein Nehrer Macau, e Marcos Gonçalves Quiles, aprovada em 24 de julho de 2014.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP5W34M/3GML4CE>>

INPE  
São José dos Campos  
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Costa, Diego Guimarães de Brito.

C823u      Uso de gráfico de recorrência e redes complexas para caracterização de sistemas complexos de baixa dimensão / Diego Guimarães de Brito Costa. – São José dos Campos : INPE, 2014.  
xviii + 79 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21b/2014/07.22.01.50 -TDI)

Dissertação (Mestrado em Computação Aplicada) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2014.

Orientadores : Drs. Elbert Einstein Nehrer Macau, e Marcos Gonçalves Quiles.

1. Sistemas dinâmicos. 2. Sistemas complexos. 3. Análise de redes. I.Título.

CDU 517.938

---



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de **Mestre** em  
**Computação Aplicada**

Dr. Lamartine Nogueira Frutuoso  
Guimarães



---

Presidente / INPE / SJCampos - SP

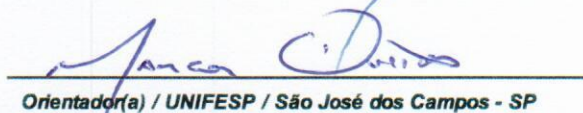
Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau



---

Orientador(a) / INPE / São José dos Campos - SP

Dr. Marcos Gonçalves Quiles



---

Orientador(a) / UNIFESP / São José dos Campos - SP

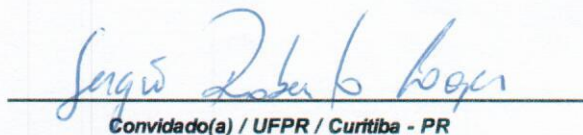
Dra. Margarete Oliveira Domingues



---

Membro da Banca / INPE / SJCampos - SP

Dr. Sergio Roberto Lopes



---

Convidado(a) / UFPR / Curitiba - PR

*Este trabalho foi aprovado por:*

maioria simples

unanimidade

Aluno (a): **Diego Guimarães de Brito Costa**

São José dos Campos, 24 de Julho de 2014

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a minha família, esposa e filha pelo apoio.

Agradeço aos orientadores Dr. Elbert E. N. Macau e Dr. Marcos G. Quiles, a paciência e confiança.

Agradeço aos colegas do INPE.

Agradeço a CAP/INPE, pelo acolhimento e receptividade.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.



## RESUMO

Este trabalho propõe um novo método de suavização do gráfico de recorrência. Os objetivos principais são: capturar as estruturas principais de gráfico de recorrência e eliminar possíveis ruídos que podem ser encontrados na série temporal, o que dará origem ao novo gráfico de recorrência. As análises do novo dispositivo são realizadas a partir da utilização de medidas de análise de quantificação de recorrência (*RQA - Recurrence Quantification Analysis*); extraídas do gráfico de recorrência, e, em seguida, construir uma rede complexa, proveniente da matriz de recorrência. Medidas dessa rede complexa são utilizadas para caracterizar propriedades do mapa logístico, tais como período, junção de bandas, caoticidade e intermitência.





# IDENTIFYING LOW-DIMENSIONAL COMPLEX SYSTEMS BY RECURRENCE PLOT AND COMPLEX NETWORK TECHNIQUES

## ABSTRACT

In this work, the recurrence plot is analysed and a new method is proposed in order to smooth its visualization and transition to a complex network. The main purpose to create a smoother version of the recurrence plot is to capture macro structures and eliminate possible noises that could be found in the time series that originates the recurrence plot. The new recurrence plot is measured by the same techniques that are found on the regular analysis of recurrence plots, i.e. RQA - Recurrence Quantification Analysis. Complex network measures are also used to further analyze the networks created from the recurrence matrix in such way that by using both measures the new method can be useful to characterize different periodic, chaotic, band-merging and quasi-periodic regimes on any dynamic system.



## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Retratos de fase do oscilador de Duffing-Van der Pol . . . . .	7
2.2 Exemplificação da divergência entre duas trajetórias que evoluem no tempo. . . . .	8
2.3 Diagrama de bifurcação do mapa logístico . . . . .	11
2.4 Expoente de Lyapunov do mapa logístico . . . . .	12
2.5 Intermitência no mapa logístico . . . . .	13
3.1 Estruturas de larga escala dos gráficos de recorrência . . . . .	18
3.2 Sinal periódico e seu gráfico de recorrência . . . . .	23
3.3 Sinal caótico e seu gráfico de recorrência . . . . .	24
3.4 Sinal aleatório e seu gráfico de recorrência . . . . .	25
4.1 Exemplo de uma rede simples . . . . .	28
4.2 Rede ER com $p = 0.05$ e $N = 100$ , grau dos vértices e distribuição do grau. . . . .	30
4.3 Rede Small-World com $p=0.1$ e rede regular. . . . .	31
4.4 Rede Livre de Escala formada a partir do mapeamento dos aeroportos dos Estados Unidos. . . . .	32
4.5 Rede Livre de Escala e a distribuição do grau de cada vértice . . . . .	33
5.1 Gráfico de Recorrência do mapa logístico criado a partir do método K-Vizinhos Mais Próximos. . . . .	39
5.2 Gráfico de Recorrência do mapa logístico criado a partir do método Adaptativo de Vizinhos Mais Próximos. . . . .	40
5.3 Sinal caótico do mapa logístico e Gráficos de Recorrência Criados a Partir de três diferentes métodos. . . . .	42
5.4 Rede criada a partir de um gráfico de recorrência $\varepsilon$ . . . . .	42
5.5 Rede criada a partir de um gráfico de recorrência KNN. . . . .	43
5.6 Rede criada a partir de um gráfico de recorrência adaptativo. . . . .	44
6.1 Exemplificação do método RDE . . . . .	48
6.2 Gráfico de recorrência comparativo com o método RDE . . . . .	50
7.1 Variação do índice de recorrência para L . . . . .	54
7.2 Comparação entre gráfico de recorrência original e o gráfico gerado pelo método RDE . . . . .	54
7.3 Rede Complexa de um gráfico de Recorrência RDE . . . . .	55
7.4 Medidas de redes complexas para o mapa logístico . . . . .	57
7.5 Série temporal e gráfico de recorrência para mapa logístico $r = 3.83$ . . . . .	59

7.6	Série temporal e gráfico de recorrência para mapa logístico $r = 3.679$	60
7.7	Série temporal e gráfico de recorrência para mapa logístico $r = 3.791$	61
7.8	Série temporal e gráfico de recorrência para mapa logístico $r = 4.0$	62
7.9	Série temporal, gráfico de recorrência e espaço de fase dos fluidos	64
7.10	Gráfico de recorrência original e o gráfico RDE para os fluidos apresentados	66
7.11	Medidas de RQA e Redes Complexas para as diferentes dinâmicas	68

## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
3.1 Texturas observadas em um gráfico de recorrência e o seu significado. Fonte adaptada: (DONNER et al., 2010b) . . . . .	17
5.1 Sumário das definições de vértices e o critério para a existência de arestas na rede complexa a partir da análise da serie temporal. Fonte adaptada: (DONNER et al., 2011) . . . . .	38
5.2 Medidas de redes complexas: coeficiente de clusterização $\mathcal{C}$ , comprimento médio do menor caminho $\mathcal{L}$ , <i>betweenness</i> $\mathcal{B}$ e transitividade $\mathcal{T}$ para os três tipos de redes descritos na Fig.5.3(B,C,D). . . . .	42
7.1 Medidas de redes complexas coeficiente de clusterização $\mathcal{C}$ , comprimento médio do menor caminho $\mathcal{L}$ , <i>betweenness</i> $\mathcal{B}$ e transitividade $\mathcal{T}$ para os quatro métodos apresentados. Redes criadas a partir do mapa Logístico com $r = 4.0, \varepsilon = 0.05, N = 100, L = 2, \gamma = RR$ . . . . .	56
7.2 Medidas de RQA e de redes complexas para quase diferentes parâmetros de controle $r$ obtidos a partir do método <i>RDE</i> para $\varepsilon = \gamma = RR$ e $L = 5$ . A última coluna é o expoente de Lyapunov $\lambda$ . . . . .	58
7.3 Medidas de rede complexa e RQA gerados a partir da rede e RP discre- tizado para os três casos observados. . . . .	67



## LISTA DE SÍMBOLOS

$R$	–	Matriz binária de recorrência
$A$	–	Matriz de adjacência
$\varepsilon$	–	Limiar de corte de recorrência
$\Psi_m$	–	Índice de recorrência da coluna $m$
$\gamma$	–	Limiar de corte de recorrência RDE
$L$	–	Comprimento do bloco
$\lambda$	–	Expoente de Lyapunov
$\tau$	–	Tempo de atraso de Takens
$m$	–	Dimensão de imersão
$\mathcal{T}$	–	Medida de Transitividade
$\mathcal{B}$	–	Medida de Betweenness
$\mathcal{C}$	–	Medida de Clusterização
$\mathcal{L}$	–	Medida de Comprimento médio do menor caminho





# SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Organização do Trabalho . . . . .	2
<b>2 DINÂMICA NÃO LINEAR</b> . . . . .	<b>5</b>
2.1 Sistemas Dinâmicos . . . . .	5
2.1.1 Espaço de Fases - Atratores . . . . .	6
2.1.2 Expoente de Lyapunov . . . . .	7
2.1.3 Reconstrução de Atratores . . . . .	9
2.2 Mapa Logístico . . . . .	11
2.3 Conclusões Parciais . . . . .	13
<b>3 RECORRÊNCIA</b> . . . . .	<b>15</b>
3.1 Conceito . . . . .	15
3.2 Gráficos de Recorrência . . . . .	15
3.2.1 A escolha de parâmetros de recorrência . . . . .	18
3.3 Quantificadores de Recorrência . . . . .	19
3.3.1 Medidas baseadas na densidade de recorrência . . . . .	20
3.3.2 Medidas baseadas nas linhas diagonais . . . . .	20
3.3.3 Medidas baseadas nas linhas verticais . . . . .	22
3.4 Exemplos em Diferentes Dinâmicas . . . . .	22
3.5 Conclusões Parciais . . . . .	24
<b>4 REDES COMPLEXAS</b> . . . . .	<b>27</b>
4.1 Conceito . . . . .	27
4.2 Fundamentos e Representação . . . . .	28
4.3 Modelos de Redes . . . . .	29
4.3.1 Redes Aleatórias . . . . .	29
4.3.2 Redes Mundo Pequeno . . . . .	30
4.3.3 Redes Livre de Escala . . . . .	32
4.4 Caracterização e Análise de Redes . . . . .	33
4.4.1 Comprimento médio do menor caminho $\mathcal{L}$ . . . . .	34
4.4.2 Centralidade <i>Betweenness</i> $\mathcal{B}$ . . . . .	34
4.4.3 Coeficiente de Clusterização $\mathcal{C}$ . . . . .	35

4.4.4	Transitividade $\mathcal{T}$ . . . . .	36
4.5	Conclusões Parciais . . . . .	36
<b>5</b>	<b>USO DE REDES COMPLEXAS PARA ANÁLISE DE SÉRIES</b>	
	<b>TEMPORAIS . . . . .</b>	<b>37</b>
5.1	Conceito . . . . .	37
5.2	Redes K-Vizinhos Mais Próximos . . . . .	38
5.3	Redes Adaptativa de Vizinhos Mais Próximos . . . . .	39
5.4	Redes de Recorrência- $\epsilon$ . . . . .	41
5.5	Experimentos . . . . .	41
5.6	Conclusões Parciais . . . . .	44
<b>6</b>	<b>DISCRETIZAÇÃO DO GRÁFICO DE RECORRÊNCIA . . . . .</b>	<b>47</b>
6.1	Apresentação . . . . .	47
6.2	Metodologia . . . . .	47
6.2.1	A escolha do valor de corte $\gamma$ . . . . .	51
6.3	Conclusões Parciais . . . . .	52
<b>7</b>	<b>EXPERIMENTOS E RESULTADOS . . . . .</b>	<b>53</b>
7.1	Aplicação no Mapa Logístico . . . . .	53
7.1.1	A escolha do parâmetro $\gamma$ . . . . .	53
7.1.2	Comparação entre RDE e outros métodos . . . . .	53
7.1.3	Macro Visão dos Diversos Regimes . . . . .	56
7.1.4	Aplicação em diferentes regimes . . . . .	58
7.2	Aplicação em Dados Experimentais de Fluidos . . . . .	62
7.2.1	Metodologia . . . . .	63
7.2.2	Resultados . . . . .	64
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>69</b>
8.0.3	Trabalhos Futuros . . . . .	70
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>71</b>
	<b>ANEXO A - ALGORÍTMO RDE . . . . .</b>	<b>79</b>

# 1 INTRODUÇÃO

As técnicas de análise de dados são cada vez mais utilizadas como ferramentas e evidenciam a compreensibilidade das dinâmicas. Métodos tais como o cálculo da dimensão fractal, do expoente de *Lyapunov* e da entropia são amplamente aplicados. Contudo, a maioria desses recursos necessitam de séries temporais longas, e, em muitos casos, as dificuldades são evidenciadas na presença de ruídos, na não estacionariedade, na dificuldade de processamento devido ao tamanho da série, entre outros (MARWAN et al., 2009).

Nas últimas duas décadas, os gráficos de recorrência foram introduzidos por (ECKMANN et al., 1987) e se desenvolveram como uma ferramenta para o estudo dos sistemas complexos. Um gráfico de recorrência é a representação de uma matriz binária simétrica que demonstra a proximidade de dois estados diferentes no espaço de fases e com uma determinada definição de proximidade, além disso, é considerado uma ferramenta com grande apelo visual. Pode-se tornar ainda mais completa quando associada à análise da quantificação da recorrência, *Recurrence Quantification Analysis* (RQA). O RQA fornece um conjunto de recursos para que um gráfico de recorrência seja medido e quantificado a partir da sua estrutura (ZBILUT; WEBBER, 1992). A técnica de recorrência já foi aplicada com sucesso nas áreas de detecção de transições dinâmicas (ZOU et al., 2008; LITAK et al., 2010), dinâmica econômica (ADDO et al., 2013), reações químicas (CASTELLINI; ROMANELLI, 2004), análise de sinais cardíacos (OUYANG et al., 2014; MARWAN et al., 2002), estudo dos níveis do mar (FENG et al., 2013; MARWAN et al., 2009), etc. É importante enfatizar que as técnicas baseadas em gráficos de recorrência são úteis para a análise de dados curtos e não-estacionários, geralmente, podem apresentar dificuldades para outros métodos (MARWAN et al., 2009; MARWAN et al., 2007).

A representação de uma matriz binária pode ser utilizada para a criação de rede complexa, dessa forma, novas medições serão incorporadas a partir de uma perspectiva diferente. O conceito de redes de recorrência, ou seja, redes complexas originam-se do gráfico de recorrência e tornam-se úteis para esse tipo de caracterização. Esta representação de redes complexas leva em consideração apenas a informação espacial (MARWAN et al., 2009; DONNER et al., 2010a) . Redes de recorrência são capazes de mensurar a complexidade de sistemas dinâmicos, como as dinâmicas periódicas e caóticas (DONNER et al., 2010b). A caracterização de sistemas de baixa dimensão a partir da análise de gráficos de recorrência e redes complexas é um tema importante nas áreas da ciência e engenharia (MARWAN et al., 2009; XU et al., 2008; FENG et al.,

2013; OUYANG et al., 2014). As medidas consolidadas na literatura das entropias, das dimensões fractais e expoentes (LETELLIER, 2006; WOLF et al., 1985; BAKER; GOL-LUB, 1996), igualmente como as medidas extraídas das redes complexas são factíveis e relevantes. Assim, a caracterização da dinâmica é um desafio constante que tem sido encarado com a proposição de novos métodos no meio científico.

O método proposto nesse trabalho, Realce da Densidade da Recorrência, ou, *Recurrence Density Enhancement (RDE)*, revisita o gráfico de recorrência e analisa a densidade de recorrência de um gráfico de forma estatística, a fim de preservar ao máximo as suas macroestruturas e redução do ruído. O resultado do método é um novo gráfico de recorrência redimensionado com menos ruído que o original, e preservação das macroestruturas. Casdagli apresenta, em seu artigo (CASDAGLI, 1997), um método parecido, chamado de *Windowed Recurrence Plot*, ou “Gráfico de Recorrência Janelado”. Este recurso é capaz de detectar mudanças súbitas de parâmetros que não são especificados nos gráficos de recorrência. O *RDE*, no entanto, diferencia-se por respeitar a estrutura original da densidade da recorrência e da redução do ruído. Do mesmo modo, é estabelecido paralelos com métodos de granulação, ou “coarse-graining”, de geração de gráficos de recorrência em que janelas fixas do espaço de fase são utilizados para a criação dos gráficos (DONNER et al., 2008; DONNER et al., 2011). As medidas de RQA são amplamente utilizadas na medição dos gráficos de recorrência. Os experimentos realizados com *RDE* permanecerão válidos e atestados neste mesmo conjunto de ferramentas. A análise feita sobre o *RDE* vai além, pois uma rede complexa pode ser construída e enfatizar propriedades inerentes aos seus sistemas originadores (DONNER et al., 2011). A utilização das medidas RQA e as medidas de redes complexas de um gráfico e de uma rede de recorrência são capazes de capturar a essência da dinâmica original que permite a distinção de diferentes dinâmicas e com a vantagem de aplicar uma análise, em uma versão reduzida e qualitativamente similar.

## 1.1 Organização do Trabalho

Após a introdução no Capítulo 1, essa dissertação apresenta no Capítulo 2 uma introdução na dinâmica linear e seus conceitos. No Capítulo 3, é introduzido o conceito de recorrência, o gráfico de recorrência e as estruturas presentes em seus gráficos. No mesmo Capítulo, a partir das estruturas do gráfico de recorrência, é apresentado as medidas que podem ser extraídas de cada gráfico e o seu significado. No Capítulo 4 é introduzido o conceito de redes complexas, tipos de redes complexas, suas medidas e formas de construção de redes de recorrência a partir do gráfico de recorrência. No

Capítulo 5 são apresentados os métodos com os quais as redes complexas são criadas a partir do gráfico de recorrência. No Capítulo 6 é apresentado o método proposto nesse trabalho e aplicado no mapa logístico e em dados experimentais de fluidos no Capítulo 7. As conclusões deste trabalho, juntamente com sugestões para trabalhos futuros, são apresentadas no Capítulo 8.



## 2 DINÂMICA NÃO LINEAR

Neste capítulo são introduzidos os conceitos de dinâmica não linear e sistemas dinâmicos. A visualização das trajetórias de sistemas dinâmicos no espaço de fases é introduzida a partir de exemplos do oscilador de *Duffing-Van der Pol*. Neste capítulo, também é introduzido o mapa Logístico e o expoente de Lyapunov, de uma forma explicativa, a partir de diferentes dinâmicas encontradas no mapa Logístico.

### 2.1 Sistemas Dinâmicos

Uma das descobertas matemáticas mais surpreendentes das últimas décadas é a de que as soluções de sistemas dinâmicos não-lineares determinísticos podem ser “tão aleatórios quanto a sequência de caras e coroas no lançamento de uma moeda não-viciada” (FORD, 1983). Esse comportamento é chamado de caos determinístico. A descoberta do caos determinístico é especial porque a aleatoriedade tem sido tradicionalmente associada a distúrbios externos desconhecidos (HENRY et al., 2001).

Um sistema dinâmico é um sistema que evolui a cada instante de acordo com um conjunto de regras fixas que determinam como um estado do sistema se altera para um outro.

Um sistema dinâmico contínuo pode ser descrito por equações diferenciais ordinárias (EDO's) ou parciais (EDP's). Para o caso de uma ou mais EDO's, tal sistema assume a forma

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{x}(t), \vec{\mu}) \quad (2.1)$$

enquanto um sistema dinâmico discreto pode ser representado como a iteração de uma ou mais funções, isto é

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{f}_{\mu}(\vec{x}_n) \quad (2.2)$$

onde  $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$  corresponde ao vetor de estados do sistema,  $\mu$  é definido como um parâmetro de controle do sistema e  $\vec{x}(0)$  é o vetor de condições iniciais das variáveis de estado do sistema dinâmico.

Se  $\vec{f}_{\mu}$  é constituído de  $m$  funções contínuas lineares, o sistema dinâmico é linear; caso contrário, o sistema dinâmico é não-linear. Se  $\vec{f}_{\mu}$  não depende explicitamente do tempo  $t$ , o sistema dinâmico é autônomo; caso contrário o sistema é não-autônomo.

Muitos sinais biomédicos são aparentemente aleatórios ou aperiódicos no tempo. Tradicionalmente, a aleatoriedade em sinais biomédicos são associados com o ruído, ou interações entre números muito grandes. Um exemplo de um sistema dinâmico



não linear com diversas aplicações em engenharia é o oscilador de *Duffing-Van der Pol* (SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA; RUDOWSKI, 1994)

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \mu(1 - y^2)\frac{dy}{dt} + y^3 = f \cos \omega t \quad (2.3)$$

onde  $\mu$ ,  $f$  e  $\omega$  são parâmetros. Essa equação de segunda-ordem não-autônoma pode ser escrita como o seguinte sistema de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1^3 + f \cos x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= \omega \end{aligned} \quad (2.4)$$

Sistemas dinâmicos cujo o comportamento modifica-se em intervalos discretos no tempo são descritos por mapa.

### 2.1.1 Espaço de Fases - Atratores

O espaço de fases de um sistema dinâmico é um espaço matemático formado a partir de coordenadas ortogonais representando cada uma das variáveis necessárias para especificar o estado instantâneo de um determinado sistema (BAKER, 1996).

No espaço de fase, cada parâmetro de um sistema é exposto como um eixo de um espaço multi-dimensional. Este é chamado de plano de fase, enquanto um sistema uni-dimensional é chamado de linha de fase.

O estado do sistema dinâmico em um determinado instante no tempo pode ser representado por um ponto neste espaço de fase. Se houver  $n$  variáveis dinâmicas, então o estado em um determinado momento pode ser representado por um ponto no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . À medida que as variáveis dinâmicas mudam seus valores no tempo, o ponto representado traça um percurso no espaço de uma curva contínua, no caso de um sistema dinâmico contínuo, e uma sequência de pontos, no caso de um sistema dinâmico discreto. A partir do oscilador de *Duffing-Van der Pol* (Eq. 2.4), o seu estado de fases é observado na Figura 2.1 para os parâmetros: (a)  $\mu = 0.0$ ,  $f = 0.0$ , onde não há dissipação e o seu caminho é topologicamente similar a um pêndulo; (b)  $\mu = 0.2$ ,  $f = 0.0$ , o pêndulo apresenta dissipação ( $\mu \neq 0$ ); (c)

$\mu = 0.2, f = 1.0, \omega = 0.9$ , onde a dissipação está balanceada por uma força externa  $f \neq 0$ ; (d)  $\mu = 2.0, f = 1.0, \omega = 0.94$ , onde o movimento caótico é visível (HENRY et al., 2001).

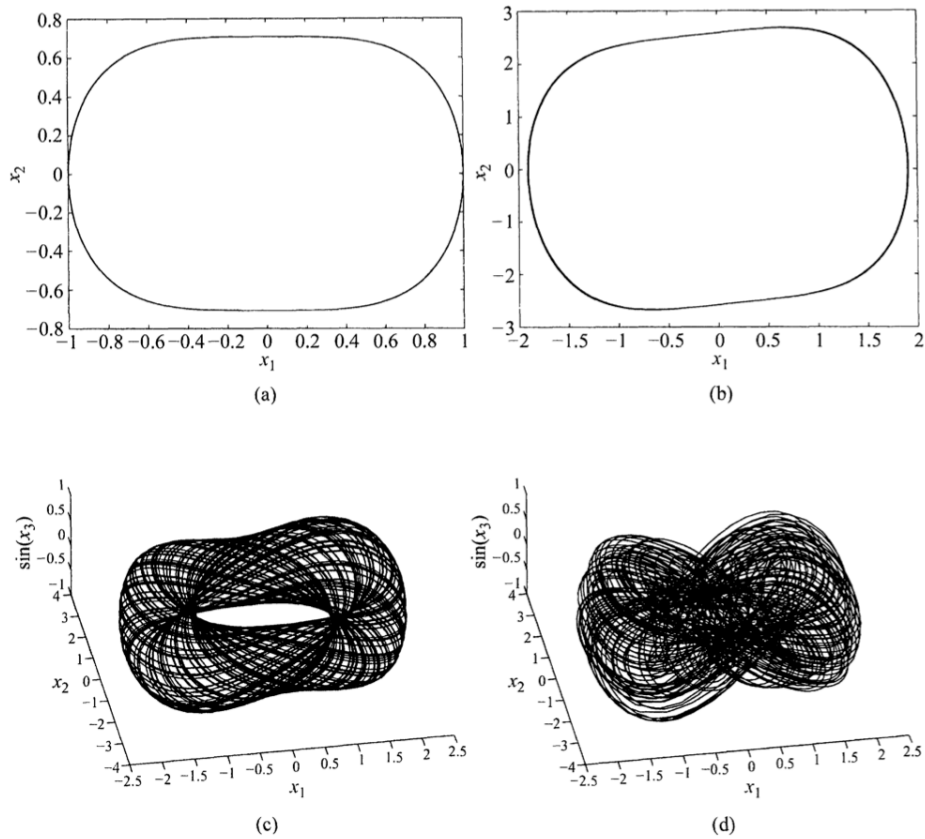


Figura 2.1 - Retratos de fase do oscilador de Duffing-Van der Pol para os parâmetros (a)  $\mu = 0.0, f = 0.0$ ; (b)  $\mu = 0.2, f = 0.0$ ; (c)  $\mu = 0.2, f = 1.0, \omega = 0.9$ ; (d)  $\mu = 2.0, f = 1.0, \omega = 0.94$ . Fonte: (HENRY et al., 2001)

### 2.1.2 Expoente de Lyapunov

A medida padrão para verificar a existência ou não de caos em um sistema é o expoente de Lyapunov, normalmente representado pelo símbolo  $\lambda$ . O Expoente de Lyapunov quantifica a separação exponencial média entre trajetórias próximas no espaço de fase.

É extremamente difícil acompanhar a evolução de um fluxo caótico quando a divergência das trajetórias sobre o intervalo caótico torna-se rápida (HENRY et al., 2001). Para pontos fixos de sistemas dinâmicos a estabilidade é definida pela derivada do

sistema.

Considere dois pontos próximos no passo  $n$ ,  $x_n$  e  $x_n + dx_n$ . No próximo passo no tempo, ambos os pontos vão ter divergido, ou seja,  $x_{n+1}$  e  $x_{n+1} + dx_{n+1}$ . É esta taxa média de divergência (ou convergência) que o expoente de Lyapunov captura, exemplificado de forma ilustrativa na Figura 2.2. Outra maneira de pensar sobre o expoente de Lyapunov está relacionada com a velocidade com que as informações sobre as condições iniciais são perdidas (WOLF et al., 1985).

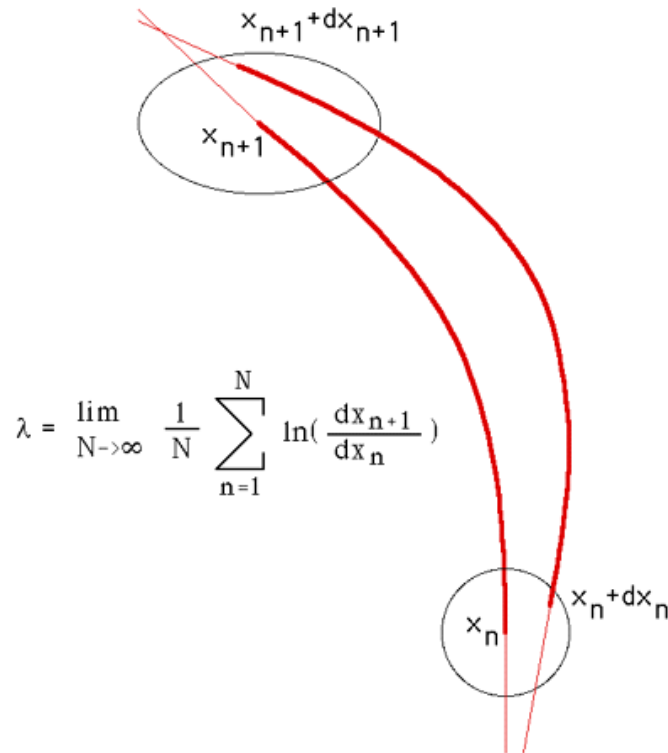


Figura 2.2 - Exemplificação da divergência entre duas trajetórias que evoluem no tempo.

Se o expoente de Lyapunov é positivo ( $\lambda > 0$ ), então o sistema é caótico. Pontos próximos irão divergir independentemente de quão próximos eles estejam. Se o expoente de Lyapunov é inferior a zero ( $\lambda < 0$ ), então o sistema é atraído a um ponto fixo ou órbita periódica estável.

Uma explicação mais detalhada e rigorosa do expoente de Lyapunov em sistemas contínuos e discretos pode ser encontrado em (WOLF et al., 1985; ECKMANN et al., 1986; SANO; SAWADA, 1985).

### 2.1.3 Reconstrução de Atratores

Uma série temporal  $y_n$  pode ser obtida a partir da solução numérica de uma única variável dinâmica  $x_1(t)$ , por uma amostragem de intervalos  $\Delta t = 0.1$ , ou seja,  $y_n = x_1(n\Delta t)$ .

Uma das técnicas de análise de séries temporais que tem como objetivo obter informações sobre variáveis não observáveis é a Reconstrução do Espaço de Fases. Essa técnica tem por base princípios inicialmente propostos por Ruelle (RUELLE, 1979) e Packard (PACKARD et al., 1980a) e posteriormente por Takens (TAKENS, 1981) e Sauer et al. (SAUER et al., 1991). Esta técnica permite a reconstrução do espaço de fases  $m$ -dimensional similar ao espaço de fases original a partir das medições de uma única variável independente, e este espaço reconstruído, apresenta uma diferença muito pequena em relação ao espaço de fase original. Este espaço de fases reconstruído apresenta uma suave variação de coordenada em relação ao espaço original, preservando a topologia do sistema (SAVI, 2006).

O método é baseado na obtenção de vetores atrasados da série temporal original, de modo que o espaço de fases passe a ser definido pelo conjunto de vetores dado por

$$\vec{u}_i = \{x(t_i), x(t_i + \tau), \dots, x(t_i + (m - 1)\tau)\} \quad (2.5)$$

em que  $x(t_i)$  é a série temporal,  $\tau$  é o tempo de atraso de Takens e  $m$  é a dimensão de imersão do espaço de fases. Os atratores obtidos desta maneira são chamados atratores reconstruídos.

A dimensão de *embedding*, ou imersão, é a menor dimensão em que o atrator possa ser considerado completamente reconstruído e em que não há sobreposição das trajetórias reconstruídas (FACCHINI et al., 2007). Normalmente, não se sabe a priori quantas e quais são as variáveis de estado de um sistema dinâmico, o que dificulta a determinação da sua dimensão. Assim, antes de se reconstruir o espaço de estado, faz-se necessário determinar a dimensão de imersão do sistema (*embedding dimension*), definindo um conjunto de coordenadas que serve como base para a reconstrução do espaço de estado.

Em aplicações práticas o algoritmo *Grassberger-Procaccia* (GRASSBERGER; PROCACCIA, 1983) pode ser utilizado para medir a dimensão de correlação de reconstruções para diferentes dimensões de *embedding*. A dimensão mínima do atrator para o a imersão é  $m + 1$ , em que  $m$  é a dimensão de imersão. A imersão pode ser obtida

para qualquer valor do tempo de atraso  $\tau > 0$  (HENRY et al., 2001). Encontrar o valor ótimo para a dimensão de *embedding* já foi apresentado por Sauer et al. (SAUER et al., 1991). Caso o atrator tenha uma dimensão de contagem de caixas  $D_0$ , então a dimensão  $m \geq 2D_0 + 1$  é suficiente para a reconstrução. Caso o atrator possua a dimensão de correlação  $D_2$ , a dimensão de *embedding*  $m \geq D_2$  é suficiente para medir a dimensão correlacionada a partir da imersão. (HENRY et al., 2001)

Existem vários métodos para a seleção do tempo de atraso. O método mais difundido emprega como critério de seleção o primeiro zero da função de autocorrelação, definida em (HENRY et al., 2001) como

$$C(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i x_{i+t}. \quad (2.6)$$

Já o método apresentado por *Fraser e Swinney* (FRASER; SWINNEY, 1986) emprega como critério o tempo dado pelo primeiro mínimo local da função de informação mútua. A função de informação mútua indica em que grau parte de uma série temporal contém informação, ou relembra, outras partes da mesma série temporal (HENRY et al., 2001). Ela mede a dependência geral de duas variáveis, e fornece uma estimativa melhor para a escolha do tempo de atraso que o primeiro zero da função de autocorrelação, onde é considerada apenas a dependência linear.

No entanto, valores de  $\tau$  pequenos resultam em reconstruções quase-lineares com alta correlação entre pontos consecutivos do espaço de fase. Valores grandes de  $\tau$  podem esconder a estrutura ao ligar pontos sem correlação (HENRY et al., 2001).

Diferentes valores de  $\tau$  e  $m$  levam a reconstrução de diferentes trajetórias. De acordo com os teoremas de imersão, a preservação das estruturas topológicas da trajetória original de um sistema é garantida se, e somente se,  $m \geq 2d + 1$ , onde  $d$  é a dimensão do atrator e  $m$  a dimensão de imersão. Contudo, isso não impossibilita uma imersão que não satisfizesse essa relação de dimensões (HENRY et al., 2001).

Os resultados de (TAKENS, 1981) garantem que o atrator reconstruído e o original são difeomórficos. Além disso, a série temporal de uma única variável independente é suficiente para a reconstrução desde que a dimensão de imersão seja suficientemente grande (TAKENS, 1981; SAUER et al., 1991). Assim, a escolha correta de  $\tau$  e da dimensão de imersão  $d$  são importantes para a identificação dos invariantes geométricos.

## 2.2 Mapa Logístico

Inúmeros pesquisadores passaram a analisar diferentes sistemas dinâmicos. Em 1976, (MAY et al., 1976), re-introduziu um sistema dinâmico, originalmente proposto por (VERHULST, 1845), este relacionado com o crescimento populacional. Em seu trabalho, o autor abordou o *mapa logístico* para o qual avalia a população  $x$  no ano  $n + 1$  a partir da população do ano anterior, ou seja,

$$x_{n+1} = rx_n(x_n - 1) \quad (2.7)$$

Este mapa é um sistema dinâmico autônomo, discreto e unidimensional, isto é, caracterizado por uma única variável de estado  $x \in \mathbb{R}$ . O parâmetro  $r$  define o tipo de resposta do sistema, ou seja, a iteração do mapa (2.7) para diferentes valores de  $r$  podem conduzir à soluções estáveis, periódicas ou irregulares, como as apresentadas na Figura 2.3. Em  $r = 3.5$ , observa-se uma solução periódica de período 4. Com o aumento de  $r$ , é visível a região de duplicação de períodos, onde o período duplica de 4 para 8 em  $r \approx 3.7$ . Em seguida observa-se uma seqüência determinística e aperiódica, característica de sistemas caóticos.

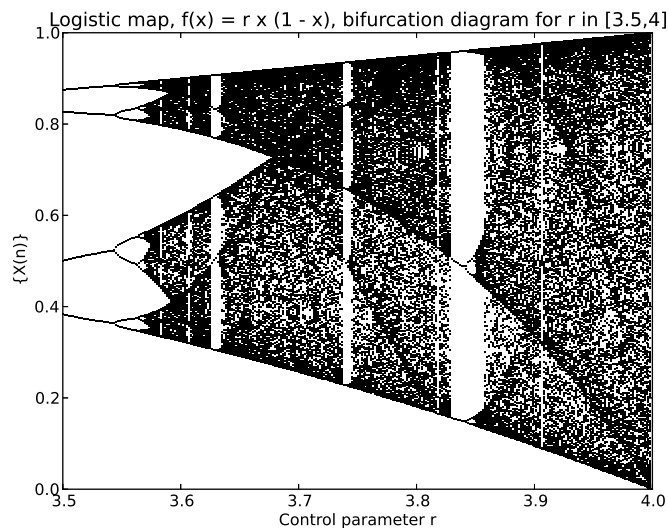


Figura 2.3 - Diagrama de bifurcação do mapa logístico (2.7) para  $r = [3.5, 4.0]$ .

O mapa logístico, para determinados intervalos de  $r$ , também apresenta outra característica visível de sistemas caóticos: a sensibilidade às variações nas condições iniciais. A sensibilidade às variações nas condições iniciais pode ser exemplificada ao

iniciar duas trajetórias de pontos próximos, e após eliminar o transiente de ambas as trajetórias, seria impossível afirmar que as duas iniciaram de pontos tão próximos.

As trajetórias ou órbitas de um sistema caótico oscilam aprisionadas dentro de uma região limitada no espaço de estados sem apresentar periodicidade. No interior desta região, as variáveis de estado exibem valores correspondentes a pontos no espaço de fase para os quais as trajetórias caóticas, passam próximas das órbitas periódicas instáveis à medida que o sistema evolui no tempo (ALLIGOOD et al., 1997).

O mapa logístico apresenta valores do expoente de Lyapunov característicos para as suas regiões estáveis com órbita periódicas e janelas periódicas, ou seja  $\lambda \leq 0$  onde  $r = [3.5, 3.5688]$  e valores positivos  $\lambda > 0$  em regiões que apresentam caos  $r = [3.56994, 3.8284], r = [3.8415, 4.0]$ . Como visto na Figura 2.4.

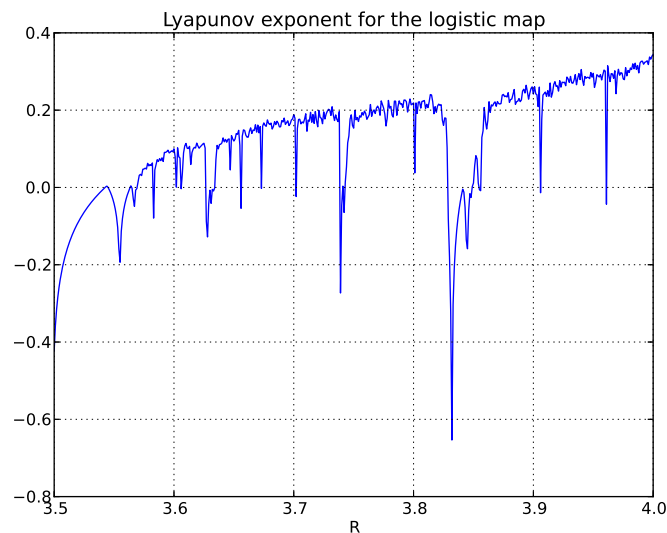


Figura 2.4 - Expoente de Lyapunov do mapa logístico (2.7) para  $r = [3.5, 4.0]$ .

O mapa logístico também apresenta intermitência para determinados parâmetros de controle. A intermitência pode ser caracterizada como a alternância entre períodos regulares (laminar), longos e períodos curtos de comportamento irregular. Segundo (SCHUSTER; JUST, 2006), a frequência observada de períodos irregulares tende a aumentar de acordo com parâmetros externos, o que significa que a intermitência é um indicativo de que uma dinâmica regular caminha para um movimento caótico.

De acordo com (POMEAU; MANNEVILLE, 1980), o comportamento intermitente pode ter a seguinte interpretação: As oscilações estáveis para  $r < r_c$  (onde  $r_c$  é o parâme-

tro de controle e  $r_c$  é o seu limiar) correspondem a pontos fixos estáveis no mapa de *Poincaré*. Para valores acima de  $r_c$ , esses pontos fixos se tornam instáveis apresentando intermitência. Segundo *Schuster*, existem três formas que um ponto fixo podem perder a estabilidade, são eles os tipos *I*, *II* e *III* e podem ser vistos de forma detalhada em (SCHUSTER; JUST, 2006).

No mapa logístico, logo abaixo do seu valor intermitente  $r = 1 + \sqrt{8}$ , a sua dinâmica apresenta uma órbita de período três (Figura 2.5A, onde  $r \rightarrow 1 + \sqrt{8}$ ) e para o valor intermitente, o mapa apresenta janelas que exibem movimento caótico (Figura 2.5B, onde  $r = 1 + \sqrt{8}$ ).

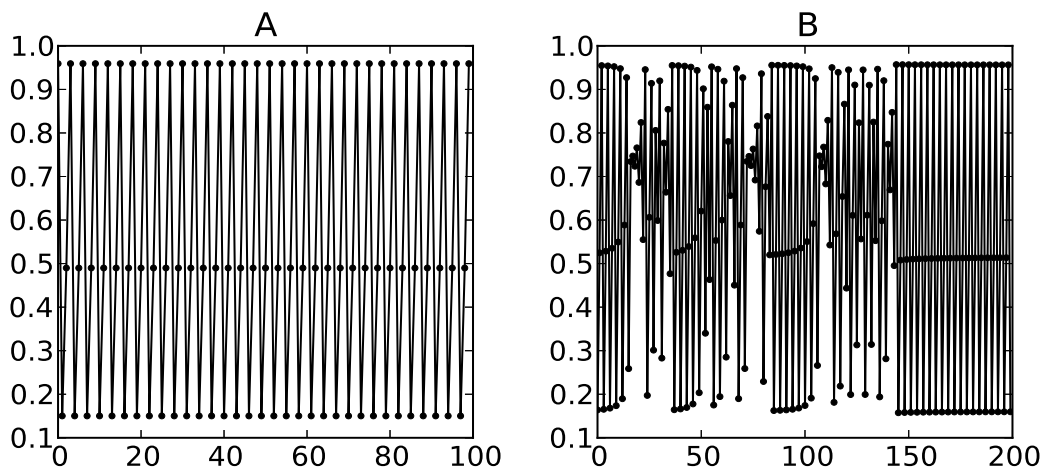


Figura 2.5 - A) mapa logístico período 3 para  $r \rightarrow 1 + \sqrt{8}$ . B) mapa logístico intermitente para  $r = 1 + \sqrt{8}$

### 2.3 Conclusões Parciais

Nesse capítulo foi apresentado um breve resumo sobre os conceitos da dinâmica não linear, sistemas dinâmicos e suas classificações. A visualização das trajetórias foi apresentado a partir do diagrama de fases com o exemplo do oscilador de *Duffing-Van der Pol* e o mapa logístico. Também foi apresentado brevemente o expoente de Lyapunov, exemplificado a partir da caracterização de diferentes dinâmicas do mapa logístico.





### 3 RECORRÊNCIA

Neste capítulo é apresentado o conceito de recorrência em sistemas dinâmicos. O gráfico de recorrência é apresentado em conjunto com as suas estruturas, propriedades e o RQA (*Recurrence Quantification Analysis*), uma ferramenta para a extração de medidas do gráfico de recorrência. Por final, são mostrados os gráficos de recorrência em diferentes dinâmicas, suas medidas de RQA e a interpretação desses valores de acordo com o mapa logístico.

#### 3.1 Conceito

A recorrência é um fenômeno dos sistemas dinâmicos e o conhecimento de sua existência já vem de longa data, e inicialmente estudado por *Poincaré*, no seu estudo do problema dos três corpos (POINCARÉ, 1890). De uma forma simplista, o Teorema de Recorrência de *Poincaré* afirma que, depois de um certo tempo, certos sistemas irão retornar a um estado muito próximo ao estado inicial, dessa forma, o tempo de recorrência de *Poincaré* é o tempo decorrido até a recorrência de um certo estado (BERGELSON, 2000) .

Dentro do contexto da análise de séries temporais, a recorrência é um estado  $x_i$  em um tempo  $t = i \cdot \Delta t$  quando o estado do sistema  $x_j$  em outro tempo  $t = j \cdot \Delta t$  é similar a esse estado inicial ou tão próximo quanto desejarmos (MARWAN et al., 2007). O cálculo dos tempos de recorrência, ao contrário de outros métodos, tais como *Fourier* ou *Wavelets*, não requer a transformação dos dados, e pode ser utilizado para ambos os sistemas lineares e não-lineares (ZBILUT et al., 2002).

Os dados observados podem vir de um único caso ou podem ser agregados a partir de vários casos analisados. As séries temporais são utilizadas para a representação de dados nas mais diversas áreas, como, por exemplo: finanças, estatísticas, computação, meteorologia, e outras.

#### 3.2 Gráficos de Recorrência

A ferramenta para análise de recorrência, o gráfico de recorrência (*Recurrence Plot*), introduzida por Eckmann et al., é largamente utilizada para a visualização de comportamentos recorrentes no espaço de fase de sistemas dinâmicos (ECKMANN et al., 1987).

O gráfico de recorrência de uma série temporal de  $N$  pontos é uma matriz binária de tamanho  $N \times N$ . A partir desta matriz binária, ou matriz de recorrência  $R$ ,

um ponto recorrente é definido como  $R_{i,j} = 1$  se o estado  $x_i$  for vizinho de  $x_j$  no espaço de fases, caso contrário,  $R_{i,j} = 0$ . Um estado  $x_i$  qualquer é dito recorrente de outro estado se, durante a trajetória do sistema, o estado  $x_j$  estiver próximo o bastante de  $x_i$  no espaço de fases respeitando um limiar  $\varepsilon$ . A definição de recorrência é representada da forma

$$R_{i,j}(\varepsilon) = \Theta(\varepsilon - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|), \quad \vec{x}_{i,j} \in \mathfrak{R}^m, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

onde:

- $N$  é o número de estados  $x_i$  utilizados na série temporal;
- $\varepsilon$  é o limiar (*threshold*) a partir do ponto  $\vec{x}_i$ ;
- $\Theta(\cdot)$  é a função de *Heaviside*;
- $\|\cdot\|$  é a norma da vizinhança, geralmente, a norma euclidiana;
- $m$  é a dimensão de imersão.

Os gráficos de recorrência são compostos por estruturas de pequena escala como os pontos e linhas (diagonais, verticais ou horizontais) e estruturas de larga escala, também chamada de texturas. Os pontos podem ser interpretados como estados que não persistem por um longo período de tempo. Um gráfico de recorrência feito apenas de pontos separados está associado com um sinal composto por ruído.

As linhas diagonais de comprimento  $L$ , definidas por

$$R_{i+k,j+k} = 1 \Big|_{k=1}^L, \quad (3.2)$$

caracterizam trajetórias que evoluem de forma paralela a outro segmento de trajetória, isto é, a trajetória visita a mesma região do espaço de fase em tempo diferentes. As linhas verticais e horizontais de comprimento  $L$ , definidas por

$$R_{i,j+k} = 1 \Big|_{k=1}^L R_{i+k,j} = 1 \Big|_{k=1}^L, \quad (3.3)$$

indicam que o estado do sistema não muda, ou seja, permanece estacionário durante a evolução no tempo (MARWAN, 2003; FACCHINI et al., 2007). Na Tabela 3.2 pode ser visto um apanhado das texturas mais encontradas nos gráficos de recorrência, juntamente com o seu significado.

Tabela 3.1 - Texturas observadas em um gráfico de recorrência e o seu significado. Fonte adaptada: (DONNER et al., 2010b)

<b>Estrutura (Textura)</b>	<b>Interpretação</b>
Pontos pretos distribuídos de forma homogênea	o processo é estacionário.
Pontos pretos isolados	flutuações fortes no processo; o processo pode ser aleatório não-correlacionado somente ocorre pontos isolados singulares.
Linhas diagonais paralelas	A trajetória de um segmento visita a mesma região do espaço de fase de outro segmento em tempo diferente.
Linhas verticais e horizontais	alguns estados não mudam ou mudam lentamente para algum tempo; uma indicação para estados laminares.
Linhas diagonais curtas	dado não-estacionário; alguns estados são raros; transições podem ter ocorrido.
Pontos de recorrência na linha diagonal	dado não-estacionário; o processo contém uma deriva ou tendência.
Formas repetidas	ciclicidades no processo; a distância de tempo entre padrões periódicos corresponde ao período; distâncias diferentes entre linhas diagonais longas revelam processos quase-periódicos.

As estruturas de larga escala de um gráfico de recorrência podem ser classificadas como:

- (a) Homogêneo (Fig. 3.1A), quando os gráficos apresentam pontos pequenos se comparados com o gráfico de recorrência como um todo, ou seja, o tempo característico de cada linha (estados sucessivos) é pequeno em relação ao tempo total de exposição do sistema.
- (b) Periódico (Fig. 3.1B), comum em sistemas oscilantes que sempre apresentam linhas diagonais totalmente preenchidas e paralelas a diagonal principal. Além disso, apresentam estruturas de blocos recorrentes.
- (c) Gráficos deriva (ou *drift*, Fig. 3.1C) acontecem principalmente quando o sistema possui uma variação de parâmetros lenta.
- (d) Descontínuo (Fig. 3.1D) que é causada por mudanças abruptas na dinâmica,

bem como a ocorrência de eventos raros, ocasionando bandas brancas.

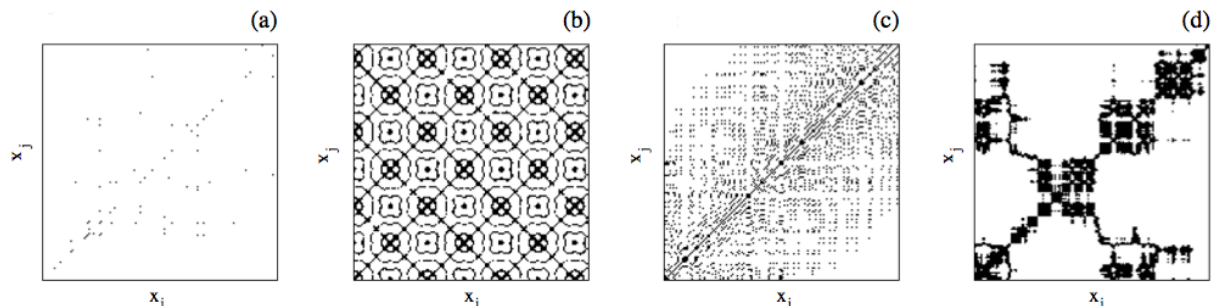


Figura 3.1 - Algumas topologias características dos gráficos de recorrência. (a) Homogêneo, (b) Periódico, (c) Deriva (ou *drift*) e (d) Descontínuo. Figura retirada da tese (MARWAN, 2003).

Além de ser uma ferramenta com forte apelo visual, podem ser utilizadas técnicas de análise para caracterizar as estruturas geradas. As estruturas de pequena escala (pontos e linhas) são utilizadas como quantificadores de recorrência, conhecida como Análise de Quantificação de Recorrência (*RQA - Recurrence Quantification Analysis*) (ZBILUT; WEBBER, 1992; MARWAN, 2003).

### 3.2.1 A escolha de parâmetros de recorrência

Para o melhor aproveitamento da técnica de recorrência com séries temporais não estacionárias, a escolha correta dos seus parâmetros é fundamental. Como discutido anteriormente, um conceito de distância espacial é empregado para definir a proximidade entre dois estados. Em geral, a norma Euclidiana  $d(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|$  é considerada para preencher a matriz binária de recorrência  $R$  contendo todos os pares próximos  $\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\| < \varepsilon$ . A trajetória no espaço de fase pode ser reconstruída a partir de uma série temporal  $u_{ii}$  via *embedding* do tempo de atraso (MARWAN et al., 2007)

$$\vec{x}_i = (u_i, u_{i+\tau}, \dots, u_{i+\tau(m-1)}), \quad (3.4)$$

onde  $m$  é a dimensão de *embedding* e  $\tau$  é o atraso.

A mudança de estados em um sistema faz com que a escolha dos valores para  $m$ ,  $\tau$  e  $\varepsilon$  transforme-se em uma tarefa pouco trivial. Normalmente, os sistemas biológicos são raramente estacionários, e muitas vezes apresentam alterações bastante bruscas

de estado. No entanto, algumas diretrizes, encontradas a partir das pesquisas disponíveis, podem ser estabelecidas para a captura da não-estacionariedade (ZBILUT et al., 2002). A análise da recorrência a partir de uma região linear do espaço de fase tem implicação direta no valor de  $\varepsilon$ . Valores baixos para  $\varepsilon$  podem resultar na captura apenas de ruído; no entanto, valores exagerados podem considerar a recorrência em dois estados não-recorrentes. Uma das formas de entender propriamente a dinâmica é utilizar as próprias medidas de recorrência, como a medida de recorrência (RR), definida na Eq. (3.5), para diversos valores de  $\varepsilon$  e tracejar os resultados em escala *log-log* a fim de detectar uma região onde a dinâmica se sobressaia (ZBILUT et al., 2002).

Segundo Grassberger et al., o conceito de *embedding* e atraso corretos não existem no conceito de não estacionariedade (GRASSBERGER et al., 1991). De acordo com os mesmos, a utilização de um valor suficientemente grande para o *embedding*, de forma que contenha todas as dinâmicas relevantes e também o ruído presente, tende a “inflar” a dimensão. Estudos feitos por Gao e Cai, utilizando um atrator de Lorenz com ruído, concluíram que o *embedding*  $m = 6$  é suficiente para clarificar a sua dinâmica (GAO; CAI, 2000). Para os sistemas biológicos, altamente complexos, o valor de *embedding*  $m = 10$  pode ser utilizado com um certo cuidado quanto ao ruído, já que o *embedding* implica na sua amplificação e prejudicando assim a dinâmica real (ZBILUT et al., 2002).

Na medida em que o sistema muda entre uma dimensão para outra, os efeitos do atraso  $\tau$  são alterados e assim, o atraso “ideal” do *embedding*, torna-se cada vez menos relevante à cada mudança de dimensões (ZBILUT et al., 2002). O ponto principal para o atraso é o entendimento de como a captura do dado foi feita, em específico os valores de amostragem, a banda e a precisão. De forma geral, o teorema de reconstrução do atraso indica que qualquer atraso é apropriado (PACKARD et al., 1980b). Na prática, a amostragem utilizada irá determinar se um sistema teve amostragem suficiente a ponto de capturar propriamente a dinâmica. Dessa forma, o indicado é realizar a amostragem em excesso, de maneira que seja suficiente a ponto de capturar todos os atributos de uma série temporal.

### 3.3 Quantificadores de Recorrência

A partir das estruturas de pequena escala e larga escala, é possível quantificar, por exemplo, a dinamicidade e a previsibilidade do sistema em questão, através da análise da quantificação de recorrência (RQA - *Recurrence Quantification Analysis*), ferramenta desenvolvida por Zbilut e Webber em 1992 (ZBILUT; WEBBER, 1992;

MARWAN, 2003).

A análise de quantificação de recorrência define medidas de complexidade usando a densidade dos pontos recorrentes, e as estruturas diagonais do gráfico de recorrência: a taxa de recorrência ( $RR$ ), determinismo ( $DET$ ), divergência ( $DIV$ ), entropia ( $ENTR$ ), laminaridade ( $LAM$ ). Alguns estudos baseados nas medidas de RQA mostraram que é possível encontrar pontos de bifurcação, especialmente em transições caos-ordem (MARWAN et al., 2007). O RQA é baseado nos gráficos de recorrência gerados a partir de um limiar  $\epsilon$  fixo, por isso os gráficos de recorrência são simétricos.

### 3.3.1 Medidas baseadas na densidade de recorrência

As medidas baseadas na densidade são caracterizadas pelo agrupamento dos pontos de recorrência de um gráfico. Uma das medidas mais simples é a medida da taxa de recorrência REC ou RR, dado por,

$$RR(\epsilon, m) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N R_{i,j}^{m,\epsilon}, \quad (3.5)$$

em que  $N$  a dimensão do gráfico de recorrência,  $m$  é a dimensão de imersão e  $\epsilon$  o limiar. A taxa de recorrência é a medida relativa a densidade de pontos de recorrência e corresponde com a definição de correlação para casos onde o número de pontos é muito grande.

### 3.3.2 Medidas baseadas nas linhas diagonais

A medida do Determinismo mede o número de estruturas diagonais formadas, divididas sobre todo o gráfico de recorrência e é definida por:

$$DET = \frac{\sum_{l=l_{min}}^N lP(l)}{\sum_{l=1}^N lP(l)}, \quad (3.6)$$

onde  $l$  é o comprimento da linha diagonal,  $N$  a dimensão do gráfico de recorrência e  $P(l)$  a probabilidade de existência linhas diagonais com comprimento  $l$ . Essa medida pode ser interpretada como a previsibilidade do sistema. Para sistemas em que a previsibilidade é alta, no caso de comportamentos periódicos, o determinismo possui valor 1.

O comprimento médio das linhas diagonais (*average diagonal length*), dado por:

$$L = \frac{\sum_{l=l_{min}}^N lP(l)}{\sum_{l=l_{min}}^N P(l)}, \quad (3.7)$$

onde  $l_{min}$  é o comprimento mínimo da diagonal, fornece o tempo médio em que dois segmentos da trajetória permanecem evoluindo de forma similar em um estado do sistema.

Outra medida de RQA considera o tamanho  $L_{max}$  da maior linha diagonal encontrada no gráfico de recorrência, dado por:

$$L_{max} = \max(l_{i=1}^{N_l}) \quad (3.8)$$

em que  $N_l = \sum_{l \geq l_{min}} P(l)$  é o número total de linhas diagonais. Essas medidas estão relacionadas com a divergência exponencial da trajetória do espaço de fase. Na medida que os segmentos das trajetórias divergem, mais curtas são as linhas diagonais.

A Divergência, dada por

$$DIV = \frac{1}{L_{max}}, \quad (3.9)$$

que é o inverso do comprimento máximo de uma linha diagonal  $L_{max}$  contida no gráfico de recorrência e pode ser interpretada como o tempo máximo em que duas trajetórias divergem.

A medida da entropia na recorrência, dada por:

$$ENTR = - \sum_{l=l_{min}}^N p(l) \ln p(l), \quad (3.10)$$

refere-se a entropia de Shannon, e é obtida a partir da frequência de distribuição das linhas diagonais acima de um determinado comprimento  $l_{min}$ . A entropia é um indicador de complexidade do sistema.



### 3.3.3 Medidas baseadas nas linhas verticais

O número total de linhas verticais de tamanho  $v$  no gráfico e recorrência é obtido a partir do histograma, obtido de:

$$P(v) = \sum_{i,j=1}^N (1 - R_{i,j})(1 - R_{i,j+v}) \prod_{k=0}^{v-1} R_{i,j+k}, \quad (3.11)$$

que tem uso direto em outras medidas, como a laminaridade

$$LAM = \frac{\sum_{v=v_{min}}^N vP(v)}{\sum_{v=1}^N vP(v)} \quad (3.12)$$

que é a razão entre as linhas verticais recorrentes de todo o gráfico de recorrência dividido pelo conjunto de pontos recorrentes contido nele. Essa medida fornece a quantidade de estruturas verticais do gráfico de recorrência e representa a ocorrência de estados recorrentes que não mudam no tempo.

A seção seguinte faz um apanhado das medidas RQA aplicadas no mapa logístico.

### 3.4 Exemplos em Diferentes Dinâmicas

Nesta seção, diferentes dinâmicas são observadas de forma que os seus gráficos de recorrência e as suas medidas possam ser utilizados como exemplos.

A partir do gráfico de recorrência visível na Fig. 3.2B., é possível afirmar que o seu sinal (Fig. 3.2A) é periódico. O distanciamento entre as linhas verticais e horizontais denotam que o período desse sinal é 4. Algumas medidas de RQA extraídas desse gráfico também podem dizer muito sobre o gráfico, mesmo que não possamos visualizá-lo. Para  $L_{max} = 96$ , tamanho da maior linha diagonal excluindo a linha de identidade, um valor alto para um sinal com  $N = 100$  indica um sinal periódico. O determinismo  $DET = 1$  é característico de sinais periódicos. A taxa de recorrência  $RR = 0.25$  também é um indicador da densidade desse gráfico. Já a laminaridade  $LAM = 0$ , indica que não há intermitência no sinal.

Em um sinal dito caótico (Fig. 3.3B), a intermitência está presente (identificado no gráfico por uma seta) e caracterizada por  $LAM = 0.13$ , assim como a queda do determinismo que apresenta  $DET = 0.69$ . A diminuição do tamanho de linhas diagonais também é característico para esse tipo de dinâmica como observado na Fig. 3.3B e também capturada em  $L_{max} = 8$ . A taxa de recorrência também apresenta um valor baixo por conta da densidade de pontos pretos  $RR = 0.12$ . Outra

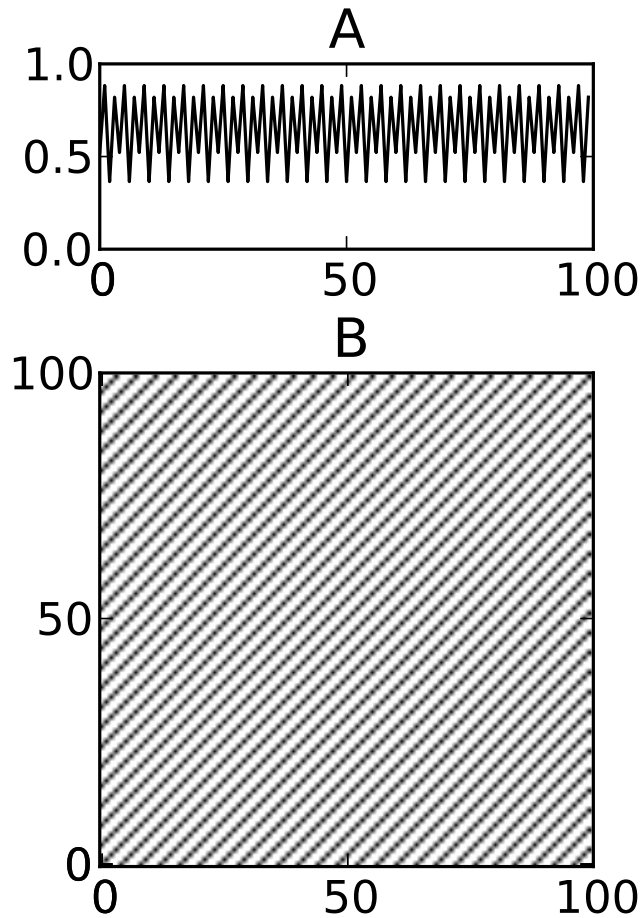


Figura 3.2 - (A) Sinal periódico do mapa logístico para  $r = 3.54$ . (B) Gráfico de recorrência correspondente ao sinal (A) para  $\varepsilon = 0.1$ ,  $N = 100$ .

característica observado nesse tipo de dinâmica é visível pela presença de blocos pretos como em  $N = 45$  e  $N = 35$  onde as trajetórias se encontram fixo em um atrator por um determinado tempo.

Em um sinal aleatório (Fig. 3.4A), os pontos de recorrência se encontram espaçados e distribuídos por todo o gráfico (Fig. 3.4B) sem a formação de grandes estruturas, comprovado por  $L_{max} = 4$ , ainda menor que o sinal caótico. O determinismo para esse tipo de dinâmica é ainda menor quando comparado com o sinal caótico  $DET = 0.23$ . A intermitência do sinal aleatório também é capturada via  $LAM = 0.22$  e possui um valor expressivo, em relação aos outros sinais. A taxa de recorrência,  $RR = 0.11$  é um indicador da baixa densidade de pontos no gráfico.

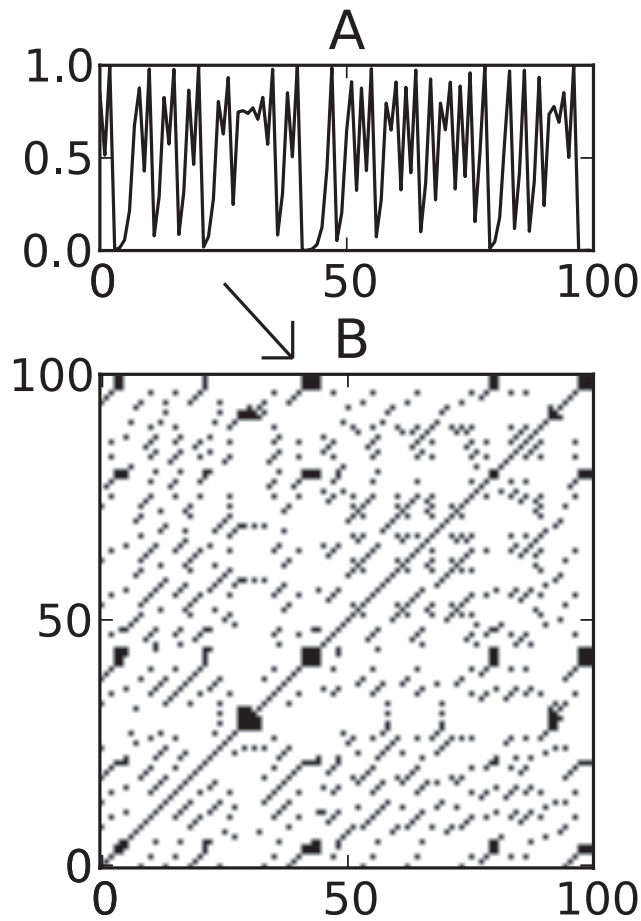


Figura 3.3 - (A) Sinal caótico do mapa logístico para  $r = 4$ . (B) Gráfico de recorrência correspondente ao sinal (A) para  $\varepsilon = 0.1$ ,  $N = 100$ ,  $L_{max} = 8$ ,  $RR = 0.12$ ,  $DET = 0.69$ ,  $LAM = 0.13$ .

### 3.5 Conclusões Parciais

Nesse capítulo, foi apresentado o conceito de recorrência a partir de um sistema dinâmico e como reconstruir a trajetória desse atrator no espaço de fases. Foi apresentado o gráfico de recorrência (RP - *Recurrence Plot*) e os seus medidores, assim como a exemplificação de diferentes tipos de dinâmicas e os seus medidores RQA.

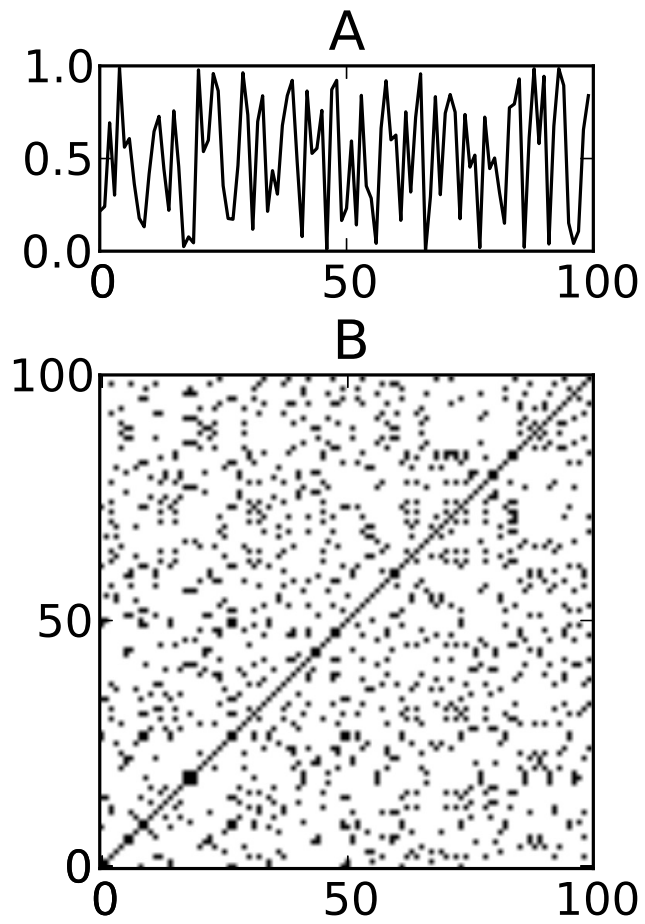


Figura 3.4 - (A) Sinal aleatório, uniformemente distribuído. (B) Gráfico de recorrência correspondente ao sinal (A) para  $\varepsilon = 0.1$ ,  $N = 100$ ,  $L_{max} = 4$ ,  $RR = 0.11$ ,  $DET = 0.23$ ,  $LAM = 0.22$ .



## 4 REDES COMPLEXAS

Nesse capítulo é feito um breve resumo sobre as origens das redes complexas, tipos de redes e suas propriedades, assim como a suas aplicações. Por fim, são apresentadas algumas medidas de redes complexas.

### 4.1 Conceito

Historicamente, o estudo das redes foi um dos tópicos de abrangência de um dos ramos da matemática discreta, chamada de teoria dos grafos. O início do seu desenvolvimento ocorreu por volta de 1736, quando o matemático suíço, *Leonhard Euler* publicou a solução para o problema das pontes de *Königsberg*. O problema das pontes descrito por Euler, consistia em encontrar um caminho que atravessasse, somente uma vez, por todas as pontes da cidade de *Königsberg*. Esta descrição contribuiu na elevação da visibilidade para a área (BOCCALETTI et al., 2006).

As redes estão em todos os lugares e podem ser formadas por objetos tangíveis, como: redes de energia elétrica, a *Internet*, a malha rodoviária e redes de neurônios. Além disso, podem ser entidades definidas em um espaço abstrato, como: redes de colaboração entre indivíduos ou uma rede de relacionamento social entre pessoas (BARABASI, 2002; BOCCALETTI et al., 2006). A partir de uma determinada metodologia para ligação de vértices e arestas, qualquer sistema discreto pode ser representado de forma abstrata em uma rede complexa (COSTA et al., 2007).

O aumento do poder computacional proporcionou o armazenamento e a investigação de conjuntos maiores de dados, provocando assim, um impacto profundo na viabilização dos estudos de grandes redes. As redes complexas são caracterizadas por apresentar estrutura irregular, complexa e evolutiva no tempo. Um dos principais atributos das redes complexas é que elas são grandes, dessa forma, seu entendimento completo é praticamente impossível. A análise das redes complexas é preferencialmente feita por meio de propriedades locais: quantos vértices essa rede possui, e por quais regras os vértices são conectados uns com os outros, etc (BOCCALETTI et al., 2006). Uma conclusão inicial da análise de uma grande quantidade de redes revelou que a maioria das redes compartilham atributos similares (HOFSTAD, 2009). De acordo com Watts e Strogatz (WATTS; STROGATZ, 1998), muitas redes são “pequenos mundos” (*small-world networks*), desta forma, a maioria dos vértices são separados por pequenas cadeias de arestas. Em 1999, Barabási e Albert (BARABÁSI; ALBERT, 1999) foram os responsáveis por caracterizar outras propriedades nas redes, definidas por eles como rede “livre de escala”. Nessas redes, uma quantidade reduzida de

vértices possui alto número de conexões, formando assim *hubs*.

## 4.2 Fundamentos e Representação

As redes complexas têm as suas raízes na teoria dos grafos, e formalmente, uma rede complexa pode ser declarada da seguinte forma,  $G = (V, E)$  em que  $G$  é a rede, composta por um conjunto  $V$  de vértices e um conjunto  $E$  de arestas. O conjunto de vértices  $V$  é representado por  $V \equiv \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$ , em que  $N$  é a quantidade de vértices. O conjunto de arestas  $E$ , é representado como  $E \equiv \{l_{1,2}, l_{2,1}, \dots, l_{K,K'}\}$ , em que  $K$  e  $K'$  são os vértices adjacentes por essa aresta. A representação de cada aresta pode ser definida como  $(i, j)$  ou  $l_{i,j}$ , representando a ligação entre os vértices  $i$  e  $j$  (NEWMAN, 2010). Um grafo é dito simples quando ele não apresenta *loops* nem mais de uma aresta ligando dois vértices. O grafo exibido na Figura 4.1 aponta o vértice e uma aresta de um grafo simples criado a partir da representação da Eq. (4.1).

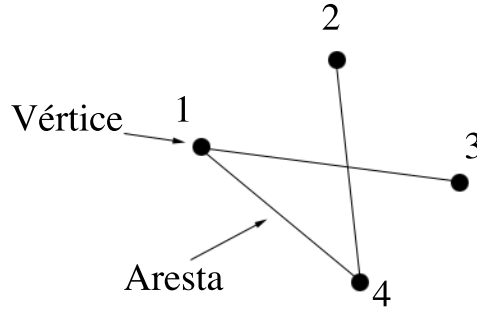


Figura 4.1 - Uma rede simples criada a partir da Eq. (4.1).

Uma rede também pode ser representada pela matriz binária de adjacência

$$A_{i,j} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} & A_{4,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} & A_{4,2} \\ A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3} & A_{4,3} \\ A_{1,4} & A_{2,4} & A_{3,4} & A_{4,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

onde  $A_{i,j} = 1$  se existe uma conexão entre os vértices  $i$  e  $j$  e  $A_{i,j} = 0$ , caso não exista a ligação (ARENAS et al., 2008). Em um caso mais generalista de uma rede ponderada, o grafo é caracterizado pela matriz  $W$ , com  $W_{ij}$  representando o peso (ou força) da

conexão entre as arestas  $i$  e  $j$ . O grafo definido pela matriz de adjacência simétrica 4.1, pode ser dito como um grafo não direcionado. Um grafo não direcionado é aquele em que  $A_{i,j} = A_{j,i}$ . Um grafo direcionado também pode ser uma matriz simétrica ao replicar as arestas em ambos os sentidos.

O grau de um vértice  $i$ , para uma matriz simétrica, é representado por

$$k_i = \sum_j A_{i,j} = \sum_j A_{j,i}, \quad (4.2)$$

é a quantidade de arestas que se conectam ao vértice  $i$ . No grafo 4.1, o grau do vértice 1 é 2, já que este vértice possui ligações com os vértices 4 e 3. O grau médio de um grafo

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_i k_i = \frac{1}{N} \sum_{ij} A_{ij} \quad (4.3)$$

é a média da soma do grau de todos os vértices. Para o grafo representado em 4.1, o grau médio é 1.5.

Em um grafo, a distância entre dois vértices quaisquer pode ser calculada, caso exista um caminho entre eles. No grafo 4.1, a partir do vértice 1, o único caminho para o vértice 2 passa pelos seguintes vértices (1, 4, 2) e tem comprimento 2, ou seja  $d_{1,2} = 2$ .

### 4.3 Modelos de Redes

Algumas redes possuem particularidades identificadas estatisticamente, como por exemplo a distribuição do grau de seus vértices ou comprimento médio dos seus caminhos. A identificação de características semelhantes entre diversas redes encontradas no mundo real abriu portas para que as mesmas possam ser rotuladas de forma mais específica.

#### 4.3.1 Redes Aleatórias

O termo grafo aleatório se refere a natureza desordenada do posicionamento das arestas entre os diferentes vértices. Em 1959, Erdős e Rényi (ERDŐS; RÉNYI, 1959) estudaram a aleatoriedade das arestas de um grafo, obedecendo uma probabilidade  $p$ . O modelo proposto por eles, chamado de grafo aleatório de Erdős e Rényi (ER) é denotado por  $G_{N,K}^{ER}$ . O primeiro modelo proposto é gerado a partir de  $N$  vértices desconectados, em seguida dois vértices escolhidos aleatoriamente são conectados até que o número de arestas seja igual a  $K$ . Os grafos aleatórios de ER são bastante



estudados, apesar de não reproduzirem a maioria das propriedades vistas nas redes reais. Uma rede aleatória para  $p = 0.05$  e  $N = 100$  pode ser vista na Fig. 4.2.

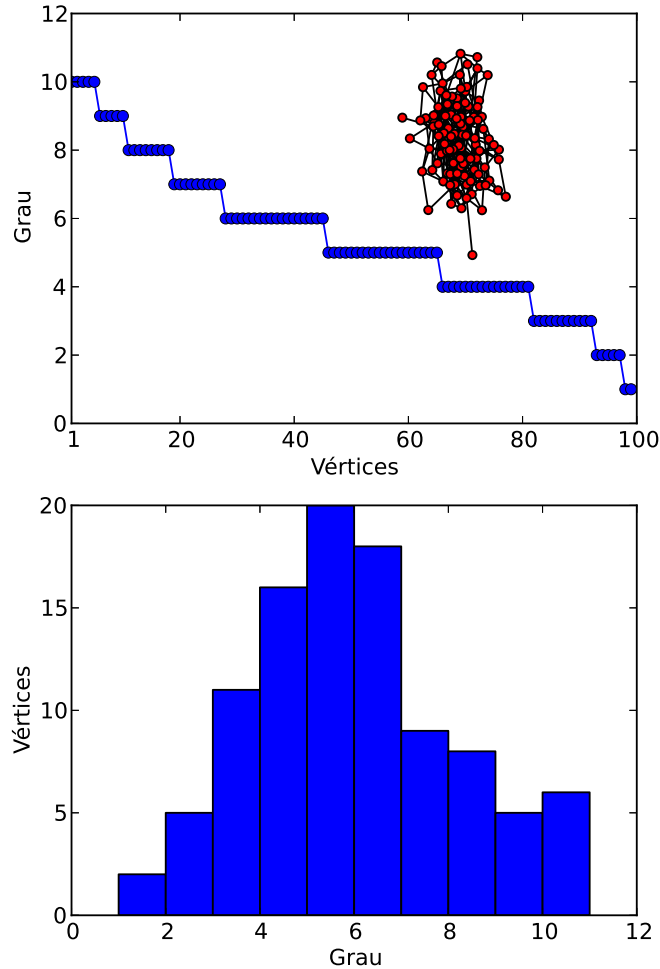


Figura 4.2 - Rede ER com  $p = 0.05$  e  $N = 100$ , grau dos vértices e distribuição do grau, semelhante a curva de Poisson.

### 4.3.2 Redes Mundo Pequeno

Em 1998, Watts e Strogatz (WATTS; STROGATZ, 1998) propuseram um modelo mínimo para a o fenômeno de *small-world* em redes simples. Em seu modelo, eles descobriram que uma rede *small-world* surge como consequência da religação aleatória de uma fração  $p$  de arestas a partir de um grafo regular. Dessa forma, o comprimento médio do caminho entre dois vértices do grafo diminui em relação a um grafo aleatório (STROGATZ, 2001). O parâmetro  $p$  permite que a rede interpole entre os dois casos limite de uma grade regular ( $p = 0$ ) e um grafo aleatório ( $p = 1$ ) (AMARAL; OTTINO, 2004). As redes regulares, no domínio das redes complexas, pos-

suem o mesmo sentido que a definição de um grafo regular. Uma rede regular é caracterizada por possuir todos os seus vértices com o mesmo grau. A Figura 4.3 demonstra, dentre outras redes, uma rede *small-world*  $p = 0.1$ .

Segundo (AMARAL; OTTINO, 2004), dois quantificadores podem ser utilizados para caracterizar qualquer tipo de rede:

- i. o comprimento médio do menor caminho  $\mathcal{L}$ , entre todos os pares de vértices na rede;
- ii. o coeficiente de clusterização médio  $\mathcal{C}$ , dos vértices da rede.

As medidas acima, aprofundadas na seção 4.4, mostraram que muitas redes reais compartilham duas propriedades fundamentais. A primeira propriedade fundamental das redes é o fato que a distância típica entre os vértices é pequena. Esse fenômeno é chamado de fenômeno “*small-world*” (HOFSTAD, 2009). A segunda propriedade diz respeito ao alto coeficiente de clusterização local, ou seja, a grande sobreposição dos círculos dos vizinhos de duas redes vizinhas (AMARAL; OTTINO, 2004).

Uma das vantagens das redes *small-world*, segundo Watts e Strogatz (STROGATZ, 2001), é que redes caracterizadas por caminhos curtos e agrupamentos elevados seriam benéficos para o aumento da velocidade da propagação de sinais, sincronização e poder computacional. O encurtamento dos caminhos provê a comunicação de alta velocidade entre porções distintas do sistemas.

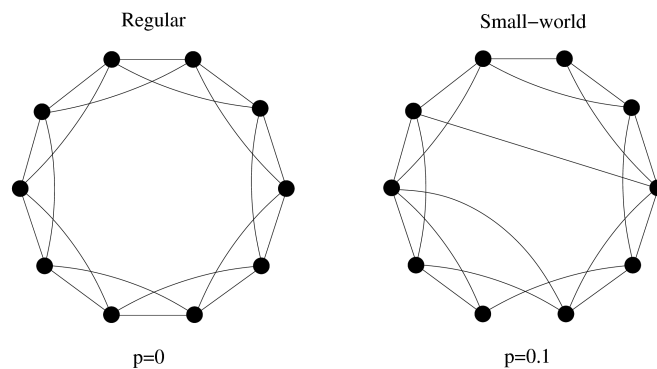


Figura 4.3 - Figura representando uma rede regular e *small-world*. Fonte adaptada: (SIMULATION, 2013)

### 4.3.3 Redes Livre de Escala

Nos últimos anos, investigadores de uma variedade de campos descobriram que muitas redes no mundo real são dominadas por um pequeno número de vértices que estão conectados a uma grande quantidade de outros vértices. Redes contendo esse tipo de vértices, chamados de *hubs*, tendem a ser chamadas de redes livre de escala (*scale free networks*), no sentido que alguns *hubs* podem ter um número muito elevado de conexões (STROGATZ, 2001).

Segundo Barabási e Bonaneau, (BARABÁSI; BONABEAU, 2003), redes livre de escala são resistentes a ataques aleatórios já que poucos *hubs* estão presentes em sua topologia. Qualquer vértice que falhe, provavelmente, possui um grau pequeno (assim como a maioria dos vértices) e dessa forma é aceitável a sua falha. Por outro lado, esse tipo de rede é vulnerável a ataques premeditados nos *hubs*. A Figura 4.4 demonstra uma rede livre de escala exemplificada a partir de um conjunto de rotas aéreas dos EUA. Os vértices vermelhos em destaque, podem ser interpretados como *hubs*, e concentram um grande número de conexões com diversos outros vértices.

Diferentes de modelos de grafos aleatórios que possuem uma distribuição do grau  $p_k$  similar ao sino da distribuição de Poisson, as redes “livre de escala”, assim como muitas redes vistas no mundo real, exibem uma distribuição de probabilidade segundo uma lei de potência (cauda longa), onde poucos vértices apresentam um alto grau (Fig. 4.5).

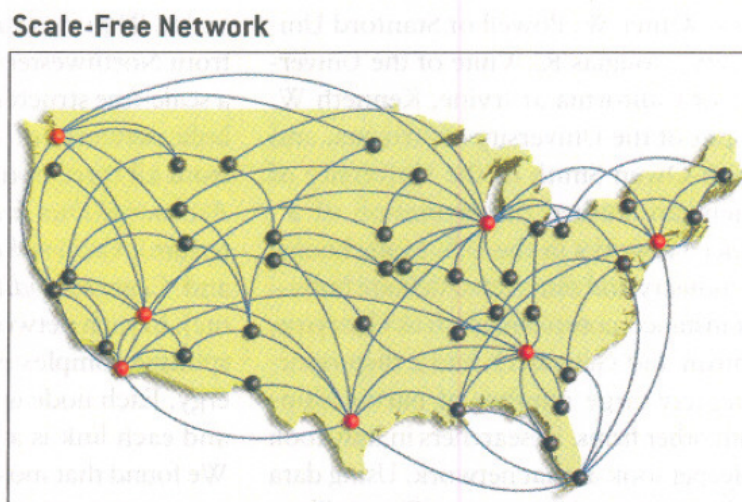


Figura 4.4 - Rede livre de escala formada a partir do mapeamento dos aeroportos dos Estados Unidos. Fonte: (STROGATZ, 2001).

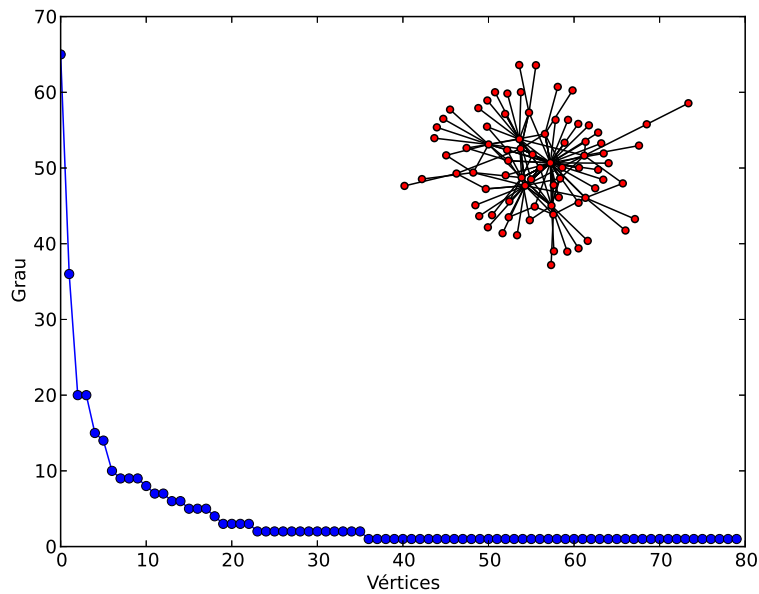


Figura 4.5 - Rede Livre de Escala com  $N=80$  vértices e a distribuição do grau de cada vértice.

#### 4.4 Caracterização e Análise de Redes

A realização de medidas é um recurso essencial para investigações de redes. As medidas dão sustentação em itens como a representação, caracterização, classificação e modelagem. Tanto a caracterização quanto a classificação de estruturas de redes complexas naturais e artificiais tem início a partir da mesma pergunta, “Como escolher as medidas mais adequadas?”. Tal escolha deve refletir os interesses específicos e a aplicação, já que um procedimento matemático para identificar as melhores medidas não existe (COSTA et al., 2007). Dentre as medidas disponíveis, muitas estão correlacionadas, implicando em redundância. De acordo com (COSTA et al., 2011), “a pessoa tem que confiar em seu conhecimento do problema e nas medidas disponíveis, a fim de selecionar um conjunto adequado de recursos a serem considerados”.

Segundo (COSTA et al., 2007), é apenas pela obtenção de características quantitativas informativas da topologia que uma rede pode ser caracterizada e analisada, de forma que, a sua estrutura possa ser totalmente relacionada com as dinâmicas existentes. A descrição quantitativa das propriedades de redes também fornecem subsídios fundamentais para a classificação de redes teóricas e reais nas principais categorias (livre de escala, aleatória, pequeno mundo, etc..).

Das propriedades existentes nas redes complexas, as mais representativas se referem à distribuição do grau  $P(k)$ , que indica a probabilidade de um vértice ter o grau  $k$ .

Outras medida incluem:

- i. Comprimento médio do menor caminho (*average shortest path length*)  $\mathcal{L}$ ;
- ii. Coeficiente de clusterização (*clustering coefficient*)  $\mathcal{C}$ ;
- iii. Centralidade *Betweenness*  $\mathcal{B}$ ;
- iv. Transitividade  $\mathcal{T}$ .

Dentre outras, para uma ampla revisão sobre medidas de redes complexas, ver (COSTA et al., 2007).

#### 4.4.1 Comprimento médio do menor caminho $\mathcal{L}$

O menor número de arestas que devem ser atravessadas para formar o caminho entre os vértices  $i$  e  $j$  é chamado de comprimento de menor caminho ou a distância entre  $i$  e  $j$ . Matematicamente, comprimento médio é definido por  $l = \langle d_{ij} \rangle$ , onde  $d_{ij}$  é o comprimento do menor caminho entre os vértice  $i$  e o vértice  $j$ .

Um grafo é dito conectado se qualquer vértice pode ser alcançado de qualquer outro vértice, caso contrário, o grafo é dito como desconexo. O comprimento médio do caminho

$$\mathcal{L} = \sum_{s,t \in V} \frac{d(s,t)}{n(n-1)}, \quad (4.4)$$

em que  $V$  é o conjunto de vértices em  $G$ ,  $d(s,t)$  é o menor caminho de  $s$  até  $t$  e  $n$  é o número de vértices em  $G$ . O comprimento médio do caminho é a média dos menores números de passos necessários para conectar qualquer par de vértices em uma rede conectada.

#### 4.4.2 Centralidade *Betweenness* $\mathcal{B}$

Uma das formas de medir a importância de um vértice (ou aresta) em uma rede pode ser feita pela quantidade de caminhos em que esse vértice (ou aresta) aparece. Assumindo que a interação ocorre entre os caminhos mais curtos entre dois vértices, é possível quantificar a importância de um vértice (ou aresta) através da centralidade *betweenness* definida como:

$$B_u = \sum_{ij} \frac{\sigma(i,u,j)}{\sigma(i,j)}$$

em que  $\sigma(i, u, j)$  é a quantidade dos menores caminhos entre os vértices  $i$  e  $j$  que ligam o vértice (ou aresta)  $u$ , e  $\sigma(i, j)$  é a quantidade de caminhos que atravessam  $i$  e  $j$  (COSTA et al., 2007).

A média do grau de *betweenness* pode ser utilizada como uma medida de caracterização global da rede, dado por:

$$\langle B \rangle = \frac{1}{N} \sum_i B_i.$$

O valor máximo da centralidade de *betweenness* de qualquer ponto de um grafo é o ponto central de dominância, definido por

$$CPD = \frac{1}{N-1} \sum_i (B_{max} - B_i),$$

em que  $B_{max}$  é o maior valor da centralidade *betweenness* na rede. Essa medida assume valor  $\mathcal{B} = 0$  para grafos completos e  $\mathcal{B} = 1$  para um grafo estrela em que um vértice central está presente em todos os caminhos.

#### 4.4.3 Coeficiente de Clusterização $\mathcal{C}$

Proposto por Watts e Strogatz em 1998, o coeficiente de clusterização  $\mathcal{C}$  quantifica o quão conectado estão os vizinhos de um vértice em um grafo. O coeficiente de clusterização pode ser exemplificado da seguinte forma. Supondo a existência de três vértices  $u$ ,  $v$  e  $w$ , definimos que  $u$  e  $v$  estão conectados, assim como  $u$  e  $w$ . Dessa forma, o coeficiente de clusterização assume que também há relação entre  $v$  e  $w$  (WATTS; STROGATZ, 1998). Em redes reais, seu valor decresce com o grau do vértice e é uma medida largamente utilizada para caracterizar e analisar os grafos.

O coeficiente de clusterização, definido por

$$\mathcal{C} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{n_i}{k_i(k_i - 1)/2},$$

em que  $N$  é o número de vértices do grafo,  $n_i$  é o número de triângulos do vértice  $i$  e  $k_i$  é o seu grau (SARAMÄKI et al., 2007). Um coeficiente de clusterização alto implica na existência de muitas conexões transitivas e consequentemente caminhos redundantes na rede, quanto que um  $\mathcal{C}$  baixo implica no oposto. Um alto valor de clusterização geralmente está associado e presente em redes ditas de pequeno mundo

(*small world*).

#### 4.4.4 Transitividade $\mathcal{T}$

A transitividade é outra medida de rede proposta por Newman, Strogatz e Watts, em 2002 como uma alternativa ao coeficiente de clusterização (NEWMAN et al., 2002).

A transitividade  $\mathcal{T}$  de um grafo é baseado no número relativo de triângulos em um grafo, comparado ao número total de nós triplos conectados formando um triângulo

$$\mathcal{T} = \frac{3 \times (\text{número de triângulos na rede})}{\text{número de nós triplos conectados na rede}}.$$

O fator de três está relacionado ao fato que cada triângulo contribui com três nós triplos conectados no grafo, um centrado em cada nó do triângulo. Com essa definição,  $0 \leq \mathcal{T} \leq 1$ , e  $\mathcal{T} = 1$  se a rede contém todas as arestas (*edge*) possíveis.

A transitividade de um grafo é relativa ao seu coeficiente de clusterização, já que ambas as medidas estão relacionadas com a frequência de triângulos.

#### 4.5 Conclusões Parciais

Nesse capítulo foi apresentado um breve resumo sobre os conceitos e fundamentos das redes complexas. Tipos clássicos de redes complexas foram apresentados, assim como, o conceito de medidas utilizadas nesse trabalho.

## 5 USO DE REDES COMPLEXAS PARA ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS

A partir de uma taxa de amostragem específica, um sinal capturado em uma série temporal é o insumo para a criação de um gráfico de recorrência, como visto nos capítulos 2 e 3. Os gráficos de recorrência, além de serem por si próprios um produto a ser analisado, também servem de fonte para que uma rede complexa seja construída. Por ser fundamentalmente uma matriz binária, um gráfico de recorrência (GR) pode ser utilizado para a construção de uma *rede complexa associada* (RC-AS). Redes complexas criadas a partir de gráficos de recorrência (RC-AS), podem também receber o nome de Redes de Recorrência. Essa representação de uma rede complexa leva em consideração apenas a informação espacial e pode ser considerada como um importante método geométrico para a análise de séries temporais (ZHANG; SMALL, 2006; YANG; YANG, 2008; XU et al., 2008). Redes de recorrência são capazes de mensurar a complexidade de sistemas dinâmicos, como por exemplo dinâmicas periódicas e caóticas (DONNER et al., 2010b).

Neste capítulo, serão apresentadas as formas mais encontradas para criar uma rede complexa a partir de gráficos de recorrência. Por fim, algumas medidas de redes complexas são aplicadas.

### 5.1 Conceito

Vários métodos foram propostos para criar redes complexas a partir de séries temporais (ZHANG; SMALL, 2006; YANG; YANG, 2008; XU et al., 2008; DONNER et al., 2011). Séries temporais podem ser utilizadas diretamente sem pré-processamento ou podem servir de bases para a criação de um gráfico de recorrência e gerar assim, uma rede. Essa seção descreve alguns métodos existentes que podem ser utilizados para trabalhar com gráficos de recorrência.

Um dos métodos mais simples de transformar as séries temporais em redes complexas é por meio de um gráfico de recorrência, um estudo detalhado de outros métodos como os grafos de visibilidade e redes de correlação podem ser vistos em (DONNER et al., 2010b). A partir da matriz binária  $\mathbf{R}$  oriunda do gráfico de recorrência, cada ponto  $R_{i,j} = 1$  é interpretado como uma ligação entre os vértices  $i$  e  $j$ .

As redes baseadas no conceito de recorrência utilizam o gráfico de recorrência diretamente como uma matriz de adjacência. A matriz de adjacência é dada a partir da



matriz de recorrência de uma série temporal

$$A_{i,j} = R_{i,j} - \delta_{i,j}$$

em que  $R_{i,j}$  é o gráfico de recorrência e  $\delta_{i,j}$  o delta de *Kronecker*.

Em todos os casos, as propriedades das redes complexas de recorrência dependem da amostragem e do comprimento das séries temporais. Para redes de vizinhos mais próximos (*nearest neighbor*), o uso de séries temporais maiores cobrem o espaço de estado fielmente (DONNER et al., 2011).

Existem diversos métodos, caracterizados por propriedades estruturais diferentes a fim de definir uma matriz de recorrência. Dentre esses métodos, os mais utilizados são:

- a) Rede de k-vizinhos mais próximos (*k-nearest neighbors networks*),
- b) Redes adaptativa de vizinhos mais próximos (*adaptive nearest neighbor networks*),
- c) Redes de recorrência  $\varepsilon$  ( *$\varepsilon$ -recurrence networks*).

Tabela 5.1 - Sumário das definições de vértices e o critério para a existência de arestas na rede complexa a partir da análise da serie temporal. Fonte adaptada: (DONNER et al., 2011)

Método (Rede)	Vértice	Aresta	Direção
K-Vizinhos Mais Próximos	Estado	Recorrência de estados; Massa fixa de vizinhança	Direto
Adaptativa de Vizinhos Mais Próximos	Estado	Recorrência de estados; Tamanho fixo de arestas	Indireto
Recorrência- $\varepsilon$	Estado	Recorrência de estados; Volume de vizinhança fixa	Indireto

## 5.2 Redes K-Vizinhos Mais Próximos

No método de redes K-vizinhos mais próximos, todo ponto é considerado um vértice  $i$ , que por sua vez, é conectado aos  $k$  vértices  $j$  mais próximos, a partir de uma medida de distância, como por exemplo uma distância euclidiana  $d_{i,j}$ , no espaço de fase. Na Figura 5.1, os  $k$  vértices mais próximos do vértice vermelho são os vértices que serão considerados os seus vizinhos e estarão conectados, segundo esse método.

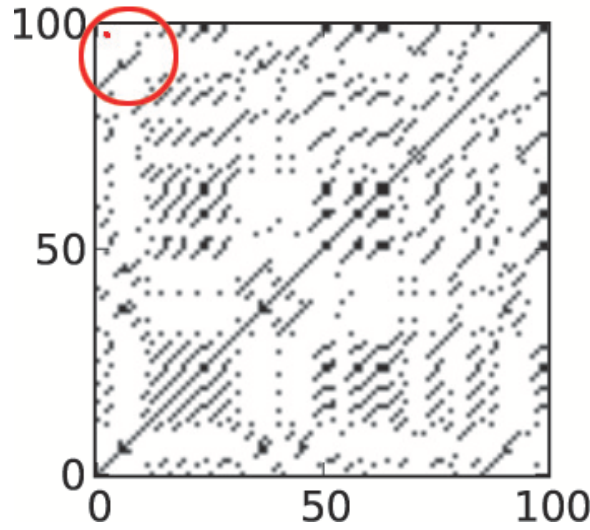


Figura 5.1 - Gráfico de Recorrência do mapa logístico com  $r = 4.0, \varepsilon = 0.1, N = 100$ , criado a partir do método K-Vizinhos Mais Próximos. Os  $k$  vértices mais próximos do vértice vermelho são os vértices que serão considerados os seus vizinhos.

Dessa forma, uma aresta é adicionada a partir de  $i$  para todo vértice  $j \in N_i^{(k)}$  onde  $N_i^{(k)}$  é o conjunto de  $k$  vizinhos mais próximos de  $i$ . Segundo (XU et al., 2008), vizinhanças definidas dessa forma, possuem o mesmo número de vértices em todas as vizinhanças e as redes resultantes possuem arestas direcionadas. É importante ressaltar que a matriz de adjacência criada a partir desse método é geralmente assimétrica, já que,  $j \in N_i^{(k)}$  não implica em  $i \in N_j^{(k)}$ . Uma versão simétrica dessa matriz pode ser alcançada ao definir, explicitamente,  $R_{j,i} = R_{i,j} = 1$  (SHIMADA et al., 2008).

O método de *k-vizinhos mais próximos* baseia-se apenas no parâmetro  $k$  para a retenção de informações geométricas de um atrator, onde valores pequenos de  $k$  são utilizados para manter a resolução espacial com uma alta variância na estimativa da densidade dos estados; já valores grandes de  $k$  vão apresentar uma baixa variância, mas resolução espacial ruim (DONNER et al., 2011). O resultado da matriz de adjacência criado para a partir do mapa logístico pode ser visto na Figura 5.3(C).

### 5.3 Redes Adaptativa de Vizinhos Mais Próximos

Nesse método apresentado no trabalho Xu. et al (XU et al., 2008) e Small et al (SMALL et al., 2009), a rede é formada a partir dos vizinhos mais próximos de cada vértice, mas ajustando a quantidade de vizinhos a partir de uma constante de arestas distintas  $E_0$ , definido para cada vértice.

O processo iterativo para preencher a matriz de adjacência, é feito da seguinte forma: na ordem crescente de vértices de 1 até  $N$ , cada vértice estará conectado a outros  $E_0$  vértices e caso  $i$  esteja na vizinhança do vértice  $j$ , o vértice  $i$  não fará parte da vizinhança do vértice  $j$ . Evitando assim, a possibilidade da contagem dupla do vértice  $i$  como um vizinho do vértice  $j$ , e vice-versa. Na Figura 5.2, o vértice azul (localizado dentro do círculo azul) estará conectado com todos os  $k$  vértices mais próximos que estão dentro do círculo azul, e caso um vértice também esteja conectado com o vértice vermelho, os mesmos não irão mais fazer parte da vizinhança do vértice azul e farão parte apenas da vizinhança do vértice vermelho.

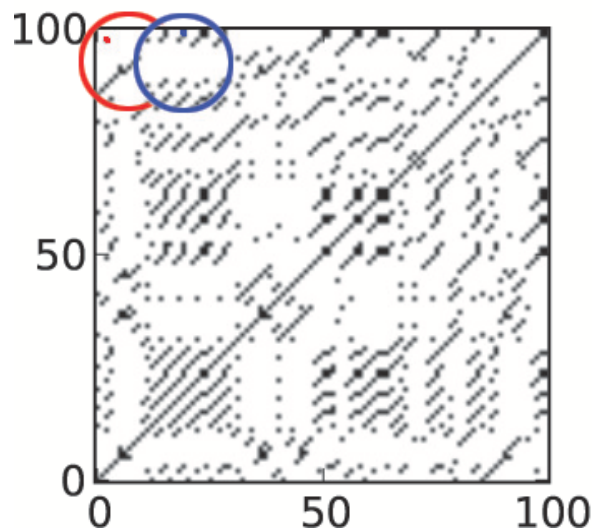


Figura 5.2 - Gráfico de Recorrência do mapa logístico com  $r = 4.0, \varepsilon = 0.1, N = 100$ , criado a partir do método Adaptativo de Vizinhos Mais Próximos. Um vértice dentro do círculo azul, que também pertença a vizinhança vértice do círculo vermelho, não fará parte da vizinhança do vértice dentro do círculo azul.

Segundo Small (SMALL et al., 2009), para  $E_0 = k$ , a rede adaptativa de vizinhos mais próximos sempre inclui todas as arestas da rede  $k$ -vizinhos mais próximos. No entanto, as redes adaptativas de vizinhos mais próximos sempre têm densidades mais elevadas de vértices.

O resultado dessa rede, criada a partir do sinal do mapa logístico pode ser visto na Figura 5.3(D).

## 5.4 Redes de Recorrência- $\varepsilon$

Esse método para criação de redes concebido por (WU et al., 2008) e é desenvolvido de forma independente por uma série de autores como (XU et al., 2008; SHIMADA et al., 2008; LACASA et al., 2008; SMALL et al., 2009).

Devido à sua ligação direta à teoria dos sistemas dinâmicos, Redes de Recorrência- $\varepsilon$  (ou Redes de Recorrência - *Recurrence Networks*) são, provavelmente, o tipo de redes complexas mais aplicáveis (ZOU et al., 2012). Embora a evolução temporal do sistema não possa ser reconstruída a partir de uma rede de recorrência, essa representação permite uma análise da geometria do atrator no espaço de fase, utilizando técnicas da teoria de rede.

No método de redes de recorrência- $\varepsilon$  ( *$\varepsilon$ -recurrence networks*), a rede complexa pode ser definida a partir da matriz de recorrência

$$A_{i,j}(\varepsilon) = R_{i,j}(\varepsilon) - \delta_{i,j}$$

em que  $\delta_{i,j}$  é o delta de Kronecker, utilizado para evitar auto-referências. Os elementos da matriz de adjacência  $A(\varepsilon)$  estão associadas por uma distância  $\varepsilon$  do espaço de fase. Desta forma, é considerado distâncias fixas do espaço de fase, e não um tamanho fixo de arestas. Para as redes de recorrência- $\varepsilon$ , a escolha de um limiar permite o controle da resolução da mesma. O gráfico de recorrência, criado a partir de um sinal do mapa logístico pode ser visto na Figura 5.3(B).

A rede originada do gráficos de recorrência da Figura 5.3(B), Figura 5.3(C) e Figura 5.3(D), podem ser vistos respectivamente na Figura 5.4, Figura 5.5 e Figura 5.6

## 5.5 Experimentos

Partindo das três redes mostradas na Fig. 5.3(B,C,D), geradas a partir do mapa logístico para  $r = 4.0$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $N = 1000$  (após a remoção do transiente de  $N = 500$ ) as medidas de rede complexas apresentadas anteriormente foram calculados e os valores obtidos estão apresentados na Tabela 5.2.

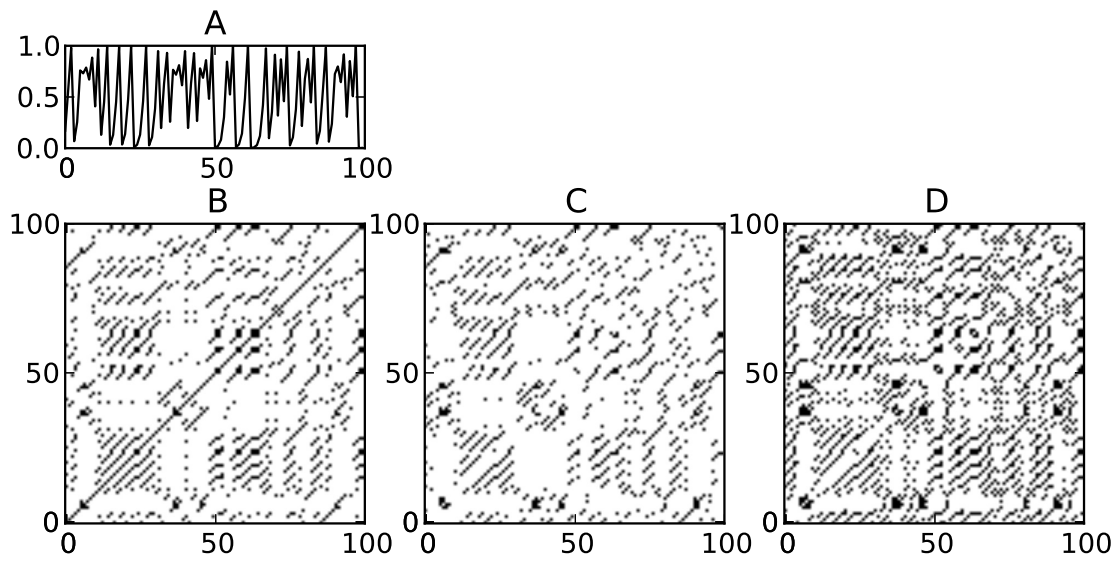


Figura 5.3 - (A) Sinal caótico do mapa logístico para  $r = 4.0, \varepsilon = 0.05, N = 100$ . (B) Gráfico de Recorrência  $\varepsilon$  do sinal (A). (C) Gráfico de Recorrência de K-Vizinhos Mais Próximos do sinal (A) para  $K = 10$ . (D) Gráfico de Recorrência Adaptativa de Vizinhos Mais Próximos do sinal (A) para  $K = 10$ .

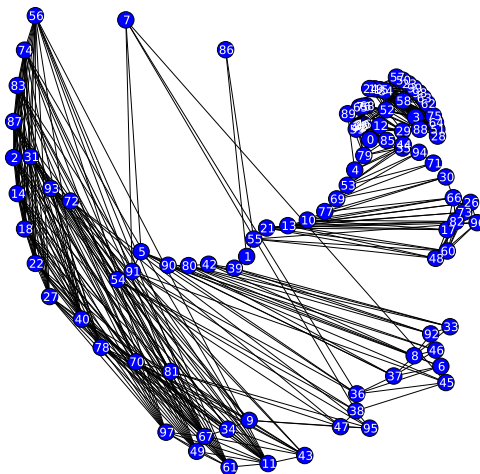


Figura 5.4 - Rede complexa do gráfico de recorrência da Figura 5.3(B)

Tabela 5.2 - Medidas de redes complexas: coeficiente de clusterização  $\mathcal{C}$ , comprimento médio do menor caminho  $\mathcal{L}$ , *betweenness*  $\mathcal{B}$  e transitividade  $\mathcal{T}$  para os três tipos de redes descritos na Fig.5.3(B,C,D).

Método	42	$\mathcal{C}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{T}$
Rede de Recorrência		0.76	10.62	1019.23	0.82
Rede K-Vizinhos Mais Próximos		0.74	7.7	668.86	0.73
Rede Adaptativa de Vizinhos Mais Próximos		0.78	3.87	375.34	0.77

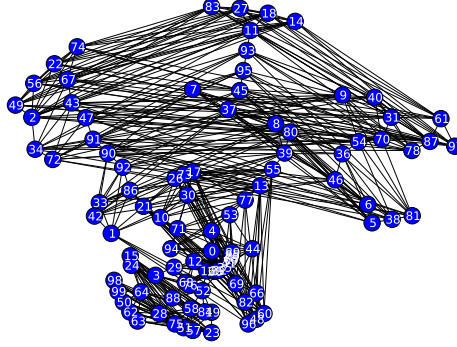


Figura 5.5 - Rede complexa do gráfico de recorrência da Figura 5.3(C)

Os valores de  $\mathcal{C}$  para os três tipos de redes estão relativamente próximos, não sendo possível fazer distinção muito profunda sobre eles. Para a Rede Adaptativa de Vizinhos Mais Próximos,  $\mathcal{C} = 0.78$ , o maior encontrado para essa medida, podemos afirmar que esse resultado está ligado ao aumento no número de arestas em relação aos outros métodos.

No caso da transitividade  $\mathcal{T}$ , a Rede de Recorrência apresentou maior valor  $\mathcal{T} = 0.82$ , que pode ser interpretado por agrupamentos de arestas nas regiões em que a trajetória está em um atrator e regiões onde o agrupamento está mais explícito. No caso da Rede Adaptativa de Vizinhos Mais Próximos,  $\mathcal{T} = 0.77$ , valor não tão diferente do caso anterior que pode ser interpretado pelo aumento do número de triângulos por conta do aumento de arestas, que não necessariamente vão atuar sobre o valor médio dessa medida.

O comprimento médio para o menor caminho  $\mathcal{L}$  apresentou maior valor para a Rede de Recorrência (Figura 5.3(B)),  $\mathcal{L} = 10.62$ , por este representar mais fielmente o espaço de fases dessa trajetória caótica (mapa logístico com  $r = 4$ ) com a presença de atratores, aumentando assim o percurso médio no grafo. No caso da Redes K-Vizinhos Mais Próximos (Figura 5.3(C)), o valor apresentado é menor,  $\mathcal{L} = 7.7$ ,

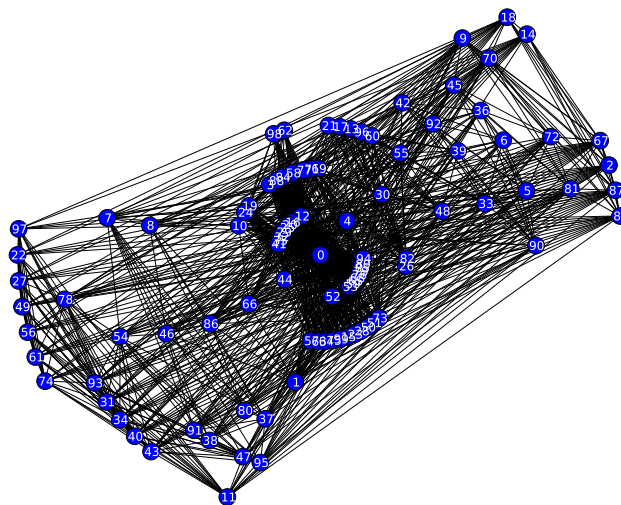


Figura 5.6 - Rede complexa do gráfico de recorrência da Figura 5.3(D)

que a rede anterior já que o processo de agrupamento por vizinhos torna a rede com nós menos dispersos e distribuídos. Para a Rede Adaptativa de Vizinhos Mais Próximos,  $\mathcal{L} = 3.87$ , demonstrado pelo aumento de vértices e arestas (Figura 5.3(D)) em relação as outras duas redes e consequentemente um valor mais baixo para essa medida.

A medida de *Betweenness*  $\mathcal{B}$  apresentou valores distintos para as três redes. Para a rede de recorrência,  $\mathcal{B} = 1019.23$ , que pode ser interpretado como um alta utilização dos nós para chegar aos outros pontos. A mesma interpretação da medida  $\mathcal{L}$  pode ser feita, na medida que  $\mathcal{B} = 668.86$  para a Redes K-Vizinhos Mais Próximos, em que os atratores não estão na mesma intensidade que as encontradas na Rede de Recorrência e  $\mathcal{B} = 375.34$  para a Rede Adaptativa de Vizinhos Mais Próximos, em que a maior concentração de pontos faz com que a média de uso dos nós decresça essa medida.

## 5.6 Conclusões Parciais

Nesse capítulo foi apresentado um breve resumo sobre os métodos para a criação de uma rede complexa a partir do gráfico de recorrência.

Para redes *k-vizinhos mais próximos*, a utilização de uma série temporal mais longa leva a uma cobertura mais fiel do espaço de estados disponíveis. Como consequência, quando  $E_0$  ou  $k$  permanece fixo, obtemos uma melhor resolução espacial das propriedades estruturais das redes *k-vizinhos mais próximos* na medida que o comprimento da série temporal aumenta (DONNER et al., 2011).

Como desvantagem de ambos os tipos de redes de vizinhos mais próximos, não existe uma relação direta entre as propriedades locais e globais, já que a vizinhança de um vértice independe da posição de seus vizinhos no espaço de fases (GAO; JIN, 2009; DONNER et al., 2010b). Como uma alternativa, a vizinhança de um único ponto no espaço de fase também pode ser definido por uma distância  $\varepsilon$  fixa no espaço de fase, em vez de um número fixo de arestas (DONNER et al., 2011). Dessa forma, para redes de recorrência  $\varepsilon$ , a escolha de um limiar permite controlar diretamente a resolução espacial.





## 6 DISCRETIZAÇÃO DO GRÁFICO DE RECORRÊNCIA

Nesse capítulo, será introduzido o método de discretização do gráfico de recorrência, proposto neste trabalho, Realce da Densidade da Recorrência, ou, *RECURRENCE DENSITY ENHANCEMENT* (RDE). A metodologia para a construção de um gráfico de recorrência *RDE* é exemplificado em conjunto com a escolha de seus parâmetros de controle.

### 6.1 Apresentação

Um gráfico de recorrência apresenta uma estrutura gráfica fundamental complexa e rica de detalhes (ZOU et al., 2012). Esta estrutura gráfica fundamental pode ser considerada como um “esqueleto” fornecedor de ricos detalhes que permitem individualizar uma dinâmica especial.

Uma nova estratégia é proposta com o objetivo de capturar a estrutura principal de um gráfico de recorrência. Dessa forma, as técnicas tradicionais de RQA não são aplicadas diretamente ao gráfico de recorrência original. Para isso, o gráfico de recorrência original é primeiramente processado, resultando em uma figura com um número reduzido de pontos capaz de conservar as propriedades fundamentais e caracterizar o sistema dinâmico subjacente.

O método proposto baseia-se na subdivisão do gráfico de recorrência original em blocos retangulares de lado  $L$ . Com base na distribuição de pontos de cada bloco em relação a sua coluna, é gerado um nova matriz binária *RDE*, que por sua vez é uma versão reduzida do gráfico de recorrência inicial. Os resultados relatados aqui indicam que a transformação melhora a capacidade de distinguir os sistemas com dinâmicas muito semelhantes, mostrando um grande potencial para aplicações experimentais a partir de um conjunto menor de dados.

### 6.2 Metodologia

Sinais representados por gráficos de recorrência são imagens que mesmo com toda a sua complexidade e riqueza de detalhes, apresentam uma estrutura gráfica particular. Essa estrutura fundamental permite diferenciar gráficos de recorrência obtidos a partir de diferentes sinais.

A proposta do método é, em primeiro lugar, identificar e realçar esta estrutura gráfica pouco evidente, e, em consequência da identificação, diminuir a potência computacional na análise da quantificação, uma vez que, as análises subsequentes

serão executadas com base no gráfico de recorrência aproximado, que ainda é capaz de distinguir diferentes dinâmicas. Esta discretização identifica regiões do gráfico de recorrência em que a concentração de pontos é nitidamente mais intensa. De certa forma, essas regiões estão associadas a posições no espaço de fase em que uma trajetória permanece estacionária por algum tempo finito e depois a abandona na direção de uma outra região que pode apresentar um comportamento semelhante. Se a trajetória for caótica, estas regiões estariam no espaço de fase, em vizinhanças das órbitas periódicas instáveis que são incorporadas no conjunto invariante caótico.

Mais especificamente, a abordagem *RDE* funciona a partir de um gráfico de recorrência, que é representado pela sua matriz binária  $R_{i,j}(\varepsilon)$ , obtida a partir de uma série temporal de  $N$  pontos. Este gráfico tem uma forma quadrada com  $N \times N$  pontos. Em primeiro lugar, esse gráfico é subdividido no seu eixo- $x$  e eixo- $y$  em intervalos  $L$  consecutivos, cada um com  $M$  pontos, com a possível exceção do último intervalo que pode ter  $\lfloor \frac{N}{L} \rfloor + \text{mod}(N, L)$  pontos, em que  $\lfloor \cdot \rfloor$  representa o menor valor inteiro. Assim, o gráfico de recorrência original é dividido em  $L \times L$  blocos (ver Fig. 6.1).

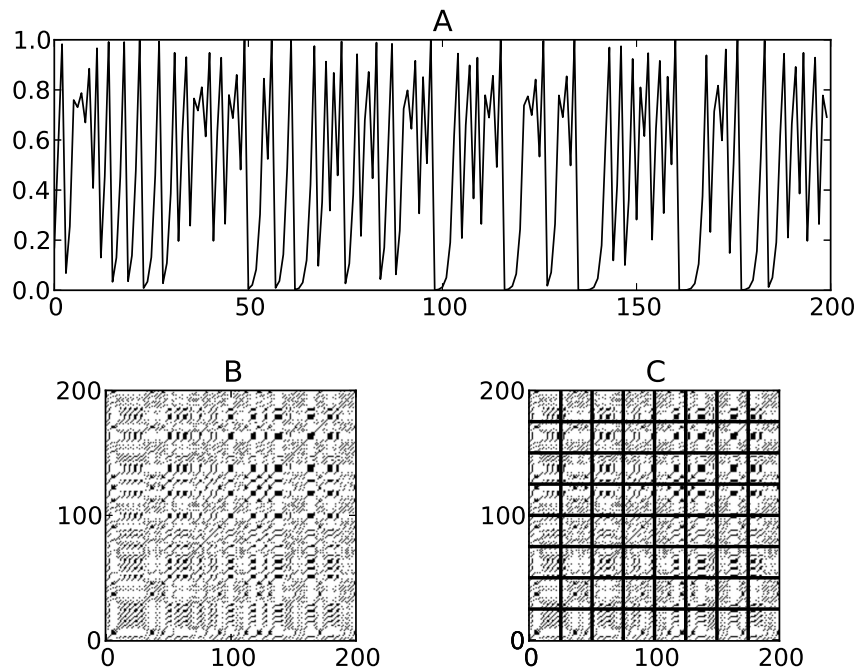


Figura 6.1 - (A) Sinal para o mapa logístico com  $r = 4.0, N = 200$  (transiente  $N = 500$ ), (B) Gráfico de recorrência original ( $\varepsilon = 0.1$ ). (c) Visualização dos blocos quando  $M = 8$ .

A partir de agora, assume-se que todos os intervalos  $L$  tem o mesmo número  $M$

de pontos, o que significa que cada bloco possui  $M \times M$  pontos. Com base nessa divisão, é gerado um novo gráfico ao preencher uma matriz probabilística  $RDE$ , que é obtida de acordo com as regras a seguir.

Com base no gráfico de recorrência (Eq. 3.1), a janela de probabilidade média de recorrência  $P = p_{l,m}$  é definida para o bloco  $(l, m)$ . Cada  $p_{l,m}$  deve incluir as informações de recorrência do bloco  $(l, m)$  em relação aos intervalos  $l \times m$ , que abrangem os pontos de recorrência originais  $(x_{(l-1)M+1}, \dots, x_{(l-1)M+M}) \times (x_{(m-1)M+1}, \dots, x_{(m-1)M+M})$ . Mais especificamente, sendo  $\Psi_m$  igual ao número total de pontos de recorrência na coluna  $m$  do gráfico subdividido, ou seja,

$$\Psi_m = \sum_{i=1}^N \sum_{j=(m-1)M+1}^{(m-1)M+M} R_{ij}. \quad (6.1)$$

Para cada bloco  $(l, m)$  é associado o seguinte índice de densidade

$$p_{l,m} = \frac{\sum_{i=(l-1)M+1}^{(l-1)M+M} \sum_{j=(m-1)M+1}^{(m-1)M+M} R_{ij}}{\Psi_m}. \quad (6.2)$$

O cálculo para  $\Psi_l$  é equivalente a  $\Psi_m$  já que Eq. 3.1 é simétrica em relação à linha diagonal principal. A partir daqui,  $p_{l,m}$  caracteriza a probabilidade de recorrência da célula  $(l, m)$  em relação à totalidade da banda  $m$ .

Com base no valor médio das células da matriz de probabilidade de recorrência  $P = p_{i,j}$ , a matriz binária final é enfim criada por meio da introdução de um limiar  $\gamma$  ( $0 \leq \gamma \leq 1$ ). Especificamente, a matriz  $RDE_{l,m}$  é definida como

$$RDE_{l,m}(\gamma) = \begin{cases} 0, & p_{l,m} < \gamma; \\ 1, & p_{l,m} \geq \gamma. \end{cases} \quad (6.3)$$

O parâmetro  $\gamma$  é utilizado para ajustar o nível de detalhes que deseja ser capturado. Basicamente, a escolha de um valor  $\gamma$  adequado compartilha o mesmo espírito da escolha  $\varepsilon$  para a criação de gráficos de recorrência (Eq. 3.1). Portanto, é necessário justificar como definir o valor  $\gamma$  para permitir a captura das estruturas gráficas mais representativas.

Ao re-dimensionar o gráfico  $RDE$  resultante (Fig. 6.2(B)) de forma a ajustar os eixos do gráfico de recorrência (Fig. 6.2(A)) aos tempos originais, é bastante claro observar,

visualmente, no uso da abordagem *RDE* as principais estruturas de recorrência que existem no gráfico de recorrência original são bem preservadas em uma versão “*coarse-grained*” (Fig. 6.2 (B, C)). Sendo que um ponto da matriz *RDE* corresponde a um bloco no gráfico de recorrência inicial, os pontos de *RDE* estão representados no centro do gráfico original ao fazer esta transformação do tempo (como visível na Fig. 6.2(C)).

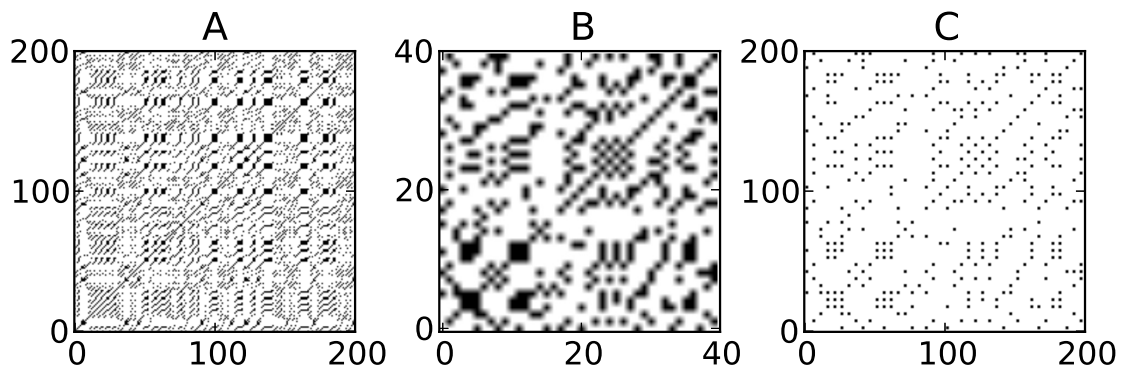


Figura 6.2 - (A) Gráfico de recorrência para o mapa logístico ( $r = 4.0, \varepsilon = 0.08, N = 200$ ). (B) Gráfico RDE de (A) com  $L = 5$ . O índice de recorrência de (A,B) é o mesmo. (C) O gráfico RDE de (B) foi escalonado para a dimensão original como visto em (A), pontos de recorrência de (B) estão marcados no centro de cada janela  $M \times M$ .

Em relação ao método *RDE*, é possível observar uma diferença técnica em comparação com o método utilizado por Casdagli (CASDAGLI, 1997), onde apenas o índice de recorrência na janela  $(l, m)$  foi considerado, ou seja,  $RR_{(l,m)} = \frac{1}{M^2} \sum_{i,j \in (l,m)} R_{i,j}$ . Este método é portanto, capaz de detectar mudanças na força motriz que não são observados por gráficos de recorrência. Em contraste, o método de RDE que considera a densidade de janela no que diz respeito à banda em que o bloco pertence, como indicado pela Equação (6.2). Portanto, o método RDE respeita plenamente as estruturas originais em gráficos de recorrência, e utiliza a abordagem baseada em janelas para reduzir o efeito do ruído durante a captura de estruturas em grande escala.

O algoritmo em pseudo-código para a construção de um gráfico de recorrência *RDE* está descrito no anexo A. A partir da análise do algoritmo apresentado no anexo A, é possível observar que:

- a) O tempo de processamento do algoritmo depende do tamanho  $N$  da matriz de recorrência  $R$  e o tamanho dos blocos  $M$ .

- b) A primeira etapa (linhas 6 a 12), onde  $\Psi_m$  é preenchida, tem uma performance  $\mathcal{O}(n^2)$ , já que toda a matriz deve ser visitada para a criação dos índices de cada coluna.
- c) A segunda etapa (linhas 21 a 27), responsável pela criação da matriz de probabilidade, possui performance  $\mathcal{O}(n^2)$  para cada bloco visitado.
- d) As operações de atribuição a matriz de probabilidades (linha 28) e o índice de cada coluna (linha 9) possuem custo fixo  $\mathcal{O}(1)$ .

Em geral, a performance do algoritmo não é satisfatória e está assim apresentado de forma a auxiliar a implementação do método. Algumas melhorias podem ser facilmente propostas por estar trabalhando com matrizes simétricas. Dessa forma, os blocos espelhados podem ser ignorados e uma vez que  $R_{i,j}$  tem o mesmo índice de recorrência que  $R_{j,i}$ .

### 6.2.1 A escolha do valor de corte $\gamma$

De forma geral, o objetivo é capturar estruturas bem representativas, que por sua vez, são associados com as regiões no espaço de fase onde a trajetória evolui na maior parte do tempo. Os detalhes finos de recorrência dessas regiões devem aparecer no gráfico de recorrência por uma grande concentração de pontos negros. Neste caso, uma escolha probabilística de  $\gamma$  é usar  $\gamma = \frac{1}{L}$ , em que  $L$ , como afirmado anteriormente, é o número de subdivisões do gráfico resultante. Por esse abordagem, blocos associados a uma distribuição uniforme dos pontos de recorrência seriam descartados.

A segunda abordagem possível é a de definir um valor  $\gamma$  de modo que a densidade de pontos de recorrência no gráfico novoseja igual à taxa de recorrência  $RR$  do gráfico de recorrência original. Essa segunda abordagem é útil para gerar um gráfico  $RDE$  que preserve a densidade de recorrência do gráfico inicial, permitindo a comparação sobre a ótica de uma medida de  $RQA$ .

A escolha de  $L$  (ou  $M$ ) determina a resolução do gráfico, ou seja, a dimensão da matriz  $RDE$ . Vamos supor que o gráfico recém-gerado deve assemelhar visualmente as características estruturais do gráfico original. Experimentos numéricos sugerem que isso pode ser alcançado se a dimensão do gráfico resultante, indicado pelo valor de  $L$ , é mais ou menos 20% de  $N$ , em que  $N$  é o número total de pontos na série temporal original. Essa idéia está ilustrada na Fig. 6.2 em que o gráfico da matriz

*RDE* tem uma quantidade total de pontos igual a 15% do gráfico de recorrência original.

### **6.3 Conclusões Parciais**

Nesse capítulo, foi apresentado o método RDE, a metodologia para a construção de um gráfico de recorrência *RDE* e uma explicação sobre os seus parâmetros de controle.

## 7 EXPERIMENTOS E RESULTADOS

Essa seção tem como objetivo utilizar o método apresentado no capítulo anterior para a criação de gráficos de recorrência *RDE* e exibir as medidas RQA e de redes complexas para caracterizar diferentes dinâmicas.

### 7.1 Aplicação no Mapa Logístico

A fim de exemplificar a aplicação do método *RDE*, o aplicaremos ao mapa logístico  $x_{n+1} = x_n r(1 - x_n)$ . As medidas de redes complexas,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{C}$ , assim como as medidas RQA *DET*, *LAM*,  $L_{max}$ , apresentaram resultados compatíveis aos obtidos do gráfico de recorrência original, como demonstrado nos trabalhos de (MARWAN et al., 2009), (DONNER et al., 2010b), (DONNER et al., 2011). Para a realização dos experimentos, o mapa logístico foi iterado 20 vezes a partir de valores iniciais aleatórios e com  $N = 2000$  pontos, após a eliminação do transiente de  $N = 1000$  pontos. Por ser um mapa unidimensional, o gráfico de recorrência foi gerado sem o *embedding*.

#### 7.1.1 A escolha do parâmetro $\gamma$

Analisando os valores da matriz de probabilidade, é possível verificar que existe uma relação entre a quantidade de pontos do gráfico de recorrência *RDE* a partir da escolha do parâmetro  $L$  e o valor de corte  $\gamma$ . A Figura 7.1 mostra a média do valor do índice de recorrência (*Recurrence Rate*) e o valor de corte ( $L$ ) para todos os casos de  $L \in [2, 10]$ .

A utilização de  $\gamma = \frac{1}{L}$  altera os valores da taxa de recorrência do gráfico *RDE* para um valor médio de  $RR \approx 0.5$ , em que  $L \geq 2$ , como visto na Figura 7.1. Originalmente, o mapa logístico possui o valor característico  $RR = 0.19$  para o parâmetro caótico  $r = 4.0$ . Dessa forma, para a realização dos experimentos, o valor de corte  $\gamma$  escolhido é selecionado de forma que o índice de recorrência ( $RR$ ) do gráfico resultante seja idêntico a taxa original, ou seja,  $\gamma = \varepsilon = RR$ .

#### 7.1.2 Comparação entre RDE e outros métodos

A partir dos métodos de criação de redes complexas apresentados no capítulo 5, um gráfico de recorrência RDE é criado, e a partir deste, uma rede complexa. Os valores do mapa logístico foram mantidos, igualmente os observados nos experimentos do capítulo 5, onde  $r = 4.0$ ,  $N = 100$ ,  $\varepsilon = 0.05$ . Para o gráfico RDE, o experimento foi feito com  $L = 2$ . A escolha do parâmetro  $\gamma$  foi feito para que o índice de recorrência seja similar ao valor encontrado no gráfico de recorrência original. A estrutura



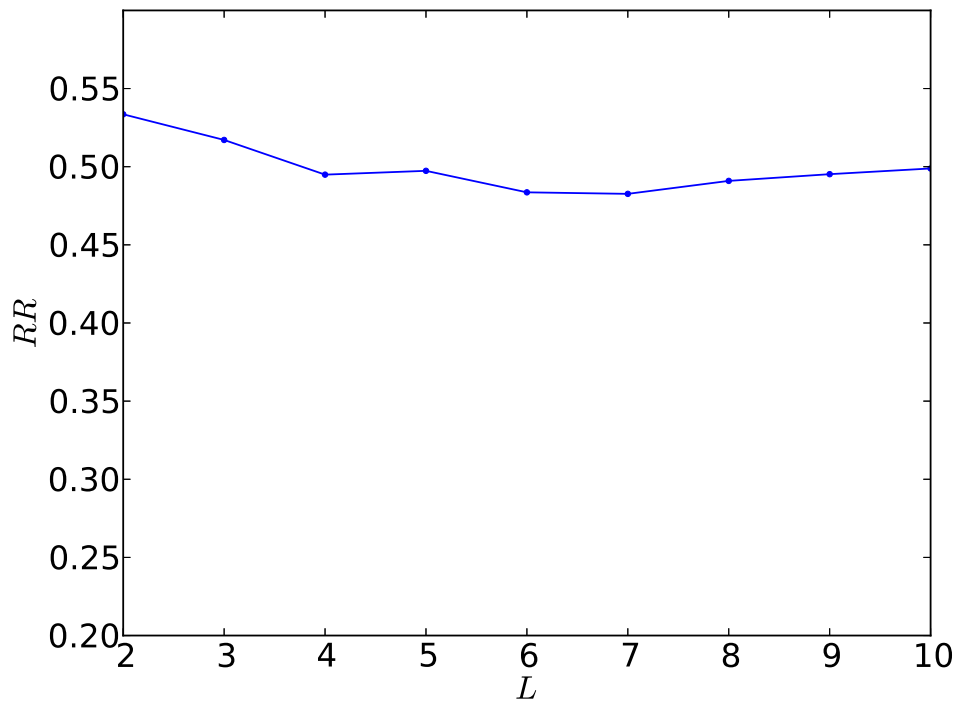


Figura 7.1 - Variação do índice de recorrência para  $L = [2, 10]$ .

principal do gráfico foi mantido, como pode ser visto na Figura 7.2.

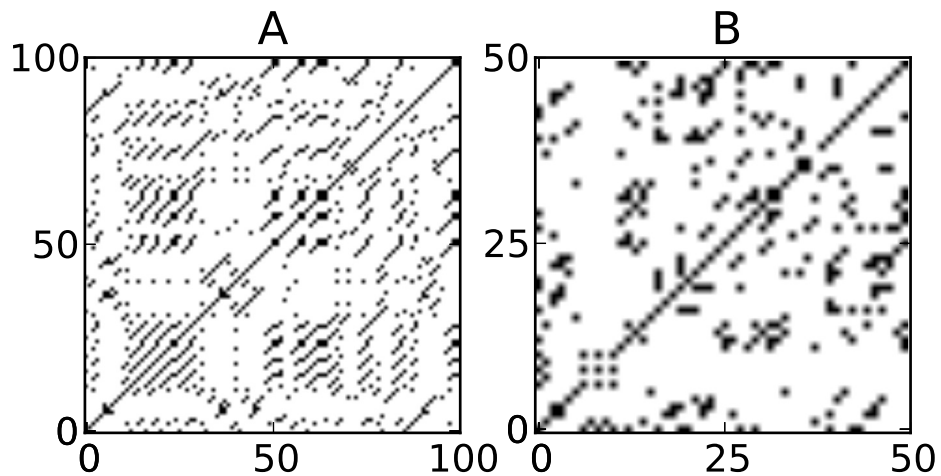


Figura 7.2 - (A) Gráfico de recorrência e (B) Gráfico RDE do mapa logístico para  $r = 4.0, N = 100, \varepsilon = 0.05, L = 2, \gamma = RR$ .

A partir da matriz de adjacência, a rede complexa foi criada e pode ser vista na Figura 7.3. As medidas de redes complexas do gráfico RDE, como visto na tabela 7.1:

coeficiente de clusterização  $\mathcal{C}$ , comprimento médio do menor caminho  $\mathcal{L}$ , *betweenness*  $\mathcal{B}$  e transitividade  $\mathcal{T}$ , apresentaram valores distintos, quando comparados com os outros métodos. Um dos fatores para explicar os valores obtidos está na concentração da recorrência em regiões em que a estrutura fundamental do gráfico de recorrência é preservada, fazendo com que medidas como o coeficiente de clusterização  $\mathcal{C}$  e a transitividade  $\mathcal{T}$ , apresentem valores menores. A diminuição, ou eliminação, de vértices em áreas pouco densas do gráfico de recorrência é outro fator que influencia no valor das medidas de redes complexa, em especial o *betweenness*  $\mathcal{B}$  e o comprimento médio do menor caminho  $\mathcal{L}$ . Os valores apresentados na tabela 7.1, é característico para o mapa logístico  $r = 4.0$  como será visto na próxima seção, onde é feito um estudo de diversas regiões do mapa logístico.

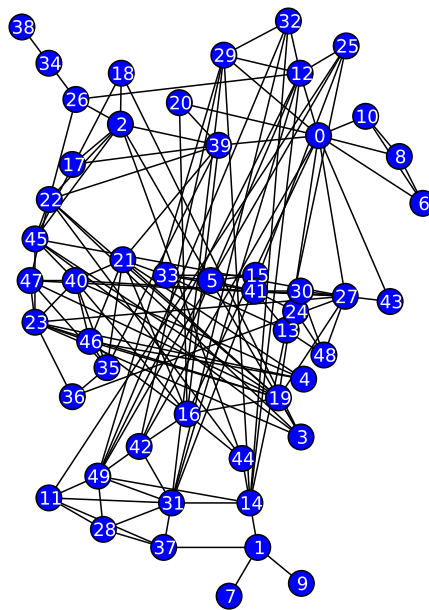


Figura 7.3 - Rede complexa de um gráfico RDE do mapa logístico para  $r = 4.0, N = 100, \varepsilon = 0.05, L = 2, \gamma = RR$ .

Tabela 7.1 - Medidas de redes complexas coeficiente de clusterização  $\mathcal{C}$ , comprimento médio do menor caminho  $\mathcal{L}$ , *betweenness*  $\mathcal{B}$  e transitividade  $\mathcal{T}$  para os quatro métodos apresentados. Redes criadas a partir do mapa Logístico com  $r = 4.0, \varepsilon = 0.05, N = 100, L = 2, \gamma = RR$ .

Método	$\mathcal{C}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{T}$
Rede de Recorrência	0.76	10.62	1019.23	0.82
Rede K-Vizinhos Próximos	0.74	7.7	668.86	0.73
Rede Adaptativa de Vizinhos Próximos	0.78	3.87	375.34	0.77
Rede RDE	0.53	3.15	148.54	0.44

### 7.1.3 Macro Visão dos Diversos Regimes

Nessa seção, as medidas da rede de recorrência- $\varepsilon$  do gráfico *RDE* serão extraídas e comparadas com os valores obtidos das redes de recorrência- $\varepsilon$  extraídas via gráfico de recorrência original, ou seja, sem nenhum pós-processamento. A realização dos cálculos foram feitos a partir da média de 20 iterações do mapa logístico, inicializados aleatoriamente, para  $r \in [3.5, 4]$ ,  $N = 1000$ ,  $\Delta r = 0.001$ ,  $L = 5$  e  $\gamma = RR$ .

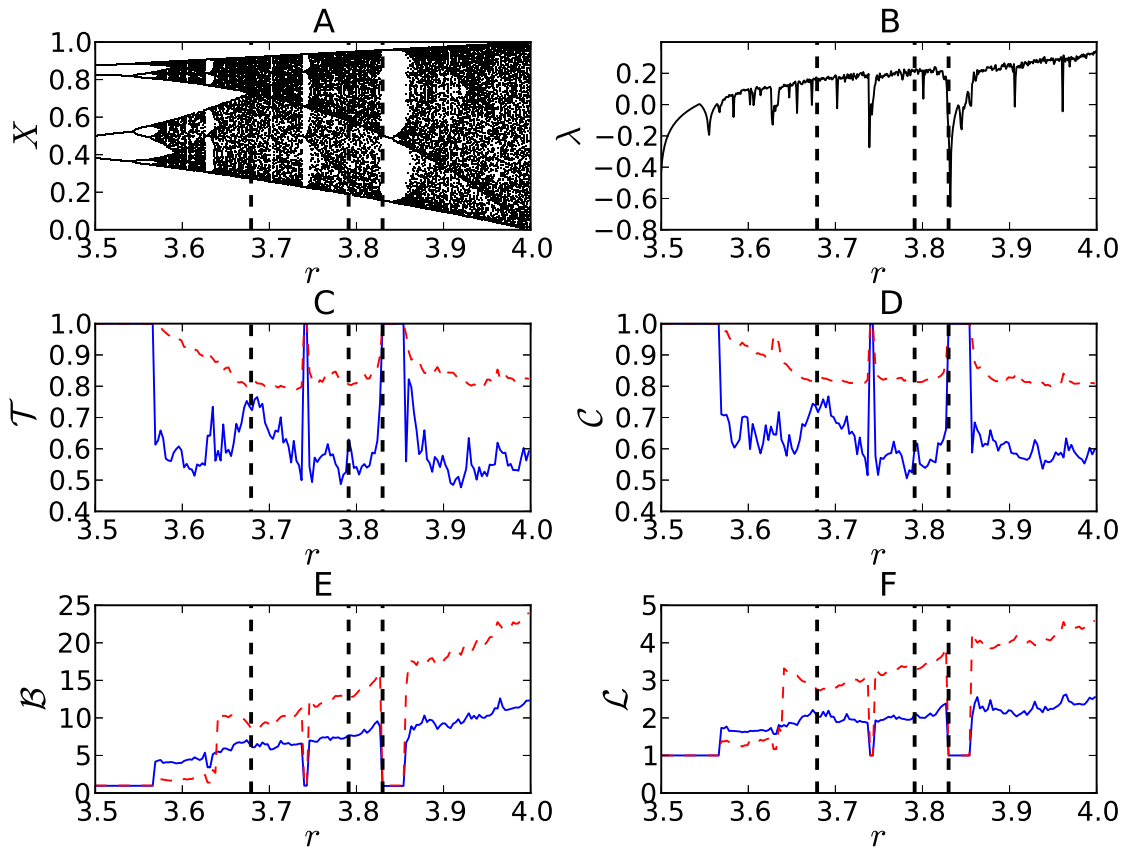
A sensibilidade para os diferentes regimes foi perceptível em todas as medidas utilizadas, quando aplicados em redes criadas por ambos métodos. O expoente de *Lyapunov* (Fig. 7.4b) e o diagrama de bifurcação (Fig. 7.4a) para o mapa logístico, demonstram os tipos de regimes que as medidas foram expostas (Figura 7.4).

Em regiões que apresentam comportamento periódico como  $R \in [3.828, 3.847]$  e  $R \in [3.5, 3.568]$ , a sua distinção comportamental também visualizado via expoente de *Lyapunov*. O coeficiente de clusterização médio  $\mathcal{C}$  da rede apresenta valor máximo ( $\mathcal{C} = 1$ ), demonstrando a ligação dos nós de forma homogênea e altamente conectado, característica de regimes periódicos. A média do menor caminho  $\mathcal{L}$  entre os nós também apresenta valor baixo nessa região por existir a conectividade de todo o grafo de forma homogênea e distribuída, formando assim um *cluster* perfeito. A média do caminho médio  $\mathcal{L}$  é de fato o menor valor possível, que corresponde com o gráfico de recorrência e o coeficiente de clusterização tem o seu valor máximo possível. Em ambos os casos, os valores dessas redes geradas a partir de métodos diferentes apresentam a mesma sensibilidade aos valores.

Entre os valores  $r \in [3.65, 3.75]$  é visível (Figura 7.4) no expoente de Lyapunov uma queda de valores que em determinados momentos chega a valores abaixo de zero. Essa região, que tem o seu ápice em  $r \approx 3.674$  caracteriza uma área de junção de faixas, “*band-merging*”. Em regiões próximas a essa região, na medida em que o

valor de  $r$  incrementa e/ou diminui, é observado um número maior de faixas intermitentes em cada trajetória. Durante esse período a sensibilidade, detectada apenas no método RDE, está presente nas medidas de clusterização  $\mathcal{C}$  e transitividade  $\mathcal{T}$ . A sensibilidade dessas medidas no método RDE é explicado por possuir maior representatividade justamente nas regiões de intermitência da trajetória, em relação a uma rede de recorrência tradicional, elevando assim o número de *clusters* para a dinâmica observada nessa faixa de valores do mapa logístico.

Figura 7.4 - (A) Diagrama de bifurcação do mapa logístico para  $r \in [3.5, 4.0]$ . (B) Expoente de Lyapunov para o mapa logístico  $r \in [3.5, 4.0]$ . (C) Medida de transitividade para o mapa logístico para  $r \in [3.5, 4.0]$  (D). Coeficiente de clusterização médio do mapa logístico para  $r \in [3.5, 4.0]$ . (E) Medida Edge Betweenness médio para o mapa logístico para  $r \in [3.5, 4.0]$ . (F) Tamanho médio do menor caminho para o mapa logístico para valores  $r \in [3.5, 4.0]$ .



### 7.1.4 Aplicação em diferentes regimes

Para quatro dinâmicas diferentes do mapa logístico (regular, laminar, *band-merging* e caótica), as medidas de RQA e as medidas de redes complexas exibem resultados em faixas distintas, permitindo assim a caracterização dessas dinâmicas. A tabela 7.2 demonstra os valores das medidas  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{T}$ ,  $RR$ ,  $DET$ ,  $L_{max}$  e  $LAM$  para os valores de  $r = 3.679$ ,  $r = 3.791$ ,  $r = 3.83$  e  $r = 4$ .

Tabela 7.2 - Medidas de RQA e de redes complexas para quase diferentes parâmetros de controle  $r$  obtidos a partir do método *RDE* para  $\varepsilon = \gamma = RR$  e  $L = 5$ . A última coluna é o expoente de Lyapunov  $\lambda$ .

Regime	$r$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{T}$	$RR$	$DET$	$LAM$	$L_{max}$	$\lambda$
Band merging	<b>3.679</b>	0.61	3.00	13.23	0.78	0.19	0.37	0.64	7	0.16
Laminaridade	<b>3.791</b>	0.58	2.70	20.74	0.60	0.14	0.31	0.24	10	0.22
Período 3	<b>3.830</b>	1	1	0.97	1.0	0.33	0.99	0.0	97	-0.32
Crise	<b>4.0</b>	0.54	2.69	21.69	0.54	0.12	0.31	0.28	26	0.34

No regime periódico,  $r = 3.83$  (Fig. 7.5), o gráfico de recorrência consiste em linha diagonais sem interrupções. Sua distância é 3, correspondendo ao período de comprimento 3 para esse regime periódico. No ponto  $r = 3.679$  (Fig. 7.6) que apresenta faixas de convergência, o gráfico de recorrência apresentou *clusters* de pontos de recorrência correspondente a fases de estados laminares. O gráfico de recorrência do estado laminar,  $r = 3.791$  (Fig. 7.7), consiste de uma quantidade menor de *clusters*, mas possui mais linhas diagonais. Já o mapa logístico para o regime caótico  $r = 4$  (Fig. 7.8), exibe linhas diagonais, só que, menores que aquelas com um valor menor de  $r$ , consistente com o expoente de Lyapunov sendo o maior valor encontrado em  $r = 4$ .

Para o regime periódico ( $r = 3.83$ ), é encontrado o maior valor de linha diagonal  $L_{max} = 97$  via a medida  $L_{max}$  em relação a outras dinâmicas. A presença da linha de identidade torna a medida  $L_{max}$  não tão precisa, já que esse valor deve diminuir na medida em que o  $r$  aumenta até o seu valor máximo em  $r = 4$ . A laminaridade  $LAM$  tem o seu maior valor no ponto de junção de bandas (*band-merging*,  $r = 3.679$ ) com  $LAM = 0.643$  e o menor valor para o regime periódico, com  $LAM = 0$ . No valor caótico  $r = 4.0$ , com um acréscimo de intermitência,  $LAM = 0.282$ , superior a região de maior intermitência  $r = 3.791$  com  $LAM = 0.241$ .

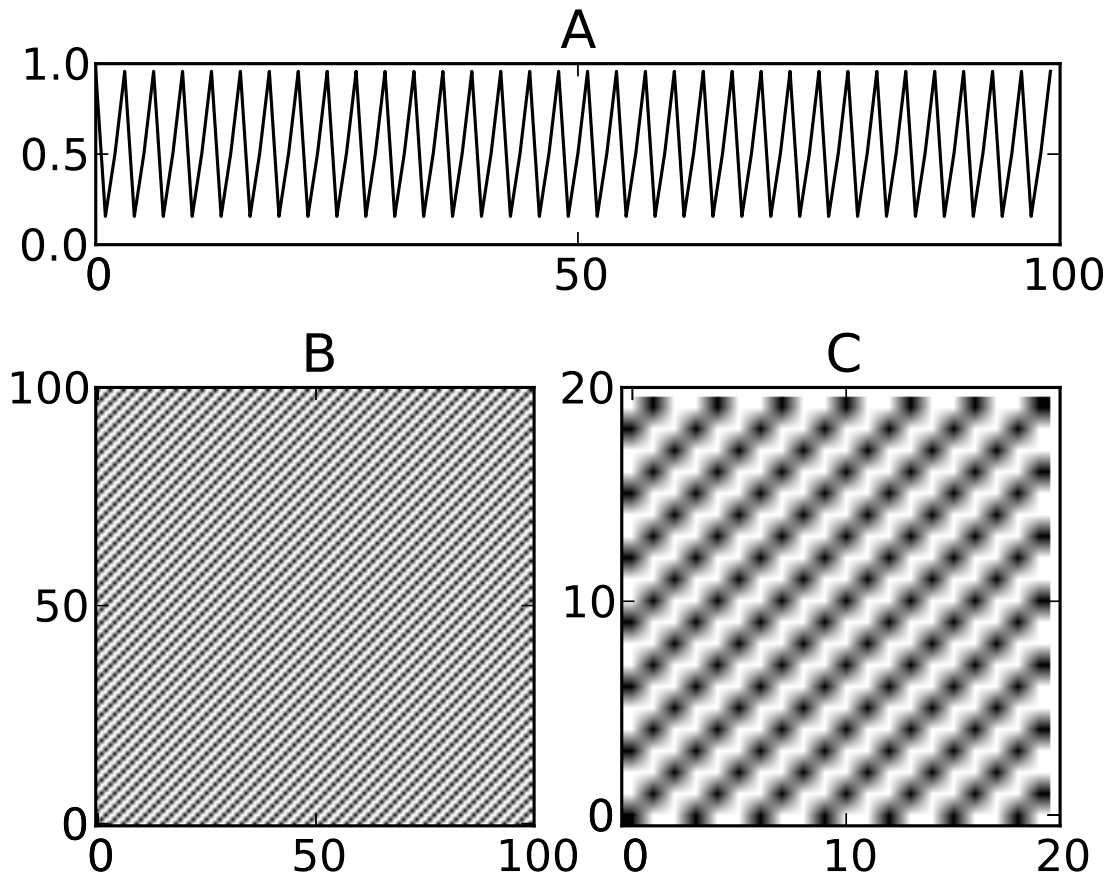


Figura 7.5 - (A) Série temporal para  $r = 3.83$ , amostra de  $N = 100$  (B) Gráfico de recorrência para  $r = 3.83, \varepsilon = 0.05$ . (C) Gráfico de recorrência *RDE* para  $L = 5$  e  $\gamma = RR$ .

As medidas de rede complexas também demonstram a sensibilidade que esses regimes possuem. No regime de periódico,  $r = 3.830$ , os valores observados alternam-se entre três estados distintos. Esses três estados são isolados no espaço de fase e não são considerados vizinhos. Dessa forma, no sentido de uma rede complexa, existem três componentes desconectadas em que cada componente contém uma rede completamente conectada. A média do comprimento do menor caminho entre os nós (estados) deve ser  $\mathcal{L} = 1$ , e o *cluster* perfeito  $\mathcal{C} = 1$ . A média do comprimento médio  $\mathcal{L}$  derivado do grafo de recorrência possui, de fato, o menor valor possível ( $\mathcal{L} = 1$ ) e o coeficiente de clusterização  $\mathcal{C}$  tem o seu maior valor possível ( $\mathcal{C} = 1$ ).

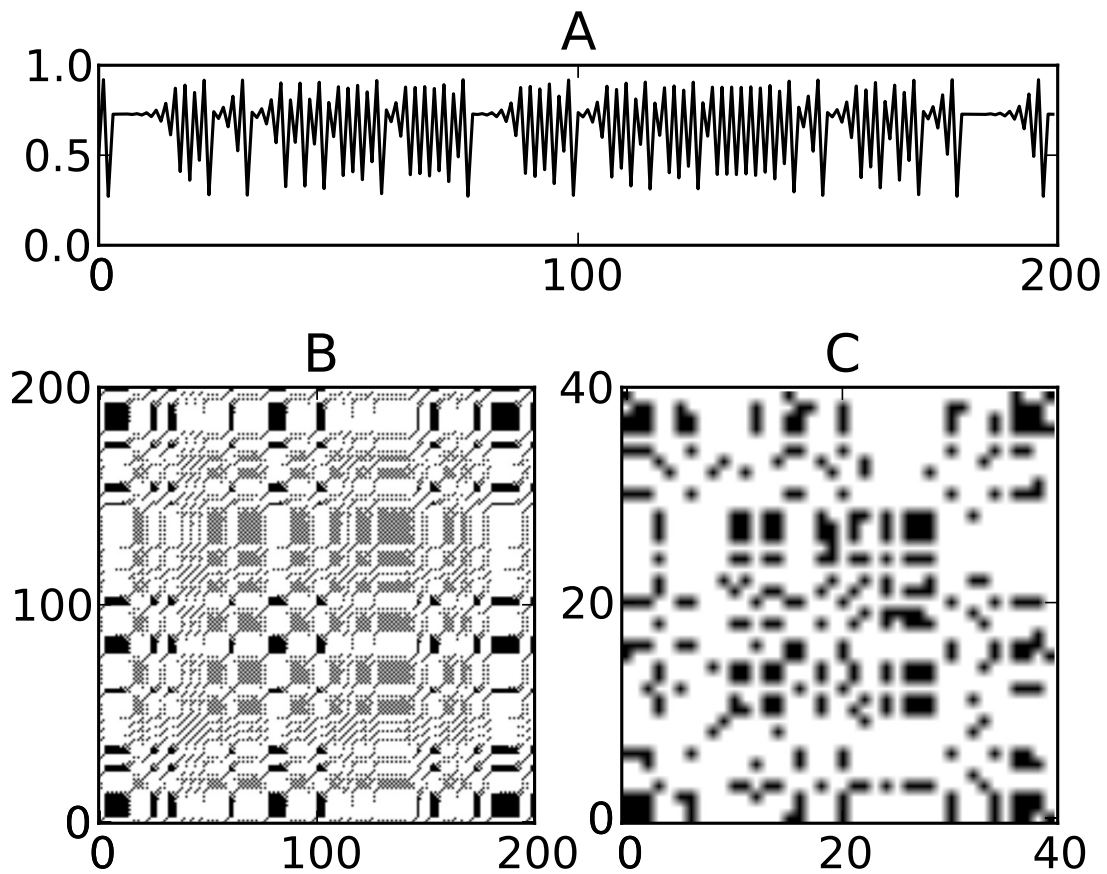


Figura 7.6 - (A) Série temporal para  $r = 3.679$ , amostra de  $N = 200$  (B) Gráfico de recorrência para  $r = 3.679, \varepsilon = 0.05$ . (C) Gráfico de recorrência *RDE* para  $L = 5$  e  $\gamma = RR$ .

Para o regime de faixa de convergência em  $r = 3.679$ , temos  $\mathcal{L} = 3.007$  e  $\mathcal{C} = 0.614$ . Os valores encontrados para o estado laminar em  $r = 3.791$ , é obtido  $\mathcal{L} = 2.707$  e  $\mathcal{C} = 0.588$ . O valor maior de caos ( $r = 4$ ), obtemos  $\mathcal{L} = 2.699$  e  $\mathcal{C} = 0.544$ .

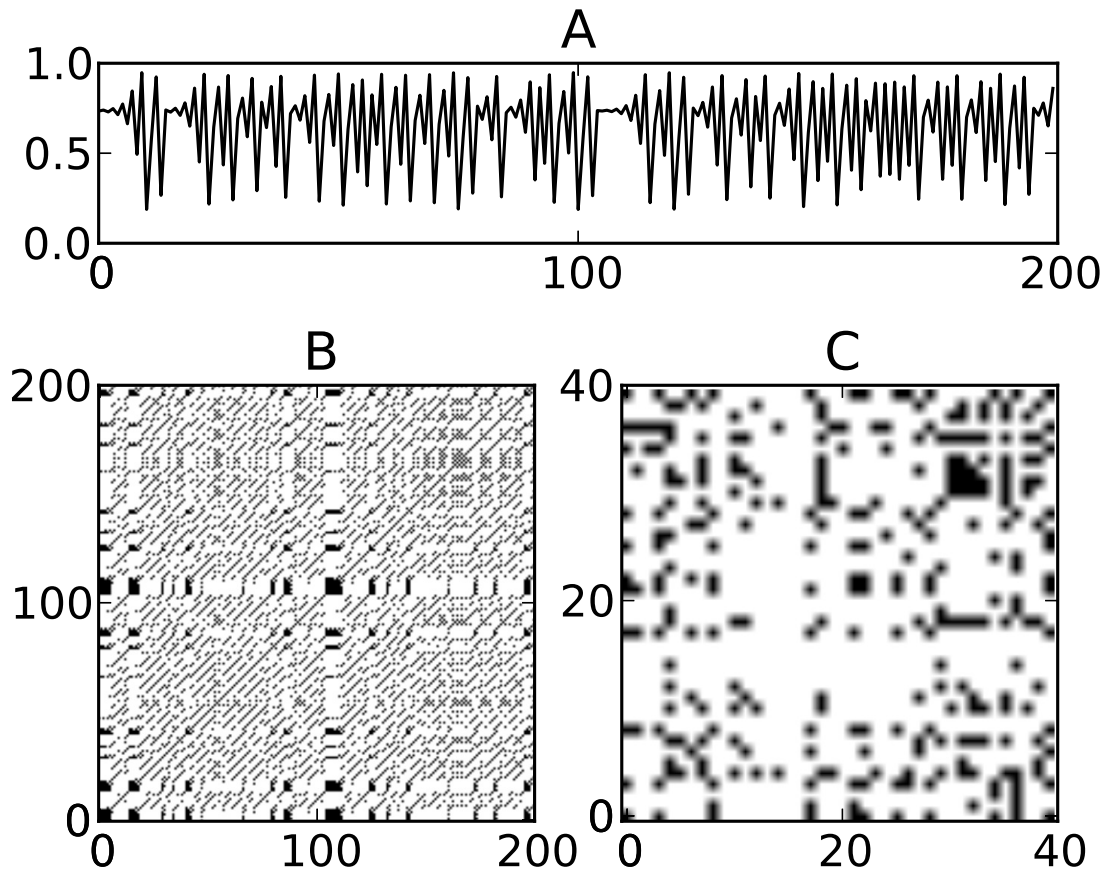


Figura 7.7 - (A) Série temporal para  $r = 3.791$ , amostra de  $N = 200$  (B) Gráfico de recorrência para  $r = 3.791, \varepsilon = 0.05$ . (C) Gráfico de recorrência *RDE* para  $L = 5$  e  $\gamma = RR$ .

A partir dos valores na tabela 7.2, é possível concluir que as medidas de rede complexas, quando aplicadas em uma matriz de recorrência são sensíveis a mudanças das dinâmicas. O comprimento médio do menor caminho  $\mathcal{L}$ , pode ser considerado como um valor base para a distância média entre dois estados no espaço de fases que está proporcionalmente ligado com a fragmentação do espaço de fase. O coeficiente de clusterização  $\mathcal{C}$  é capaz de detectar vetores do espaço de fase clusterizados na medida em que eles aparecem em dinâmicas periódicas e laminares. A sensibilidade tanto do coeficiente de clusterização  $\mathcal{C}$ , quanto da transitividade  $\mathcal{T}$  demonstraram ser mais sensíveis a intermitência como visto anteriormente. As duas medidas apresentam uma diminuição de valor em relação ao aumento da fragmentação do espaço de fase e alta sensibilidade para detectar *clusters* em regimes periódicos. As características quantitativas de uma rede de recorrência é intimamente relacionado com o valor  $\varepsilon$  escolhido. A utilização de uma abordagem em que a matriz de recorrência resultante possua o mesmo índice de recorrência (*Recurrence Rate*) de sua matriz



de recorrência original é apenas uma das formas em que as propriedades da nova matriz de recorrência permanecerá “*fidel*” as suas origens. Os resultados das medidas RQA e de redes complexas, de uma forma qualitativa, mostram que há uma relação de similaridade entre ambas, a nova matriz de recorrência *RDE*, mais simples e enxuta, e a matriz de recorrência original, mais detalhista e completa.

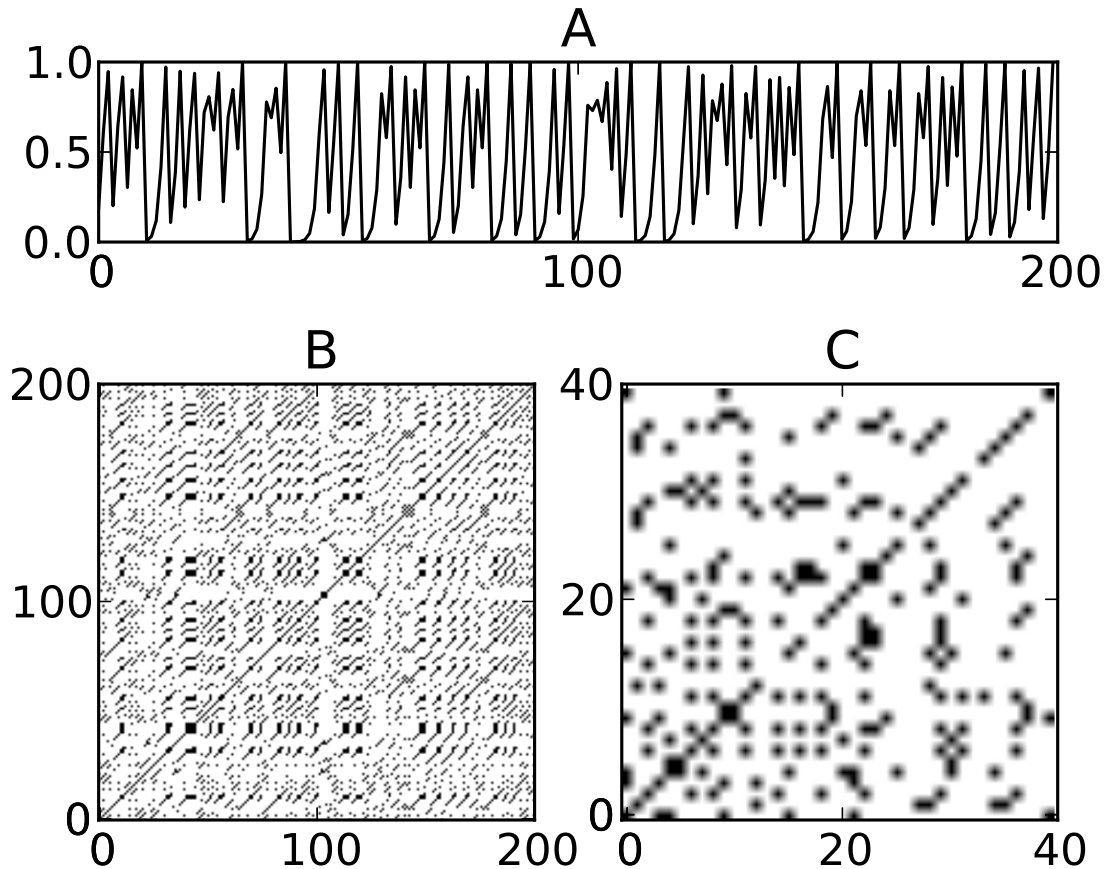


Figura 7.8 - (A) Série temporal para  $r = 4.0$ , amostra de  $N = 200$  (B) Gráfico de recorrência para  $r = 4.0, \varepsilon = 0.05$ . (C) Gráfico de recorrência *RDE* para  $L = 5$  e  $\gamma = RR$ .

## 7.2 Aplicação em Dados Experimentais de Fluidos

A instabilidade baroclínica é responsável pela produção de padrões em sistemas climáticos de ciclones e anti-ciclones. Esse fenômeno, pode também ser estudado em escala laboratorial a partir de fluxos rotatórios (ZOU et al., 2008).

O sistema utilizado por (ZOU et al., 2008) é conhecido por exibir uma rica variedade de regimes de fluxos, dependendo dos parâmetros utilizados (ex.: taxa de rotação, di-

ferença de temperatura, viscosidade, densidade do fluido, etc.). Os diferentes regimes obtidos podem incluir fluxos estáveis simétricos, regular e estável, ou periodicamente modulado.

A série temporal analisada (Figura 7.9(a),(d),(e)) consiste em temperaturas medidas no fluido a cada intervalo de 1.5 2s, com 200 ou mais amostras recolhidas a partir de cada onda. Os casos das séries temporais são:

(i) Solução estável

O sinal de temperatura de um fluxo regular e estável que exhibe oscilação periódica simples na medida em que os padrões de deriva das ondas chegam no ponto fixo medido.

(ii) Balanço de amplitude (Amplitude vacillation - AV)

Esse caso pode ser identificado como o fluxo de amplitude quase-periódica. A deriva da onda é composta por oscilações lentas e regulares no sinal de temperatura, mas uma rápida modulação na amplitude também é visível. AV é caracterizado por um crescimento periódico e uma queda na amplitude da onda com pouca mudança na forma da onda.

(iii) Balanço modulado de amplitude (Modulated amplitude vacillation - MAV)

Esse caso indentifica-se como um fluxo de baixa dimensão, caoticamente modulado e com ondas de amplitudes variantes. A modulação na amplitude resulta em um sinal de temperatura complexo e variando rapidamente.

### 7.2.1 Metodologia

Nessa seção são analisadas as três séries temporais constituídas de  $N = 6000s$  (na ordem de 10 oscilações) dos três casos: Solução estável, Balanço de amplitude (AV), Balanço modulado de amplitude (MAV).

Inicialmente, o atrator no espaço de fase é reconstruído a partir das trajetórias dos sistemas dinâmicos no espaço de fase utilizando a teoria de imersão de Takens. O delay  $\tau$  ótimo é escolhido por Zou et. al via o programa TISEAN, chegando na dimensão  $d = 6$  para as três séries temporais e o atraso  $\tau$  em,  $\tau_i = 218s$  (solução estável),  $\tau_{ii} = 136.5s$  (AV) e  $\tau_{iii} = 118s$  (MAV) (ZOU et al., 2008). A escolha de um alto valor para a dimensão também se deve ao fato da existência de ruído nos dados, o que colabora com a redução dos efeitos que o ruído pode causar (ZOU et al., 2008). Para a simplificação do gráfico de recorrência, os valores de dimensão  $d$  e atraso  $\tau$

foram preservados, foi utilizado o valor de corte  $\varepsilon = 0.3$ . Para a criação dos gráficos de recorrência  $RDE$ , o valor de  $\varepsilon$  foi escolhido de forma que preservasse o mesmo valor de taxa de recorrência do RP original, e  $L = 10$  para todos os casos.

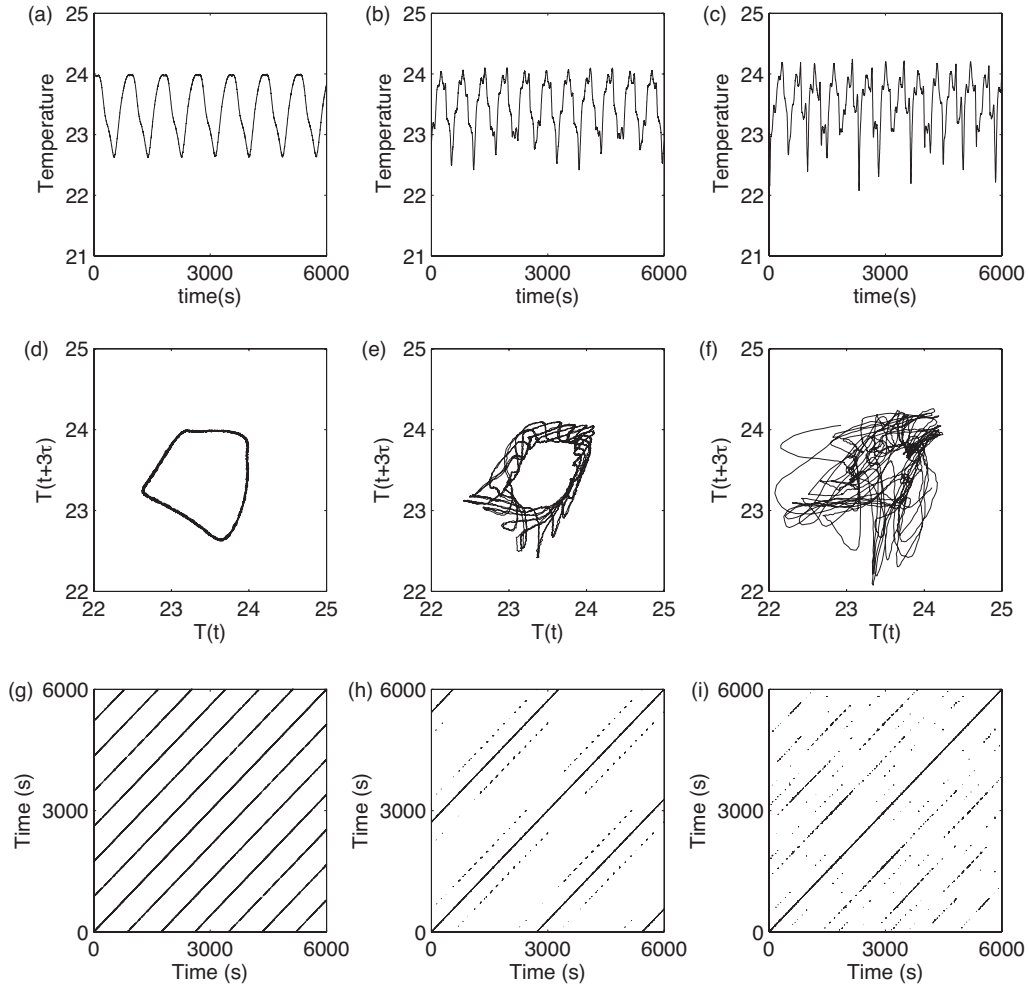


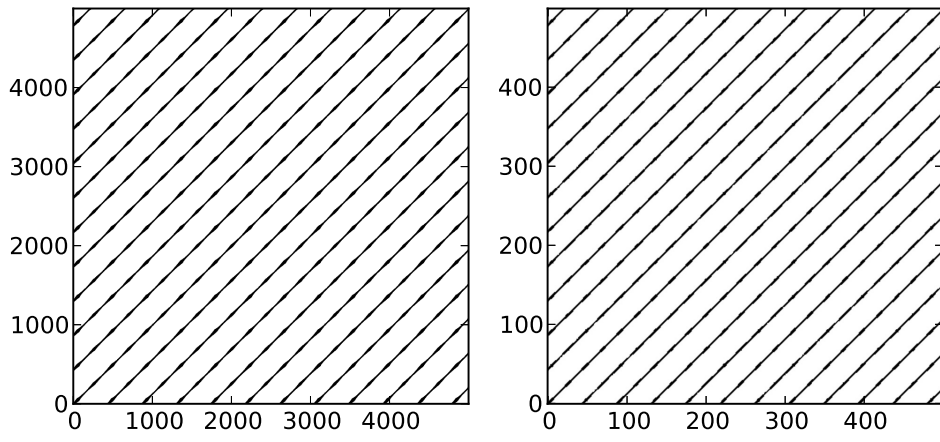
Figura 7.9 - (a,d,e) Série temporal, espaço de fase no plano  $T(t + 3\tau)$  e gráfico de recorrência para o fluido estável. (b,e,h) Série temporal, espaço de fase no plano  $T(t + 3\tau)$  e gráfico de recorrência para o fluido AV (quasi-periódico). (c,f,i) Série temporal, espaço de fase no plano  $T(t + 3\tau)$  e gráfico de recorrência para o fluido MAV (caótico) (fonte: (ZOU et al., 2008))

## 7.2.2 Resultados

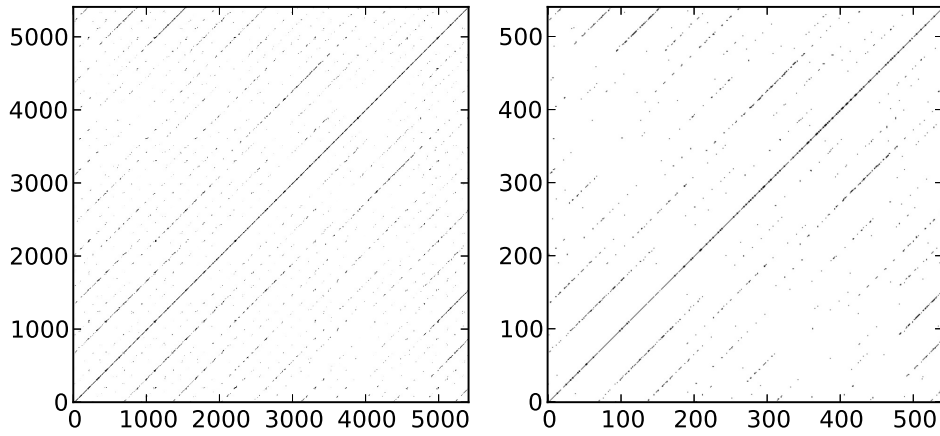
A reconstrução do gráfico de recorrência seguindo os parâmetros descritos anteriormente apresentaram semelhanças visualmente explícitas (Fig. 7.10). As medidas

de redes complexas  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{C}$  e as medidas RQA como  $DET$ ,  $LAM$ ,  $RR$  e  $L_{max}$  também foram utilizadas para realizar um comparativo entre os valores encontrados originalmente e também em sua versão discretizada com o método RDE.

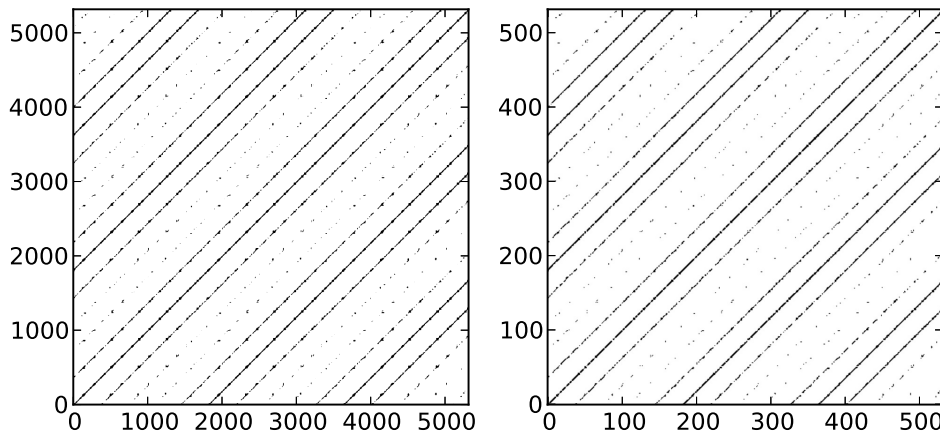
A redução do gráfico de recorrência original serviu como base para a construção da sua versão discretizada, mantendo as macro estruturas e índice de recorrência iguais, como pode ser visualizado na Figura 7.10.



(a)



(b)



(c)

Figura 7.10 - Gráfico de recorrência original e o gráfico RDE com  $L = 10$  para (a) fluido estável, (b) fluido AV (quasi-periódico) e (c) fluido MAV (caótico).

Tabela 7.3 - Medidas de rede complexa e RQA gerados a partir da rede e RP discretizado para os três casos observados.

Caso	Estável	AV	MAV
$\mathcal{C}$	0.73	0.56	0.32
$\mathcal{L}$	6.80	7.12	20.68
$\mathcal{B}$	80.44	218.58	1245.99
$\mathcal{T}$	0.74	0.56	0.36
RR	0.08	0.03	0.01
DET	1	0.85	0.69
LAM	1	0.87	0.41
$L_{max}$	499	145	111

As medidas de RQA e redes complexas observados nos três casos estão detalhados na tabela 7.3. As medidas de RQA para os três casos apresentam valores compatíveis com a variação encontrada para esse tipo de dinâmica. O determinismo  $DET$  teve seu valor máximo ( $DET = 1$ ) no caso periódico, como esperado e diminui na medida que chega até o caso caótico MAV, onde  $DET = 0.69$  e o intermediário na dinâmica quasi-periódica, AV, onde  $DET = 0.85$ . O mesmo acontece para o comprimento máximo das linhas diagonais, com valor máximo no fluido estável  $L_{max} = 499$ , e o menor valor para o fluido com dinâmica caótica,  $L_{max} = 111$ , devido a presença escassa dessas estruturas no gráfico de recorrência. Nada pode ser afirmado sobre o índice de recorrência dos três casos que apresentam valores próximos, apesar de diferentes, e seguindo o mesmo padrão decrescente para o caso periódico, quasi-periódico e caótico. Os valores encontrados para a medida de laminaridade  $LAM$  apresenta sensibilidade para os três casos, com seu valor máximo ( $LAM = 1$ ) no caso periódico, onde a distribuição de linhas verticais é igual para todo o gráfico e decresce na medida que estados laminares são mais facilmente observados, no caso AV, onde  $LAM = 0.87$  e MAX, onde  $LAM = 0.41$ .

Assim como as medidas de RQA, as medidas de redes complexas também apresentam sensibilidade. As medidas de clusterização  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{T}$  apresentaram valores decrescentes para o casos estável ( $\mathcal{C} = 0.73$ ,  $\mathcal{T} = 0.74$ ), quasi-periódico AV ( $\mathcal{C} = 0.56$ ,  $\mathcal{T} = 0.56$ ) e caótico ( $\mathcal{C} = 0.32$ ,  $\mathcal{T} = 0.36$ ). Esses valores demonstram quão conectados os nós da rede se tornam na medida que dinâmicas diferentes são observada. O comprimento médio do menor caminho  $\mathcal{L}$ , apresentou valores crescentes para o fluido estável  $\mathcal{L} = 6.8$ , AV  $\mathcal{L} = 7.12$ , MAV  $\mathcal{L} = 20.68$ . Esse aumento de valores é devido ao comprimento ocupado pelas trajetórias de cada caso no espaço de fase, como pode ser visto na Figura 7.9(c)(f)(i) para ambos os casos. Os valores crescentes observados

também na medida  $\mathcal{B}$  sinalizam a diferença entre as três redes formadas a partir de dinâmicas diferentes.

Na Figura 7.11 é possível ver todas as medidas plotadas para os três casos, os valores de  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{L}$  e  $L_{max}$  foram normalizados para permanecer em uma faixa de valor entre 0 e 1. Com exceção dos valores do índice de recorrência ( $RR$ ), as medidas apresentaram valores em faixas diferentes para os três casos.

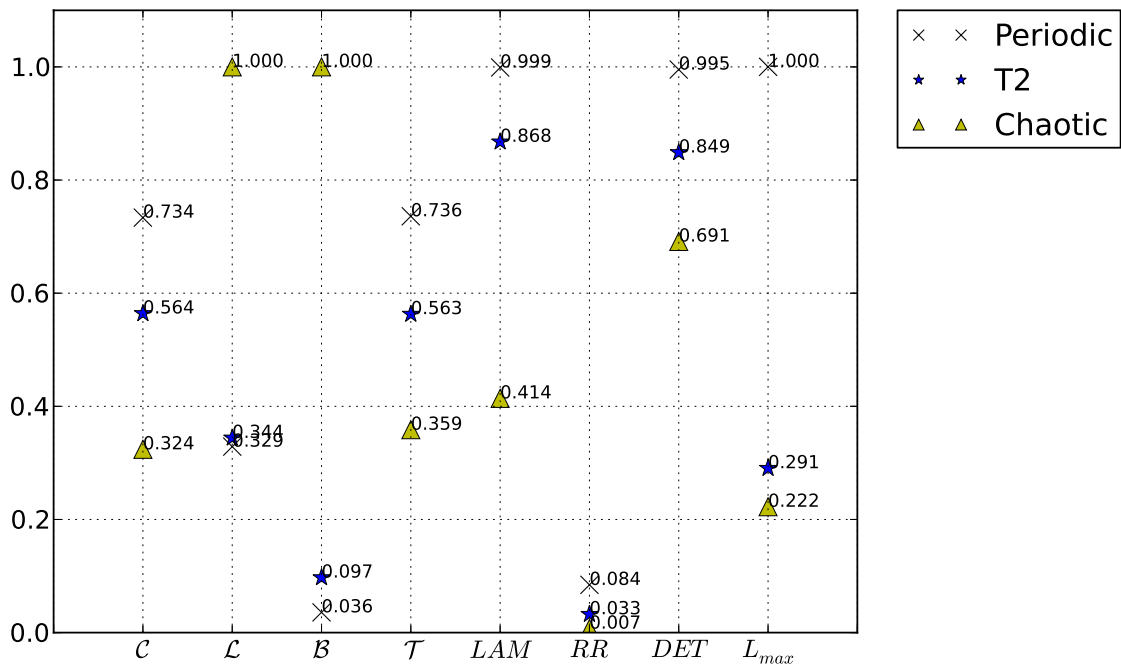


Figura 7.11 - Medidas  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $DET$ ,  $LAM$ ,  $RR$  e  $L_{max}$  para os três casos reduzidos com  $L = 10$ .

## 8 CONCLUSÃO

Diversos métodos foram apresentados e utilizados para distinguir diferentes dinâmicas. Dentre estes métodos, destacam-se o expoente de Lyapunov, mapas de Poincaré, análise espectral. Outra forma viável é o gráfico de recorrência (RP) e os seus quantificadores. Na literatura, as medidas do gráfico de recorrência, RQA, e as medidas de rede complexas - amplamente conhecidas - são capazes de distinguir e diferenciar dinâmicas (ZOU et al., 2008; COSTA et al., 2007; MARWAN et al., 2009; MARWAN et al., 2002).

É sempre feita uma ressalva no uso do gráfico de recorrência, visto que sua aplicação é, geralmente, associada a séries temporais de tamanhos reduzidos, mas nada impede que sejam utilizadas com grandes séries temporais. O oposto pode ser afirmado nas redes complexas, onde o seu tamanho não gera maiores empecilhos. Para os dois casos, o tamanho da série temporal vai influenciar no tempo de processamento das medidas, sendo a redução deste tempo um dos objetivos do trabalho.

No Capítulo 6, foi apresentada uma metodologia de redução do gráfico de recorrência. Os pontos continuam a respeitar suas macroestruturas e obedecendo a sua distribuição probabilística original. A abordagem para a criação da matriz de recorrência binária, da matriz probabilística, também foi apresentada no Capítulo 6. A transformação de um sistema de uma rede complexa foi utilizada e apresentada no Capítulo 5.

Os resultados obtidos no Capítulo 7 confirmam que o procedimento de discretização de gráficos de recorrência é viável quando aplicado nos experimentos propostos. Essa afirmação tem embasamento a partir da análise dos resultados extraídos do mapa logístico, no Capítulo 7.1, O gráfico RDE apresenta sensibilidade similar ao método tradicional e uma sensibilidade maior em pontos de junção de frequência (*band-merging*). Os resultados obtidos no Capítulo 7.2 também evidenciam a mesma sensibilidade dos dados experimentais de fluidos, onde o gráfico RDE foi capaz de identificar dinâmicas periódicas, quasi-periódicas e caótica.

Em todos os casos, o gráfico de recorrência discretizado é capaz de distinguir comportamentos quasi-periódicos, de comportamentos caóticos e periódicos. Todos estes, baseados nos experimentos com séries temporais curtas. Desta forma, o método apresentado demonstra ser promissor em simplificação de gráficos de recorrência e permite que novas abordagens possam ser testadas e comparadas.



### 8.0.3 Trabalhos Futuros

Como proposta de trabalhos futuros, dois pontos chaves para a construção do gráfico RDE podem ser explorados: a metodologia para a construção da matriz probabilística e o parâmetro de corte para a criação da matriz binária.

A metodologia para a construção da matriz probabilística RDE pode fazer uso de outras medidas de RQA (ex.: LAM, DET) além do índice de recorrência (RR).

O parâmetro de corte  $\gamma$ , que transforma a matriz probabilística em uma matriz binária, pode utilizar outras medidas de recorrência de forma que a criação de um gráfico RDE permaneça correlacionado ao gráfico de recorrência original.

Além dos pontos que seguem a metodologia proposta, outro ponto a ser explorado é a utilização direta da matriz de probabilidades para a construção de uma rede complexa.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADDO, P. M.; BILLIO, M.; GUÉGAN, D. Nonlinear dynamics and recurrence plots for detecting financial crisis. **The North American Journal of Economics and Finance**, v. 26, n. 0, p. 416 – 435, 2013. ISSN 1062-9408. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1062940813000296>>. 1

ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORK, J. A. **Chaos: an introduction to dynamical systems**. New York: Springer-Verlag, 1997. 602 p. 12

AMARAL, L. A.; OTTINO, J. M. Complex networks. **The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems**, Springer, v. 38, n. 2, p. 147–162, 2004. 30, 31

ARENAS, A.; DÍAZ-GUILERA, A.; KURTHS, J.; MORENO, Y.; ZHOU, C. Synchronization in complex networks. **Physics Reports**, Elsevier, v. 469, n. 3, p. 93–153, 2008. 28

BAKER, G. L. **Chaotic dynamics: an introduction**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996. 6

BAKER, G. L.; GOLLUB, J. P. **Chaotic dynamics: an introduction**. New York: Cambridge University Press, 1996. 2

BARABASI, A.-L. **Linked: How everything is connected to everything else and what it means**. **Plume Editors**, 2002. 27

BARABÁSI, A.-L.; ALBERT, R. Emergence of scaling in random networks. **science**, American Association for the Advancement of Science, v. 286, n. 5439, p. 509–512, 1999. 27

BARABÁSI, B. A.-L.; BONABEAU, E. Scale-free. **Scientific American**, v. 288, n. 5, p. 60–9, maio 2003. 32

BERGELSON, V. The multifarious poincaré recurrence theorem. **Descriptive set theory and dynamical systems**, Cambridge University Press, New York, p. 31–57, 2000. 15

BOCCALETTI, S.; LATORA, V.; MORENO, Y.; CHAVEZ, M.; HWANG, D.-U. Complex networks: Structure and dynamics. **Physics reports**, Elsevier, v. 424, n. 4, p. 175–308, 2006. 27

- CASDAGLI, M. Recurrence plots revisited. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, v. 108, n. 1, p. 12–44, 1997. 2, 50
- CASTELLINI, H.; ROMANELLI, L. Applications of recurrence quantified analysis to study the dynamics of chaotic chemical reaction. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 342, n. 1, p. 301–307, 2004. 1
- COSTA, L. d. F.; JR, O. N. O.; TRAVIESO, G.; RODRIGUES, F. A.; BOAS, P. R. V.; ANTIQUEIRA, L.; VIANA, M. P.; ROCHA, L. E. C. Analyzing and modeling real-world phenomena with complex networks: a survey of applications. **Advances in Physics**, Taylor & Francis, v. 60, n. 3, p. 329–412, 2011. 33
- COSTA, L. d. F.; RODRIGUES, F. A.; TRAVIESO, G.; BOAS, P. V. Characterization of complex networks: A survey of measurements. **Advances in Physics**, Taylor & Francis, v. 56, n. 1, p. 167–242, 2007. 27, 33, 34, 35, 69
- DONNER, R.; HINRICHS, U.; SCHOLZ-REITER, B. Symbolic recurrence plots: A new quantitative framework for performance analysis of manufacturing networks. **The European Physical Journal-Special Topics**, Springer, v. 164, n. 1, p. 85–104, 2008. 2
- DONNER, R. V.; SMALL, M.; DONGES, J. F.; MARWAN, N.; ZOU, Y.; XIANG, R.; KURTHS, J. Recurrence-based time series analysis by means of complex network methods. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, World Scientific, v. 21, n. 04, p. 1019–1046, 2011. xiii, 2, 37, 38, 39, 45, 53
- DONNER, R. V.; ZOU, Y.; DONGES, J. F.; MARWAN, N.; KURTHS, J. Ambiguities in recurrence-based complex network representations of time series. **Physical Review E**, APS, v. 81, n. 1, p. 015101, 2010. 1
- \_\_\_\_\_. Recurrence networks—a novel paradigm for nonlinear time series analysis. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 12, n. 3, p. 033025, 2010. xiii, 1, 17, 37, 45, 53
- ECKMANN, J.-P.; KAMPHORST, S. O.; RUELLE, D. Recurrence plots of dynamical systems. **Europhys. Lett**, World Scientific, v. 4, n. 9, p. 973–977, 1987. 1, 15
- ECKMANN, J. P.; RUELLE, D.; CILIBERTO, S. Lyapunov exponents from time series. **Physical Review A**, v. 34, n. 6, p. 4971–4979, 1986. 8
- ERDŐS, P.; RÉNYI, A. On random graphs. **Publicationes Mathematicae Debrecen**, v. 6, p. 290–297, 1959. 29

- FACCHINI, A.; MOCENNI, C.; MARWAN, N.; VICINO, A.; TIEZZI, E. Nonlinear time series analysis of dissolved oxygen in the orbetello lagoon (italy). **Ecological modelling**, Elsevier, v. 203, n. 3, p. 339–348, 2007. 9, 16
- FENG, C.; CHENG, J.; ZHOU, L. Analysis of real sea clutter based on meta recurrence plot. In: IEEE. **Natural Computation (ICNC), 2013 Ninth International Conference on**. [S.l.], 2013. p. 1108–1112. 1, 2
- FORD, J. How random is a coin toss. **Physics Today**, Wiley, v. 36, n. 4, p. 40–47, 1983. 5
- FRASER, A. M.; SWINNEY, H. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. **Physical Review A**, v. 33, p. 1134–1140, 1986. 10
- GAO, J.; CAI, H. On the structures and quantification of recurrence plots. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 270, n. 1, p. 75–87, 2000. 19
- GAO, Z.; JIN, N. Complex network from time series based on phase space reconstruction. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, AIP Publishing, v. 19, n. 3, p. 033137, 2009. 45
- GRASSBERGER, P.; PROCACCIA, I. Characterization of strange attractors. **Physical Review Letters**, v. 50, n. 5, p. 346–349, 1983. 9
- GRASSBERGER, P.; SCHREIBER, T.; SCHAFFRATH, C. Nonlinear time sequence analysis. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, World Scientific, v. 1, n. 03, p. 521–547, 1991. 19
- HENRY, B.; LOVELL, N.; CAMACHO, F. Nonlinear dynamics time series analysis. **Akay (Ed.)**, Citeseer, 2001. 5, 7, 10
- HOFSTAD, R. V. D. **Random graphs and complex networks**. 2009. Disponível em: <<http://www.win.tue.nl/rhofstad/NotesRGCN.pdf>>. 27, 31
- LACASA, L.; LUQUE, B.; BALLESTEROS, F.; LUQUE, J.; NUÑO, J. C. From time series to complex networks: The visibility graph. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Acad Sciences, v. 105, n. 13, p. 4972–4975, 2008. 41
- LETELLIER, C. Estimating the shannon entropy: recurrence plots versus symbolic dynamics. **Physical review letters**, APS, v. 96, n. 25, p. 254102, 2006. 2

LITAK, G.; WIERCIGROCH, M.; HORTON, B. W.; XU, X. Transient chaotic behaviour versus periodic motion of a parametric pendulum by recurrence plots. **ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, Wiley Online Library, v. 90, n. 1, p. 33–41, 2010. 1

MARWAN, N. **Encounters with neighbours: current developments of concepts based on recurrence plots and their applications**. [S.l.]: Norbert Marwan, 2003. 16, 18, 19, 20

MARWAN, N.; DONGES, J. F.; ZOU, Y.; DONNER, R. V.; KURTHS, J. Complex network approach for recurrence analysis of time series. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 373, n. 46, p. 4246–4254, 2009. 1, 2, 53, 69

MARWAN, N.; ROMANO, M. C.; THIEL, M.; KURTHS, J. Recurrence plots for the analysis of complex systems. **Physics Reports**, Elsevier, v. 438, n. 5, p. 237–329, 2007. 1, 15, 18, 20

MARWAN, N.; WESSEL, N.; MEYERFELDT, U.; SCHIRDEWAN, A.; KURTHS, J. Recurrence-plot-based measures of complexity and their application to heart-rate-variability data. **Physical Review E**, APS, v. 66, n. 2, p. 026702, 2002. 1, 69

MAY, R. M. et al. Simple mathematical models with very complicated dynamics. **Nature**, London, v. 261, n. 5560, p. 459–467, 1976. 11

NEWMAN, M. **Networks: an introduction**. [S.l.]: Oxford University Press, 2010. 28

NEWMAN, M. E.; WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Random graph models of social networks. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, National Acad Sciences, v. 99, n. Suppl 1, p. 2566–2572, 2002. 36

OUYANG, G.; ZHU, X.; JU, Z.; LIU, H. Dynamical characteristics of surface emg signals of hand grasps via recurrence plot. **IEEE journal of biomedical and health informatics**, v. 18, n. 1, p. 257, 2014. 1, 2

PACKARD, N. H.; CRUTCHFIELD, J. P.; FARMER, J. D.; SHAW, R. S. Geometry from a time series. **Physical Review Letters**, v. 45, p. 712–716, 1980. 9

- \_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. **Physical review letters**, APS, v. 45, n. 9, p. 712, 1980. 19
- POINCARÉ, H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. **Acta mathematica**, Springer, v. 13, n. 1, p. A3–A270, 1890. 15
- POMEAU, Y.; MANNEVILLE, P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. **Communications in Mathematical Physics**, Springer, v. 74, n. 2, p. 189–197, 1980. 12
- RUELLE, D. Ergodic theory of differentiable dynamical systems. **Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques**, Springer, v. 50, n. 1, p. 27–58, 1979. 9
- SANO, M.; SAWADA, Y. Measurement of the lyapunov spectrum from chaotic time series. **Physical Review Letters**, v. 55, n. 10, p. 1082–1085, 1985. 8
- SARAMÄKI, J.; KIVELÄ, M.; ONNELA, J.-P.; KASKI, K.; KERTESZ, J. Generalizations of the clustering coefficient to weighted complex networks. **Physical Review E**, APS, v. 75, n. 2, p. 027105, 2007. 35
- SAUER, T.; YORKE, J. A.; CASDAGLI, M. Embedology. **Journal of statistical Physics**, Springer, v. 65, n. 3-4, p. 579–616, 1991. 9, 10
- SAVI, M. A. **Dinâmica não-linear e caos**. [S.l.]: Editora E-papers, 2006. 9
- SCHUSTER, H. G.; JUST, W. **Deterministic chaos: an introduction**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2006. 12, 13
- SHIMADA, Y.; KIMURA, T.; IKEGUCHI, T. Analysis of chaotic dynamics using measures of the complex network theory. In: **Artificial Neural Networks-ICANN 2008**. [S.l.]: Springer, 2008. p. 61–70. 39, 41
- SIMULATION, I. for C. S. **Example of Complex Networks**. 2013. Disponível em: <<http://www.icss.soton.ac.uk/research/core.html>>. 31
- SMALL, M.; ZHANG, J.; XU, X. Transforming time series into complex networks. In: **Complex Sciences**. [S.l.]: Springer, 2009. p. 2078–2089. 39, 40, 41
- STROGATZ, S. H. Exploring complex networks. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 410, n. 6825, p. 268–276, 2001. 30, 31, 32
- SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, W.; RUDOWSKI, J. Neimark bifurcation, almost-periodicity and chaos in the forced van der pol-duffing system in the

neighbourhood of the principal resonance. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 192, n. 2, p. 201–206, 1994. 6

TAKENS, F. Detecting strange attractors in turbulence. **Lecture Notes in Mathematicks**, v. 898, p. 366–381, 1981. 9, 10

VERHULST, P.-F. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. **Nouveaux mémoires de l'académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles**, v. 18, p. 14–54, 1845. 11

WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of 'small-world' networks. **nature**, Nature Publishing Group, v. 393, n. 6684, p. 440–442, 1998. 27, 30, 35

WOLF, A.; SWIFT, J. B.; VASTANO, J. A. Determining lyapunov exponents from a time series. **Physica D**, v. 16D, n. 3, p. 285–317, 1985. 2, 8

WU, J.; SUN, H.; GAO, Z. Mapping to complex networks from chaos time series in the car following model. In: **Proc. 6th Int. Congress on Traffic and Transportation Studies (ASCE, Reston)**. [S.l.: s.n.], 2008. p. 397–407. 41

XU, X.; ZHANG, J.; SMALL, M. Superfamily phenomena and motifs of networks induced from time series. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Acad Sciences, v. 105, n. 50, p. 19601–19605, 2008. 1, 2, 37, 39, 41

YANG, Y.; YANG, H. Complex network-based time series analysis. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 387, n. 5, p. 1381–1386, 2008. 37

ZBILUT, J. P.; THOMASSON, N.; WEBBER, C. L. Recurrence quantification analysis as a tool for nonlinear exploration of nonstationary cardiac signals. **Medical engineering & physics**, Elsevier, v. 24, n. 1, p. 53–60, 2002. 15, 19

ZBILUT, J. P.; WEBBER, C. L. Embeddings and delays as derived from quantification of recurrence plots. **Physics letters A**, Elsevier, v. 171, n. 3, p. 199–203, 1992. 1, 18, 19, 20

ZHANG, J.; SMALL, M. Complex network from pseudoperiodic time series: Topology versus dynamics. **Physical Review Letters**, APS, v. 96, n. 23, p. 238701, 2006. 37

ZOU, Y.; HEITZIG, J.; DONNER, R.; DONGES, J.; FARMER, J.; MEUCCI, R.; EUZZOR, S.; MARWAN, N.; KURTHS, J. Power-laws in recurrence networks from

dynamical systems. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 98, n. 4, p. 48001, 2012. [41](#), [47](#)

ZOU, Y.; THIEL, M.; ROMANO, M.; READ, P.; KURTHS, J. Recurrence analysis of quasiperiodicity in experimental fluid data. **The European Physical Journal Special Topics**, Springer, v. 164, n. 1, p. 23–33, 2008. [1](#), [62](#), [63](#), [64](#), [69](#)





## ANEXO A - ALGORÍTMO RDE

---

**Algorithm 1** Algoritmo RDE

---

```
1: procedure RDE( $M, R$ ) ▷ O RDE de um bloco de lado  $M$ 
2:    $\psi = \text{Array}$ 
3:    $N = \text{size}(R)$  ▷ Comprimento do Gráfico de Recorrência
4:    $m = 1$  ▷ Índice de cada coluna de lado  $M$ 
5:   for  $m \leq N$  do
6:     for  $i \leq i + M$  do ▷ Loop do comprimento do bloco
7:        $j = 0$ 
8:       for  $j \leq N$  do ▷ Loop da altura da coluna
9:          $\psi_m = \psi_m + R_{i,j}$ 
10:         $j \leftarrow j + 1$ 
11:       end for
12:        $i \leftarrow i + 1$ 
13:     end for
14:      $m \leftarrow m + M$  ▷ Loop com passo  $M$ 
15:   end for
16:    $p = \text{Array}$ 
17:    $l \leftarrow 1, m \leftarrow 1$ 
18:   for  $l \leq N$  do
19:     for  $m \leq N$  do
20:        $\alpha = 0$ 
21:       for  $i \leq i + M$  do
22:         for  $j \leq j + M$  do
23:            $\alpha = \alpha + R_{i,j}$ 
24:            $j \leftarrow j + 1$ 
25:         end for
26:          $i \leftarrow i + 1$ 
27:       end for
28:        $p_{(l-M, m-M)} = \frac{\alpha}{\psi_i}$ 
29:        $l \leftarrow l + M$ 
30:     end for
31:      $m \leftarrow m + M$ 
32:   end for
33: end procedure
```

---