

CÁLCULO DA VARIAÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS DE SATÉLITES LUNARES DEVIDO À DISTRIBUIÇÃO NÃO UNIFORME DE MASSA DA LUA

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Maria Lívia Galhego T. X. da Costa (ICT/UNIFESP, Bolsista PIBIC/CNPq)
E-mail: livia.thibes@gmail.com

Dr. Antônio Fernando Bertachini de A. Prado (DMC/INPE, Orientador)
E-mail: prado@dem.inpe.br

Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes (ICT/UNIFESP, Orientador)
E-mail: rodolpho.vilhena@gmail.com

"A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo."

Pitágoras

"A física é a poesia da natureza. A matemática, o idioma."

Antônio Gomes Lacerda

AGRADECIMENTOS

A Deus pela saúde e força que foram concedidas para a realização deste trabalho.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) pela oportunidade de estudo, o qual contribui, de algum modo, para a sociedade e a ciência.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro recebido junto ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC/INPE).

Ao orientador Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado e co-orientador Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes pela dedicação, apoio, interesse e constante ajuda no processo de consolidação deste projeto.

Aos meus pais que sempre edificaram e direcionaram minha vida com muito carinho.

Aos familiares e amigos pelo incentivo e pela contribuição, direta ou indireta, para a conclusão de mais esta etapa.

RESUMO

Se ignorarmos a existência de perturbações, um veículo espacial, sujeito exclusivamente à atração gravitacional de um corpo central, desenvolve uma trajetória cônica fixa em um plano fixo. Em outras palavras, sua órbita possui elementos keplerianos constantes. Em aplicações reais, quando forças perturbativas são consideradas - para este trabalho, forças que derivam de um potencial gravitacional - os parâmetros que descrevem a órbita são funções do tempo. Através dos polinômios de Legendre e das equações planetárias de Lagrange, podemos descrever o potencial gravitacional e obter as variações temporais de tais parâmetros.

Da comparação entre a variação dos elementos angulares de órbitas de satélites artificiais terrestres e lunares, provocada pela distribuição não uniforme de massa dos corpos centrais (Terra e Lua, respectivamente), para o caso terrestre, constata-se que os harmônicos de menor ordem e grau são mais significativos em ordem de grandeza. Consequentemente, para certas aplicações de satélites artificiais terrestres, é suficiente considerar apenas os dois ou três primeiros termos do potencial, para estudarmos, por exemplo, a variação dos elementos angulares. Entretanto, no caso lunar, não existe uma correspondência ordenada entre a ordem dos harmônicos e as suas magnitudes, portanto, também, vários termos do potencial devem ser considerados no cálculo destas variações para uma melhor aproximação.

No presente trabalho, o cálculo das variações seculares para o argumento do pericentro (ω), longitude do nodo ascendente (Ω) e anomalia média (M) é refinado, analisando, além de J_2 e J_4 , os termos quadráticos envolvendo os harmônicos J_2 , J_4 e J_6 do potencial perturbador. Verificamos, novamente, que a influência de considerarmos mais harmônicos no cálculo da variação dos elementos orbitais é maior para o caso de satélites lunares do que para satélites artificiais terrestres, obtendo valores cada vez mais relevantes. Simulações são feitas considerando órbitas prógradas e retrógradas, com altas e baixas excentricidades e inclinações. Os casos de órbitas congeladas e heliossíncronas também são analisados

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Geometria para definição dos elementos orbitais [7].....	14
---	----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - $h = 300 \text{ km}$, $a = 6678.1 \text{ km}$, $e = 0.01$, $i = 30^\circ$	25
Tabela 2 - $h = 350 \text{ km}$, $a = 6728.1 \text{ km}$, $e = 0.01$, $i = 30^\circ$	26
Tabela 3 - $h = 400 \text{ km}$, $a = 6778.1 \text{ km}$, $e = 0.01$, $i = 30^\circ$	26
Tabela 4 - $h = 300 \text{ km}$, $a = 6678.1 \text{ km}$, $e = 0.01$, $i = 100^\circ$	27
Tabela 5 - $h = 350 \text{ km}$, $a = 6728.1 \text{ km}$, $e = 0.01$, $i = 100^\circ$	27
Tabela 6 - $h = 400 \text{ km}$, $a = 6778.1 \text{ km}$, $e = 0.01$, $i = 100^\circ$	27
Tabela 7 - $h = 50 \text{ km}$, $a = 1787.4 \text{ km}$, $e = 0.01$, $i = 30^\circ$	28
Tabela 8 - $h = 100 \text{ km}$, $a = 1837.4 \text{ km}$, $e = 0.01$, $i = 30^\circ$	28
Tabela 9 - $h = 200 \text{ km}$, $a = 1937.4 \text{ km}$, $e = 0.01$, $i = 30^\circ$	29
Tabela 10 - $h = 50 \text{ km}$, $a = 1787.4 \text{ km}$, $e = 0.01$, $i = 100^\circ$	29
Tabela 11 - $h = 100 \text{ km}$, $a = 1837.4 \text{ km}$, $e = 0.01$, $i = 100^\circ$	30
Tabela 12 - $h = 200 \text{ km}$, $a = 1937.4 \text{ km}$, $e = 0.01$, $i = 100^\circ$	30

LISTA DE SÍMBOLOS

- G - Constante Gravitacional Universal
- μ - constante gravitacional
- P_1 - corpo 1
- P_2 - corpo 2
- m_1 - massa de P_1
- m_2 - massa de P_2
- r - módulo da distância entre dois corpos
- \vec{r}_1 - aceleração do corpo P_1
- \vec{r}_2 - aceleração do corpo P_2
- m_{sat} - massa do satélite artificial
- a - semi-eixo maior de uma órbita elíptica
- e - excentricidade de uma órbita elíptica
- i - inclinação de uma órbita elíptica
- ω - argumento do pericentro de uma órbita elíptica
- Ω - longitude do nodo ascendente de uma órbita elíptica
- τ - instante de passagem do pericentro
- M - anomalia média
- f - anomalia verdadeira
- a_e - raio equatorial do corpo central
- ω_0 - ω inicial de uma órbita elíptica

- Ω_0 - Ω inicial
- M_0 - M inicial
- n - movimento médio de um satélite artificial ou grau dos polinômios e polinômios associados de Legendre
- λ - longitude de um satélite artificial
- h - altitude de um satélite artificial
- ϕ - latitude do satélite
- P_n - polinômios de Legendre
- $P_{n,m}$ - polinômios associados de Legendre
- R - potencial gravitacional
- J_2 - achatamento do corpo central
- C_{22} - harmônico setorial do corpo central
- t - tempo

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	10
DESENVOLVIMENTO.....	12
CONCLUSÕES.....	31
INFORMAÇÕES ADICIONAIS.....	32
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	33

1 INTRODUÇÃO

Satélites artificiais são utilizados em diversas aplicações úteis à humanidade, tais como: comunicação, navegação, sensoriamento remoto, meteorologia, observação de corpos celestes, entre muitas outras. Para garantir o sucesso, e conseqüentemente, eficiência na recepção de dados coletados durante missões espaciais, o movimento orbital de satélites necessita acompanhamento e monitoramento frequente.

Se ignorarmos a existência de perturbações, a determinação temporal da posição e velocidade de um veículo espacial, sujeito exclusivamente à atração gravitacional de um corpo central, em um sistema inercial, cuja origem está no centro de massa do corpo primário, requer a solução de um sistema de três equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Em outras palavras, a resolução de um sistema com seis equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

A solução deste sistema é bastante conhecida e envolve seis constantes de integração dependentes de condições iniciais, denominadas por elementos orbitais keplerianos. Possuem interpretação geométrica e cinemática precisas, pois descrevem órbitas, as quais são cônicas fixas em um plano fixo, e passam pelo pericentro, em um instante fixo, para uma dada época, com semi-eixo maior e excentricidade constantes.

Em geral, para aplicações reais, quando forças perturbativas são consideradas, não é possível obter soluções analíticas exatas para o sistema dinâmico associado ao problema. Recorre-se, então, a métodos perturbativos. Neste caso, os parâmetros que descrevem a órbita não são mais constantes, isto é, são funções do tempo. Ainda, existe outra deficiência associada à modelagem destas forças: o fato de não, necessariamente, derivarem de um potencial. Neste trabalho, consideraremos as forças como conservativas, independente do tipo de perturbação proveniente da distribuição não-uniforme de massa do corpo central.

Para descrever o potencial gravitacional, os polinômios e polinômios associados de Legendre são utilizados. As variações dos elementos orbitais são calculadas a partir das Equações Planetárias de Lagrange e, por fim, aplicações ao movimento de satélites artificiais lunares são feitas.

1.1 OBJETIVOS

Este trabalho possui um caráter comparativo, pois a variação dos elementos orbitais de satélites artificiais lunares obtida através de simulações numéricas, em sua grande maioria, será comparada com a variação ocorrida no movimento de satélites artificiais terrestres, em condições semelhantes. Porém, o objetivo fundamental deste projeto é calcular a variação dos elementos orbitais devido à distribuição não uniforme de massa da Lua. Os resultados e exemplos exibidos para a Terra são tão somente contemplados para provar, de fato, que quando se estuda o movimento de um satélite artificial ao redor da Lua, levando em conta a distribuição não uniforme de massa lunar e os polinômios de Legendre para descrever o potencial, nota-se que a ordem de grandeza de alguns coeficientes associados à ordem e grau dos polinômios não são hierarquicamente proporcionais à ordem e grau dos polinômios, diferentemente do caso da Terra.

2 ETAPAS DESCRITAS ANTERIORMENTE

Como já dito anteriormente em [6], por uma questão de metodologia, o presente trabalho foi subdividido em duas partes: analítica e numérica.

2.1 ETAPA ANALÍTICA

Nos estudos analíticos foram abordados os seguintes tópicos:

- Leis de Kepler (Johannes Kepler, 1571-1630).
- Leis de Newton, Lei da Gravitação Universal, Problema de Dois Corpos, Equações do Movimento (Isaac Newton, 1643-1727).
- Estudo do movimento elíptico em função dos elementos orbitais keplerianos ($a, e, i, \omega, \Omega, \tau$).
- Estudo de forças perturbativas que derivam de um potencial.
- Resolução da Equação de Legendre e da Equação Associada de Legendre.
- Fórmula de Rodrigues, Polinômios de Legendre e Polinômios Associados de Legendre.
- Expansão da expressão do potencial perturbador em função dos elementos orbitais keplerianos.
- Equações Planetárias de Lagrange.
- Órbitas Heliosíncronas.
- Órbitas Congeladas.
- Inclinação Crítica.

2.1.1 PROBLEMA DE DOIS CORPOS

Considerando-se, em um sistema inercial, dois pontos materiais, P_1 e P_2 , de massas, respectivamente, m_1 e m_2 , que se atraem de acordo com a Lei de Gravitação Universal, temos:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{P_1 - P_2}{r} \quad (2.1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{P_2 - P_1}{r} \quad (2.2)$$

A partir dessas equações podemos deduzir a equação vetorial que descreve o movimento de P_2 em relação a P_1 dada por:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.3)$$

2.1.2 ELEMENTOS ORBITAIS

Da mecânica celeste, a posição de um corpo celeste, natural ou artificial, pode ser dada em função dos seis elementos orbitais keplerianos, enunciados abaixo:

- a : semi-eixo maior da órbita;
- e : excentricidade da órbita;
- i : inclinação da órbita em relação ao plano do Equador;
- ω : argumento de pericentro;
- Ω : ascensão reta do nodo ascendente, ou longitude do nodo ascendente;
- M : anomalia média;

O movimento de satélites artificiais ao redor de um corpo central é descrito por uma cônica e, no caso elíptico, pode ser representado da seguinte maneira (vide Figura 1):

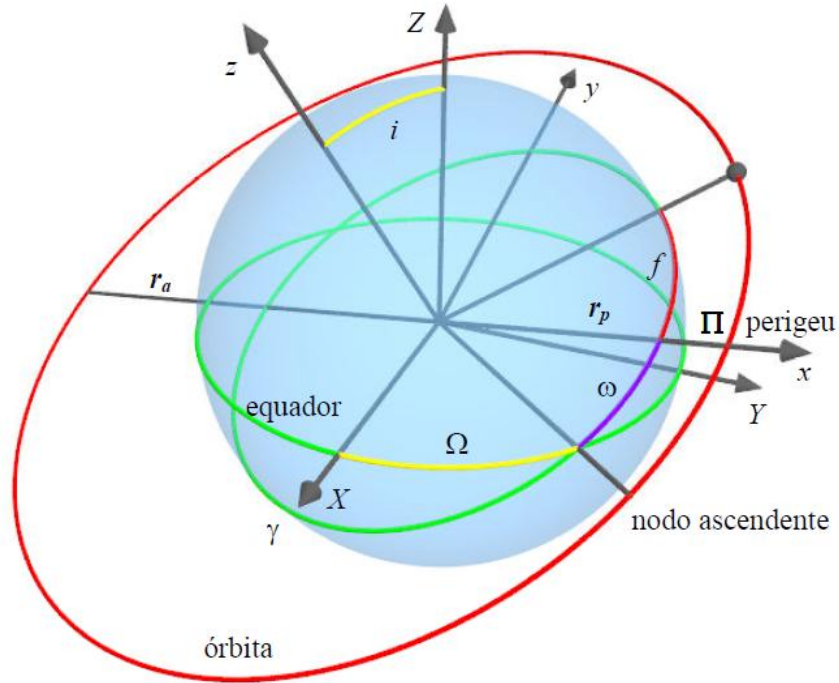


Figura 1 - Geometria para definição dos elementos orbitais [7].

2.1.3 POTENCIAL GRAVITACIONAL

Consideremos um satélite artificial, movimentando-se exclusivamente sob a atração gravitacional de um corpo central, orbitando um corpo com distribuição não uniforme de massa. O potencial gravitacional considerado, expresso em termos de coeficientes harmônicos esféricos, é dado por [10]:

$$R = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_n a_e^n}{r^n} P_n(\sin \phi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{J_{n,m} a_e^n}{r^n} P_{n,m}(\sin \phi) \cos m(\lambda - \lambda_{n,m}) \right] \quad (2.4)$$

Em que n e m são, respectivamente, o grau e a ordem do polinômio associado de Legendre, μ é a constante gravitacional, a_e é o raio equatorial do corpo central considerado. $P_{n,m}$ são os polinômios associados de Legendre. r é o raio vetor (distância entre o satélite e o centro de massa do corpo com distribuição não uniforme de massa). O ângulo ϕ é a latitude do satélite, λ é a longitude; J_n , $J_{n,m}$ e $\lambda_{n,m}$ são características do corpo central. Tal potencial

pode ser expresso em termos dos elementos orbitais do satélite [10]. Os elementos orbitais métricos do satélite artificial (a , e , i) são introduzidos através de r . As variáveis angulares (ω , Ω , M) são introduzidas usando trigonometria esférica. f é a anomalia verdadeira:

$$\text{sen}(\phi) = \text{sen}(i)\text{sen}(f + \omega) \quad (2.5)$$

2.1.4 EQUAÇÕES PLANETÁRIAS DE LAGRANGE

As equações planetárias de Lagrange (Joseph Louis Lagrange, 1736-1813) são um sistema de seis equações diferenciais acopladas extremamente importantes no estudo dos corpos celestes, pois, através delas, é possível determinar a velocidade e a localização de um corpo em uma órbita elíptica em um dado instante. São dadas por [10]:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} \quad (2.6)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \omega} \quad (2.7)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{-1}{na^2\sqrt{1-e^2}\text{sen}i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\text{sen}i} \frac{\partial R}{\partial \omega} \quad (2.8)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\text{sen}i} \frac{\partial R}{\partial i} \quad (2.9)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\text{sen}i} \frac{\partial R}{\partial i} \quad (2.10)$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} \quad (2.11)$$

Sendo R a função perturbadora, que em particular, para este projeto, é o potencial gravitacional. As equações utilizadas para a análise da variação dos elementos angulares (ω , Ω , M), no presente trabalho, serão descritas a seguir.

Substituindo o potencial dado pela equação 2.4 em 2.9, 2.10 e 2.11 respectivamente, considerando apenas os termos seculares até a ordem de J_2 , temos as seguintes expressões para as variações dos elementos angulares [10]:

$$\omega = n_\omega t + \omega_0 = \left(nJ_2 \left(\frac{a_e}{a} \right)^2 \frac{1}{(1-e^2)^2} \left(-\frac{3}{5} + \frac{15}{4} \cos^2 i \right) \right) t + \omega_0 \quad (2.12)$$

$$\Omega = n_\Omega t + \Omega_0 = \left(-nJ_2 \left(\frac{a_e}{a} \right)^2 \frac{1}{(1-e^2)^2} \frac{3}{2} \cos i \right) t + \Omega_0 \quad (2.13)$$

$$M = nt + n_M t + M_0 = nt + \left(3nJ_2 \left(\frac{a_e}{a} \right)^2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 i \right) (1-e^2)^{-\frac{3}{2}} \right) t + M_0 \quad (2.14)$$

Embora não haja perturbações seculares para elementos métricos (a , e , i), quando se considera no potencial gravitacional apenas harmônicos zonais pares, as perturbações periódicas em tais elementos provocadas pelos outros harmônicos, aqui não consideradas, são importantes para missões envolvendo satélites lunares baixos.

2.1.5 INCLINAÇÃO CRÍTICA

A inclinação crítica é calculada para analisar órbitas congeladas, ou seja, órbitas que mantêm ou tentam manter o pericentro (ω) e a excentricidade da órbita (e) constantes, de forma que, para uma determinada latitude, o satélite passa sempre com a mesma altitude, beneficiando alguns tipos de missões espaciais. As condições para uma órbita ser congelada são:

$$d\omega/dt = 0 \quad (2.15)$$

$$de/dt = 0 \quad (2.16)$$

$$di/dt = 0 \quad (2.17)$$

Considere o problema de um satélite artificial lunar com baixa altitude (h), levando em conta o achatamento (J_2) e o termo setorial C_{22} da Lua. Eliminando os termos de curto período, temos que o potencial perturbador de primeira ordem, somente contendo elementos de longo período, é dado por [4]:

$$R = \frac{1}{8} n^2 (6\varepsilon \cos^2(i) - 3\varepsilon e^2 - 2\varepsilon - 18\delta \cos(2\Omega)e^2 + 18\delta \cos(2\Omega)e^2 \cos^2(i) - 12\delta \cos(2\Omega) + 12\delta \cos(2\Omega) \cos^2(i) + 9\varepsilon \cos^2(i)e^2) \quad (2.18)$$

Levando em conta 2.18, a equação para a inclinação crítica é encontrada. De fato, substituindo 2.18 em 2.9 e resolvendo $d\omega/dt = 0$, obtemos:

$$\cos^2(i) = \frac{-\varepsilon + 6\delta \cos(2\Omega)}{5(-\varepsilon + 2\delta \cos(2\Omega))} \quad (2.19)$$

Em que: $\varepsilon = J_2 a_e^2$ e $\delta = C_{22} a_e^2$

2.6 ÓRBITAS HELIOSSÍNCRONAS

Em uma órbita heliossíncrona o satélite viaja do pólo norte ao pólo sul e vice-versa, mas o seu plano da órbita é sempre fixo para um observador postado no Sol. Assim, o satélite sempre passa, aproximadamente, sobre o mesmo ponto da superfície da Lua, todos os dias na mesma hora. Desta forma, ele pode transmitir todos os dados coletados para uma antena fixa lunar durante suas órbitas. Órbitas heliossíncronas são comumente utilizadas por satélites com finalidade de sensoriamento remoto.

Quando consideramos o efeito de J_2 , a longitude do nodo ascendente (Ω), devido à não esfericidade lunar, é dada por (Park e Junkins, 1995):

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3 J_2 a_e^2 n \cos(i)}{2 a^2 (1-e^2)^2} \quad (2.20)$$

A Lua gira à uma taxa angular de cerca de 360° por 27,32 dias, enquanto a Terra gira a uma velocidade angular de cerca de 360° por dia [4]. O período orbital da Lua é aproximadamente 27,32 (tempo que a Lua leva para dar uma revolução completa em torno da Terra) e o período orbital da Terra (tempo que a Terra leva para dar uma revolução completa em torno do Sol) é aproximadamente 365,26 dias. Então, para um órbita heliosíncrona, temos, em dias lunares:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \left(\frac{27,35}{365,26} \right) 360^\circ / \text{dia lunar} \quad (2.21)$$

Ou seja,

$$\frac{d\Omega}{dt} = 26,92657^\circ / \text{dia lunar} \quad (2.22)$$

Tomando 2.18 e substituindo em 2.10 para calcular a variação da longitude do nodo ascendente (Ω), obtemos:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{\varepsilon n}{a^2 (1-e^2)^2} \cos(i) + \frac{3n\delta}{2a^2(\sqrt{1-e^2})} \cos(i) \left[(2+3e^2) \cos(2\Omega) \right] \quad (2.23)$$

Usando 2.22 e 2.23, obtemos uma equação para calcular a inclinação de órbitas heliosíncronas para satélites lunares de baixa altitude (h):

$$i_s = \pi - \arccos \left[\frac{1.327307409 \cdot 10^{-7} a^2 (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{n(\varepsilon + \delta(-2 - e^2 + 3e^4) \cos(2\Omega))} \right] \quad (2.24)$$

Em que: $\varepsilon = J_2 a_e^2$ e $\delta = C_{22} a_e^2$

2.2 SIMULAÇÕES

Para as simulações foram implementados os seguintes programas:

- Programa para o cálculo da variação secular dos elementos angulares - $n_\omega(\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{i})$, $n_\Omega(\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{i})$, $n_M(\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{i})$ - levando em conta os harmônicos J_2 e J_4 , para vários casos testes (satélites terrestres e satélites lunares).
- Programa para o cálculo da variação da inclinação crítica de órbitas congeladas de satélites terrestres em função da variação da longitude do nodo ascendente, $n_{ic}(\mathbf{\Omega})$, levando em conta a ação dos harmônicos J_2 e C_{22} .
- Programa para o cálculo da variação da inclinação de órbitas heliosíncronas de satélites terrestres em função da variação da longitude do nodo ascendente, $n_i(\mathbf{\Omega})$, levando em conta a ação dos harmônicos J_2 e C_{22} .

Todas as rotinas descritas acima foram implementadas em Scilab, versão livre do *software* Matlab.

3 ETAPA ANALÍTICA

Através da análise da variação secular dos elementos orbitais angulares - $n_\omega(\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{i})$, $n_\Omega(\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{i})$, $n_M(\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{i})$ - levando em conta os harmônicos J_2 e J_4 , obtida em [6], notamos, com o auxílio da literatura, que esta variação poderia ser melhorada, tanto para o caso de satélites artificiais terrestres, quanto para o de satélites artificiais lunares. Em [1], encontramos algumas informações que nos ajudaram obter valores mais refinados dos que os obtidos anteriormente.

Os valores obtidos para $n_\omega(\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{i})$, $n_\Omega(\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{i})$, $n_M(\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{i})$, levando em conta somente J_2 na expressão do potencial perturbador, cujas expressões para as variações são encontradas em [10] e são dadas pelas equações 2.12, 2.13 e 2.14, não sofreram alterações. Quando consideramos J_2 e J_4 no potencial gravitacional, as expressões utilizadas para recalcularmos estas variações são dadas por [1]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{\text{sec}} &= nJ_2 \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \left(\frac{1}{(1-e^2)^2}\right) \frac{3}{4} (4 - 5 \sin(i)^2) + \\ &nJ_2^2 \left(\frac{a_e}{a}\right)^4 \left(\frac{1}{(1-e^2)^4}\right) \frac{9}{384} [10 \sin(i)^2 (76 - 89 \sin(i)^2) + (56 - 36 \sin(i)^2 - 45 \sin(i)^4) e^2] + \quad (2.25) \\ &nJ_4 \left(\frac{a_e}{a}\right)^4 \left(\frac{1}{(1-e^2)^4}\right) \frac{15}{32} \left[(16 - 62 \sin(i)^2 + 49 \sin(i)^4) + \left(18 - 63 \sin(i)^2 + \frac{189}{4} \sin(i)^4\right) e^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{\text{sec}} &= -nJ_2 \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \left(\frac{1}{(1-e^2)^2}\right) \frac{3}{2} \cos(i) + \\ &nJ_2^2 \left(\frac{a_e}{a}\right)^4 \left(\frac{1}{(1-e^2)^4}\right) \frac{3}{32} \cos(i) [(12 - 80 \sin(i)^2) - (4 + 15 \sin(i)^2) e^2] + \quad (2.26) \\ &nJ_4 \left(\frac{a_e}{a}\right)^4 \left(\frac{1}{(1-e^2)^4}\right) \frac{15}{32} \cos(i) [(4 - 7 \sin(i)^2)(2 + 3e^2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dM}{dt}\right)_{\text{sec}} &= n + nJ_2 \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \left(\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \frac{3}{4} (2 - 3\sin(i)^2) + \\
&nJ_2^2 \left(\frac{a_e}{a}\right)^4 \left(\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{9}{2}}}\right) \frac{9}{96}. \tag{2.27} \\
&\left[(100\sin(i)^2 - 131\sin(i)^4) + (20 - 98\sin(i)^2 + 67\sin(i)^4)e^2 - \frac{1}{16}(280 - 328\sin(i)^2 - 79\sin(i)^4)e^4 \right] - \\
&nJ_4 \left(\frac{a_e}{a}\right)^4 \left(\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{7}{2}}}\right) \frac{45}{128} [(8 - 40\sin(i)^2 + 35\sin(i)^4)e^2]
\end{aligned}$$

Foram obtidas $n_\omega(\mathbf{a}, \mathbf{e}, i)$, $n_\Omega(\mathbf{a}, \mathbf{e}, i)$ e $n_M(\mathbf{a}, \mathbf{e}, i)$, considerando J_2 , J_4 e J_6 na expressão do potencial. Estas variações são dadas por [1]:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{\text{sec}} &= nJ_2 \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \left(\frac{1}{(1-e^2)^2}\right) \frac{3}{4} (4 - 5\sin(i)^2) + \\
&nJ_2^2 \left(\frac{a_e}{a}\right)^4 \left(\frac{1}{(1-e^2)^4}\right) \frac{9}{384} [10\sin(i)^2(76 - 89\sin(i)^2) + (56 - 36\sin(i)^2 - 45\sin(i)^4)e^2] + \\
&nJ_4 \left(\frac{a_e}{a}\right)^4 \left(\frac{1}{(1-e^2)^4}\right) \frac{15}{32} \left[(16 - 62\sin(i)^2 + 49\sin(i)^4) + \left(18 - 63\sin(i)^2 + \frac{189}{4}\sin(i)^4\right)e^2 \right] + \tag{2.28} \\
&nJ_6 \left(\frac{a_e}{a}\right)^6 \left(\frac{1}{(1-e^2)^6}\right) \frac{525}{64} \left[\frac{1}{20} (32 - 256\sin(i)^2 + 516\sin(i)^4 - 297\sin(i)^6) + \right. \\
&\left. \frac{1}{4} (24 - 172\sin(i)^2 + 327\sin(i)^4 - 363\sin(i)^6)e^2 + \right. \\
&\left. \frac{1}{32} (64 - 432\sin(i)^2 + 792\sin(i)^4 - 429\sin(i)^6)e^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{\text{sec}} &= -nJ_2\left(\frac{a_e}{a}\right)^2\left(\frac{1}{(1-e^2)^2}\right)\frac{3}{2}\cos(i) + \\
&nJ_2^2\left(\frac{a_e}{a}\right)^4\left(\frac{1}{(1-e^2)^4}\right)\frac{3}{32}\cos(i)\left[\left(12-80\sin(i)^2\right)-\left(4+15\sin(i)^2\right)e^2\right] + \\
&nJ_4\left(\frac{a_e}{a}\right)^4\left(\frac{1}{(1-e^2)^4}\right)\frac{15}{32}\cos(i)\left[\left(4-7\sin(i)^2\right)\left(2+3e^2\right)\right] - \\
&nJ_6\left(\frac{a_e}{a}\right)^6\left(\frac{1}{(1-e^2)^6}\right)\frac{105}{1024} \cdot \\
&\cos(i)\left[\left(8-36\sin(i)^2+33\sin(i)^4\right)\left(8+20e^2+15e^4\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dM}{dt}\right)_{\text{sec}} &= n + nJ_2\left(\frac{a_e}{a}\right)^2\left(\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{3}{4}\left(2-3\sin(i)^2\right) + \\
&nJ_2^2\left(\frac{a_e}{a}\right)^4\left(\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{9}{2}}}\right)\frac{9}{96}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}
&\left[\left(100\sin(i)^2-131\sin(i)^4\right)+\left(20-98\sin(i)^2+67\sin(i)^4\right)e^2-\frac{1}{16}\left(280-328\sin(i)^2-79\sin(i)^4\right)e^4\right] - \\
&nJ_4\left(\frac{a_e}{a}\right)^4\left(\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{7}{2}}}\right)\frac{45}{128}\left[\left(8-40\sin(i)^2+35\sin(i)^4\right)e^2\right] - \\
&nJ_6\left(\frac{a_e}{a}\right)^6\left(\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{11}{2}}}\right)\frac{35}{2048}\left[\left(16-168\sin(i)^2+189\sin(i)^4-231\sin(i)^6\right)\left(8-20e^2-15e^4\right)\right]
\end{aligned}$$

3.1 CONTRIBUIÇÃO DOS TERMOS DE LONGO PERÍODO NA VARIÇÃO DE Ω

O potencial perturbador para satélites lunares incluindo termos seculares de curto e longo período é dado por [4]:

$$R = H_{20} + H_{22} \tag{2.31}$$

Em que,

$$H_{20} = \frac{3}{8} J_2 a_e^2 \left[\begin{aligned} & \left((5e^2 - 2)\cos(i)^2 + 2 - 5e^2 \right) \cos(2\omega + 3M) + (7e - 7e\cos(i)^2) \cos(2\omega + 3M) + \\ & \left(-17e^2 \cos(i)^2 + 17e^2 \right) \cos(2\omega + 4M) + (-e + e\cos(i)^2) \cos(2\omega + M) + \\ & 9 \left(\cos(i)^2 - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{3} e \cos(M) + \frac{1}{3} e^2 + e^2 \cos(2M) \right) \end{aligned} \right] n^2$$

(2.32)

e

$$H_{22} = -\frac{45}{16} C_{22} a_e^2 n^2.$$

$$\left[\begin{aligned} & \left(e^2 - \frac{2}{5} \right) (\cos(i) - 1)^2 \cos(2M + 2\omega - 2\Omega) - \frac{1}{3} (\cos(i) + 1)^2 \left(e^2 - \frac{2}{5} \right) \cos(2M - 2\omega - 2\Omega) \\ & + (\cos(i) + 1)^2 \left(e^2 - \frac{2}{5} \right) \cos(2M + 2\omega + 2\Omega) - \frac{1}{3} \left(e^2 - \frac{2}{5} \right) (\cos(i) - 1)^2 \cos(2M - 2\omega + 2\Omega) \\ & - \frac{17}{5} e^2 (\cos(i) - 1)^2 \cos(4M + 2\omega - 2\Omega) - \frac{7}{5} e (\cos(i) - 1)^2 \cos(3M + 2\omega - 2\Omega) \\ & + \frac{17}{15} e^2 (\cos(i) + 1)^2 \cos(4M - 2\omega - 2\Omega) + \frac{7}{15} e (\cos(i) + 1)^2 \cos(3M - 2\omega - 2\Omega) \\ & - \frac{7}{5} e (\cos(i) + 1)^2 \cos(3M + 2\omega + 2\Omega) - \frac{17}{5} e^2 (\cos(i) + 1)^2 \cos(4M + 2\omega + 2\Omega) \\ & + \frac{7}{15} e (\cos(i) - 1)^2 \cos(3M - 2\omega + 2\Omega) + \frac{17}{15} e^2 (\cos(i) - 1)^2 \cos(4M - 2\omega + 2\Omega) \\ & - \frac{1}{15} e (\cos(i) + 1)^2 \cos(M - 2\omega - 2\Omega) + \frac{1}{5} e (\cos(i) - 1)^2 \cos(M + 2\omega - 2\Omega) \\ & + \frac{1}{5} e (\cos(i) + 1)^2 \cos(M + 2\omega + 2\Omega) - \frac{1}{15} e (\cos(i) - 1)^2 \cos(M - 2\omega + 2\Omega) \\ & - \frac{2}{3} \sin(i)^2 \left(e^2 - \frac{2}{5} \right) \cos(-2\omega + 2M) + \frac{9}{5} e^2 \cos(2M - 2\Omega) \\ & - \frac{7}{5} e \cos(-2\omega + 3M) + \frac{1}{5} e \cos(-2\omega + M) + \frac{9}{5} e^2 \cos(2M + 2\Omega) + \frac{6}{5} \cos(2\Omega) e^2 \\ & + \frac{4}{5} \cos(2\Omega) - \frac{17}{5} e^2 \cos(-2\omega + 4M) + \frac{6}{5} e \cos(M + 2\Omega) + \frac{6}{5} e \cos(M - 2\Omega) \end{aligned} \right]$$

(2.33)

Para eliminarmos os termos de longo período, fazemos:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R dM . \quad (2.34)$$

Note que, como a integral é sobre a anomalia média, M , e tal argumento somente aparece nas funções cosseno em R , e sabendo que

$$\int_0^{2\pi} \cos(\alpha M + \gamma) dM = \left[-\frac{\sin(\alpha M + \gamma)}{\alpha} \right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{\alpha} [\sin(2\pi + \gamma) - \sin(\gamma)] = 0, \quad (2.35)$$

para $\alpha \in \mathbb{Z}$, temos que integral somente terá os termos que, originalmente em R , não dependem de M . Em outras palavras, na expressão 2.31 podemos zerar todos os termos que dependem da anomalia média. Assim, a contribuição dos termos seculares e de longo período na variação de Ω é dada pela integração da equação 2.10, em relação ao tempo:

$$\Omega = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \int \frac{\partial R}{\partial i} dt + \Omega_0 \quad (2.36)$$

Vemos assim que as inclinações para órbitas heliosíncronas obtidas na equação 2.24 vão ser afetadas.

4 ETAPA DE SIMULAÇÕES

Uma nova rotina computacional foi implementada para obtermos estas novas variações de ω , Ω , M em função do tempo, para o caso terrestre e lunar, considerando J_2 , J_4 . E posteriormente, outra rotina computacional também foi implementada para obtermos as variações de ω , Ω , M em função do tempo, considerando os harmônicos zonais pares da ordem de até J_6 na expressão do potencial gravitacional para o caso terrestre e lunar.

5 RESULTADOS

Vamos, agora, portanto, apresentar os resultados obtidos através dos programas descritos na seção anterior.

5.1 CASO TERRESTRE

Considere o seguinte sistema: **Terra + Satélite Artificial Terrestre**.

Órbitas Prógradas

As Tabelas 1, 2 e 3 mostram a variação secular dos elementos keplerianos angulares para $(n_\omega, n_\Omega, n_M)$, em órbitas prógradas ($i = 30$ graus para estas simulações) de satélites terrestres, levando em conta os harmônicos J_2 , J_4 e J_6 na expressão do potencial gravitacional. Para cada caso teste foi utilizado um valor de semi-eixo maior (a) diferente: 6678.1 km, 6728.1 km, 6778.1 km, respectivamente, como está descrito nas tabelas a seguir.

Tabela 1: $h = 300$ km, $a = 6678.1$ km, $e = 0.01$, $i = 30^\circ$.

Satélite Artificial Terrestre			
Termos	n_ω - (Graus/s)	n_Ω - (Graus/s)	n_M - (Graus/s)
J_2	0.0001350153	-0.0000850376	0.0663426725
J_2, J_4	0.0001350664	-0.0000852465	0.0663427744
J_2, J_4, J_6	0.0001350174	-0.0000852670	0.0663428405

Tabela 2: $h = 350$ km, $a = 6728.1$ km, $e = 0.01$, $i = 30^\circ$.

Satélite Artificial Terrestre			
Termos	n_ω - (Graus/s)	n_Ω - (Graus/s)	n_M - (Graus/s)
J_2	0.0001315360	-0.0000828462	0.0656036093
J_2, J_4	0.0001315850	-0.0000830467	0.0656037072
J_2, J_4, J_6	0.0001315387	-0.0000830661	0.0656037697

Tabela 3: $h = 400$ km, $a = 6778.1$ km, $e = 0.01$, $i = 30^\circ$.

Satélite Artificial Terrestre			
Termos	n_ω - (Graus/s)	n_Ω - (Graus/s)	n_M - (Graus/s)
J_2	0.0001281712	-0.0000807269	0.0648781735
J_2, J_4	0.0001282182	-0.0000809194	0.0648782674
J_2, J_4, J_6	0.0001281744	-0.0000809377	0.0648783266

Órbitas Retrógradas

As Tabelas 4, 5 e 6 mostram a variação secular dos elementos keplerianos angulares para (n_ω , n_Ω , n_M), em órbitas prógradas ($i = 100$ graus para estas simulações) de satélites terrestres, levando em conta os harmônicos J_2 , J_4 e J_6 na expressão do potencial gravitacional. Para cada caso teste foi utilizado um valor de semi-eixo maior (a) diferente: 6678.1 km, 6728.1 km, 6778.1 km, respectivamente, como está descrito nas tabelas a seguir.

Tabela 4: $h = 300$ km, $a = 6678.1$ km, $e = 0.01$, $i = 100^\circ$.

Satélite Artificial Terrestre			
Termos	n_ω - (Graus/s)	n_Ω - (Graus/s)	n_M - (Graus/s)
J_2	-0.0000416943	0.0000170510	0.0662366520
J_2, J_4	-0.0000419298	0.0000170786	0.0662364930
J_2, J_4, J_6	-0.0000419515	0.0000170946	0.0662371617

Tabela 5: $h = 350$ km, $a = 6728.1$ km, $e = 0.01$, $i = 100^\circ$.

Satélite Artificial Terrestre			
Termos	n_ω - (Graus/s)	n_Ω - (Graus/s)	n_M - (Graus/s)
J_2	-0.0000406198	0.0000166116	0.0655003210
J_2, J_4	-0.0000408459	0.0000166381	0.0655001684
J_2, J_4, J_6	-0.0000408664	0.0000166532	0.0655008006

Tabela 6: $h = 400$ km, $a = 6778.1$ km, $e = 0.01$, $i = 100^\circ$.

Satélite Artificial Terrestre			
Termos	n_ω - (Graus/s)	n_Ω - (Graus/s)	n_M - (Graus/s)
J_2	-0.0000395807	0.0000161867	0.0647775274
J_2, J_4	-0.0000397977	0.0000162121	0.0647773809
J_2, J_4, J_6	-0.0000398172	0.0000162264	0.0647779790

5.2 CASO LUNAR

Considere o seguinte sistema: **Lua + Satélite Artificial Lunar**

Órbitas Prógradas

As Tabelas 7, 8 e 9 mostram a variação secular dos elementos keplerianos angulares para $(n_\omega, n_\Omega, n_M)$, em órbitas prógradas ($i = 30$ graus para estas simulações) de satélites terrestres, levando em conta os harmônicos J_2 , J_4 e J_6 na expressão do potencial gravitacional. Para cada caso teste foi utilizado um valor de semi-eixo maior (a) diferente: 1787.4 km, 1837.4 km, 1937.4 km, respectivamente, como está descrito nas tabelas a seguir.

Tabela 7: $h = 50$ km, $a = 1787.4$ km, $e = 0.01$, $i = 30^\circ$.

Satélite Artificial Lunar			
Termos	n_ω - (Graus/s)	n_Ω - (Graus/s)	n_M - (Graus/s)
J_2	0.0000210341	-0.0000132481	0.0531092548
J_2, J_4	0.0000202806	-0.0000140804	0.0531092579
J_2, J_4, J_6	0.0000220388	-0.0000133437	0.0531068843

Tabela 8: $h = 100$ km, $a = 1837.4$ km, $e = 0.01$, $i = 30^\circ$.

Satélite Artificial Lunar			
Termos	n_ω - (Graus/s)	n_Ω - (Graus/s)	n_M - (Graus/s)
J_2	0.0000190980	-0.0000120286	0.0509557353
J_2, J_4	0.0000184506	-0.0000127438	0.0509557380
J_2, J_4, J_6	0.0000198801	-0.0000121447	0.0509538080

Tabela 9: $h = 200$ km, $a = 1937.4$ km, $e = 0.01$, $i = 30^\circ$.

Satélite Artificial Lunar			
Termos	n_ω - (Graus/s)	n_Ω - (Graus/s)	n_M - (Graus/s)
J_2	0.0000158648	-0.0000099922	0.0470611199
J_2, J_4	0.0000153810	-0.0000105265	0.0470611219
J_2, J_4, J_6	0.0000163417	-0.0000101240	0.0470598249

Órbitas Retrógradas

As Tabelas 10, 11 e 12 mostram a variação secular dos elementos keplerianos angulares para $(n_\omega, n_\Omega, n_M)$, em órbitas prógradas ($i = 100$ graus para estas simulações) de satélites terrestres, levando em conta os harmônicos J_2 , J_4 e J_6 na expressão do potencial gravitacional. Para cada caso teste foi utilizado um valor de semi-eixo maior (a) diferente: 1787.4 km, 1837.4 km, 1937.4 km, respectivamente, como está descrito nas tabelas a seguir.

Tabela 10: $h = 50$ km, $a = 1787.4$ km, $e = 0.01$, $i = 100^\circ$.

Satélite Artificial Lunar			
Termos	n_ω - (Graus/s)	n_Ω - (Graus/s)	n_M - (Graus/s)
J_2	-0.0000064956	0.0000026564	0.0530927378
J_2, J_4	-0.0000069179	0.0000024519	0.0530927330
J_2, J_4, J_6	-0.0000061381	0.0000018783	0.0530687407

Tabela 11: $h = 100$ km, $a = 1837.4$ km, $e = 0.01$, $i = 100^\circ$.

Satélite Artificial Lunar			
Termos	n_ω - (Graus/s)	n_Ω - (Graus/s)	n_M - (Graus/s)
J_2	-0.0000058977	0.0000024119	0.0509407387
J_2, J_4	-0.0000062605	0.0000022362	0.0509407346
J_2, J_4, J_6	-0.0000056265	0.0000017698	0.0509212268

Tabela 12: $h = 200$ km, $a = 1937.4$ km, $e = 0.01$, $i = 100^\circ$.

Satélite Artificial Lunar			
Termos	n_ω - (Graus/s)	n_Ω - (Graus/s)	n_M - (Graus/s)
J_2	-0.0000048992	0.0000020036	0.0470486621
J_2, J_4	-0.0000051703	0.0000018723	0.0470486591
J_2, J_4, J_6	-0.0000047442	0.0000015589	0.0470355494

5 CONCLUSÕES

Comparando os dois sistemas – **Terra + Satélite Artificial Terrestre e Lua + Satélite Artificial Lunar** - verificamos que a influência de considerarmos mais harmônicos no cálculo da variação dos elementos keplerianos angulares é maior para o caso de satélites lunares do que para satélites artificiais terrestres. Se analisarmos as tabelas da Seção 4, percebemos que à medida que vamos adicionando mais harmônicos à expressão do potencial, as variações dos elementos orbitais angulares no caso lunar vão se tornando cada vez mais significativas, diferentemente do caso da Terra. É claro que Terra e Lua são corpos completamente distintos, conseqüentemente os sistemas **Terra + Satélite Artificial Terrestre e Lua + Satélite Artificial Lunar** também são completamente distintos, mas sob condições semelhantes, podemos mensurar essas variações e compará-las. Por exemplo, se observarmos a Tabela 1, notamos que n_ω no caso terrestre, sofre alterações em sua sétima casa decimal, enquanto que, no caso lunar, n_ω sofre alterações em sua quinta casa decimal, o que é muito mais expressivo.

Portanto, esse tipo de análise é extremamente importante para o sucesso de missões espaciais lunares. É essencial medirmos estas variações, pois, assim, temos condições de corrigir órbitas de satélites lunares, fazendo com que estas se aproximem mais da modelagem do problema real.

6 INFORMAÇÕES ADICIONAIS

Resultados preliminares deste trabalho foram apresentados no Seminário de Iniciação Científica e Iniciação em Desenvolvimento Tecnológico e Inovação - SICINPE/2013. Tal trabalho foi merecedor de Menção Honrosa pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE e foi homenageado durante a cerimônia de comemoração dos 52 anos do instituto.

- Link para o resumo publicado nos anais do SICINPE/2013:

<http://www.inpe.br/bolsas/sicinpe/arquivos/LIVRO\ DE\ RESUMOS.pdf>

Resultados parciais deste trabalho também foram apresentados oralmente no XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente/SBAI 2013 - Conferência Brasileira em Dinâmica, Controle e Aplicações/DINCON 2013, Fortaleza - CE.

- Link para o artigo publicado nos anais do SBAI/DINCON 2013:

<http://www.sbai2013.ufc.br/pdfs/8199.pdf>

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BLITZER, L. Handbook of Orbital Perturbation, University of Arizona, 1970.
- [2] CARVALHO, J. P. S., VILHENA DE MORAES, R., PRADO, A. F. B. A. Planetary Satellite Orbiters: Applications for the Moon. Mathematical Problems in Engineering, doi: 10.1155/2011/187478, 2011.
- [3] CARVALHO, J. P. S., VILHENA DE MORAES, R., PRADO, A. F. B. A. Some orbital characteristics of lunar artificial satellites. Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy, vol. 108, n° 4, pp. 371-388, 2010.
- [4] CARVALHO, J. P. S., VILHENA DE MORAES, R., PRADO, A. F. B. A. Nonsphericity of the Moon and Near Sun-Synchronous Polar Lunar Orbits. Mathematical Problems in Engineering, doi: 10.1155/2009/740460, 2009.
- [5] CHEN, J. Y., NING, J. S., ZHANG, C. Y., LOU, J. On the determination of lunar gravity field in the Chinese first lunar prospector mission. Chinese Journal of Geophysics, vol. 48, n° 2, pp. 275-281, 2005.
- [6] COSTA, M. L. G. T. X. Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica, Cálculo da Variação dos Elementos Orbitais de Satélites Lunares Devido à Distribuição não Uniforme de Massa da Lua, INPE, São José dos Campos, São Paulo, 2013.
- [7] KUGA, H. K., RAO, K. R., CARRARA, V. Introdução à Mecânica Orbital, 2ª Edição, INPE, S. J. Campos - SP, 2008.
- [8] KUGA, H. K., RAO, K. R., CARRARA, V. Satélites Artificiais, Movimento Orbital, 1ª Edição, INPE, S. J. Campos - SP, 2000.
- [9] LEIMOINE, F., KENYON, S., FACTOR, J., TRIMMER, R., PAVLIS, N., CHINN, D., COX, C., KLOSKO, S., LUTHCKE, S., TORRENCE, M., WANG, Y., WILLIAMSON, E., RAPP, R., OLSON, T. The development of the joint NASA – GSFC and the NIMA Geopotential Model EGM 96. NASA/TP –206861. 1998.
- [10] MORANDO, M. B. Mouvement d'un satellite artificiel de la Terre. Gordon & Breach, Paris, 1974.