



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

sid.inpe.br/mtc-m21b/2014/12.19.14.49-TDI

**CONDIÇÕES DE CONTORNO NÃO REFLEXIVAS  
PARA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ALTA ORDEM DE  
INSTABILIDADE DE KELVIN-HELMHOLTZ EM  
ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL**

Jhonatan Andrés Aguirre Manco

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Combustão e Propulsão, orientada pelo Dr. Marcio Teixeira de Mendonça, aprovada em 09 de dezembro de 2014.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3HFHNPP>>

INPE  
São José dos Campos  
2014

**PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

**COMISSÃO DO CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO  
DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (DE/DIR-544):****Presidente:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

**Membros:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Dr. Amauri Silva Montes - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espaciais (ETE)

Dr. André de Castro Milone - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas  
(CEA)

Dr. Joaquim José Barroso de Castro - Centro de Tecnologias Espaciais (CTE)

Dr. Manoel Alonso Gan - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos  
(CPT)

Dr<sup>a</sup> Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

**BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

**REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Maria Tereza Smith de Brito - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

**EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Maria Tereza Smith de Brito - Serviço de Informação e Documentação (SID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

sid.inpe.br/mtc-m21b/2014/12.19.14.49-TDI

**CONDIÇÕES DE CONTORNO NÃO REFLEXIVAS  
PARA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ALTA ORDEM DE  
INSTABILIDADE DE KELVIN-HELMHOLTZ EM  
ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL**

Jhonatan Andrés Aguirre Manco

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Combustão e Propulsão, orientada pelo Dr. Marcio Teixeira de Mendonça, aprovada em 09 de dezembro de 2014.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3HFHNPP>>

INPE  
São José dos Campos  
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Manco, Jhonatan Andrés Aguirre.

M312c Condições de Contorno não Reflexivas para Simulação Numérica de Alta Ordem de Instabilidade de Kelvin-Helmholtz em escoamento Compressível / Jhonatan Andrés Aguirre Manco. – São José dos Campos : INPE, 2014.

xvi + 115 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21b/2014/12.19.14.49-TDI)

Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Combustão e Propulsão) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2014.

Orientador : Dr. Marcio Teixeira de Mendonça.

1. Estabilidade hidrodinâmica. 2. Condições de fronteira não reflexivas. 3. Estabilidade da camada de mistura. 4. Equações de Euler. 5. Métodos numéricos de alta ordem. I.Título.

CDU 541.123

---



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de **Mestre** em

**Engenharia e Tecnologia  
Espaciais/Combustão e Propulsão**

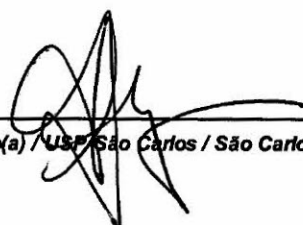
Dr. Marcio Teixeira de Mendonça

  
\_\_\_\_\_  
Presidente / Orientador(a) / IAE/DCTA / SJCampos - SP

Dr. Fernando Fachini Filho

  
\_\_\_\_\_  
Membro da Banca / INPE / Cachoeira Paulista - SP

Dr. Leandro Franco de Souza

  
\_\_\_\_\_  
Convidado(a) / USP São Carlos / São Carlos - SP

**Este trabalho foi aprovado por:**

maioria simples

unanimidade

  
Aluno (a): **Jhonatan Andrés Aguirre Marco**

São José dos Campos, 09 de Dezembro de 2014



## RESUMO

A simulação numérica direta de problemas de estabilidade hidrodinâmica e aerocústica requer do uso de métodos numéricos de baixa dispersão e baixa dissipação. Outra fonte de erros que pode destruir os resultados das simulações numéricas está associada com as reflexões das ondas que saem do domínio. Existe na literatura uma grande quantidade de métodos para eliminar as reflexões nas fronteiras tal como a zona de amortecimento ou condições de fronteira baseadas nas equações características, quando um escoamento compressível é considerado. Esta dissertação considera o uso da metodologia da camada perfeitamente ajustada (PML, de suas siglas em inglês) com uso de esquemas de diferenças finitas e temporais para a solução de escoamentos compressíveis. A técnica PML será avaliada para a simulação de uma camada de mistura para o desenvolvimento da instabilidade de Kelvin-Helmholtz em regime compressível. A PML será comparada em relação a outros métodos de condições de fronteira em termos da efetividade e a eficiência computacional para diferentes problemas. Finalmente um estudo de estabilidade da camada de mistura modificada por escoamentos do tipo jatos e esteiras é realizado, usando o melhor tipo de condição de fronteira avaliado nesta dissertação.

Palavras-chave: PML. DNS. Estabilidade hidrodinâmica . Condições de fronteira não reflexivas. Estabilidade da camada de mistura. escoamento compressível . Equações de Euler. Métodos numéricos de alta ordem.





# NONREFLECTING BOUNDARY CONDITION FOR DIRECT NUMERICAL SIMULATION OF KELVIN-HELMHOLTZ INSTABILITY IN COMPRESSIBLE FLOWS

## ABSTRACT

The direct numerical simulation of hydrodynamic stability problems and aeroacoustics requires the use of low dispersion, low dissipation numerical methods. Another source of errors that may destroy the numerical results are associated with reflections of outgoing waves at the boundaries of the domain. There are many approaches in the literature used to avoid this problem such as the used of buffer domains associated with grid stretching or the method of characteristics when compressible flows are considered. The present investigation considers the use of the perfectly matched layer (PML) technique on a high order finite difference compressible flow solver. The PML technique will be evaluated for the simulation of compressible mixing layer inviscid Kelvin-Helmholtz instability. The performance of the PML technique will be compared to the performance of other boundary condition techniques in terms of effectiveness and computational cost, for different problems. Finally a stability study of the mixed layer modified by jets and wakes is performed, using the best type of boundary condition evaluated in this dissertation.

Keywords: PML. DNS. Hydrodynamic stability. non-reflecting boundary conditions. mixing layer stability. compressible flow. Euler Equations. High order numerical methods.



## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 a)14 Bis b) X-43 . . . . .	3
1.2 Veículo experimental Hipersônico X-51. . . . .	4
1.3 Condições de contorno não reflexivas de amortecimento. . . . .	6
2.1 Truncamento comum em comparação ao truncamento proposto pela condições não reflexivas do tipo PML . . . . .	14
2.2 Comportamento da PML quando é aplicada em uma solução da forma $\exp(ikx)$ . <b>Fonte:</b> (JOHNSON, 2008) . . . . .	16
2.3 a)Relações de dispersão sem transformação temporal I.Ondas de vorticidade e de entropia II.Onda acústica b) Relações de dispersão com transformação temporal I.Ondas de vorticidade e de entropia II.Onda acústica. <b>Fonte:</b> (HU, 2001) . . . . .	29
2.4 Domínio da solução para a equação linear de Euler implementando a PML	32
2.5 Truncamento do domínio usado pela ETA, aplicando o estiramento numérico nas fronteiras do domínio <b>Fonte:</b> (B.; VISBAL, 2003). . . . .	38
3.1 $\bar{\alpha}$ versus $\alpha\Delta x$ para um determinado esquema de diferenças finitas. <b>Fonte:</b> (TAM, 2013) . . . . .	42
3.2 Comportamento da velocidade grupo para um determinado esquema de diferenças finitas. <b>Fonte:</b> (TAM, 2013) . . . . .	43
3.3 Comportamento da velocidade grupo para um esquema otimizado de quarta ordem de 7 pontos e um esquemas, de igual ordem e mesmo número de pontos, central tradicional. <b>Fonte:</b> (TAM, 2013) . . . . .	44
3.4 Discretização temporal Runge-Kutta ordem 4 com diferentes discretizações espaciais para $t=100$ e $t=400$ , com seus respectivos erros absolutos. . . . .	54
3.5 Discretização temporal Runge-Kutta de 6 passos de ordem 4 para operadores não lineares, para as diferentes discretizações espaciais para $t=100$ e $t=400$ , com seus respectivos erros absolutos . . . . .	55
3.6 Discretização temporal Runge-Kutta do tipo lddrk de ordem 4 para as diferentes discretizações espaciais para $t=100$ e $t=400$ , com seus respectivos erros absolutos . . . . .	55
3.7 Discretização temporal múltiplos passos de ordem 4 para as diferentes discretizações espaciais para $t=100$ e $t=400$ , com seus respectivos erros absolutos . . . . .	56
3.8 Discretização temporal: rk com diferentes discretizações espaciais . . . . .	57

3.9	a) Implementação do filtro de ordem 4 para a solução numérica da equação não linear de Euler b) Solução numérica da equação não linear de Euler sem uso de filtro. . . . .	60
4.1	Domínio de solução a equações de Euler com a implementação das condições de fronteira não reflexivas. . . . .	62
4.2	Comparação da pressão e da velocidade $u$ entre a solução analítica, a solução numérica 1 e a solução numérica 2, no ponto $(x, y) = (35, 0)$ ao longo do tempo . . . . .	64
4.3	Comparação dos contornos de pressão entre a solução analítica, a solução numérica 1 e a solução numérica 2, em diferentes tempos da solução da equação linear de Euler. . . . .	65
4.4	Comparação dos contornos de pressão entre a solução analítica, a solução numérica 1 e a solução numérica 2, no tempo $t = 80s$ da solução da equação linear de Euler. A figura b, mostra claramente como é afetado a onda de pressão pelas reflexões criadas nas fronteiras na solução numérica 1	67
4.5	Comparação dos contornos de pressão em diferentes tempos para a solução da equação linear de Euler para um escoamento uniforme com $M=0.5$ , para 3 diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas e o domínio de referência. a) ETA, b) PML, c) ZA, d) domínio de referência.	72
4.6	Comparação da pressão medida em $x = 40$ para diferentes $y$ em múltiplos tempos, para as os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas e o domínio de referência. . . . .	73
4.7	Diferença de Pressão entre a pressão calculada usando os diferentes tipos de condições não reflexivas e a pressão calculada no domínio de referência. A pressão foi calculada no ponto $x = 40$ para todos os $y$ em diferentes tempos, para a solução da equação linear de Euler para um escoamento uniforme. . . . .	74
4.8	Contornos de pressão em diferentes tempos para a solução da equação linear de Euler para um escoamento uniforme com $M=0.5$ , usando a Zona de amortecimento com $D = 30$ . . . . .	75
4.9	Diferença entre a pressão calculada usando os diferentes tipos de condições de fronteira e a pressão calculada usando o domínio de referência. A pressões foram medidas no ponto $x = 40$ para diferentes $y$ em múltiplos tempos. . . . .	76
4.10	Perfis de velocidade e temperatura do escoamento base da camada de mistura. . . . .	78

4.11	Contornos de pressão em diferentes tempos para a solução da equação linear de Euler para uma camada de mistura no domínio de referência que será usado para comparar os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas. . . . .	81
4.12	Contornos de pressão em diferentes tempos para a solução da equação linear de Euler para uma camada de mistura usando os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas para sua comparação com o domínio de referência. . . . .	82
4.13	Comparação da distribuição de pressão $P(y)$ medida em $x = 7$ em múltiplos tempos, para as os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas e o domínio de referência. . . . .	83
4.14	Diferença de Pressão entre a pressão calculada usando os diferentes tipos de condições não reflexivas e a pressão calculada no domínio de referência. A pressão foi calculada no ponto $x = 7$ ao longo de $y$ em diferentes tempos.	84
4.15	Contornos de pressão em diferentes tempos para a solução da equação linear de Euler para uma camada de mistura usando os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas para sua comparação com o domínio de referência. . . . .	86
4.16	Contornos de pressão no tempo final de simulação $t = 100$ , para a solução da equação linear de Euler para uma camada de mistura usando os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas para sua comparação com o domínio de referência. . . . .	88
4.17	Comparação da pressão medida em $x = 7$ para diferentes $y$ em múltiplos tempos, para as os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas e o domínio de referência. . . . .	89
4.18	Diferença de Pressão entre a pressão calculada usando os diferentes tipos de condições não reflexivas e a pressão calculada no domínio de referência. A pressão foi calculada no ponto $x = 7$ para todos os $y$ em diferentes tempos, para a solução da equação linear de Euler para um escoamento não uniforme. . . . .	90
4.19	Contornos de vorticidade em diferentes tempos para uma camada de mistura usando o domínio de referência. . . . .	92
4.20	Contornos de vorticidade em diferentes tempos para uma camada de mistura usando os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas e sua comparação com o domínio de referência. . . . .	94
4.21	Contornos de pressão em diferentes tempos para uma camada de mistura usando os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas e sua comparação com o domínio de referência. . . . .	95

4.22	Distribuição de pressão $p(y)$ medida no ponto $x = 9$ , em diferentes tempos para uma camada de mistura usando os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas e para o domínio de referência. . . . .	96
4.23	Diferença de Pressão entre a pressão calculada usando os diferentes tipos de condições não reflexivas e a pressão calculada no domínio de referência. A pressão foi calculada no ponto $x = 9$ para todos os $y$ , em diferentes tempos para uma camada de mistura. . . . .	97
4.24	Contornos de pressão em diferentes tempos para uma camada de mistura usando os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas e sua comparação com o domínio de referência. . . . .	99
4.25	Pressão medida no ponto $x = 9$ para todos os $y$ , em diferentes tempos para a solução da equação não linear de Euler para uma camada de mistura usando os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas e para o domínio de referência. . . . .	101
4.26	Diferença de Pressão entre a pressão calculada usando os diferentes tipos de condições não reflexivas e a pressão calculada no domínio de referência. A pressão foi calculada no ponto $x = 9$ para todos os $y$ , em diferentes tempos, para a solução da equação não linear de Euler para uma camada de mistura. . . . .	102
4.27	Distribuição de velocidade $u(y)$ e Temperatura $T(y)$ usados para o análises de estabilidade. . . . .	104
4.28	Contornos de vorticidade da camada de misturas para diferentes frequências $\omega$ . . . . .	105
4.29	Contornos de vorticidade da camada de misturas modificada com um jato para diferentes frequências $\omega$ . . . . .	106
4.30	Contornos de vorticidade da camada de misturas modificada com uma esteira para diferentes frequências $\omega$ . . . . .	107
4.31	Taxa de amplificação $\alpha$ para os diferentes casos avaliados. . . . .	108
4.32	Taxa de amplificação $\alpha$ para os diferentes casos avaliados. . . . .	109

## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
3.1 Características de diferentes esquemas de discretização espacial. . . . .	45
3.2 Coeficientes do método rk46NL . . . . .	50
3.3 Coeficientes para filtro de ordem 4, de 13 pontos obtidos pelo Bogey e Baily. . . . .	59
4.1 Parâmetros implementados para os diferentes domínios na solução da equação linear de Euler . . . . .	66
4.2 Parâmetros PML para sua implementação na Equação linear de Euler para um escoamento uniforme. . . . .	68
4.3 Parâmetros da zona de amortecimento para sua implementação na Equação linear de Euler para um escoamento uniforme. . . . .	69
4.4 Parâmetros da ETA para sua implementação na Equação linear de Euler para um escoamento uniforme. . . . .	70
4.5 Parâmetros domínio de referência para sua implementação na Equação linear de Euler para um escoamento uniforme. . . . .	70
4.6 Tempos computacionais em porcentagem do tempo da solução de referência para a solução linear da equação de Euler. Tempo de referência 770.47 segundos, usando um computador HP de processador I7VPRO de 6Gb de memória RAM. . . . .	71
4.7 Tempos computacionais em porcentagem do tempo da solução de referência para a solução linear da equação de Euler. Tempo de referência 770.47 segundos, usando um computador HP de processador I7VPRO de 6Gb de memória RAM . . . . .	75
4.8 Parâmetros usados na definição do escoamento não uniforme do tipo camada de mistura. . . . .	78
4.9 Parâmetros dos diferentes tipos condições de fronteira não reflexivas implementados e do domínio de referência, para a solução numérica da equação linear de Euler para um escoamento do tipo camada de mistura. . . . .	79
4.10 Tempos computacionais em porcentagem do tempo da solução de referência para a solução numérica da equação linear de Euler para uma camada de mistura. Tempo domínio de referência=22935.97 segundos usando um computador HP, com processador I7VPRO e 6Gb de memória RAM. . . . .	85

4.11	Tempos computacionais em porcentagem do tempo da solução de referência para a solução numérica da equação linear de Euler para uma camada de mistura. Tempo domínio de referência=22935.97 segundos usando um computador HP, com processador I7VPRO e 6Gb de memória RAM. . . .	85
4.12	Tempos computacionais em porcentagem do tempo da solução de referência para a solução numérica da equação linear de Euler para uma camada de mistura. Tempo domínio de referência=22935.97 segundos usando um computador HP, com processador I7VPRO e 6Gb de memória RAM. . . .	87
4.13	Parâmetros dos diferentes tipos condições de fronteira não reflexivas implementados e do domínio de referência, para a solução numérica da equação não linear de Euler para um escoamento do tipo camada de mistura. . . . .	91
4.14	Tempos computacionais em porcentagem do tempo da solução de referência para a solução numérica da equação não linear de Euler para a camada de mistura. Tempo do domínio de referência de 47166.72 segundos usando um computador HP, de processador I7VPRO e 6Gb de memória RAM. . . . .	98
4.15	Tempos computacionais em porcentagem do tempo da solução de referência para a solução numérica da equação não linear de Euler para a camada de mistura usando diferentes tipos de condições de fronteira de tamanho $D = 20$ . Tempo do domínio de referência igual a 47166.72 segundos usando um computador HP, com processador I7VPRO e 6Gb de memória RAM. . . . .	100



# SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<b>1 INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 Importância do Problema . . . . .	3
1.2 Revisão Bibliográfica, Condições de Contorno Não Reflexivas . . . . .	6
1.3 Objetivos . . . . .	11
1.3.1 Objetivos Específicos . . . . .	11
<b>2 Formulação . . . . .</b>	<b>13</b>
2.1 Formulação PML na Equação de Convecção . . . . .	13
2.2 Formulação PML Geral . . . . .	18
2.3 As Equações de Euler . . . . .	20
2.4 Formulação PML para a Equações linear de Euler para um escoamento uniforme . . . . .	25
2.5 Equações da PML aplicada a equação de linear de Euler para um escoamento não uniforme e para a equação não linear de Euler. . . . .	33
2.6 Formulação de diferentes condições de fronteira não reflexiva para sua comparação com a PML. . . . .	36
<b>3 Métodos Numéricos Para a Solução da Equação de Euler . . . . .</b>	<b>39</b>
3.1 Esquemas de discretização espacial . . . . .	40
3.1.1 Esquemas de discretização espacial para preservar as relações de dispersão	41
3.1.2 Esquemas de discretização compactos . . . . .	45
3.2 Esquemas de discretização temporal. . . . .	47
3.2.1 Esquemas de discretização temporal de um passo. . . . .	47
3.2.2 Esquemas de discretização temporal de um passo não linear . . . . .	50
3.2.3 Esquemas de discretização temporal de múltiplos passos . . . . .	50
3.3 Comparação dos diferentes esquemas temporais e espaciais . . . . .	52
3.4 Filtro . . . . .	58
<b>4 Resultados . . . . .</b>	<b>61</b>
4.1 Comparação da solução analítica da equação de Euler linear para um escoamento uniforme com a solução numérica . . . . .	61

4.2	Implementação Dos Diferentes Tipos de Condições Não Reflexivas para a Solução da Equação Linear de Euler Linear para um Escoamento Uniforme com $M = 0.5$ . . . . .	66
4.3	Implementação Dos Diferentes Tipos de Condições Não Reflexivas para a Solução da Equação Linear de Euler para um Escoamento Não Uniforme, Tipo camada de mistura. . . . .	77
4.4	Implementação dos Diferentes Tipos de Condições Não Reflexivas Para a Solução da Equação Não Linear de Euler Para um Escoamento Não Uniforme, Tipo Camada de Mistura. . . . .	87
4.5	Analises de Estabilidade da camada de mistura usando a equação não linear de Euler com a implementação da Zona de amortecimento. . . . .	100
<b>5</b>	<b>Conclusões . . . . .</b>	<b>111</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>113</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos o uso da simulação numérica direta (DNS, se sua sigla inglês), onde as equações dos fenômenos são resolvidas completamente sem efetuar nenhuma simplificação, tem aumentado com o maior poder de computação e melhores métodos de discretização do domínio. Isso permite resolver como as simulações problemas mais complexos, tanto geometricamente como fisicamente, como por exemplo o caso de uma asa em três dimensões e de fenômenos tão complexos como aeroacústica com processo de combustão.

Nas simulações numérica de fenômenos transitórios como fenômenos aeroacústicos, fenômenos de transição de regime laminar a turbulento, problemas de estabilidade hidrodinâmica, entre outros, as soluções obtidas propagam-se espacial e temporalmente, sendo importante a implementação de condições de fronteira que permitam a saída dessas soluções pelas fronteiras do domínio, sem afetar as soluções no interior do domínio do problema. Computacionalmente é impossível fazer o domínio do problema infinito, o que permitiria que as soluções se propagassem livremente e infinitamente. Portanto, faz-se necessária a discretização do domínio, limitando-o a uma região finita. Este truncamento do domínio, como é conhecido este procedimento, implica na existência de fronteiras determinadas, cuja função é simular um domínio infinito, as quais deverão, no melhor dos casos, eliminar as soluções ou tratá-las, evitando que reflitam e alterem as soluções transientes.

Quando nenhum tipo de condição de fronteira especial é implementado, faz-se necessário usar um domínio o suficientemente grande, para que as instabilidades numéricas, e as soluções, reflitam nas fronteiras em um tempo determinado, assegurado assim que durante esse tempo não vão alterar com sua reflexão a solução que se está obtendo. No entanto um domínio tão grande implica em grande custo computacional, limitando os estudos por simulação numérica a fenômenos não muito complexos, ou à disponibilidade de grandes recursos computacionais.

Além do truncamento do domínio, onde o problema é restrito a uma região definida, os métodos numéricos usados para discretizar as equações governantes dissipam e dispersam as soluções, sem omitir que contam também com uma determinada precisão. No caso específico dos problemas de propagação de ondas acústicas, a dispersão e dissipação das ondas pelo método numérico de solução afetam indiretamente a solução do problema. No caso dos fenômenos de transição onde acompanha-se o crescimento de uma perturbação, a dispersão e dissipação das soluções obtidas com o método numérico também afetam o fenômeno estudado.

Mesmo contando-se com os métodos menos dispersivos, menos dissipativos, e de maior precisão, toda simulação faz uso dos computadores, os quais trabalham com uma representação finita dos números, interferindo assim em certa medida com a solução do problema.

A soma destas alterações numéricas que interferem com a solução é conhecida como ruído numérico que, igualmente ao fenômeno que está sendo resolvido, também é transitório e propaga-se pelo domínio todo, mas com um agravante, cresce com o passar do tempo, e consegue alterar o resultado da simulação e instabiliza-a até interrompê-la, já que começam a crescer indefinidamente.

Neste trabalho é apresentado um estudo numérico de condições de fronteira não reflexivas na simulação numérica direta de uma camada de mistura compressível utilizando métodos numéricos de alta ordem, de baixas dissipação e dispersão para a solução de um problema transitório de estabilidade hidrodinâmica.

Um correto tratamento das condições de fronteira evita que as instabilidades numéricas e as perturbações nas fronteiras interfiram com a formação das estruturas turbilhonares de Kelvin-Helmholtz, e diminui o esforço computacional da simulação em comparação à solução do problema com as fronteiras o suficientemente afastadas para que a reflexão gerada não interfira com as estruturas turbilhonares.

O principal objetivo deste trabalho será a implementação de condições de fronteira não reflexivas do tipo de camada perfeitamente ajustada (PML, de sua sigla em inglês) numa simulação numérica direta de uma camada de mistura. A condição de fronteira do tipo PML será comparada com outros tipos de condições não reflexivas, para avaliar sua aplicabilidade e efetividade no problema.

Em seguida, uma análise das características de estabilidade da camada de mistura usando o código DNS é apresentada, o que permite determinar em quais condições teria-se uma aceleração no processo de transição para regime turbulento.

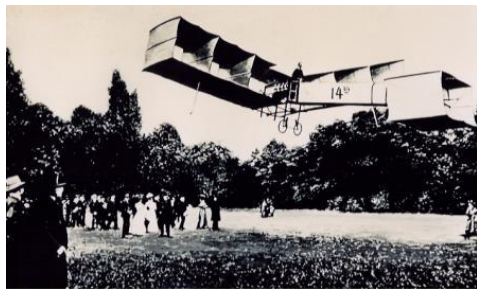
Um modelo simplificado da interface entre dois fluidos, um oxidante e um combustível, pode ser representado por uma camada de mistura. Em geral, deseja-se que a camada de mistura seja turbulenta a fim de maximizar a mistura do combustível e o oxidante, permitindo diminuir o tempo de mistura e otimizar as dimensões da câmara de combustão.

No presente capítulo é apresentada uma descrição da relevância do problema, das características de uma camada de mistura e da importância de usar condições não

reflexivas na simulação numérica. Em seguida será apresentada uma revisão bibliográfica dos trabalhos mais relevantes sobre condições de contorno não reflexivas. Nos capítulos seguintes serão apresentados os objetivos e o escopo deste trabalho, seguidos da formulação do método PML junto com as outras metodologias implementadas para sua comparação. No capítulo final são apresentados os resultados da implementação dos diferentes tipos de condições não reflexivas, as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

## 1.1 Importância do Problema

O desenvolvimento da engenharia aeroespacial nas ultimas décadas levou o homem a atingir velocidades surpreendentes, inimagináveis nos começo do seculo passado. Desde aquela mítica data, 12 de outubro 1906, quando o primeiro avião autopropulsado 14 Bis (Fig. 1.1) atingiu 36,83 km/h, até o projeto experimental x-43 da NASA, que alcançou por meio de um motor SCRAMJET (Supersonic Combustion RAMJET, de sua sigla em inglês) a velocidade de 12.188 km/h a 110.000 ft, em 28 de março de 2004, tornando-se a aeronave mais rápida de todos os tempos usando um motor de combustão com o ar atmosférico. Estes avanços fazem a humanidade sonhar com voos hipersônicos para o transporte comercial, onde seria possível, por exemplo, realizar um voo de São paulo a Moscou em menos de uma hora.



Fonte: <http://santos-dumont.net/controvercia.html>

(a)



Fonte: <http://www.nasa.gov/topics/aeronautics/features/X-43.html>

(b)

Figura 1.1 - a)14 Bis b) X-43

Um RAMJET é um tipo de motor a jato que não tem compressores nem turbinas, sendo utilizado em velocidade de voo elevada, onde a compressão é conseguida só pela conversão da pressão dinâmica em pressão estática através das ondas de choque que são geradas na entrada do motor. Quando o ar comprimido entra na câmara de combustão a velocidade é subsônica; diferentemente do SCRAMJET, onde o ar entra a velocidade supersônica.

Projetos mais recente nesta área não tentam atingir velocidades maiores, tentam manter por mais tempo o processo de combustão, evidenciando assim as dificuldades do processo de combustão em regime compressível. Um caso particular é um dos últimos projetos experimentais da NASA, x-51 wave rider, veículo autônomo que conseguiu em 1 de maio de 2013 manter por 300 segundos o voo hipersônico, ultrapassando os limites até agora conhecidos pelo homem (Fig. 1.2).

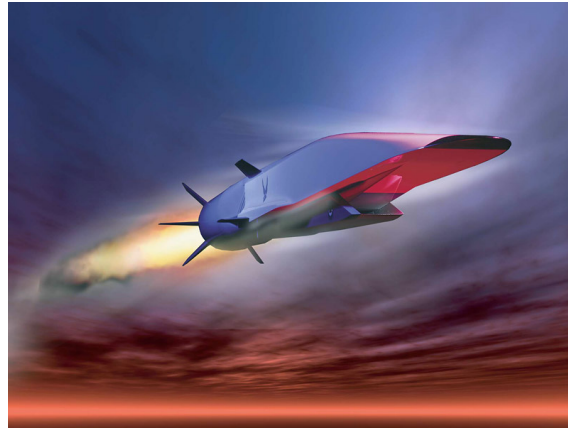


Figura 1.2 - Veículo experimental Hipersônico X-51

Fonte:<http://www.nasa.gov/topics/aeronautics/features/X-51A.html>.

O SCRAMJET, como usa o ar da atmosfera para o processo de combustão, tem um impulso específico muito maior que um motor foguete, sendo ideal para voos dentro da atmosfera a velocidades hipersônicas. A complexidade de manter o processo de combustão e os materiais necessários para resistir às altas temperaturas geradas pelo atrito, são os grandes desafios a resolver para fazer do voo hipersônico uma realidade.

Esta dissertação de mestrado tenta avançar mais um pouco na área de combustão em regime compressível no Brasil, a qual tem sido investigada recentemente em trabalhos do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais e é uma das grandes áreas de pesquisa no panorama mundial.

Para o presente trabalho o método de análise para a estabilidade da camada de mistura será a simulação numérica direta (DNS), em duas dimensões das equações de Euler, tendo presente que o fenômeno de formação dos vórtices de Kelvin-Helmholtz, no começo, é um fenômeno que ocorre em duas dimensões e que o papel da viscosidade pode ser desprezível, sendo importantes apenas quando o número de Reynolds

é muito baixo. Para a simulação serão usados métodos numéricos de alta ordem e diferentes condições de fronteira não reflexivas, que permitam uma simulação espacial da camada de mistura, tentando reproduzir o mais fielmente o desenvolvimento da mesma na natureza.

Esta dissertação surge como uma continuação do trabalho de (QUIRINO, 2006), onde deixa-se clara a necessidade de usar condições de fronteira não reflexivas para evitar que as perturbações numéricas interfiram com as perturbações físicas, afetando o desenvolvimento das estruturas turbilhonares de Kelvin-Helmholtz.

Como toda simulação numérica, o modelamento da camada de mistura implica no truncamento do domínio. Não é possível resolver de forma numérica um domínio que se estende indefinidamente. Alguns problemas envolvem soluções que decaem rapidamente no espaço onde o truncamento do domínio é irrelevante. Outros, com uma simples transformação de coordenadas conseguem delimitá-lo. O problema da camada de mistura envolve propagações de ondas, onde as soluções oscilam e decaem lentamente, fazendo do truncamento do domínio um assunto de suma importância. Neste caso, um mapeamento do domínio infinito ao um domínio numérico finito faria com que as soluções oscilassem infinitamente rápido, impedindo o uso de condições de fronteira convencionais como Dirichlet ou Neumann, porque criariam-se ondas de reflexão nas fronteiras que, ao voltar ao domínio onde é requerida a solução, interfeririam com a formação das estruturas turbilhonares de Kelvin-Helmholtz.

O maior objetivo desta dissertação será o estudo da forma de diminuir as oscilações numéricas próximas as fronteiras e representar de modo correto as condições de fronteira no problema de instabilidade hidrodinâmica de uma camada de mistura compressível. Na figura 1.3 exemplifica-se o uso de um dos métodos de diminuição das oscilações nas fronteiras numa camada de mistura, uma condição não reflexiva do tipo de amortecimento é usada. Quando as ondas atingem a zona de amortecimento, são amortecidas de forma tal que suas reflexões são mínimas ou inexistentes, nesta região são resolvidas as equações do problema incrementado nelas uma parte que consegue amortecer as oscilações, ou são aplicados filtros numéricos, estiramentos de malha, entre outros, que as amortecem, o que e permite o uso na saída de qualquer tipo de condição de fronteira.

A seguir é apresentada uma revisão bibliográfica das condições de fronteira não reflexivas mais usadas na literatura.

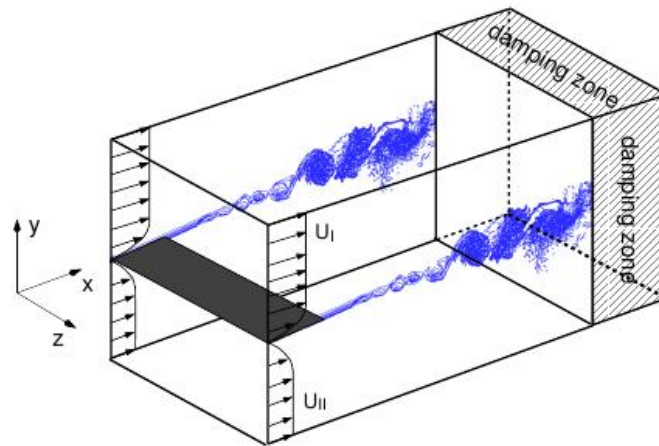


Figura 1.3 - Condições de contorno não reflexivas de amortecimento.

## 1.2 Revisão Bibliográfica, Condições de Contorno Não Reflexivas

Como foi visto na seção anterior, a simulação numérica de uma camada de mistura requer um tratamento especial das condições de fronteira. Este trabalho aplicará à simulação numérica direta de uma camada de mistura em regime compressível, condições não reflexivas que absorvam as ondas que tentam voltar ao domínio de simulação, tentando fazê-las inexistente ou as mínimas possíveis, com uma especial atenção às condições tipo PML, muito usadas atualmente no campo da aeroacústica e da mecânica dos fluidos, por apresentar bons resultados.

A seguir é apresentada uma revisão bibliográfica das condições de contorno não reflexivas usadas para resolver o problema da camada de mistura nos últimos anos, partindo desde as condições mais básicas e simples, até as mais complexas e de melhores resultado usadas atualmente, como é o caso da PML. Quer se mostrar com esta revisão bibliográfica a importância das condições não reflexivas do tipo PML e determinar que outro tipo de condição de fronteira é possível aplicar, com bons resultados, que se comparem com ela. Estas condições de fronteiras são usadas tanto para resolver o problema da camada de mistura como para futuros trabalhos que se queira abordar como por exemplo uma camada de mistura formada por dois fluidos em processo de combustão, a simulação de câmaras de combustão em regime hipersônico de um SCRAMJET, entre outros.

Existe uma grande variedade de condições não reflexivas desenvolvidas na literatura, podendo estas se classificar em três categorias de acordo com o método usado para sua obtenção. O primeiro tipo de condição é conhecida como tipo características,



que usam as equações característica da equação que se esta resolvendo. Em seguida encontrassem as condições no campo distante onde a condição de fronteira é obtida, como seu nome o indica, no campo distante. E uma terceira classificação envolve as condições do tipo zona de absorção, onde uma zona a mais é colocada nas fronteiras do domínio e tenta-se com diferentes métodos diminuir a reflexão das perturbações que a atingem, encontrando neste tipo de condições a PML.

Nos primeiros trabalhos para resolver o problema das condições de fronteira tentou-se criar uma condição de fronteira absorvente que buscava extrapolar a solução da fronteira desde os pontos interiores, simulando um domínio que se estendia ilimitadamente. Isto funcionava bem em problemas de uma dimensão, onde as ondas só tinham duas direções de propagação ( $\pm x$ ). Como a maioria dos problemas são em duas ou três dimensões, o número de possíveis direções de propagação é infinito, limitando seu uso.

Um dos primeiros conceitos de condições de fronteira não reflexivas foi proposto em 1977 por Bjorn Enquist e Andrew Majda ([BAYLISS; ELI, 1977](#)), com o objetivo de garantir uma única e bem posta solução para à equação general parcial de onda nas áreas de mecânica dos fluidos, geofísica e climatologia. O problema esta relacionado a necessidade de introduzir fronteiras artificias para limitar o domínio de cálculo a uma região finita, tentando afetar a solução do problema o mínimo possível, já que as ondas que saem do domínio refletem nas fronteiras, deteriorando a solução. E necessário criar um tipo de condição que diminua a amplitude das ondas que estão saindo, fazendo sua reflexão inexistente ou mínima possível. Este trabalho é uns dos primeiros trabalhos na área de condições de fronteira não refletivas, e desenvolve a primeira teoria básica para sua formulação. O principal problema deste trabalho foi sua complexa abordagem matemática, muito especializada em análise de sistemas de equações diferenciais, o que o fez pouco compreensível para engenheiros e pesquisadores que trabalhavam na área da mecânica dos fluidos.

Em 1975 Verdon **et al** ([VERDON et al., 1975](#)) criaram um método padrão para aplicar condições de fronteira não reflexivas para as equações de escoamento potencial não estacionário da mecânica dos fluidos. A técnica do Verdon foi aplicada posteriormente para a solução das equações lineares não estacionarias de Euler em 1989 por Hall e Crawley ([HALL; CRAWLEY, 1989](#)), mais especificamente para um problema de turbo maquinas. O maior problema deste tipo de condição de fronteira era ter que serem usadas soluções numéricas, pelo que o método não era bem posto, apresentado problemas de estabilidade. Este tipo de condição de fronteira é conhe-

cido pelo nome de condições de fronteira no campo distante, porque são aplicadas no campo distante do domínio numérico, onde as equações para as condições não reflexivas são simplificadas, permitindo encontrar sistemas mais simples que podem ser resolvidos analiticamente ou numericamente. No caso anterior para a equação linear de Euler, no campo distante, uma equação parcial dependente do tempo é levada para uma equação linear conhecida de coeficientes constantes. Outro tipo de método no campo distante foi desenvolvido por Tam e Webb (TAM; WEBB, 1993) e Bayliss e Turkel (BAYLISS; ELI, 1980). Neste método as equações governantes nas fronteiras são substituídas por uma equação diferencial parcial modificada, baseada na forma da solução assintótica no campo distante da equação. Este tipo de condição não reflexiva foi implementado satisfatoriamente em problemas de aeroacústica para resolver as equações lineares de Euler, onde mostrou ser bastante preciso. No entanto, a dificuldade para obter a solução assintótica em escoamentos mais complexos como o caso dos fenômenos de instabilidade restringe sua aplicabilidade em problemas onde não seja conhecida sua solução assintótica. Além do que, a fronteira computacional tem que ser colocada no campo distante para atingir a maior precisão, o que incrementa o custo computacional (BAYLISS; ELI, 1977; HAGSTROM; HARIHARAN, 1988).

Em 1990 Giles (GILES, 1990) propôs vários tipos de condições de fronteira não reflexivas para as equações parciais do tipo hiperbólicas, as quais não aceitam termos dissipativos nem dispersivos, mas especificamente para equações lineares de Euler estacionárias e não estacionárias. Empregou-se então, uma detalhada análise tanto matemática como numérica para a formulação das condições não reflexivas, permitindo serem aplicadas para um grande número de problemas. No seu trabalho, Giles explica os princípios básicos para a formulação das condições não reflexivas, partindo dos trabalhos prévios de complexa formulação matemática de Bjorn e Madjda e do primeiro trabalho em condições de fronteira não reflexivas realizados pelo Kreiss (KREISS, 1970).

O objetivo da formulação do Giles foi evitar reflexões não físicas nas fronteiras de entrada e saída do domínio, fazendo com que a solução do escoamento calculada seja independente da localização das fronteiras no campo distante, levando a atingir uma grande precisão e uma alta eficiência computacional, já que o domínio pode ser diminuído. Como neste tipo de condição de fronteira sua aplicação não depende do campo distante e as equações para as fronteiras são escritas em termos das equações características das equações de Euler. Estas condições são conhecidas como condições de fronteira do tipo características. As condições baseadas nas equações

características também foram desenvolvidas para a solução da equação de Euler por Thompson (THOMPSON, 1990), Poinsot e Lele (POINSOT; LELEF, 1992).

A formulação de Giles, tem sido implementada em aeroacústica, no entanto, devido a sua formulação ser unidimensional seus melhores resultados são obtidos quando a onda que sai é perpendicular à malha da fronteira. Os fenômenos de transição a turbulência, como são no casos da camada de misturas, são fenômenos que se desenvolvem em três dimensões, fazendo estas condições pouco usadas para problemas de instabilidades. Em 1993 Colonius, Sanjiva e Lele em (COLONIUS et al., 1993), seguindo o mesmo método apresentado por Giles, propuseram condições de fronteira do tipo características para as equações de Navier Stokes para problemas da mecânica dos fluidos, mais especificamente para turbomáquinas.

O terceiro tipo de condição não reflexiva que se pode encontrar na literatura, são as condições de zona de absorção, onde destacam-se as condições de amortecimento e a PML. Estes tipos de métodos não procuram por uma condição de fronteira especial absorvente como fazem os métodos no campo distante e os métodos das características. Estes visam diminuir as perturbações na zona de absorção até anulá-la e na sua saída usar qualquer tipo de condição de fronteira, já que as magnitudes das perturbações depois de passar pela zona de absorção são mínimas ou inexistentes e não gerariam nenhuma reflexão.

Na zona de amortecimento, criada primeiramente para a resolução do problema de transição a turbulência espacial de uma camada limite, um problema bastante similar ao desenvolvimento espacial da camada de mistura, foi proposto por Rai e Moin em (RAI; MOIN, 1993), com o objetivo de reduzir a magnitude das reflexões acústicas produzidas pela passagem das grandes perturbações dos vórtices.

Neste tipo de método o domínio computacional é estendido, criando uma zona extra, zona de amortecimento, onde a solução numérica é amortecida pela aplicação de filtros, estiramento da malha, amortecimento numérico ou a combinação entre eles. Também existe uma opção dentro destes métodos, em que o escoamento é acelerado até atingir uma velocidade supersônica na saída da zona de amortecimento, eliminando a necessidade de uma fronteira não reflexiva (TAÁSAN; NARK, 1993; STREETT; MACARAEG, 1989-90).

Em 1993 Colonius seguindo o trabalho de Rai e Moin formulou outro tipo de condição de zona absorvente, chamando-a de zona de esponja, com a qual se calculou o ruído produzido por uma camada de mistura. Nesta condição, especificamente, é

usado um estiramento de malha na zona de saída das estruturas turbilhonares de Kelvin-Helmholtz onde é aplicado um filtro numérico, responsável por dissipar as perturbações turbilhonares que ficam menos bem resolvidas com o estiramento de malha. A efetividade deste método depende em grande parte de como os parâmetros do estiramento de malha, do filtro e demais métodos de amortecimento dentro da zona de absorção podem ser variados.

Existem vários problemas com esta abordagem, em primeiro lugar, as perturbações menos resolvidas podem se propagar a montante, gerando perturbações de pequeno comprimento de onda. Em segundo lugar, o estiramento de malha produz ondas acústicas que se propagam tanto a montante quanto a jusante (COLONIUS et al., 1993). Por último esta zona de amortecimento deve ter um certo comprimento para ser efetiva, o que aumenta o custo computacional. Embora existam estes problemas, este tipo de condições não reflexivas pode alcançar ótimos resultados e é relativamente fácil de implementar. Este tipo de condições de contorno é utilizada para problemas de instabilidade hidrodinâmica e são uma excelente alternativa para avaliar a qualidade da PML.

Contudo, todos os métodos vistos anteriormente apresentam certas desvantagens que limitam seu uso, o que levou a formular outro tipo de condição não reflexiva, tentando diminuir ao máximo as reflexões nas fronteiras como também o custo computacional. Berenger (BERENGER, 1994) em 1994 propôs um novo tipo de condição de camada absorvente, onde além de aplicar estiramento de malha e filtros numéricos, as equações governantes do problema são modificadas matematicamente para diminuir exponencialmente as perturbações na região de absorção, impedindo-as de criar alguma reflexão. A metodologia proposta por Berenger foi denominada camada perfeitamente ajustada (PML, de sua sigla em inglês) e foi implementada na absorção de ondas electromagnéticas na solução das equações de Maxwell, usando o método de diferenças finitas. Nos últimos anos, as condições de contorno não reflexivas do tipo PML é um área em crescimento, tanto assim que seu uso foi estendido à solução das equações de Euler e de Navier Stokes para problemas da mecânica dos fluidos computacional e aeroacústica. A maior diferença entre a metodologia PML e os demais métodos é que as equações que se aplicam nas fronteiras da PML são feitas de tal modo que não se produzem nenhuma reflexão, teoricamente, das ondas que estão entrando na região da fronteira, sem importar sua frequência e seu ângulo de incidência. Como resultado, o tamanho da zona de absorção é menor quando comparado com outros métodos não reflexivos como o da zona de amortecimento. Por consequência o domínio do PML é realmente efetivo e consegue ótimos resul-

tados com poucos pontos de malha (HU, 1996a). A principal característica desta metodologia, em comparação com outros métodos que usam também uma camada de absorção, encontra-se na forma como são construídas as equações nas fronteiras. O Problema de fronteira é convertido em uma transformação de coordenadas e numa troca de variáveis complexas, nos domínios da frequência e do tempo. O problema parece simples, mas deve-se ter cuidado com sua implementação, pois como será visto podem surgir instabilidades que não diminuam as reflexões, e pelo contrário as amplifiquem, interferindo com o domínio onde é procurada a solução.

O maior desenvolvimento da PML na área de aeroacústica e mecânica dos fluidos foi realizado por Fan Hu, que partiu da primeira formulação apresentada por Berenger. A primeira formulação feita por Hu (HU, 1996a) foi uma extensão da formulação apresentada por Berenger para a equação linear de Euler, mostrando ser perfeitamente compatível com esta equação, o que significou teoricamente que esta não produziria nenhuma reflexão das ondas acústicas, de vorticidade e entropia. Embora em um trabalho posterior, o mesmo Hu (HU, 2001) demonstrou que a formulação do Berenger pode conduzir a instabilidades numéricas geradas pela inconsistência entre a velocidade de fase das ondas e a velocidade de grupo, como será visto posteriormente nesta dissertação. Para resolver este problema Hu propôs uma formulação estável para as equações lineares de Euler para um escoamento uniforme. Hu (HU, 2005) estendeu seu trabalho para aplicação da PML para escoamento não uniformes considerando entre estes os caso da camada da mistura, foco desta dissertação. No capítulo 3, onde a PML é formulada, são apresentados outros trabalhos desenvolvidos por Hu e outros autores sobre a PML para aeroacústica e instabilidade hidrodinâmica. Mais recentemente a PML foi estendida para as equações não lineares de Euler (HU et al., 2008) e as equações não lineares de Navier-Stokes.

### 1.3 Objetivos

Implementar e estudar o comportamento de métodos de condições de fronteira não reflexivas na simulação numérica direta de problemas de instabilidade hidrodinâmica numa camada de mistura compressível.

#### 1.3.1 Objetivos Específicos

- Simulação numérica direta de instabilidade hidrodinâmica de uma camada de mistura, implementando condições de fronteira não reflexivas do tipo camada perfeitamente ajustada (PML, do inglês perfectly matched layer).
- Simulação numérica direta de instabilidade hidrodinâmica de uma camada

de mistura implementando condições de fronteira não reflexivas do tipo camada absorvente com estiramento de malha e comparação com o método PML.

## 2 Formulação

### 2.1 Formulação PML na Equação de Convecção

Como foi indicado na introdução, o foco principal desta dissertação está na implementação de condições de contorno não reflexivas do tipo camada perfeitamente ajustada, PML. Para entender como funciona a metodologia PML é possível aplicá-la em um problema relativamente fácil e conhecido, como é o dado pela equação de convecção (2.1),

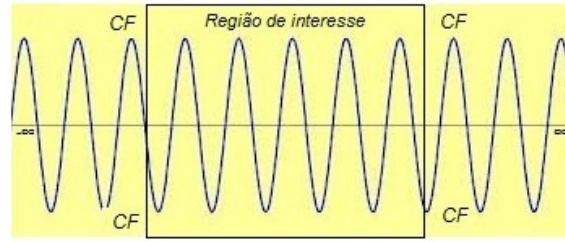
$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.1)$$

onde  $v$  é a velocidade de convecção.

O domínio de solução para a equação de convecção é infinito, fazendo necessário seu truncamento a fim de limitar sua solução a uma região finita. Como sua solução apresenta um comportamento oscilatório, as fronteiras do domínio finito devem, além de simular o domínio infinito, impedir que as ondas voltem à região de interesse e interfiram com as soluções em formação. Numa simulação numérica define-se um domínio onde se está interessado pela solução do problema. Este domínio é limitado por fronteiras onde serão aplicadas as condições de contorno, dependendo do tipo de problema, podendo ser de vários tipos como periódicas, de parede, de Dirichlet, Neumann, entre outras. A metodologia PML propõe truncar o domínio de uma forma diferente, ao contrario do truncamento comum a metodologia da PML propõe discretizar o domínio em varias regiões, a região de interesse e regiões adjuntas próximas das condições de fronteira. Estas regiões serão as encarregadas da absorção e dissipação das perturbações que entram no domínio, o ruído gerado pelo método numérico e a precisão finita de cálculo, permitindo usar qualquer tipo de condição de contorno, sem gerar ondas que regressem ao domínio e interfiram com a solução.

Na figura 2.1 é mostrado o truncamento comum, comparado com o truncamento da metodologia da PML, onde CF significa condição de fronteira. A parte do domínio que absorve as ondas é conhecida com o nome de camada perfeitamente ajustada, PML. A formulação da PML não procura condições de fronteira que eliminem as ondas que as atingem, ela transforma uma parte do domínio, onde a solução não é requerida, numa região onde as ondas são dissipadas.

O que acontece nessa zona próxima das condições da fronteira que consegue tal



(a) Truncamento comum



(b) Truncamento PML

Figura 2.1 - Truncamento comum em comparação ao truncamento proposto pela condições não reflexivas do tipo PML

objetivo é explicado a seguir. A metodologia propõe primeiramente trabalhar no domínio da frequência, onde a equação é simplificada, as derivas temporais tornam-se termos algébricos. Para isto é aplicada a transformada de Fourier para os termos temporais da equação de convecção definida como:

$$F\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = -iwF(w), \quad (2.2)$$

onde  $F$  é transformada de Fourier definida como:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iwt} dt. \quad (2.3)$$

Quando (2.2) e aplicada na equação de convecção (2.1) obtêm-se:

$$-iwu = v \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.4)$$

Assumindo primeiramente que a equação de convecção está no domínio complexo, onde a parte real é só uma parte da solução, a equação (2.4) pode ser escrita como:



$$- iwu = v \frac{\partial u}{\partial \bar{x}}, \quad (2.5)$$

representando o domínio complexo por  $\bar{x}$ . Agora a equação de convecção (2.1) é um caso particular da equação (2.5) que representa só a parte real.

Esta hipótese garante, como primeira medida, que não se criem reflexões na interface entre a PML e o domínio onde se está interessado pela solução, porque  $\bar{x}$  é simplesmente a continuação analítica de  $x$ . Esta se resolvendo a mesma equação mas em um domínio mais amplo que inclui tanto o campo complexo como o real. Estando no campo complexo o método da PML propõe fazer uma troca de coordenadas alterando unicamente a região onde estará a PML, onde é requerida a dissipação da solução, de tal modo que as oscilações diminuam exponencialmente.

Definindo a transformação no campo complexo como:

$$\bar{x} = x + if(x) \quad (2.6)$$

onde  $f(x)$  é a função que indica como será deformada a coordenada  $x$ , que para o caso específico tem a seguinte forma:

$$f(x) = \frac{1}{w} \int_{x_0}^x \sigma_x dx, \quad (2.7)$$

sendo  $x_0$  e  $x$  as posições do domínio onde atuará a transformação dada pela equação (2.6), os limites da PML e  $\sigma_x$  é conhecido como o coeficiente de absorção.

Para entender melhor a transformação no domínio complexo é assumido, a título de exemplo, que a solução da equação tem a forma  $\exp(ikx)$ . Como esta é uma função analítica, pode ser avaliada continuamente no domínio complexo, permitindo manter a solução real inalterada, ao manter a parte imaginária nula, ou pelo contrário alterá-la ao modificar a parte imaginária, de modo que a solução exponencial decaia. Aplicando a transformação para a solução proposta obtêm-se:

$$e^{ik(\bar{x})} \rightarrow e^{ik(x+if(x))} = e^{ikx} e^{-\frac{ik}{w} \int_{x_0}^x \sigma_x dx}. \quad (2.8)$$

Quando  $f(x) = 0$  é fácil voltar a solução inicial. Na equação (2.8) é evidente que além da solução da equação  $\exp(ikx)$ , a solução apresenta uma parte adicional dada por:

$$\exp\left(-\frac{ik}{w} \int_{x_0}^x \sigma_x dx\right), \quad (2.9)$$

que representa um decaimento exponencial na região limitada por  $x_0$  e  $x$ , sempre e quando

$$\frac{k}{w} \int_{x_0}^x \sigma_x dx > 0 \quad (2.10)$$

Na figura 2.2 é mostrado o domínio numérico da solução proposta  $\exp(ikx)$  e sua avaliação em um domínio com e sem a transformação complexa definida pela metodologia PML na equação (2.6).

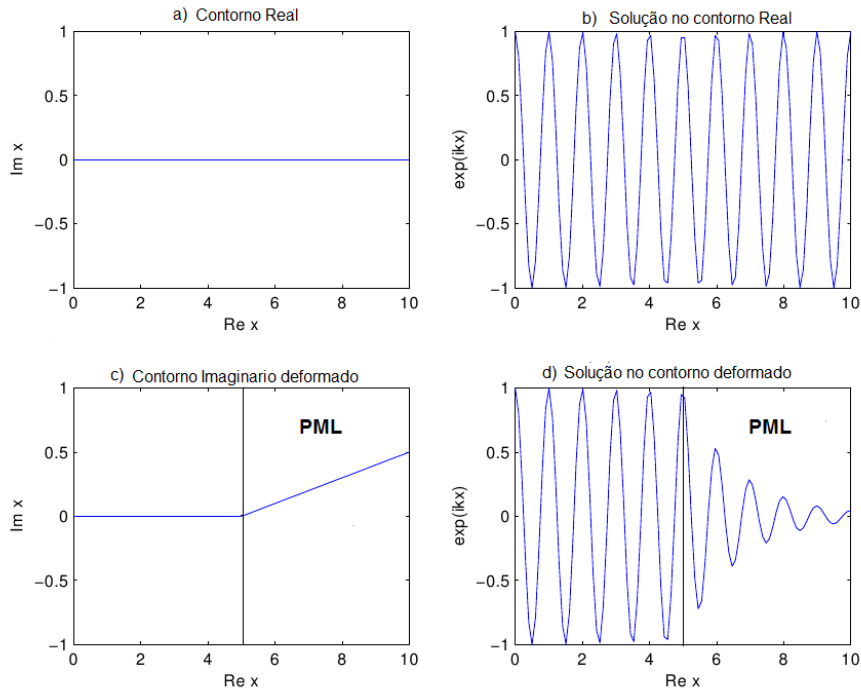


Figura 2.2 - Comportamento da PML quando é aplicada em uma solução da forma  $\exp(ikx)$ . Fonte: (JOHNSON, 2008)

Na parte superior da figura 2.2, os gráficos 2.2a e 2.2b, mostram o domínio numé-

rico sem alteração e a solução  $\exp(ikx)$  avaliada neste domínio, respectivamente. Quando é realizada a transformação no campo complexo dada pela equação (2.6) é possível alterar o domínio adicionando uma parte complexa. Neste caso específico para  $x > 5$  é adicionada uma parte imaginária que cresce linearmente, o que seria  $\sigma_x$  na (2.6), de modo que o domínio numérico fica como é mostrado no gráfico 2.2c, definindo assim a zona de amortecimento do tipo PML. Quando a solução  $\exp(ikx)$  é avaliada no domínio modificado da PML, ela decai de forma exponencial por causa da transformação complexa para  $x > 5$ , o que é mostrado no gráfico 2.2d. Neste caso específico pra o uso da PML é claro que a solução não varia para  $x < 5$ , que seria a região de interesse pela solução e diminui exponencialmente para  $x > 5$ , que seria a região de amortecimento. Este esquema cumpre o objetivo da transformação de coordenadas, manter a solução inalterada no domínio de interesse e fazê-la decair na PML sem produzir nenhuma reflexão.

Continuando com o objetivo de formular a PML para a equação de convecção, a transformação (2.6) implica:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}}, \quad (2.11)$$

com

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{1 + i \frac{df(x)}{dx}}, \quad (2.12)$$

obtendo-se:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{1 + i \frac{df(x)}{dx}} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.13)$$

Pode-se agora aplicar a transformação (2.13) em (2.5) obtendo-se:

$$i\omega u = v \left( \frac{1}{1 + i \frac{df(x)}{dx}} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.14)$$

Com esta transformação não só se consegue adicionar o decaimento exponencial mas também se consegue retornar a equação (2.5) ao domínio real. A equação (2.5) é transformada novamente ao campo real porque seria difícil, e não muito familiar, sua solução no campo complexo.

Por facilidade define-se  $f(x)$  com ajuda do coeficiente de absorção  $\sigma_x$  como  $f(x) =$

$\sigma_x/w$ , substituindo-se em (2.14), obtendo-se:

$$i\omega u = v \frac{\partial u}{\partial x} \left( 1 + \frac{i\sigma_x}{w} \right). \quad (2.15)$$

Agora, multiplicando a equação (2.15) por  $1 + i\sigma_x/w$  e rearranjando, obtêm-se

$$v \frac{\partial u}{\partial x} = i\omega u + \sigma_x u. \quad (2.16)$$

Finalmente, é fácil voltar ao domínio do tempo com ajuda da transformada inversa de Fourier, obtendo a forma final da equação de convecção usando a PML:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial u}{\partial x} - \sigma_x u. \quad (2.17)$$

Neste ponto é possível definir a localização das condições de fronteira do problema, sejam do tipo Dirichle, Neumann, periódicas, etc. O termo complexo adicionado às equações diminui as oscilações nas fronteiras, as quais não produzirão nenhuma reflexão desde que a extensão da PML seja suficiente grande e não apresente instabilidades na sua aplicação, o que será visto com maior detalhe nas seções seguintes.

Na seguinte seção é apresentada uma formulação mais geral para problemas de três dimensões da metodologia da PML.

## 2.2 Formulação PML Geral

Existem dois tipos de formulações para a aplicação da metodologia PML dependendo do tratamento das variáveis do problema. Segundo o trabalho feito por Berenger (BERENGER, 1994) as variáveis no domínio da PML são divididas em duas partes independentes, aumentando o número de equações a resolver. Essa abordagem é conhecido com o nome de camada dividida perfeitamente ajustada (split PML, em inglês). Esta formulação pode levar a um problema não bem posto, como foi demonstrado em (HU, 1996b) e (HU, 2001).

A segunda formulação foi feita por Abarbanel (ABARBANEL et al., 1999). Sua formulação não divide as variáveis físicas, o que não aumenta o número de equações, mas as complica, uma vez que aparecem termos a mais. No final é obtido o mesmo resultado, as ondas decaem exponencialmente no domínio da PML.

Desafortunadamente as duas formulações admitem soluções crescentes exponencialmente que devem ser eliminadas por dissipação numérica ou outros mecanismos, porque podem causar instabilidades numéricas no domínio da PML. Adicionalmente ao problema de instabilidade causado pelo crescimento exponencial da solução, existe também o inconveniente do fato da PML dividida não ser um problema bem posto. A primeira formulação feita por Berenger (BERENGER, 1994) mostrou ser debilmente bem posta (ABARBANEL; GOTTLIEB, 1997), igualmente à feita por Hu (HU, 1996a), o que é atribuído ao fato de dividir as variáveis físicas do problema (ABARBANEL et al., 1999).

Hu (HU, 2001) propõe uma formulação bem posta e estável, a qual será seguida como o primeiro passo para resolver as equações de Euler linearizadas, um passo intermediário na aplicação nas equações da camada de mistura. O processo para a criação de uma condição de fronteira PML estável e bem posta envolve três passos, os quais são mostrados a seguir. No primeiro passo, a transformação apropriada de espaço-tempo, estável, é determinada e aplicada às equações governantes, o que vai garantir a consistência entre a velocidade de grupo e a velocidade de fase das ondas, procurando que estejam na mesma direção. Do contrário cria-se instabilidades na formulação da PML (HU, 2001). Esta transformação espaço-temporal é mostrada a seguir na equação (2.67),

$$\bar{t} = t + \beta x, \quad (2.18)$$

com  $x$  pertencente ao campo complexo, resultando numa transformação nos termos das derivadas parciais, assim:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}}, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.20)$$

Como segundo passo a equação é levada ao domínio da frequência usando a transformada de Laplace e é modificada com uma troca de variável complexa, do mesmo modo como foi feito na formulação para a equação de convecção. Define-se a troca de variáveis complexas para um problema de três dimensões como:

$$x \rightarrow x + \frac{i}{\bar{w}} \int_{x_0}^x \sigma_x dx, \quad (2.21)$$

$$y \rightarrow y + \frac{i}{\bar{w}} \int_{y_0}^y \sigma_y dy, \quad (2.22)$$

$$z \rightarrow z + \frac{i}{\bar{w}} \int_{z_0}^z \sigma_z dz, \quad (2.23)$$

onde os  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ , são funções positivas de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente e são conhecidos como os coeficientes de absorção. Leva-se a uma troca das derivadas parciais:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{i\sigma_x}{\bar{w}}} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{i\sigma_y}{\bar{w}}} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{1 + \frac{i\sigma_z}{\bar{w}}} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.26)$$

Por último a condição de absorção não reflexiva é obtida reescrevendo as equações, que estava no domínio da frequência, nas coordenadas espacial e temporal originais.

### 2.3 As Equações de Euler

Antes de começar com a formulação geral para a PML, faz-se necessário escrever as equações do problema a solucionar e a respectiva adimensionalização usada. Como foi especificado na introdução, esta dissertação procura realizar um estudo de estabilidade da camada de mistura em regime compressível e não viscoso usando a simulação numérica direta (DNS) com métodos de alta ordem e condições de fronteira não reflexivas.

O estudo de instabilidade para a camada de mistura é um fenômeno que pode ser estudado com as equações de Euler, onde os fenômenos de transporte como a transferência de calor e a viscosidade são irrelevantes para a propagação da instabilidade em suas primeiras etapas.

A implementação da PML foi feita, nesta dissertação, para três formas diferentes da equação de Euler. A primeira implementação seguindo a formulação geral da PML, foi para a equação linear de Euler para um escoamento uniforme. Esta implementação serviu para a familiarização com a metodologia e ter uma base para os

problemas mais complexos. A segunda forma da equação de Euler onde foi implementada a PML foi a equações de Euler linear para um escoamento do tipo camada de mistura. Finalmente a PML foi implementada na forma não linear da equação de Euler para um escoamento do tipo camada de mistura. Estes três tipos de equações serão apresentados em seguida, partindo da equação de Euler não linear até chegar a forma mais simples, a equação linear para um escoamento uniforme.

Partindo das equações de Euler na forma conservativa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho Eu + pu \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho Ev + pv \end{pmatrix} = 0, \quad (2.27)$$

onde  $\rho$  é a densidade,  $u$  e  $v$  são as duas componentes da velocidade no eixo  $x$  e  $y$ , respectivamente;  $p$  é a pressão e  $E$  é a energia total do escoamento, que é a soma da energia interna e a energia cinética do escoamento

$$E = \rho e + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2, \quad (2.28)$$

onde  $\mathbf{V}^2$  é a magnitude da velocidade definida como  $\mathbf{V}^2 = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ . Assume-se que fluido é caloricamente perfeito, o que permite usar a equação de estado

$$p = \rho RT, \quad (2.29)$$

onde  $R$  é a constante dos gases e  $T$  é a temperatura, que para um fluido caloricamente perfeito esta relacionada como a energia interna por  $e = C_v T$ . Usando a relação dos calores específicos  $\gamma = \frac{C_v}{C_p}$  é possível escrever a equação de estado como:

$$p = \rho(\gamma - 1)e. \quad (2.30)$$

A qual também pode ser escrita usando a definição da energia total (2.28) como:

$$p = \rho(\gamma - 1)\left(E - \frac{1}{2} \mathbf{V}^2\right). \quad (2.31)$$

Agora é possível reescrever, de forma não conservativa, a equação de continuidade como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0. \quad (2.32)$$

Igualmente, ao expandir as derivadas na equações da quantidade de movimento, tanto em  $x$  como em  $y$ , e substituir o termo  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ , definido na equação de continuidade, obtêm-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (2.34)$$

A equação da energia, é levada ao modo não conservativo ao substituir a energia total em termos da pressão usando a equação de estado, expandir as derivadas usando regra da cadeia e ao subtrair a equação de continuidade e as equações de quantidade de movimento, obtendo-se:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma p \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.35)$$

De forma matricial o sistema de equações formado por (2.32), (2.33), (2.34), (2.35) podem ser escritas como:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = 0, \quad (2.36)$$

onde

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{Bmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & u \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & \gamma p & v \end{Bmatrix}. \quad (2.37)$$



O sistema (2.37) é um sistema hiperbólico de equações parciais não linear conhecido como a equação não linear de Euler.

A equação anterior (2.37) pode ser adimensionalizada com as escalas de velocidade, comprimento e densidade, usando a velocidade do som  $a_0$ , o comprimento característico  $l_0$  e a densidade do escoamento base  $\rho_0$  da seguinte forma:

$$x' = \frac{x}{l_0}, \quad y' = \frac{y}{l_0}, \quad u' = \frac{u}{a_0}, \quad v' = \frac{v}{a_0}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_0},$$

para o tempo e a pressão, baseado nas escalas anteriores, se propõe a seguinte adimensionalização :

$$p' = \frac{p'}{a_0^2 \rho_0}, \quad t' = \frac{a_0 t}{l_0}.$$

Substituindo-se esta adimensionalização em (2.37), obtêm-se a equação não linear adimensionalizada de Euler:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x'} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial y'} = 0, \quad (2.38)$$

onde

$$\mathbf{u}' = \begin{Bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{Bmatrix} M_x & \rho_0 & 0 & 0 \\ 0 & M_x & 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & 0 & M_x & 0 \\ 0 & \gamma p_0 & 0 & M_x \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} M_y & 0 & \rho_0 & 0 \\ 0 & M_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_y & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & 0 & \gamma p_0 & M_y \end{Bmatrix}. \quad (2.39)$$

$M_x$  e  $M_y$  são os números de Mach na direção longitudinal  $x$  e perpendicular  $y$  do escoamento, respectivamente. As variáveis  $\rho'$ ,  $u'$ ,  $v'$ ,  $p'$ ,  $x'$ ,  $y'$  e  $t'$  são agora variáveis adimensionalizadas. Com o propósito de facilitar os passos seguintes para a linearização da equação de Euler o super-índice ( $'$ ) será omitido, entendendo-se que as variáveis apresentadas em seguida estão adimensionalizadas.

A equação não linear de Euler (2.39) pode ser linearizada utilizando a teoria das perturbações, onde assume-se que o escoamento é composto por um escoamento base e uma perturbação, como foi feito na análise de estabilidade linear apresentado no Capítulo 1, assim :

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{u}'. \quad (2.40)$$

Ao substituir (2.40) no sistema de equações (2.39) e possível formar um sistema linear de equações, eliminando os termos não lineares formados pelo produto das perturbações, supondo que elas são suficientemente pequenas. Assumindo também, que o escoamento base  $\mathbf{U}_0$  é solução para a equação (2.37) e que é paralelo, do tipo camada de mistura onde  $\rho_0(y)$ ,  $M_x(y)$ ,  $M_y = 0$  e a pressão  $p_0 = \frac{1}{\gamma}$ , a equação (2.39) simplifica-se, obtendo a equação linear de Euler adimensional para um escoamento não uniforme:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial y} + \mathbf{C} \mathbf{u}' = 0, \quad (2.41)$$

com

$$\mathbf{u}' = \begin{Bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{Bmatrix} M_x & \rho_0 & 0 & 0 \\ 0 & M_x & 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & 0 & M_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & M_x \end{Bmatrix}, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \rho_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \frac{d\rho_0}{dy} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dM_x}{dy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

A Equação (2.42) pode ser simplificada finalmente para chegar na equação de Euler linear uniforme, onde  $M_x = M$  é  $\rho_0 = 1$ , são constantes, obtendo-se:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial y} = 0 \quad (2.43)$$

com

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} M & 1 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 1 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 1 & 0 & M \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

onde  $M$  é o número Mach do escoamento base, que é paralelo ao eixo  $x$ . A equação anterior é conhecida como a equação linear de Euler para escoamento uniforme. Na seção seguinte será aplicada a metodologia geral da PML para os diferentes tipos da equação de Euler apresentados.

#### 2.4 Formulação PML para a Equações linear de Euler para um escoamento uniforme

As equações de Euler suportam três tipos de ondas: acústicas, de entropia e de vorticidade. Teoricamente, é possível formular a PML de modo que nenhuma reflexão seja gerada na fronteira sem importar o tipo de onda, como foi mostrado em (HU, 1996a). Para a implementação da PML, é seguido o método geral apresentado na seção 3.2, onde o primeiro passo foi formular a devida transformação temporal que garantisse que as ondas decaem na PML. O crescimento, não desejado, pode ser explicado assumindo a solução, tal como foi feito para formular a PML para equação de onda, da seguinte forma:

$$\mathbf{e}^{i(k_x x - wt)}, \quad (2.45)$$

onde  $k_x$  é o número de onda na direção  $x$ , aplicando a transformação proposta pela PML, na direção  $x$

$$x \rightarrow x + \frac{i}{w} \int_{x_0}^x \sigma_x dx, \quad (2.46)$$

a solução transforma-se:

$$\mathbf{e}^{i(k_x x - wt)} \mathbf{e}^{\left(-\frac{k}{w} \int_{x_0}^x \sigma_x dx\right)}. \quad (2.47)$$

O segundo fator da expressão anterior, com um expoente completamente real, indica que a amplitude da onda decai exponencialmente, se e somente se:

$$\frac{k_x}{w} \int_{x_0}^x \sigma_x dx > 0, \quad (2.48)$$

enquanto as ondas estão se propagando de uma posição arbitraria  $x$ , na região da PML. O que significa que a PML absorve as ondas que estão se propagando para a direita ( $x$  aumenta) com  $k_x/w > 0$  ou as que estão se propagando para esquerda ( $x$  diminui) com  $k_x/w < 0$ . Em outras palavras, para que a amplitude da onda seja diminuída no domínio da PML o sinal de  $k_x/w$ , que é o inverso da velocidade de fase da onda,  $c_f = w/k$  deve ser consistente com a direção de propagação da onda (HU, 2001). A direção de propagação da onda é determinada pela velocidade de grupo  $c_g = \frac{dw}{dk}$ , implicando:

$$c_f c_g > 0. \quad (2.49)$$

Desafortunadamente, a equação de Euler na presença de um escoamento médio  $\mathbf{U}_0$ , a velocidade de fase não é sempre consistente com a velocidade de grupo. Isto pode ser visto mais claramente com as relações de dispersão das ondas suportadas pela equação linear de Euler (2.42) apresentada anteriormente.

Para definir as relações de dispersão para os três tipos de ondas suportadas pela equação linear de Euler, é necessário aplicar a transformada de Fourier-Laplace para transformar uma função  $f(x, y, t)$  em  $\tilde{f}(k_x, k_y, w)$ , onde  $k_x$ ,  $k_y$  são os números de onda em  $x$  e  $y$ ; e  $w$  é a frequência definida como:

$$\tilde{f}(k_x, k_y, w) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x, y, t) e^{-i(k_x x + k_y y - wt)} dx dy dt. \quad (2.50)$$

Definindo a transformada inversa como:

$$f(x, y, t) = \int_{\Gamma} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \tilde{f}(k_x, k_y, w) e^{-i(k_x x + k_y y - wt)} dk_x dk_y dw. \quad (2.51)$$

Podendo-se definir:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial x} = ik_x \tilde{\mathbf{u}}(x), \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial y} = ik_y \tilde{u}(y), \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial t} = -\frac{\mathbf{f}(\mathbf{0})}{2\pi} - iw\tilde{\mathbf{f}}(w). \quad (2.54)$$

onde  $\tilde{\mathbf{u}}$  é a transformada de Fourier do vetor  $\mathbf{u}$ , e  $\tilde{\mathbf{f}}$  é transformada de Laplace do vetor  $\mathbf{u}$ , considerando  $\mathbf{f}(\mathbf{0})$  a condição inicial em  $t = 0$  com  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ . Aplicando (2.52), (2.53), (2.54) na equação linear de Euler para escoamento uniforme (2.44), obtêm-se:

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{u}} = i\frac{\mathbf{u}_0}{2\pi} \quad (2.55)$$

com

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} (w - k_x M) & -k_x & -k_y & 0 \\ 0 & (w - k_x M) & 0 & -k_x \\ 0 & 0 & (w - k_x M) & -k_y \\ 0 & -k_x & -k_y & (w - k_x M) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} \rho_{t=0} \\ M_{t=0} \\ 0 \\ P_{t=0} \end{Bmatrix}. \quad (2.56)$$

Os autovalores da matriz  $\mathbf{A}$  podem ser determinados com  $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ , onde  $I$  é a matriz identidade e  $\lambda$  são os autovalores de  $\mathbf{A}$ . O Polinômio característico de  $\mathbf{A}$  é :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (w - Mk_x - \lambda)^2[(w - Mk_x - \lambda)^2 - k_y^2 - k_x^2] = 0, \quad (2.57)$$

sendo os autovalores de  $\mathbf{A}$ :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = (w - Mk_x), \quad (2.58)$$

$$\lambda_3 = (w - Mk_x) + (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}, \quad (2.59)$$

$$\lambda_4 = (w - Mk_x) - (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}. \quad (2.60)$$

Os autovetores  $\mathbf{X}$  de  $\mathbf{A}$  para os autovalores  $\lambda_i$  serão:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ k_y \\ -k_x \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -k_x \\ \frac{(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}}{-k_y} \\ \frac{(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}}{1} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{X}_4 = \begin{Bmatrix} 1 \\ k_x \\ \frac{(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}}{k_y} \\ \frac{(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}}{1} \end{Bmatrix}. \quad (2.61)$$

Agora a solução para a equação (2.62) pode ser expressada como a combinação linear dos autovetores da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{C_1}{\lambda_1} \mathbf{X}_1 + \frac{C_2}{\lambda_2} \mathbf{X}_2 + \frac{C_3}{\lambda_3} \mathbf{X}_3 + \frac{C_4}{\lambda_4} \mathbf{X}_4, \quad (2.62)$$

representando a decomposição da solução em três tipos de ondas suportados pela Equação de Euler, onde os autovetores  $\mathbf{X}_1$  representa as ondas de entropia,  $\mathbf{X}_2$  as ondas vorticidade e dois modos para as ondas acústicas  $\mathbf{X}_3$  e  $\mathbf{X}_4$ .

Pode-se definir as relações de dispersão para os três tipos de ondas suportados pela equação linear de Euler aplicando a transformada inversa de Fourier-Laplace definida anteriormente em (2.51).

Para as ondas de entropia a transformada inversa é:

$$f(x, y, t) = \int_{\Gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_1}{\lambda_1} e^{-i(k_x x + k_y y - wt)} dk_x dk_y dw. \quad (2.63)$$

A relação de dispersão para as ondas de entropia estará determinada pelos zeros do denominador da equação (2.63), sendo:

$$D_1(w, k) = \lambda_1 = w - Mk_x = 0. \quad (2.64)$$

Igualmente como foi feito para as ondas de entropia, se pode demonstrar que para as ondas de vorticidade a relação de dispersão é:

$$D_2(w, k) = D_1(w, k) = \lambda_2 = w - Mk_x = 0, \quad (2.65)$$

e para as ondas acústicas

$$D_3(w, k) = \lambda_3 \lambda_4 = (w - Mk_x)^2 - (k_x^2 + k_y^2) = 0. \quad (2.66)$$

Seguindo com o problema da consistência (2.49) que exige na sua formulação a PML, se podem graficar as relações de dispersão apresentadas anteriormente, o que permite determinar a velocidade de fase e a velocidade de grupos para as ondas acústica, de vorticidade e de entropia. No gráfico da relação de dispersão  $D_2$ , Figura 2.3a, os pontos onde  $w = 0$  foram marcados por triângulos. A falta de consistência para as ondas acústicas é evidente na região entre os triângulos e o eixo vertical  $w$ , onde claramente a condição (2.48) não é satisfeita. Ao aplicar a PML sem a devida transformação temporal, as ondas acústicas seriam amplificadas e as reflexões seriam maiores. No gráfico, também é claro que as ondas de vorticidade e de entropia cuja relação de dispersão foi dada por  $D_1$  são consistentes para qualquer valor de  $k$  e  $w$ .

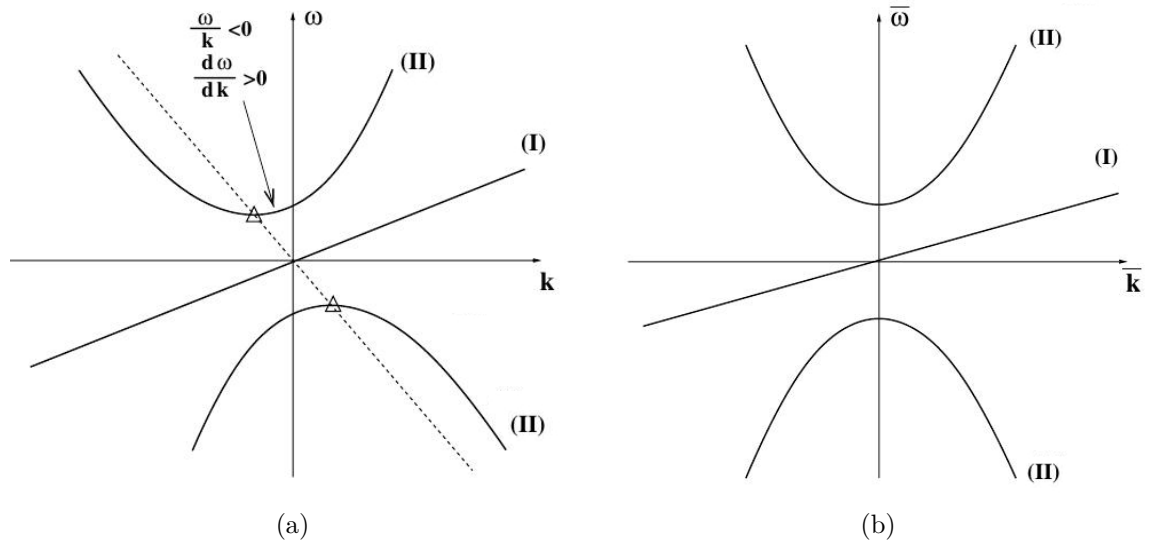


Figura 2.3 - a) Relações de dispersão sem transformação temporal I. Ondas de vorticidade e de entropia II. Onda acústica b) Relações de dispersão com transformação temporal I. Ondas de vorticidade e de entropia II. Onda acústica. **Fonte:** (HU, 2001)

Para resolver o problema da consistência entre a velocidade de fase e de grupo nas ondas acústicas, Hu (HU, 2001) propõe a seguinte transformação temporal:

$$\bar{t} = t + \beta x, \quad (2.67)$$

com

$$\beta = \frac{M}{1 - M^2}, \quad (2.68)$$

que implica

$$\bar{w} = w, \quad \bar{k}_x = k_x + \beta w. \quad (2.69)$$

Transformando as relações de dispersão das ondas de vorticidade e entropia em:

$$\bar{D}_1(\bar{w}, \bar{k}) = \frac{\bar{w}}{1 - M^2} - M\bar{k}_x = 0, \quad (2.70)$$

e das ondas acústicas em :

$$\bar{D}_1(\bar{w}, \bar{k}) = \frac{\bar{w}}{1 - M^2} - (1 - M^2)\bar{k}_x^2 - k_y^2 = 0. \quad (2.71)$$

As relações de dispersão após da transformação temporal são apresentadas na figura 2.3b, onde é clara a consistência entre a velocidade de fase e de grupo para os diferentes tipos de ondas.

Como a condição (2.49) está garantida é possível formular a PML para a equação linear de Euler para um escoamento uniforme definida em (2.44), seguindo os passos apresentados na seção da formulação geral da PML.

Como primeiro passo Hu (HU, 2001) propõe fazer as transformações espaço-temporais necessárias para garantir a estabilidade da PML. A devida transformação temporal foi definida com ajuda das relações de dispersão em (2.67). Hu propõe fazer outra troca de variáveis nos termos espaciais com o fim de facilitar os passos seguintes na implementação da PML, definindo:

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = \sqrt{1 - M^2}y. \quad (2.72)$$

A equação linear de Euler para um escoamento uniforme ao aplicar as transformações definidas em (2.72) é :

$$\left( \mathbf{I} + \frac{M}{1 - M^2} \mathbf{A} \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{t}} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{x}} + \sqrt{1 - M^2} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (2.73)$$



onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. A relações de dispersão para os três tipos de ondas são alteradas de modo que:

$$\overline{D}_1(\overline{w}, \overline{k}) = \frac{(\overline{w})^2}{1 - M^2} - M\overline{k}_x = 0, \quad (2.74)$$

para as ondas de vorticidade e entropia, e

$$\overline{D}_1(\overline{w}, \overline{k}) = \frac{(\overline{w})^2}{(1 - M^2)^2} - \overline{k}_x^2 - \overline{k}_y^2 = 0, \quad (2.75)$$

para as ondas acústicas, onde

$$\overline{k}_x = k_x + \frac{M}{1 - M^2}W, \quad \overline{k}_y = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}}k_y, \quad \overline{w} = w. \quad (2.76)$$

Como segundo passo, a equação (2.73) é levada ao domínio complexo da frequência usando a transformada de Laplace apresentada em (2.54), tomando como zero as condições iniciais para as variáveis  $\mathbf{u}$ .

$$- \left( \mathbf{I} + \frac{M}{1 - M^2} \mathbf{A} \right) iw\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \overline{x}} + \sqrt{1 - M^2} \mathbf{B} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \overline{y}} = 0, \quad (2.77)$$

onde  $\tilde{\mathbf{u}}(w, \overline{x}, \overline{y})$ , sendo  $\overline{x}$  e  $\overline{y}$  variáveis no campo complexo, já que é assumido, tal como foi feita para a equação de convecção, que a equação linear de Euler esta no campo complexo onde (2.73) é a parte real de (2.77).

Logo a troca de variável complexa que representa a PML nas equações (2.21) e (2.22) é aplicada, obtendo:

$$- \left( \mathbf{I} + \frac{M}{1 - M^2} \mathbf{A} \right) iw\tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{1 + \frac{i\sigma_x}{\overline{w}}} \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \overline{x}} + \sqrt{1 - M^2} \frac{1}{1 + \frac{i\sigma_y}{\overline{w}}} \mathbf{B} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \overline{y}} = 0. \quad (2.78)$$

Os coeficientes de absorção  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  são positivos e funções de  $x$  e  $y$  respectivamente. Como foi feito por Berenger (BERENGER, 1994), estes coeficientes de absorção são escolhidos de modo que  $\sigma_y$  é o mesmo através da interface normal a  $x$ , onde  $\sigma_x = 0$ , e  $\sigma_x$  é o mesmo a traves da interface normal a  $y$ , onde  $\sigma_y = 0$ , além disso os dois

são diferentes de zero nos cantos do domínio. Na Figura 2.4 é mostrado o domínio onde sera resolvida a equação linear de Euler com a implementação da PML com os respectivos valores dos coeficientes de absorção propostos por Berenger.

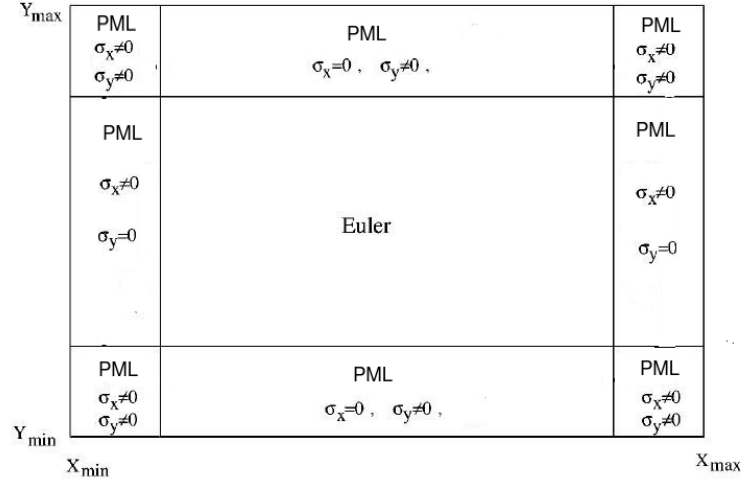


Figura 2.4 - Domínio da solução para a equação linear de Euler implementando a PML

A equação (2.78) é multiplicada por  $(1 + i\sigma_x/\bar{w})(1 + i\sigma_y/\bar{w})$ , obtendo:

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{I} + \frac{M}{1 - M^2} \mathbf{A} \right) \left[ -iw\tilde{\mathbf{u}} + (\sigma_x + \sigma_y)\tilde{\mathbf{u}} + \frac{i\sigma_x\sigma_y}{w}\tilde{\mathbf{u}} \right] + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + i\frac{\sigma_y}{w} \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial x} \\ + \sqrt{1 - M^2} \mathbf{B} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial y} + i\frac{\sigma_x}{w} \sqrt{1 - M^2} \mathbf{B} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Para transformar novamente a equação (2.79), onde a PML foi aplicada, ao domínio do tempo  $\bar{t}$  é necessário definir uma variável auxiliar  $\mathbf{q}$ , já que os termos  $\frac{i}{w} \mathbf{u}$  representam integrais no domínio espacial. Definido assim :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \bar{t}} = \mathbf{u}, \quad (2.80)$$

ou no domínio da frequência como:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \frac{i}{w} \tilde{\mathbf{u}}, \quad (2.81)$$

que ao ser aplicada na (2.73) obtêm-se

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{I} + \frac{M}{1-M^2} \mathbf{A} \right) [-iw\tilde{\mathbf{u}} + (\sigma_x + \sigma_y)\tilde{\mathbf{u}} + (\sigma_x\sigma_y)\tilde{\mathbf{q}}] + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{x}} + \sigma_y \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial \bar{x}} \\ + \sqrt{1-M^2} \mathbf{B} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \bar{y}} + \sigma_x \sqrt{1-M^2} \mathbf{B} \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial \bar{y}} = 0. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Agora é possível transformar o domínio temporal usando a transformada inversa de Laplace, conseguindo:

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{I} + \frac{M}{1-M^2} \mathbf{A} \right) \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{t}} + (\sigma_x + \sigma_y)\mathbf{u} + \sigma_x\sigma_y\mathbf{q} \right] + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{x}} + \sigma_y \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \bar{x}} \\ + \sqrt{1-M^2} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{y}} + \sigma_x \sqrt{1-M^2} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \bar{y}} = 0. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Finalmente são escritas as equações (2.83) e (2.80) no domínio espacial e temporal original  $x$ ,  $y$  e  $t$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \sigma_y \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + \sigma_x \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} + (\sigma_x + \sigma_y)\mathbf{u} \\ + \sigma_x\sigma_y\mathbf{q} + \frac{\sigma_x M}{1-M^2} \mathbf{A}(\mathbf{u} + \sigma_y\mathbf{q}) = 0, \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathbf{u}. \quad (2.85)$$

Esta equação será a que deve ser resolvida numericamente nas fronteiras do domínio, a qual representa a equação linear de Euler para um escoamento uniforme que permite a atenuação e a não reflexão das ondas acústicas, de entropia, e vorticidade.

## 2.5 Equações da PML aplicada a equação de linear de Euler para um escoamento não uniforme e para a equação não linear de Euler.

A formulação da PML, assim como foi aplicada para a equação de onda e para a equação de convecção, foi aplicada por HU (HU, 2005) para equação linear de Euler para um escoamento não uniforme apresentada em (2.42). Para garantir a consistência entre a velocidade de fase e a velocidade de grupo no escoamento não uniforme Hu propõe a seguinte transformação temporal:

$$\bar{t} = t + \beta x, \quad (2.86)$$

com

$$\beta = \frac{\bar{U}_m}{1 - \bar{U}_m^2}, \quad (2.87)$$

onde  $U_m$  é a velocidade media do escoamento definida como:

$$\bar{U}_m = \frac{1}{a-b} \int_a^b \bar{U}_m(y) dy, \quad (2.88)$$

e  $a, b$  são os limites do domínio de  $y$  no problema.

Agora é possível aplicar a PML à equação linear de Euler para um escoamento não uniforme, seguindo os passos aplicados para equação de onda e a equação de Euler linear para um escoamento uniforme, obtendo-se:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{B} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \sigma_x \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} \right) + \mathbf{C} (\mathbf{u} + \sigma_x \mathbf{q}) + \sigma_x \mathbf{u} + \sigma_x \beta \mathbf{A} \mathbf{u} = 0, \quad (2.89)$$

com

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathbf{u}. \quad (2.90)$$

Para a equação não linear de Euler apresentada em (2.38) Hu, Lin e Li (LIN et al., 2011) propuseram a seguinte formulação para a PML. A equação de Euler não linear pode ser particionada como foi feito para chegar na solução linear num escoamento médio  $\bar{\mathbf{u}}$  independente do tempo e uma perturbação  $\mathbf{u}'$  dependente do tempo.  $\mathbf{u}$  pode ser escrito como:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'. \quad (2.91)$$

Esta partição é feita porque é mais eficiente absorver somente as flutuações temporais. Como o escoamento médio pode ser desconhecido pode ser aproximado por um pseudo escoamento médio dentro da zona da PML. A equação para o escoamento base  $\bar{\mathbf{u}}$  que satisfaz a equação não linear de Euler, não dependente do tempo, pode ser escrita como :

$$\bar{\mathbf{A}} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} + \bar{\mathbf{B}} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial y} = 0. \quad (2.92)$$

Subtraindo a equação (2.92) da equação (2.38) adimensionalizada, obtêm-se:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} - \overline{\mathbf{A}} \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial x} - \overline{\mathbf{B}} \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial y} = 0, \quad (2.93)$$

a qual pode ser rearranjada para facilitar a implementação da PML somando e subtraindo os termos  $\overline{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$ ,  $\mathbf{A} \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial x}$ ,  $\overline{\mathbf{A}} \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial x}$ , obtendo:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \overline{\mathbf{A}} \frac{\partial(\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}})}{\partial x} + (\mathbf{A} - \overline{\mathbf{A}}) \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial x} + (\mathbf{A} - \overline{\mathbf{A}}) \frac{\partial(\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}})}{\partial x} \\ & + \overline{\mathbf{B}} \frac{\partial(\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}})}{\partial y} + (\mathbf{B} - \overline{\mathbf{B}}) \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial y} + (\mathbf{B} - \overline{\mathbf{B}}) \frac{\partial(\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}})}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Realizando a transformada temporal proposta em (2.86) e aplicando-a sobre a equação (2.94) obtêm-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \bar{t}} + \beta \overline{\mathbf{A}} \frac{\partial(\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}})}{\partial \bar{t}} + \beta(\mathbf{A} - \overline{\mathbf{A}}) \frac{\partial \mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}}}{\partial \bar{t}} \\ & + \overline{\mathbf{A}} \frac{\partial(\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}})}{\partial x} + (\mathbf{A} - \overline{\mathbf{A}}) \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial x} + (\mathbf{A} - \overline{\mathbf{A}}) \frac{\partial(\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}})}{\partial x} \\ & + \overline{\mathbf{B}} \frac{\partial(\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}})}{\partial y} + (\mathbf{B} - \overline{\mathbf{B}}) \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial y} + (\mathbf{B} - \overline{\mathbf{B}}) \frac{\partial(\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}})}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (2.95)$$

onde  $\beta$  depende do tipo de escoamento a ser resolvido. Como foi feito para os equações anteriores a equação (2.95) é levada ao domínio da frequência, onde as transformações (2.21), e (2.22) são realizadas. A equação resultante é levada de volta ao domínio da frequência, e levada as variáveis originais  $t$ ,  $x$ ,  $y$ , obtendo-se:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} - \overline{\mathbf{A}} \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial x} - \overline{\mathbf{B}} \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial y} + \sigma_x \beta (\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}}) - \sigma_x \beta \mathbf{A} \mathbf{q}_1 - \sigma_y \beta \mathbf{B} \mathbf{q}_2 = 0, \quad (2.96)$$

com

$$\frac{\partial \mathbf{q}_1}{\partial t} + \sigma_x \mathbf{q}_1 = \frac{\partial(\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}})}{\partial x} + \sigma_x \beta (\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}}), \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}_2}{\partial t} + \sigma_y \mathbf{q}_2 = \frac{\partial(\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}})}{\partial y}. \quad (2.98)$$

que foram definidas para facilitar a volta ao domínio temporal.

## 2.6 Formulação de diferentes condições de fronteira não reflexiva para sua comparação com a PML.

Como foi explicado na revisão bibliográfica, existem vários tipos de condições de fronteira não reflexivas que podem ser usados nas equações de Euler. Com o objetivo de comparar os resultados da PML foram implementadas 3 tipos de condições de fronteira não reflexivas.

O primeiro tipo de condição implementada foi formulada por Giles (GILES, 1990) e pertence a classificação de condições de fronteira do tipo características, nas quais não é necessário incrementar o tamanho do domínio do problema adicionado uma zona de absorção. Nesta dissertação será identificada com as siglas "ABC"(absorbing boundary condition, da suas siglas em inglês). Como a condição depende da equação que se esta resolvendo ela só foi implementada por Giles para a equação linear de Euler, onde sua formulação é possível. Nesta dissertação ela só será implementada para a equação linear de Euler para um escoamento uniforme para ter uma comparação temporal deste tipo de condições com a PML e as demais condições que serão implementadas. Como seu nome indica a implementação desta condição se realiza simplesmente trocando as condições de contorno pelas formuladas para cada tipo de problema.

As condições de contorno não reflexivas propostas para a equação linear de Euler são definidas como:

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.99)$$

para a condição de entrada e  $c_4 = 0$  para a condição de saída.  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  são as variáveis características da equação linear de Euler, que estão relacionadas com as variáveis  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$  e  $p$  por:

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{Bmatrix} \quad (2.100)$$

Para implementar esta condição basta calcular os valores das variáveis características nas fronteiras, extrapolando os valores das variáveis  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ , e  $p$  com seus valores dentro do domínio, em seguida é usada a equação (2.100) para colocar o valor das variáveis na fronteira. Na referencia (GILES, 1990) encontra-se o desenvolvimento completo da condição não reflexiva de características formulada por Giles.

O segundo tipo de condição implementada para a comparação da PML é conhecida como zona de amortecimento (ZA) baseada em amortecimento numérico é pertence a mesma família da PML, sendo muito usada na solução de problemas de instabilidade hidrodinâmica como a da camada de mistura. Para usar este tipo de condição como seu o nome o indica é necessário o acréscimo do domínio incluindo as zonas onde vai ser aplicado o amortecimento numérico. Dentro da zona de amortecimento a amplitude das ondas que estão saindo do domínio é amortecida até um valor determinado pela função de amortecimento  $\sigma$ . Para não produzir reflexões entre o domínio da solução e o domínio acrescentado, a função de amortecimento é definida do modo que é zero na interface dos domínios e se incrementa suavemente, o que permite que as ondas entrem na zona de amortecimento gerar reflexão. Uma vez que as ondas estão dentro da zona de amortecimento, a função sigma é aplicada amortecendo as ondas ao valor determinado. Esta condição não reflexiva é muito simples de implementar, já que não é necessário resolver equações a mais, e não depende do tipo de equação que se esta resolvendo. O método para implementar a zona de amortecimento é descrito em seguida.

Seja  $\bar{u}^{n+1} = (\rho, u, v, p)$  o vector solução a cada passo de tempo, pode-se aplicar a condição de fronteira não reflexiva do tipo zona de amortecimento como:

$$u^{n+1} = \bar{u}^{n+1} - \sigma(\bar{u}^{n+1} - u_{objetivo}).$$

Sendo  $u^{n+1}$  o vetor solução a cada passo de tempo após da aplicação do amortecimento.  $u_{objetivo}$  usado em (2.6) define o valor determinado de  $\bar{u}$  uma vez aplicada a zona de amortecimento, o qual é definido dependendo da necessidades do problema. Para as equações não linear de Euler  $u_{objetivo}$  é definido como zero quando se quer levar as perturbações que entram a zona de amortecimento ao valor do escoamento base. Já para a equação não linear de Euler  $u_{objetivo}$  pode ser definida como o escoamento base, quando a formulação é feita para as as variáveis instantâneas tal como foi definido em (2.91). A função de amortecimento  $\sigma$  para a equação (2.6) pode ser definida de muitas formas e a que será usada nesta dissertação sera definida no

capítulo de resultados.

A terceira condição implementada é conhecida como o nome de ETA (energy transfer and annihilation) , de sua sigla em inglês) (B.; VISBAL, 2003) e é baseada em um estiramento de malha e métodos de atenuação. A energia das ondas que estão saindo do domínio é transferida agressivamente para números de onda maiores usando o estiramento de malha. Este conjunto de ondas de alto número de onda é eliminado usando um filtro numérico de alta ordem. Este tipo de condição não reflexiva pertence ao grupo de condições de zona de absorção, assim como a PML e a ZA. Para implementá-la basta usar um estiramento de malha, transformado as equações governantes nas zona onde vai ser implementada a ETA, e aplicar um filtro numérico de alta ordem. A explicação do funcionamento do filtro junto com o estiramento de malha que conseguem eliminar as ondas de alta frequência será apresentada no capítulo dos métodos numéricos. Na Figura 2.5 apresenta como é feita a implementação da ETA, mostrando o estiramento do domínio nas fronteiras de aplicação.

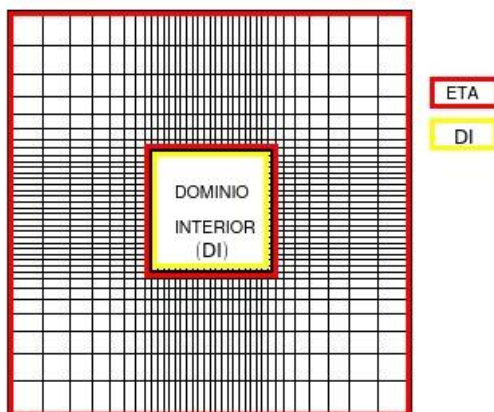


Figura 2.5 - Truncamento do domínio usado pela ETA, aplicando o estiramento numérico nas fronteiras do domínio **Fonte:** (B.; VISBAL, 2003).

A seguir serão apresentados os métodos numéricos que vão ser usados para a discretização espacial e temporal, para resolver as equações de Euler.



### 3 Métodos Numéricos Para a Solução da Equação de Euler

Como tem sido mencionado nos capítulos anteriores os métodos numéricos que serão usados para resolver as equações governantes da camada de mistura devem ter as seguintes características:

- Alta ordem
- Baixa dissipação
- Baixa dispersão
- Alta Eficiência

Alta ordem refere-se à precisão numérica do método. Em um método numérico de diferenças finitas tradicional refere-se ao número de termos usados da série de Taylor truncada com a qual se consegue alcançar uma determinada precisão.

Para se falar de dispersão e dissipação numérica dos métodos de discretização, tanto espaciais como temporais, usa-se transformação ao espaço de Fourier, como será apresentado posteriormente, onde seus parâmetros mais importantes estarão relacionados com a velocidade de fase, de grupo, o número de onda e demais propriedade de propagação das ondas. Dispersão numérica refere-se ao fenômeno que se apresenta quando alguns componentes de uma onda conseguem se propagar mais rápido que outros, e mais rápido que a velocidade da onda na equação diferencial original, fazendo que a solução numérica viaje tanto mais rápido quanto mais lento do que viajaria na equação original. Por outro lado, dissipação numérica refere-se a perda da energia das ondas causada pelo amortecimento da solução, introduzida ao usar um determinado método numérico. Estas duas características são as ferramentas que permitem avaliar os diferentes esquemas a serem usados, sendo alguns destes esquemas, apresentados a seguir, especializados em manter o menor possível estas duas características.

Por eficiência do método entende-se a velocidade de computação e o baixo armazenamento de dados na memória do computador dos diferentes esquemas. Estes são fatores bastante importantes, já que como o objetivo desta dissertação é fazer uma simulação numérica direta que leva consigo um alto custo computacional, um método mais eficiente levará a menos horas de cálculo.

Na seção seguinte serão apresentados diferentes métodos numéricos de discretização espacial e temporal, os quais serão implementados para resolver a equação de onda

em uma dimensão para se determinara qual é o mais adequado para ser implementado na solução do problema de camada de mistura.

### 3.1 Esquemas de discretização espacial

Sejam definidas duas aproximações mediante série de Taylor ao redor de um ponto  $u_l$  para  $\pm\Delta x$  como:

$$u_{(l+1)} = u(x_l + \Delta x) = u_l + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_l \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_l \Delta x^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_l \Delta x^3 + \dots, \quad (3.1)$$

$$u_{(l-1)} = u(x_l - \Delta x) = u_l - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_l \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_l \Delta x^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_l \Delta x^3 + \dots, \quad (3.2)$$

subtraindo (3.2) de (3.1):

$$u_{(l+1)} - u_{(l-1)} = 2\Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_l + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_l \Delta x^3 + \dots \quad (3.3)$$

Agora é possível formular uma aproximação de segunda ordem para a derivada  $\frac{\partial u}{\partial x}$  usando três pontos, conhecido como esquemas de diferença centrada, como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{(l+1)} - u_{(l-1)}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (3.4)$$

Como foi feito anteriormente para alcançar a equação (3.4), é possível formular aproximações de maior ordem, mantendo mais termos da aproximação feita pela serie de Taylor. Pode-se demonstrar, com o objetivo de alcançar esquemas centrados de maior ordem, que aproximações de quarta e sexta ordem de diferenças centradas usando 5 e 7 pontos, respectivamente, são dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-u_{(l+2)} + 8u_{(l+1)} - 8u_{(l-1)} + u_{(l-2)}}{12\Delta x} + O(\Delta x^4), \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{(l+3)} - 9u_{(l+2)} + 45u_{(l+1)} - 45u_{(l-1)} + 9u_{(l-2)} - u_{(l-3)}}{60\Delta x} + O(\Delta x^6). \quad (3.6)$$

Como será mostrado posteriormente estes esquemas, sem importar a ordem, são altamente dispersivos, pelo qual não seriam os mais adequados para resolver o problema de estabilidade da camada de mistura.

### 3.1.1 Esquemas de discretização espacial para preservar as relações de dispersão

Tam e Webb (TAM; WEBB, 1993) mostraram que estes esquemas de diferenças finitas podem ser otimizados para ser menos dispersivos, minimizando o erro ao aplicá-los. Para isso, um esquema central de diferenças finitas para aproximar  $\partial u/\partial x$  de  $2N + 1$  pontos, para variáveis contínuas pode ser representado por:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{-N}^N a_j f(x + j\Delta x). \quad (3.7)$$

Fazendo a transformada de Fourier da equação anterior:

$$i\alpha \tilde{f} \simeq \frac{1}{\Delta x} \left[ \sum_{-N}^N a_j e^{ij\alpha\Delta x} \right] \tilde{f}(\alpha) = i\bar{\alpha} \tilde{f}(\alpha), \quad (3.8)$$

é possível definir uma variável  $\bar{\alpha}$  que relaciona o número de onda do esquema de discretização da derivada pelo método numérico de diferenças finitas com o número de onda que é representado pela transformada de Fourier da derivada original que se está resolvendo, assim:

$$\bar{\alpha} = -i \frac{1}{\Delta x} \left[ \sum_{-N}^N a_j e^{ij\alpha\Delta x} \right], \quad (3.9)$$

onde  $\alpha$  é o número de onda da solução analítica e  $\bar{\alpha}$  é o número efetivo de onda do esquema de diferenças finitas (3.7). Graficamente esta relação pode ser vista na figura 3.1, onde  $\alpha_c$  representa o ponto até onde a aproximação dos diferentes esquemas é considerada aceitável, depois desse ponto o erro de dissipação cresce prejudicando a solução.

Para melhorar os resultados do esquema anterior (3.7), Tam e Webb mostraram que é possível fazer uma otimização minimizando o erro integral  $E$  do esquema, definido como o erro de dispersão, que representa a diferença entre o número efetivo de onda

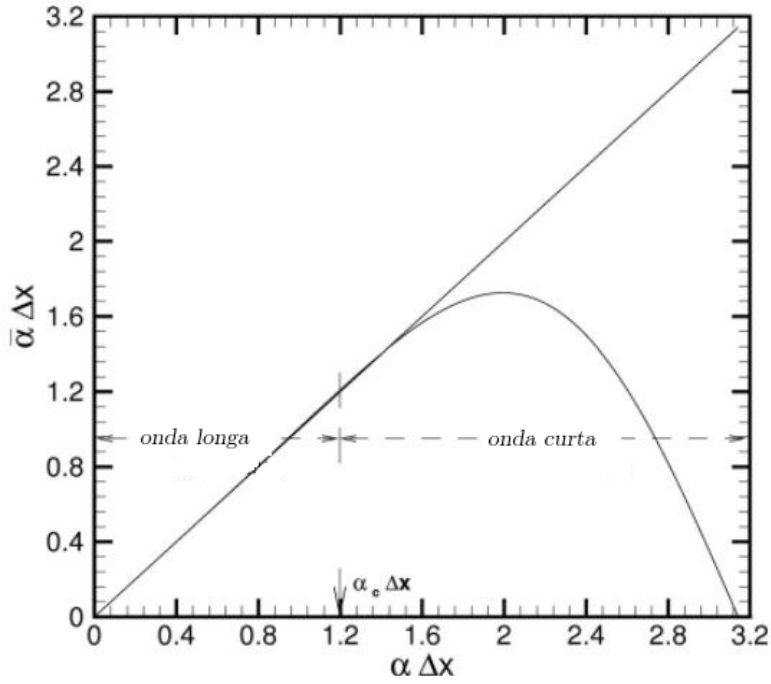


Figura 3.1 -  $\bar{\alpha}$  versus  $\alpha \Delta x$  para um determinado esquema de diferenças finitas. Fonte: (TAM, 2013)

$\bar{\alpha}$  e o número exato  $\alpha$ , numa faixa determinada de números de onda, assim:

$$E = \int_{n_1}^{n_2} |\alpha \Delta x - \bar{\alpha} \Delta x|^2 d(\alpha \Delta x), \quad (3.10)$$

onde  $n_1$  e  $n_2$  são os valores de números de onda que definem o intervalo onde é tomada a integral.

Assumindo que o esquema a ser otimizado tem coeficientes simétricos  $a_j = a_{-j}$  e substituindo a equação (3.9) na equação (3.10), a condição para que o erro seja mínimo é dada por:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad \text{para} \quad j = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (3.11)$$

Estas equações representam um sistema de  $N$  equações e  $N$  incógnitas, que ao ser resolvido proporcionara os coeficientes otimizados do esquema numérico.

Considere-se um esquema de quarta ordem central de 7 pontos, obtido pela equação

(3.7). Os coeficientes  $a_j$  resultantes da otimização deste esquema, usando a minimização da equação (3.10), para uma faixa de números de onda de 0 a  $\pi/2$ , são determinados em (TAM, 2013), onde encontram-se esquemas de maior ordem, e uma explicação mais detalhada do método de otimização. Os coeficientes para este esquema são:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = a_{-1} = 0.79926643,$$

$$a_2 = a_{-2} = -0.18941314, \quad a_3 = a_{-3} = -0.02651995.$$

Com o objetivo de mostrar a dispersão numérica nos esquemas de diferenças finitas é possível determinar, a partir da transformada de Fourier do esquema (3.8), a velocidade de grupo do mesmo, sendo  $d\bar{\alpha}/d\alpha$ , que é igual a inclinação da curva do gráfico 3.1. Quando o esquema representa adequadamente a derivada, a curva da velocidade de grupo versus  $\alpha$  deve ter inclinação de 1, se ao contrario é menor ou maior, significa que as ondas no esquema de diferenças finitas estão viajando mais lento ou mais rápido, em comparação com as ondas da derivada original. Considere-se a figura 3.2 onde a velocidade de grupo é apresentada para um determinado esquema de diferenças finitas:

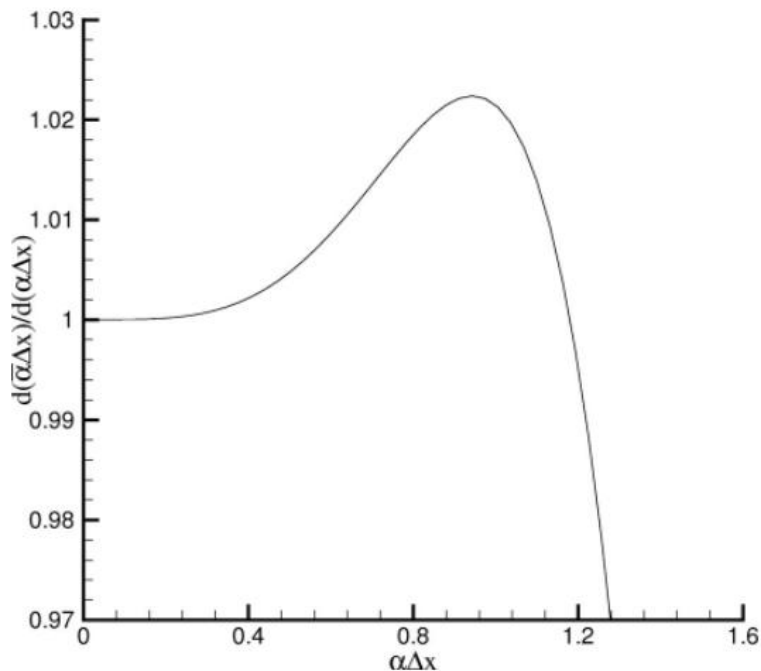


Figura 3.2 - Comportamento da velocidade grupo para um determinado esquema de diferenças finitas. Fonte: (TAM, 2013)

Para este caso as ondas conseguem viajar 2% mais rápido do que no problema original, o que significa uma grande dispersão na solução.

Uma comparação da velocidade de grupo de dois esquemas de diferenças finitas é apresentado na Figura 3.3, onde se está comparando um esquema otimizado de quarta ordem, de 7 pontos e um esquema centrado tradicional, de igual ordem e número de pontos. Na figura é notável a melhoria na dispersão para o esquema otimizado. A otimização do esquemas foi feita para uma faixa de valores de  $\alpha$  de 0 a 0.8.

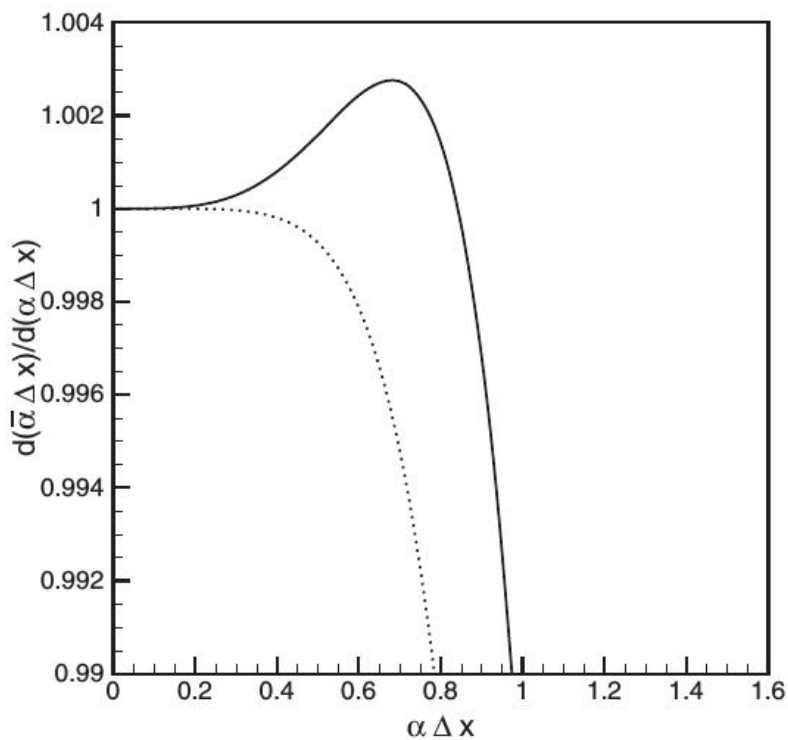


Figura 3.3 - Comportamento da velocidade grupo para um esquema otimizado de quarta ordem de 7 pontos e um esquemas, de igual ordem e mesmo número de pontos, central tradicional. **Fonte:** (TAM, 2013)

Na seguinte tabela 3.1, tomada do livro (TAM, 2013) sobre métodos computacionais em aeroacústica, encontra-se um comparação dos diferentes esquemas otimizados de diferentes ordens, mostrando a resolução junto com o  $\alpha_c$  de cada esquema.

Quanto à dissipação, os esquemas centrados de diferenças finitas não apresentam dissipação sendo somente dispersivos. Contrariamente, os sistemas descentrados apresentam tanto dissipação quanto dispersão (TAM, 2013). Numa simulação numérica

Tabela 3.1 - Características de diferentes esquemas de discretização espacial.

Esquema	$\alpha_c \Delta x$	Resolução
Segunda ordem	0.30	21.0
Quarta ordem	0.60	10.5
Sexta ordem	0.85	7.4
Otimizado de quarta ordem	0.95	6.6

de sistemas complexos onde a solução analítica do problema não é conhecida, é indispensável o uso de métodos não centrados para calcular as derivadas nas fronteiras, levando consigo, além da dispersão, a dissipação do esquema.

Esta metodologia de obter esquemas otimizados levou a uma nova família de métodos numéricos de discretização espacial, desenvolvidos para aeroacústica, conhecidos como esquemas DRP (Dispersive relation preserving, em inglês), porque conseguem preservar melhor as relações de dispersão  $D(\alpha, w)$  dos fenômenos simulados. Como a otimização é feita para os parâmetros  $\alpha$  e  $w$ , o esquema DRP consegue minimizar os erros de dispersão e dissipação, diferentemente dos métodos tradicionais que não foram obtidos com esse objetivo. Estes esquemas foram desenvolvidos para aeroacústica onde ondas de som de alta frequência e de amplitude suficientemente pequena são propagadas, sendo de muita importância os métodos de discretização usados.

Esta família de métodos especializados para aeroacústica não se limita a métodos de discretização espacial. Encontra-se na literatura uma grande variedade de métodos para discretizar os termos temporais, como Runge-Kutta, filtros numéricos, métodos de diferenças finitas descentrados, todos especializados em manter a dispersão e dissipação o menor possível, garantido assim uma correta discretização e solução do problema.

### 3.1.2 Esquemas de discretização compactos

Outra abordagem para a discretização espacial para abordar problemas da mecânica dos fluidos foi proposta por Lele (LELE, 1992), o qual formula um esquema implícito onde se tem uma dependência global de todos os pontos da discretização. Para calcular a derivada num ponto do domínio com um esquema compacto é preciso calcular as derivadas em todos os demais pontos do domínio, existindo uma dependência global. Para a solução de um esquemas compacto faz-se necessário resolver uma matriz com todos os pontos do domínio, o que faz com que este tipo de esquemas tenha um maior custo computacional em comparação com um esquema explícito

apresentado na seção anterior. O esquema proposto por Lele é uma generalização do esquema Pade ou de diferenças finitas, e pode ser escrito como:

$$\beta f'_{i-2} + \alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} + \beta f'_{i+2} = c \frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6\Delta x} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4\Delta x} + a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}, \quad (3.12)$$

onde  $f'$  é a derivada com relação a  $x$  no ponto  $i$  do domínio discretizado, os coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os coeficientes a serem determinados ao serem comparados com a série de Taylor para uma determinada precisão. As seguintes relações foram obtidas:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 + 2\alpha + 2\beta \text{ para segunda ordem,} \\ a + 2^2b + 3^2c &= 2 \frac{3!}{2!} (\alpha + 2^2\beta) \text{ para quarta ordem,} \\ a + 2^4b + 3^4c &= 2 \frac{5!}{4!} (\alpha + 2^4\beta) \text{ para sexta ordem,} \\ a + 2^6b + 3^6c &= 2 \frac{7!}{6!} (\alpha + 2^6\beta) \text{ para oitava ordem,} \\ a + 2^8b + 3^8c &= 2 \frac{9!}{8!} (\alpha + 2^8\beta) \text{ para decima ordem.} \end{aligned}$$

Estes esquemas conseguem ser mais precisos que os esquemas tradicionais, representado melhor as ondas curtas, devido a dependência global que implica sua formulação. Esta dependência tenta imitar um esquema espectral, ideal para ondas curtas, onde se tem uma dependência total de todos os pontos do domínio. Em comparação com os métodos DRP seus resultados são bastante similares quando os esquemas são da mesma ordem. Isto porque os esquemas DRP são otimizados para trabalhar melhor com as menores faixas de  $\alpha$ , com ondas longas. Sua diferença encontra-se no tempo de computação do esquema compacto em comparação a um esquema explícito.

Lele demonstrou que é possível alcançar um esquema compacto de ordem 8, no qual uma matriz tridiagonal deve ser resolvida quando:

$$\alpha = \frac{3}{8}, \quad \beta = 0, \quad a = \frac{14}{9}, \quad b = \frac{1}{9}, \quad c = 0.$$

Esta é a maior ordem alcançada por um esquema compacto tridiagonal, alcançando-se maiores ordens com esquemas pentadiagonais como foi mostrado por Lele. O esquema anterior tridiagonal pode ser resolvido sem a necessidade de inverter uma



matriz com ajuda de algoritmos especializados como o algoritmo de Thomas, diminuindo o custo computacional dos esquemas compactos.

### 3.2 Esquemas de discretização temporal.

Entre os esquemas temporais mas usados para a solução de problemas de aeroacústica, encontram-se os esquemas de um passo temporal de múltiplas etapas e esquemas de múltiplos passos. A maior diferença entre estes dois tipos de esquemas é que os esquemas de múltiplos passos conseguem manter melhor preservadas as relações de dispersão (TAM et al., 1993), o que para o tipo de problema que se esta resolvendo, numa primeira aproximação, seria a melhor escolha.

#### 3.2.1 Esquemas de discretização temporal de um passo.

Primeiramente serão apresentados os esquemas Runge-Kutta tradicionais, que tem sido usados para resolver problemas na mecânica dos fluidos, da forma:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{u}). \quad (3.13)$$

Um esquema de Runge-Kutta de quarta ordem para resolver a equação (3.13), pode ser generalizado pela equação:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \sum_{j=1}^4 w_j \mathbf{k}_j, \quad (3.14)$$

com

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{u}^{(n)})\Delta t, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{F}(\mathbf{u}^{(n)} + \beta_2 \mathbf{k}_1)\Delta t, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{F}(\mathbf{u}^{(n)} + \beta_3 \mathbf{k}_2)\Delta t, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{F}(\mathbf{u}^{(n)} + \beta_4 \mathbf{k}_3)\Delta t, \quad (3.18)$$

onde  $n$  indica o nível de tempo atual,  $\beta_2, \beta_3, \beta_4$  e,  $w_j$  são os coeficientes a serem determinados usando a expansão de Taylor para um  $\Delta t$  pequeno, mantendo os termos necessários para ser um esquema de quarta ordem  $(\Delta t)^4$ .

Para um esquema tradicional de quarta ordem estes coeficientes são dados por :

$$\beta_2 = \beta_3 = \frac{1}{2}, \quad \beta_4 = 1, \quad (3.19)$$

e

$$w_1 = w_4 = \frac{1}{6}, \quad w_2 = w_3 = \frac{1}{3}.$$

Hu em (HU et al., 1996), que desenvolveu a metodologia usada para as condições não reflexivas tipo PML para problemas da mecânica dos fluidos e aeroacústica, propôs outros coeficientes para o esquema temporal Runge-Kutta de quarta ordem, tentando obter a menor dissipação e dispersão possível, e chamou estes esquemas de LDDRK (low dissipatio and low dispertion runge-kutta, em inglês). Para achar estes coeficientes do esquemas temporal, Hu baseou-se na equação de onda para uma dimensão, tentando manter, como foi feito nos esquemas DRP, a relação de dispersão. A otimização feita por Hu, parte da definição do fator de amplificação do esquema de Runge-Kutta, considerando este como a relação da solução numérica no tempo  $n + 1$  e no tempo  $n$  da transformada de Fourier da equação (3.18), a qual leva o problema ao domínio do número de onda.

A transformada espacial de Fourier da equação unidimensional de onda, como foi apresentada em capítulos anteriores, é dada por:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + iv\tilde{\alpha}\tilde{u} = 0, \quad (3.20)$$

onde  $\tilde{\alpha}$  foi definido como o  $\alpha$  efetivo do esquema e  $\tilde{U}$  e a transformada espacial de  $U$ , logo é possível aplicar o esquema (3.18), obtendo:

$$\tilde{U}_k^{(n+1)} = \tilde{U}_k^{(n)} \left( 1 + \sum_{j=1}^N (c_j (-iv\tilde{\alpha}\Delta t)^j) \right) = 0, \quad (3.21)$$

onde os  $c_j$  são os coeficientes a serem determinados, os quais estão relacionados com os  $\beta_j$  para um esquema de quarta ordem por:

$$\begin{aligned} c_1 &= \sum_{j=1}^4 w_j, & c_2 &= \sum_{j=2}^4 w_j \beta_j, \\ c_3 &= w_3 \beta_3 \beta_2 + w_4 \beta_4 \beta_3, & c_4 &= w_4 \beta_4 \beta_3 \beta_2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Agora pode ser definido o fator de amplificação como:

$$r = \frac{\tilde{U}_k^{(n+1)}}{\tilde{U}_k^{(n)}} = 1 + \sum_{j=1}^N (c_j (-iv\tilde{\alpha}\Delta t)^j) = 0. \quad (3.23)$$

O fator de amplificação exato para a equação de onda é dado por  $r_e = e^{-iv\tilde{\alpha}\Delta t}$ . Para comparar o fator de amplificação exato com o fator do método, define-se a relação:

$$\frac{r}{r_e} = |r|e^{i\delta}, \quad (3.24)$$

com  $\delta = v\tilde{\alpha}$ . Definido assim da equação (3.24) o erro de dissipação  $|r|$  e o erro de dispersão como  $\delta$ , os quais para uma solução exata obtida pelo esquema temporal deveriam ser 1 e 0 respectivamente.

Hu propôs que a otimização seja realizada minimizando a função  $|r - r_e|^2$  como função de  $c\tilde{\alpha}$ , minimizando assim a soma do erro por dispersão e dissipação. Logo os coeficientes  $c_j$  do esquema (3.21) podem ser determinados com:

$$\int_0^\Gamma \left| 1 + \sum_{j=1}^4 (c_j (-i\delta)^j) - e^{-i\delta} \right|^2 d\delta = MIN, \quad (3.25)$$

onde  $\Gamma$  é o intervalo de  $\tilde{\alpha}$  onde será feita a otimização.

Hu (HU et al., 1996), encontrou os valores para os  $c_j$  para a otimização do esquemas de quarta ordem tradicionais, obtidos ao resolver a (3.25), sendo:

$$c_1 = 1.0 \quad c_2 = 0.5, \quad c_3 = 0.162997, \quad c_4 = 0.0407574$$

usando os mesmos  $\beta$  do esquema de quarta ordem tradicional apresentados em (3.19), são determinados com ajuda da relações apresentadas em (3.22) os  $w_j$  para a equação (3.18), sendo:

$$w_1 = w_4 = 0.1630296, \quad w_2 = 0.348012, \quad w_3 = 0.3259288.$$

No mesmo artigo, Hu encontrou métodos de mais passos e maior precisão.

### 3.2.2 Esquemas de discretização temporal de um passo não linear

Seguindo com os métodos de Runge-Kutta, Berlan e Bogey (BERLAND et al., 2006) formularam um esquema de 6 etapas com baixo armazenamento, especializado em resolver problemas aeroacústica não lineares. Partindo da formulação de Williamson's para criar um Runge-Kutta, o esquema só precisa de dois locais de armazenamento para as variáveis. Esta formulação é apresentada em (3.26) e somente consegue alcançar uma precisão de um método de segunda ordem quando os operadores não são lineares.

$$\text{para } i = 1 \dots s \begin{cases} w_i = \alpha w_{i-1} + \Delta t F(u_{i-1}, t_i) \\ u_i = u_{i-1} + \beta_i w_i, \end{cases} \quad (3.26)$$

onde  $s$  é o número de etapas do método,  $u_0 = u^n$ ,  $u^{n+1} = u_s$ ,  $w_0 = 0$ ,  $t_i = (n + c_i)\Delta t$  e  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  são os coeficientes a serem determinados para o método.

Berlan e Boegey demonstraram que para um algoritmo de 6 etapas aplicado a operadores não lineares, consegue-se uma precisão da ordem quatro. Este algoritmo é chamado de RK46NL e os coeficientes  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  para este esquemas encontram-se na tabela 3.2.

Tabela 3.2 - Coeficientes do método rk46NL

$i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$c_i$
1	0.0	0.032918605146	0.0
2	-0.737101392796	0.823256998200	0.032918605146
3	-1.634740794341	0.381530948900	0.249351723343
4	-0.744739003780	0.200092213184	0.466911705055
5	-1.469897351522	1.718581042715	0.582030414044
6	-2.813971388035	0.27	0.847252983783

### 3.2.3 Esquemas de discretização temporal de múltiplos passos

No campo dos métodos de múltiplos passos o tempo de simulação total é discretizado por pequenos passos uniformes,  $\Delta t$ , similar ao que é feito nos esquemas espaciais. O avanço no tempo de variável  $u$  para um algoritmo de aproximação por diferenças finitas de quarta ordem de múltiplos passos pode ser escrito como:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \sum_{j=0}^3 b_j \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^{n-j}, \quad (3.27)$$

onde  $b_0, b_1, b_2$  e  $b_3$  são os coeficientes a serem determinados.

A equação (3.27) que está em um domínio discreto, pode ser levada ao domínio contínuo como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) = \mathbf{u} + \Delta t \sum_{j=0}^3 b_j \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{t} - \mathbf{j} \Delta \mathbf{t})}{\partial t}. \quad (3.28)$$

Para um esquema tradicional os coeficientes  $b_i$  são escolhidos de modo que a expressão anterior assegure um erro de truncamento de uma ordem determinada, quando é expandida em série de Taylor. Para um esquema de quarta ordem pode-se demonstrar que os coeficientes são:

$$b_1 = -3b_0 + \frac{53}{12}, \quad b_2 = 3b_0 - \frac{16}{3}, \quad b_3 = -b_0 \frac{23}{12}. \quad (3.29)$$

Para determinar o coeficiente  $b_0$ , como foi feito para os esquemas DRP espaciais e os Runge-Kutta, a transformada de Fourier da equação (3.28) é determinada tanto espacial como temporalmente, como

$$\tilde{\mathbf{u}} e^{i\omega \Delta t} = \tilde{\mathbf{u}} + \Delta t \sum_{j=0}^3 b_j e^{i\omega j \Delta t} (-i\omega \tilde{\mathbf{u}}). \quad (3.30)$$

onde  $\tilde{\mathbf{u}}$  é a transformada de Fourier de  $\mathbf{u}$ . Pode-se definir a frequência efetiva do esquema temporal como:

$$\bar{\omega} = \frac{i(e^{i\omega \Delta t} - 1)}{\Delta t \sum_{j=0}^3 b_j e^{i\omega j \Delta t}}. \quad (3.31)$$

Como foi feito com os esquemas DRP, pode-se definir o erro que é atingido quando é usado o esquema (3.28) para aproximar  $\frac{\partial}{\partial t}$ . Este erro é conhecido como erro de peso e é definido como:

$$\mathbf{E} = \int_{-\zeta}^{\zeta} \sigma [\mathbf{Re}(\bar{w}\Delta t - w\Delta t)]^2 + (1 - \sigma) [\mathbf{Im}(\bar{w}\Delta t - w\Delta t)]^2 d(w\Delta t), \quad (3.32)$$

onde  $\zeta$  define a faixa das frequências onde será feita a integração,  $\sigma$  é o peso na equação dos diferentes termos. Assim, a parte real representa o erro por dispersão do esquema e a parte imaginária representa o erro por dissipação, podendo ajustar o resultado da otimização para a dissipação o para a dispersão mudando o parâmetro de peso  $\sigma$ , atingindo-se diferentes resultados.

Substituindo-se o valor dos coeficientes dependentes de  $b_0$  obtidos (3.29), o erro  $E$  fica em função de  $b_0$ , o qual pode ser minimizado como:

$$\frac{d\mathbf{E}}{db_0} = 0 \quad (3.33)$$

Um caso específico é mostrado por Tam (TAM, 2013), onde para um esquema de quarta ordem otimizado, sugerem-se os parâmetros  $\sigma = 0.36$  e  $\zeta = 0, 5$ , levando a:

$$b_0 = 2.3025580888383, \quad b_1 = -2.4910075998482, \quad b_2 = 1.5743409331815, \\ b_3 = -0.3858914221716.$$

### 3.3 Comparação dos diferentes esquemas temporais e espaciais

A fim de avaliar os esquemas com respeito a sua dispersão, dissipação e eficiência e determinar qual seria o melhor a ser implementado para resolver o problema da camada de mistura, foram implementados todos os esquemas apresentados anteriormente para a resolver a equação de onda em um dimensão. Esta equação foi apresentada no capítulo anterior para a formulação da PML já que além de ser um problema bem determinado e simples cuja solução analítica é conhecida, apresenta características similares ao problema da camada de mistura em relação a ser um problema não estacionário, onde as relações de dispersão devem ser mantidas. É possível, assim realizar uma comparação dos diferentes esquemas e determinar qual apresenta as características mais adequadas para ser implementado.

A equação de onda em uma dimensão  $x$  é :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.34)$$

onde  $v$  é a velocidade de convecção. Para a discretização dos termos espacial e temporais foram implementados os seguintes esquemas:

Esquemas espaciais para $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$	Esquemas Temporais para $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Diferenças finitas centradas de ordem 4 (df4)</li> <li>• Diferenças finitas compactas de ordem 6 (compacta)</li> <li>• Diferenças finitas de relação de dispersão preservada de ordem 4 (drp)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Runge Kutta 4 passos, ordem 4 (rk4)</li> <li>• Baixa dispersão e Dissipação Runge-Kutta, ordem 4 (lddrk4)</li> <li>• Runge Kutta 6 passos, ordem 4 para operadores não lineares (rk46)</li> <li>• Múltiplos passos(mp)</li> </ul>

Entre parêntesis encontram-se a siglas usadas para apresentar os resultados nos gráficos seguintes. Todos os esquemas implementados tem a mesma ordem para fazer uma comparação adequada, com a exceção do método compacto, que consegue uma ordem maior com o mesmo número de pontos que um esquema de quarta ordem compacto, simplesmente usando um  $\alpha$  diferente na equação (3.12).

Para a avaliação transmitiu-se um pulso gaussiana de espessura media de  $3\Delta x$  e amplitude 1 da forma:

$$f(x) = 1 \exp\left(-\ln(2) \left(\frac{x}{3\Delta x}\right)^2\right). \quad (3.35)$$

A solução analítica para (3.34) é dada por:

$$u = 1 \exp\left(-\ln(2) \left(\frac{x-t}{3\Delta x}\right)^2\right). \quad (3.36)$$

O pulso foi transmitido desde  $x = 0$  até  $x = 500$ , com um  $\Delta x = 1.0$ . As fronteiras foram localizadas em  $\pm 1000\Delta x$  desde a origem para evitar reflexão do ruído numérico sobre elas. O passo temporal foi de  $\Delta t = 1.0$ , com exceção do método de múltiplos passo onde por questões de estabilidade o passo temporal teve que ser mudado para  $\Delta t = 0.1$ , o que levou este método a ser 10 vezes mais caro computacionalmente. Os

resultados obtido na transmissão do pulso são apresentados a seguir para  $t = 100$  e  $t = 400$  para os diferentes métodos, quanto maior o tempo, maior são os efeitos dissipativos e dispersivos. Para cada método temporal foram comparados os diferentes métodos espaciais, apresentado o erro absoluto em porcentagem com respeito à solução analítica para os dois diferentes tempos. Cada método apresenta características diferentes com respeito à dispersão e dissipação, sendo menor ou maior, segundo o método usado. Quanto maior a dispersão, mais o pulso estará atrasado ou adiantado com respeito à solução analítica. Com respeito à dissipação a amplitude do pulso será superior ou inferior a amplitude de 1 da solução analítica. O melhor método será então o que se assemelhe mais à solução analítica.

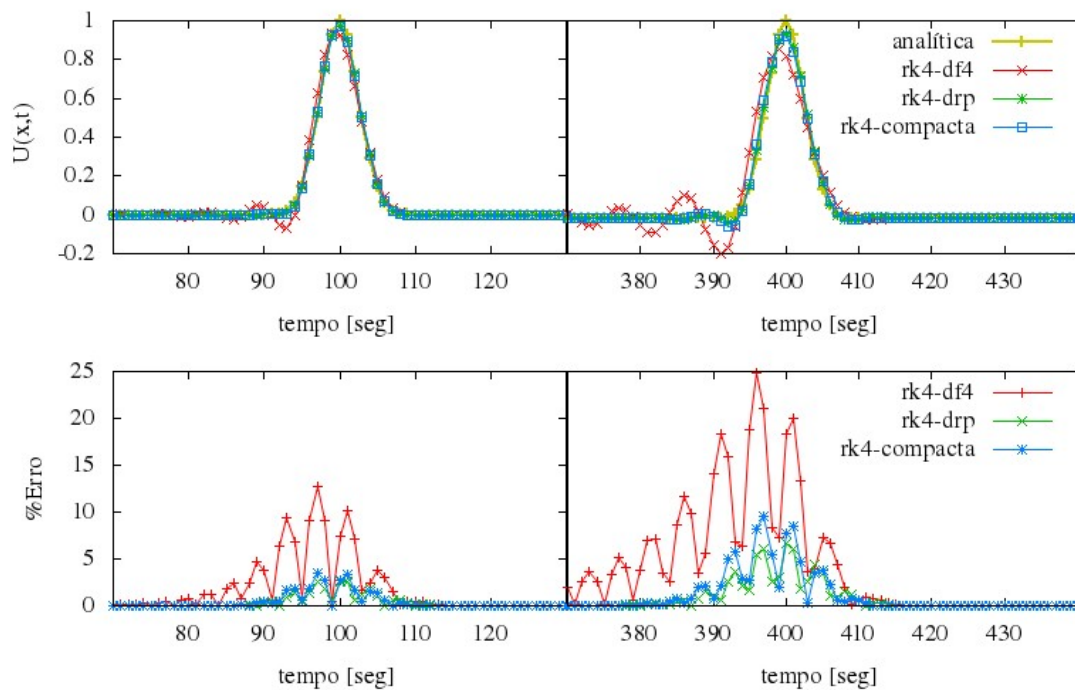


Figura 3.4 - Discretização temporal Runge-Kutta ordem 4 com diferentes discretizações espaciais para  $t=100$  e  $t=400$ , com seus respectivos erros absolutos.



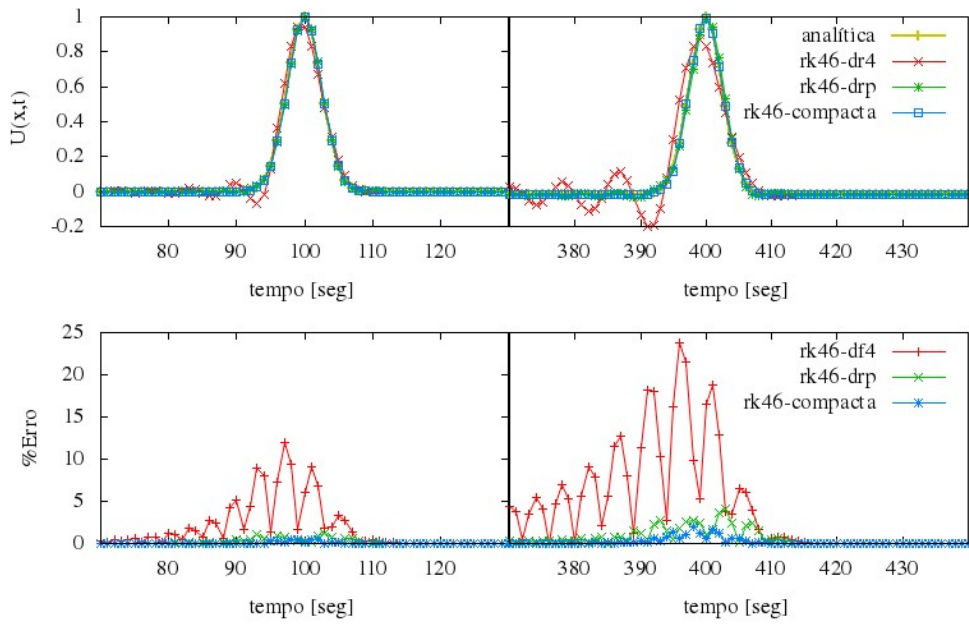


Figura 3.5 - Discretização temporal Runge-Kutta de 6 passos de ordem 4 para operadores não lineares, para as diferentes discretizações espaciais para  $t=100$  e  $t=400$ , com seus respectivos erros absolutos

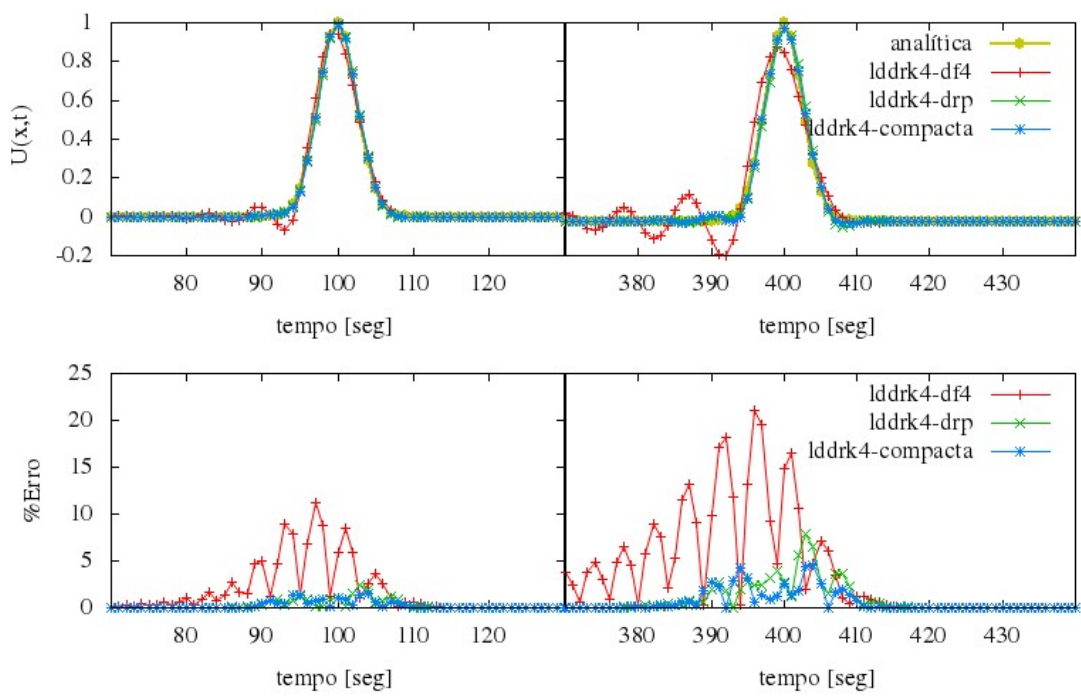


Figura 3.6 - Discretização temporal Runge-Kutta do tipo lddrk de ordem 4 para as diferentes discretizações espaciais para  $t=100$  e  $t=400$ , com seus respectivos erros absolutos

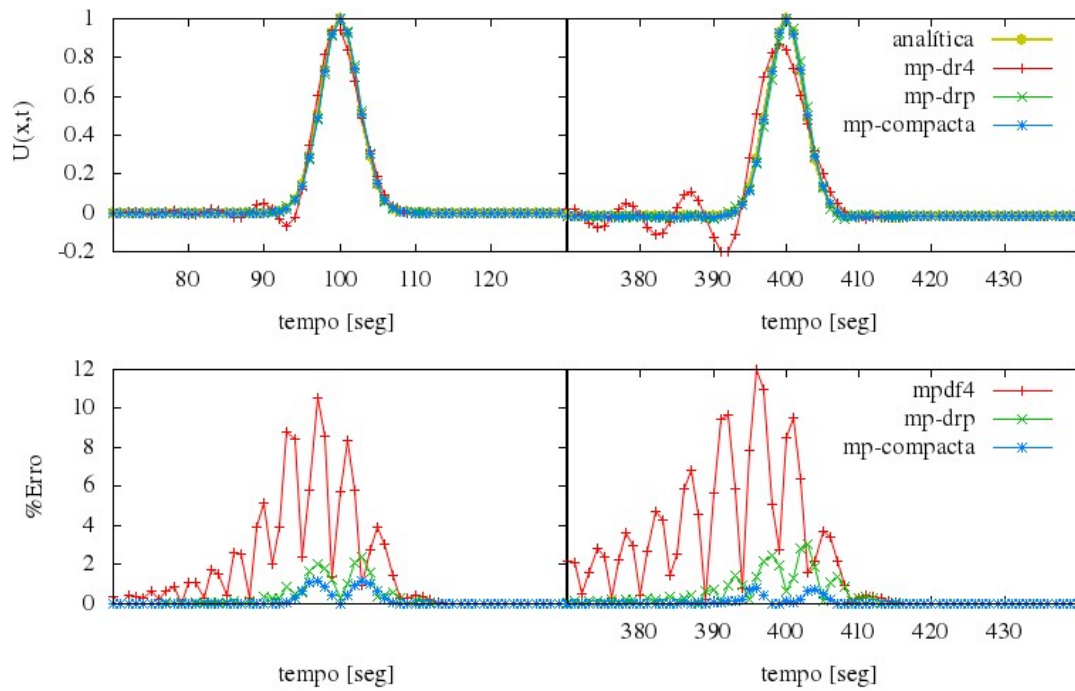


Figura 3.7 - Discretização temporal múltiplos passos de ordem 4 para as diferentes discretizações espaciais para  $t=100$  e  $t=400$ , com seus respectivos erros absolutos

É evidente em todos os gráficos apresentados anteriormente, que os métodos tradicionais tanto espaciais como temporais, apresentam as piores características com respeito a dispersão e dissipação, o que era de se esperar já que na sua formulação estas características não foram levadas em conta. Quanto aos métodos especializados em preservar as relações de dispersão, os resultados são notavelmente melhores e bastante similares entre si. Na Figura 3.8 serão comparados os erros absolutos dos diferentes métodos, desconsiderando os métodos tradicionais, para facilitar a comparação.

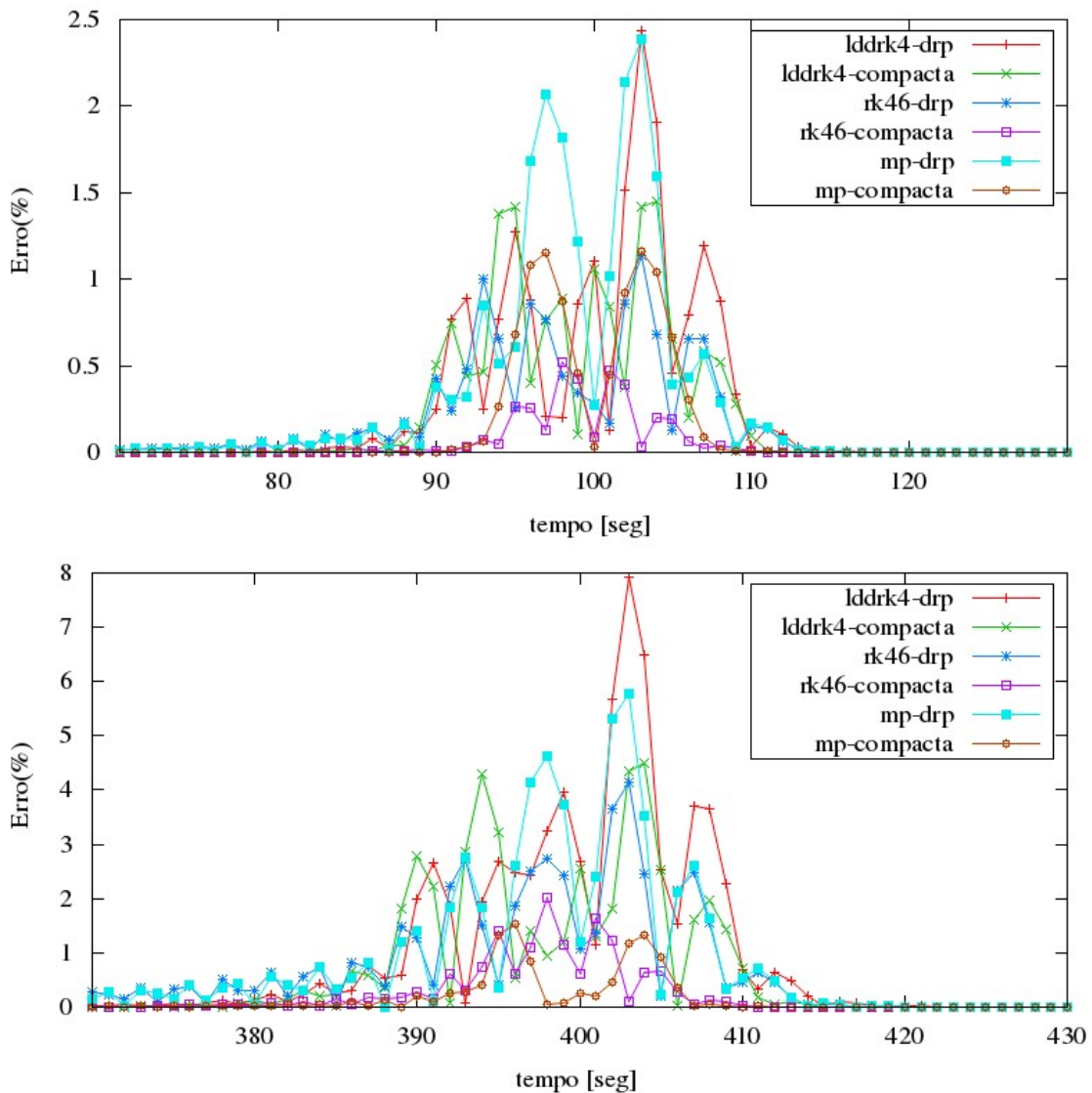


Figura 3.8 - Discretização temporal: rk com diferentes discretizações espaciais

Segundo os gráficos anteriores o melhor resultado foi obtido para o método compacto com o esquema temporal de Runge-Kutta de seis passos para operadores não lineares, apresentando a menor dispersão e dissipação do pulso gaussiano. Este esquema usa uma discretização espacial de sexta ordem em comparação com os outros esquemas usados, esperando desde um começo melhores resultados. O único problema do esquemas compacto encontra-se na necessidade de resolver uma matriz tridiagonal para cada iteração temporal, fazendo deste esquema mais caro computacionalmente em comparação aos outros esquemas avaliados. O segundo melhor esquema é o esquema DRP, também com o Runge-Kutta de seis passos para operadores não line-

ares. Este segundo esquema explícito não é tão caro computacionalmente como o de diferenças compactas e os resultados são comparativamente similares. Por estas características foram escolhidos o DRP para a discretização espacial e o Runge-Kutta de seis passos para a discretização temporal, para ser implementado na solução da equação de Euler.

### 3.4 Filtro

Como pode ser observado na seção de discretização espacial no gráfico 3.1, nenhum dos esquemas apresentados tem boa resolução para números de ondas próximos de  $\pi\Delta x$ . Os erros numéricos produzidos pelos métodos usados na discretização tanto espacial como temporal, crescem ao longo do tempo formando um conjunto de oscilações de grande número de onda. O mesmo acontece com os erros produzidos pelas reflexões nas fronteiras. Estas oscilações crescentes, interagem não linearmente entre si e com a solução da simulação. Quando a resolução da malha não consegue resolver estas oscilações, um erro de baixo número de onda é introduzido que eventualmente contaminará a solução. Para eliminar este tipo de oscilações que podem produzir instabilidade numérica, se propõe a introdução de dissipação artificial através de termos dissipativos nas equações governante ou através de filtros numéricos que afetem unicamente as ondas curtas, de grande número de onda. Para esta dissertação foram adotados os filtros numéricos por serem mais eficientes e para não introduzir termos adicionais que poderiam afetar a estabilidade da PML. Os filtros numéricos podem ser explícitos, ou compactos, sendo os explícitos de maior eficiência e mais fácil aplicação. O esquema para um filtro centrado de  $2n + 1$  pontos para uma malha uniforme aplicado a variável  $\mathbf{u}$  pode ser representado por:

$$\mathbf{u}^f(x_0) = \mathbf{u}(x_0) - \sigma_d D_u(x_0) \quad \text{com} \quad D_u(x_0) = \sum_{j=-N}^N d_j u(x_0 + \Delta x) \quad (3.37)$$

onde  $d_j$  são os coeficientes a serem determinados, sendo  $d_j = -d_j$  assegurando, ao contrário do que acontece nos esquemas espaciais, que o esquema é não dispersivo e  $\sigma_d$  é o coeficiente de absorção, definido entre 0 e 1. Assim como é feito com os esquemas de diferenças finitas para a discretização espacial, os coeficientes  $d_j$  são determinados expandindo a equação anterior em série de Taylor para uma determinada ordem. A transformada de Fourier da Equação (3.37) é definida como:

$$D_\alpha(\alpha\Delta x) = d_0 + \sum_{j=1}^N 2d_j \cos(j\alpha\Delta x), \quad (3.38)$$

onde  $D_\alpha(\alpha\Delta x = 0) = 0$  e  $D_\alpha(\alpha\Delta x = \pi) = 0$ .  $D_\alpha(\alpha\Delta x)$  representa a quantidade de dissipação para qualquer número de onda. Bogey e Bailly (BOGEY; BAILLY, 2004) propuseram encontrar estes coeficientes minimizando a integral de dissipação definida como:

$$\int_a^b D_\alpha \alpha \Delta x d(\ln(\alpha \Delta x)), \quad (3.39)$$

onde  $a$  e  $b$  definem a faixa de valores onde sera feita a minimização. Diferentes tipos de filtros, de diferente ordem foram definidos em (BOGEY; BAILLY, 2004). São apresentado a seguir os coeficientes  $d_j$  para o filtro de quarta ordem de 13 pontos que foi implementado para resolver as equações de Euler.

Tabela 3.3 - Coeficientes para filtro de ordem 4, de 13 pontos obtidos pelo Bogey e Bailly.

$d_0$	0.190899511506
$d_1$	0.171503832236
$d_2$	0.123632891797
$d_3$	0.069975429105
$d_4$	0.029662754736
$d_5$	0.008520738659
$d_6$	0.001254597714

Na Figura 3.9 são apresentados os resultados da simulação numérica da equação não linear de Euler para uma camada de mistura, com e sem o uso do filtro numérico.

Como é evidente o filtro numérico é indispensável na simulação numérica e será aplicado para todas as soluções numéricas da equação de Euler apresentadas nesta dissertação.

Estes e outros resultado das solução da equação de Euler com a implementação da PML e demais condições de fronteira podem ser encontrados no capítulo seguinte.

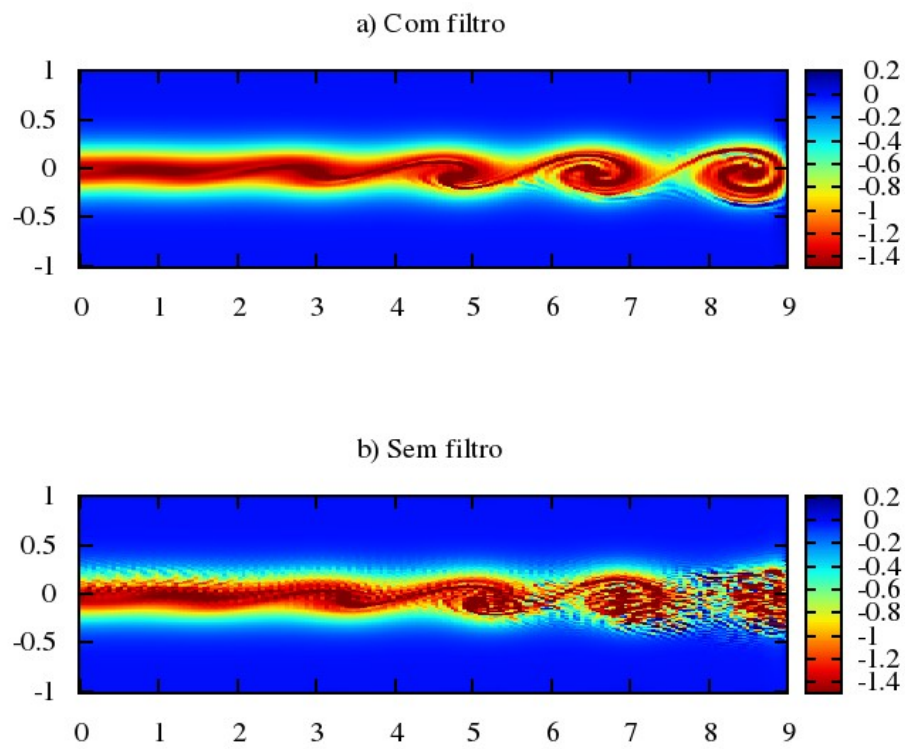


Figura 3.9 - a) Implementação do filtro de ordem 4 para a solução numérica da equação não linear de Euler b) Solução numérica da equação não linear de Euler sem uso de filtro.

## 4 Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos para a solução numérica das equação de Euler, com os diferentes tipos de condições de fronteira e métodos numéricos que tem sido apresentados nesta dissertação.

A implementação das condições de fronteira não reflexivas para a simulação da camada de mistura foi feita por passos. Começou-se primeiramente com a comparação entre a solução analítica que possui a equação linear de Euler para um escoamento uniforme e a solução numérica, implementados os métodos numéricos apresentados na seção anterior. Uma vez confirmado que a solução numérica estava correta, procedeu-se à implementação da PML e os outros tipos de condições de fronteira não reflexivas para sua comparação, na solução da equação linear de Euler para a transmissão de um pulso de pressão em um escoamento uniforme. Para garantir um bom funcionamento dos diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas implementadas comparou-se suas soluções com um escoamento de referência, onde nenhum tipo de condição não reflexiva foi implementado, no qual as fronteiras estão afastadas o suficiente para não afetar a solução com a reflexão dos diferentes tipos de onda suportados pela equação de Euler.

Em seguida foi resolvida a equação linear de Euler para um escoamento não uniforme do tipo camada de mistura e foram implementados os diferentes tipos de condições não reflexivas, comparando a efetividade dos diferentes métodos.

Finalmente, com o intuito de fazer uma avaliação mais completa das condições não reflexivas propostas nesta dissertação, foi resolvida a equação não linear de Euler para um escoamento tipo camada de mistura, implementada a PML e outras condições não reflexivas.

As condições de fronteira não reflexivas foram implementadas em todas as fronteiras do domínio, para a equação de Euler, definindo os parâmetros do domínio de acordo com a Figura 4.1, onde ‘cnr’ representa o tipo de condição de fronteira implementado,  $D_x = D\Delta x$ ,  $D_y = D\Delta y$  são os tamanhos das fronteiras não reflexivas, e  $D$  é o numero de pontos da malha.

### 4.1 Comparação da solução analítica da equação de Euler linear para um escoamento uniforme com a solução numérica

Como ponto de partida para a solução dos diferentes tipos de problemas resolvidos com a equação de Euler, a solução analítica para equação linear de Euler para

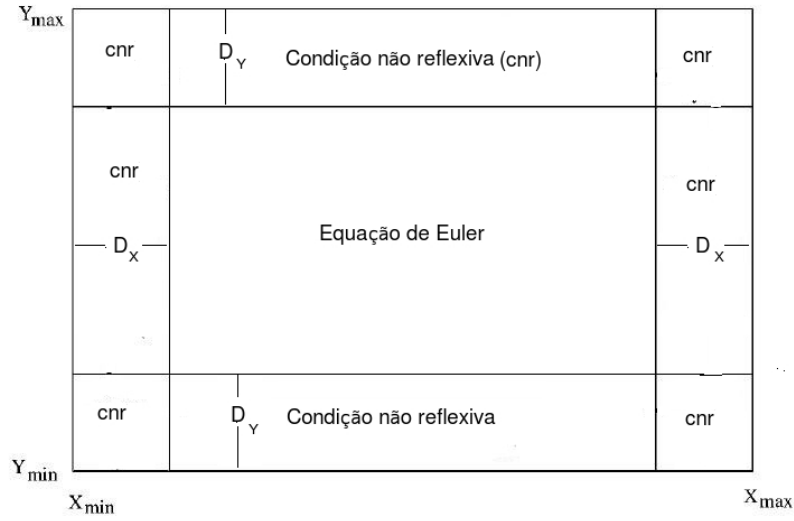


Figura 4.1 - Domínio de solução a equações de Euler com a implementação das condições de fronteira não reflexivas.

um escoamento uniforme com  $M=0.5$ , foi determinada e comparada com a solução numérica quando um pulso acústico é fornecido.

A solução analítica para as ondas acústicas para a equação linear de Euler para um escoamento uniforme é dada por:

$$u(t, x, y) = \frac{\epsilon(x - Mt)}{2\alpha} \int_0^\infty e^{-\frac{\epsilon^2}{4\alpha}} \sin(\epsilon t) J_1(\epsilon \eta) \epsilon d\epsilon, \quad (4.1)$$

$$v(t, x, y) = \frac{\epsilon y}{2\alpha} \int_0^\infty e^{-\frac{\epsilon^2}{4\alpha}} \cos(\epsilon t) J_0(\epsilon \eta) \epsilon d\epsilon, \quad (4.2)$$

$$p(t, x, y) = \frac{\epsilon y}{2\alpha} \int_0^\infty e^{-\frac{\epsilon^2}{4\alpha}} \cos(\epsilon t) J_0(\epsilon \eta) \epsilon d\epsilon, \quad (4.3)$$

onde  $\epsilon$  e  $\alpha$  são parâmetros da condição inicial. Para fins da comparação entre a solução analítica e a solução numérica são usados como condições iniciais três pulsos gaussianos para os três diferentes tipos de ondas suportados pela equação de linear de Euler. Definindo a amplitude como  $A_0$ ,  $B_0$  e  $C_0$  e a espessura como  $\delta_a$ ,  $\delta_b$ ,  $\delta_c$  para os pulsos acústicos, de vorticidade e de entropia respectivamente. Nas equações (4.4) à (4.7) são definidas as inicializações de cada variável, onde  $x_a$ ,  $x_b$  e  $x_c$  representam os pontos de aplicação no domínio dos diferentes pulsos.



$$\begin{aligned} \rho = & A_0 \exp \left[ -\ln(2) \left( \frac{(x + x_a)^2 + (y + y_a)^2}{\delta_a} \right) \right] \\ & + C_0 \exp \left[ -\ln(2) \left( \frac{(x + x_c)^2 + (y + y_c)^2}{\delta_c} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$u = B_0 y \exp \left[ -\ln(2) \left( \frac{(x + x_b)^2 + (y + y_b)^2}{\delta_b} \right) \right], \quad (4.5)$$

$$v = -B_0(x - x_b) \exp \left[ -\ln(2) \left( \frac{(x + x_b)^2 + (y + y_b)^2}{\delta_b} \right) \right], \quad (4.6)$$

$$P = -A_0(x - x_b) \exp \left[ -\ln(2) \left( \frac{(x + x_b)^2 + (y + y_b)^2}{\delta_b} \right) \right]. \quad (4.7)$$

Para efeitos de comparação entre a solução numérica e a solução analítica os pulsos de vorticidade, de entropia e acústico tem uma amplitude unitária, uma espessura de 16 e foram localizados na origem do domínio.

Com o propósito de mostrar a necessidade das condições de fronteira não reflexivas neste tipo de problema, e mostrar também que os resultados das simulações numéricas comparadas com a solução analítica estão corretos, procedeu-se a solucionar a equação linear de Euler para um escoamento uniforme com dois tipos de domínios. O primeiro domínio tem o mesmo tamanho do domínio analítico e será nomeado como solução numérica 1. No segundo domínio as fronteiras estão localizadas o suficiente para as reflexões não afetarem a solução do problema, este é nomeado como solução numérica 2. Na tabela 4.1 são apresentados os diferentes parâmetros usados, tanto para a solução analítica como para as duas simulações numéricas.

As condições de fronteira implementadas para esta simulação foram definidas como:

$$\begin{aligned} x = X_{max}, \quad y = Y_{min} \quad \text{e} \quad y = Y_{max} & \rightarrow p = 0 \\ x = X_{min} & \rightarrow p = \rho = v = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Os resultados da comparação entre a solução analítica e as soluções numéricas da equação linear de Euler para a transmissão dos diferentes pulsos gaussianos num escoamento uniforme com  $M = 0.5$  são apresentados nas Figuras 4.2 e 4.3.

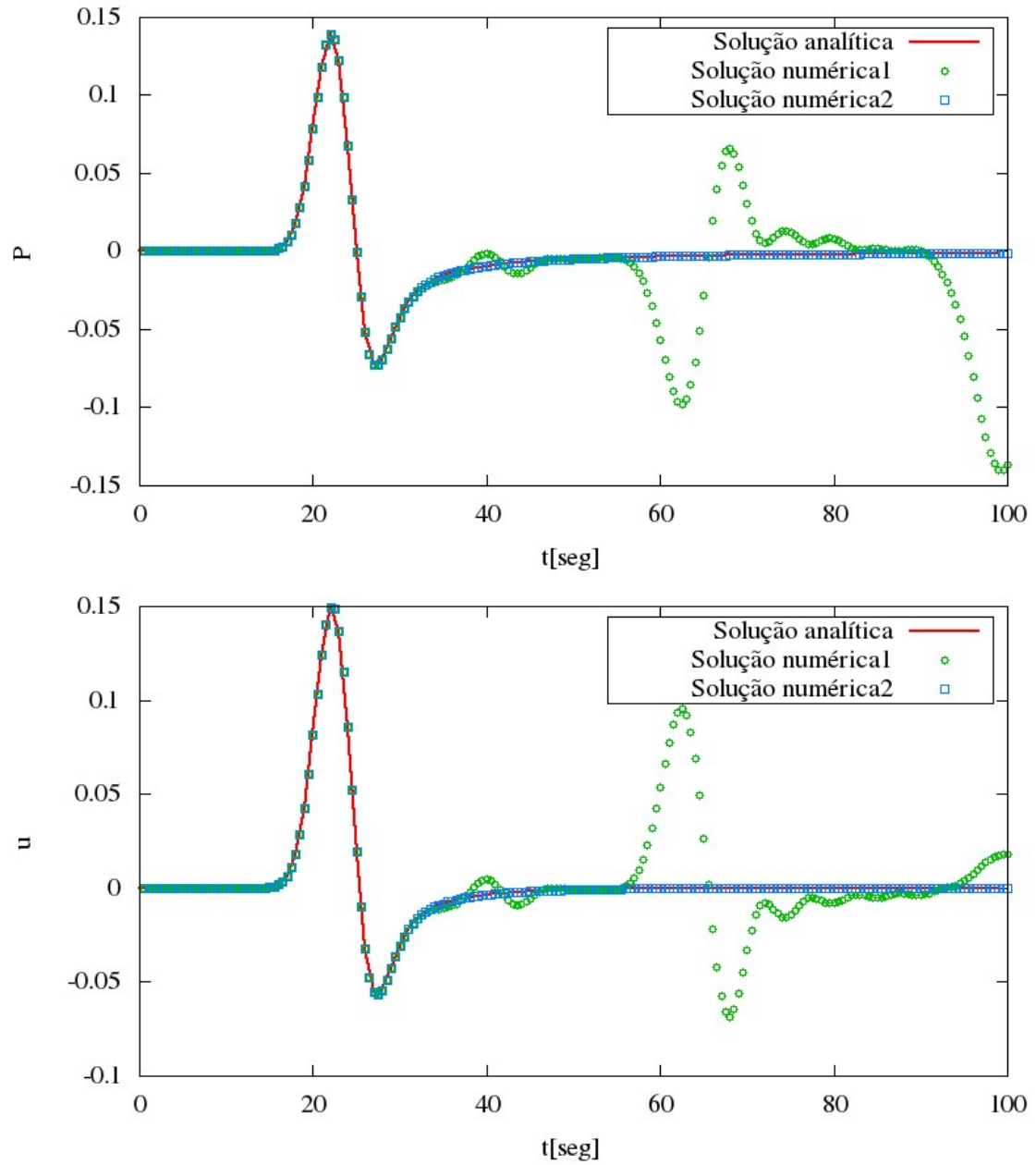


Figura 4.2 - Comparação da pressão e da velocidade  $u$  entre a solução analítica, a solução numérica 1 e a solução numérica 2, no ponto  $(x, y) = (35, 0)$  ao longo do tempo

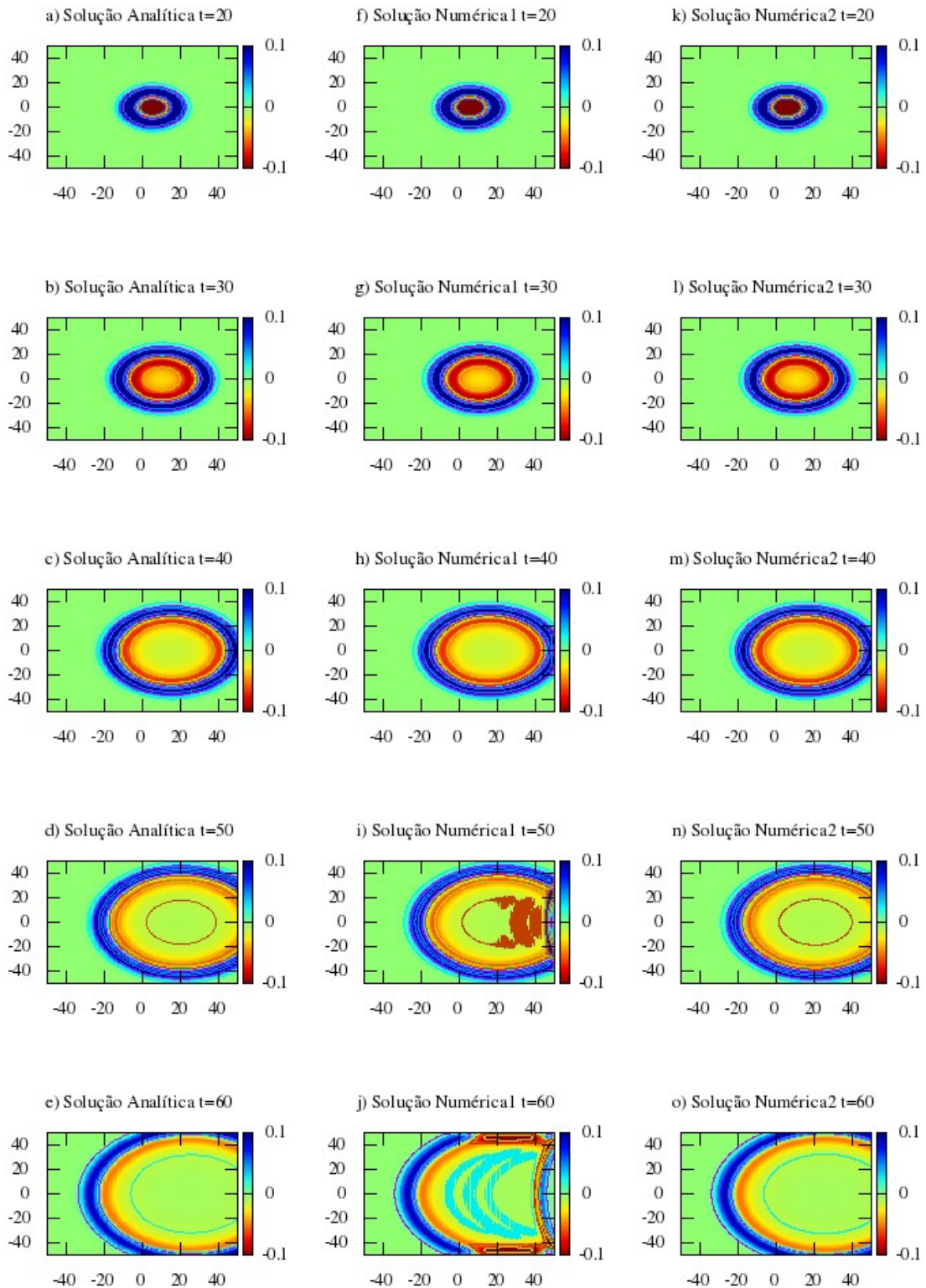


Figura 4.3 - Comparação dos contornos de pressão entre a solução analítica, a solução numérica 1 e a solução numérica 2, em diferentes tempos da solução da equação linear de Euler.

Tabela 4.1 - Parâmetros implementados para os diferentes domínios na solução da equação linear de Euler

<b>Parâmetros solução equação linear de Euler</b>			
	<b>solução analítica</b>	<b>solução numérica 1</b>	<b>solução numérica 2</b>
Método espacial	Não se aplica	Drp	Drp
Método temporal	Não se aplica	RK-46	RK-46
$(X_{min}, X_{max})$	(-50,50)	(-50,50)	(-200,200)
$(Y_{min}, Y_{max})$	(-50,50)	(-50,50)	(-200,200)
$(\Delta x, \Delta y)$	(1,1)	(0.5,0.5)	(0.5,0.5)
$\Delta t$	1	0.55	0.55

A Figura 4.2 mostra, a comparação das variáveis de pressão e velocidade  $u$  ao logo do tempo num ponto determinado para as diferentes soluções, mostrando claramente a magnitude das reflexões das ondas nas fronteiras do domínio numérico 1, e o bom ajuste que consegue a solução numérica 2 à solução analítica. A Figura 4.3 mostra os contornos de pressão para diferentes tempos no domínio todo, mostrando mais explicitamente como o pulso de pressão é convectado pelo escoamento uniforme, e o comportamento quando atinge as fronteiras da solução numérica 1. Na Figura 4.4 são apresentados os contornos de pressão para um tempo maior, podendo ser visto mais claramente a reflexão nas fronteiras, e como é afetada a solução.

A não utilização de nenhum tipo de condição de contorno especial como é o caso da solução numérica 2, onde se conseguiu uma solução correta, implica em usar um domínio grande, o qual é muito mais custoso de resolver computacionalmente. Com tudo, é possível definir o objetivo principal das diferentes condições de fronteira que serão implementadas nesta dissertação, que será conseguir a menor reflexão das ondas nas fronteiras, no menor domínio possível.

Na seção seguinte serão implementados os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas apresentados nesta dissertação para a solução da equação linear de Euler para o escoamento uniforme. Estes tipos de condições serão avaliados pela sua efetividade e sua eficiência computacional.

#### **4.2 Implementação Dos Diferentes Tipos de Condições Não Reflexivas para a Solução da Equação Linear de Euler Linear para um Escoamento Uniforme com $M = 0.5$ .**

Uma vez determinada a solução numérica da equação linear de Euler para um escoamento uniforme, implementaram-se as condições não reflexivas do tipo PML, zona

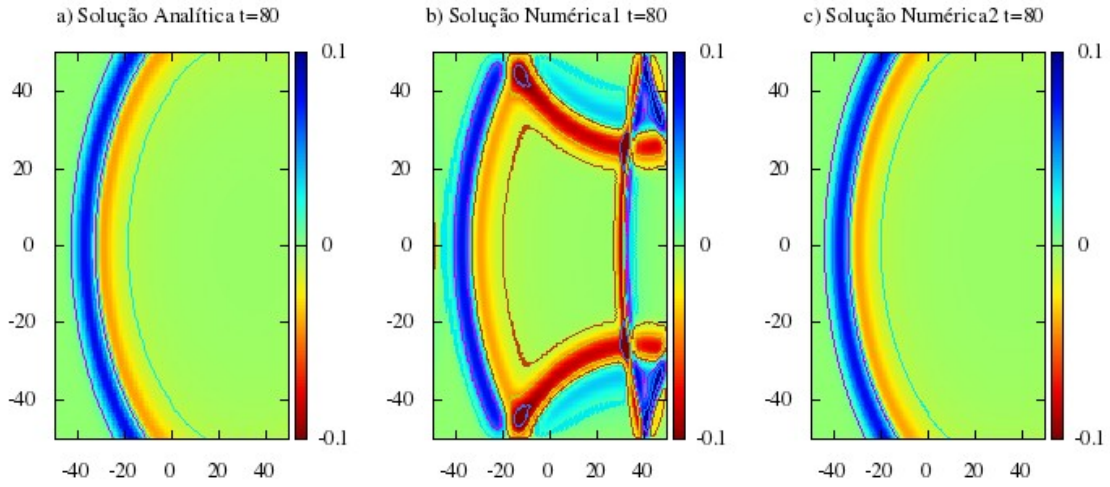


Figura 4.4 - Comparação dos contornos de pressão entre a solução analítica, a solução numérica 1 e a solução numérica 2, no tempo  $t = 80s$  da solução da equação linear de Euler. A figura b, mostra claramente como é afetado a onda de pressão pelas reflexões criadas nas fronteiras na solução numérica 1

de amortecimento (ZA), ETA e a ABC. Todas as condições de fronteira não reflexivas implementadas são do tipo zona de absorção, com exceção da ABC, que é definida como uma condição de fronteira tradicional ao solucionar a equação linear de Euler.

Para a PML como é recomendado por Hu (HU, 2001), é aplicado um estiramento de malha na zona da PML, definido como:

$$\alpha(n) = 1 + 2 \left| \frac{n - n_0}{D} \right|^2. \quad (4.9)$$

Este estiramento é aplicado usando a seguinte transformação nas equações da PML:

$$\frac{\partial}{\partial n} \rightarrow \frac{1}{\alpha(n)} \frac{\partial}{\partial n}. \quad (4.10)$$

O coeficiente de absorção  $\sigma$  usado nas equações da PML recomendado por Hu (HU,

Tabela 4.2 - Parâmetros PML para sua implementação na Equação linear de Euler para um escoamento uniforme.

<b>Parâmetros PML</b>	
Método espacial	DRP
Método temporal	RK-46
Filtro	Não Aplicado
$(X_{min}, X_{max})$	$(-60,60)$
$(Y_{min}, Y_{max})$	$(-60,60)$
$(\Delta x, \Delta y)$	$(1,1)$
$\Delta t$	0.5
$(\sigma_{mx}, \sigma_{my}, \beta, D)$	$(3/2, 2, 1, 10)$
Tamanho PML $(D_x, D_y)$	$(10, 10)$

2001) é definido como:

$$\sigma_n = \sigma_{m(n)} \left| \frac{n - n_0}{D} \right|^\beta, \quad (4.11)$$

onde  $\sigma_{m(n)}$  controla a intensidade da absorção dentro da PML e poder ser definido diferentemente tanto para  $x$  como para  $y$ . Os  $\sigma_{m(x)}$  e  $\sigma_{m(y)}$  foram escolhidos seguindo (HU, 2001). A função para  $\sigma_n$  varia de modo que a aplicação da PML não seja muito brusca na zona de absorção, o que produziria alguma reflexão e poderia desestabilizar a PML. Esta função pode ser linear ou quadrática dependendo do valor de  $\beta$ . Para as Equações (4.9), (4.10) e (4.11),  $n$  representa as variáveis  $x$ , e  $y$  conforme seja a direção de aplicação da PML. Os parâmetros usados para a implementação da PML na solução numérica da equação linear de Euler são resumidos na tabela 4.2.

Para a zona de amortecimento foi aplicada a seguinte definição do coeficiente de absorção proposta em (WASISTHO et al., 1997), onde  $\sigma$  é definido como:

$$\sigma_n = (1 - C_1 n_b^2) \left( 1 - \frac{1 - e^{C_2 n_b^2}}{1 - e^{C_2}} \right) \quad \text{com,} \quad n_b = \frac{n - n_s}{n_e - n_s}, \quad (4.12)$$

onde  $n_s$ ,  $n_e$ , são os pontos do domínio onde começa e acaba a zona de amortecimento, e  $n$  representa as coordenadas  $x$  e  $y$ , dependendo da direção de aplicação da condição de fronteira.  $C_1$  e  $C_2$  definem o modo de transição de  $\sigma$  dentro da zona de amortecimento, e encontram-se  $0 \leq C_1 \leq 0.1$  e  $10 \leq C_2 \leq 20$ . Vários valores de  $C_1$  e  $C_2$  foram testados quando foi usada a zona de amortecimento, apresentado nos parâmetros finais usados na condição o melhor valor destas constantes. Assim como

Tabela 4.3 - Parâmetros da zona de amortecimento para sua implementação na Equação linear de Euler para um escoamento uniforme.

<b>Parâmetros ZA</b>	
Método espacial	Drp
Método temporal	RK-46
Filtro	Não aplicado
$(X_{min}, X_{max})$	$(-60,60)$
$(Y_{min}, Y_{max})$	$(-60,60)$
$(\Delta x, \Delta y)$	$(1,1)$
$\Delta t$	0.5
$(C_1, C_2, D)$	$(0.01,20,10)$
Tamanho ZA $(D_x, D_y)$	$(10,10)$

foi aplicado na PML, na zona de amortecimento foi aplicado o mesmo estiramento de malha apresentado em (4.9). Os parâmetros finais escolhidos para aplicar na zona de amortecimento (ZA) à equação linear de Euler para um escoamento uniforme encontram-se na tabela 4.3.

Para a condição de fronteira não reflexiva tipo ETA foi aplicado o seguinte estiramento de malha:

$$n = dn \left( \frac{n - n_l}{dn} \right)^2 + n_l, \quad (4.13)$$

onde  $n_l$  é o ponto no domínio onde começa o estiramento, assim como nos casos anteriores  $n$  representa as coordenadas  $x$  e  $y$ , dependendo da direção da aplicação. Na tabela 4.4 são apresentados os parâmetros usados na implementação da ETA.

Finalmente foi implementada a condição de fronteira não reflexiva do tipo ABC na solução numérica da equação de Euler, simplesmente trocando as condições de fronteira apresentadas em (4.8) pela propostas pela condição ABC, mantendo os mesmos parâmetros apresentados na tabela 4.1.

Após de ter definido os parâmetros para os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas, foram comparados os resultados entre si e com respeito a um domínio de referência, no qual não se aplica nenhum tipo de condição não reflexiva e as fronteiras estão localizadas o suficientemente afastadas. Desta forma se garante com este domínio de referência que as reflexões nas fronteiras não interferem com a solução no domínio de interesse. Os parâmetros usados para o domínio de referência

Tabela 4.4 - Parâmetros da ETA para sua implementação na Equação linear de Euler para um escoamento uniforme.

<b>Parâmetros ETA</b>	
Método espacial	Drp
Método temporal	RK-46
Filtro	Aplicado cada 10 seg
$(X_{min}, X_{max})$	(-60,60)
$(Y_{min}, Y_{max})$	(-60,60)
$(\Delta x, \Delta y)$	(1,1)
$\Delta t$	0.5
$D$	10
Tamanho ETA $(D_x, D_y)$	(10,10)

Tabela 4.5 - Parâmetros domínio de referência para sua implementação na Equação linear de Euler para um escoamento uniforme.

<b>Parâmetros domínio referência</b>	
Método espacial	Drp
Método temporal	RK-46
Filtro	Aplicado a cada 10 seg
$(X_{min}, X_{max})$	(-260,260)
$(Y_{min}, Y_{max})$	(-260,260)
$(\Delta x, \Delta y)$	(1,1)
$\Delta t$	0.5

são apresentados na tabela 4.13.

Como primeiro passo da comparação, diferentes contornos de pressão para 5 diferentes tempos 30, 40, 50, 60 e 100 segundos são apresentados na figura 4.5. Nesta figura é claro que contorno que mais se assemelha ao contorno de referência é o da condição não reflexiva tipo ETA, eliminado completamente o pulso de pressão que a atinge. Também, na figura é possível ver as reflexões produzidas pela PML e pela ZA. Na tabela seguinte são apresentados os tempos computacionais para os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas.

Com o intuito de fazer uma comparação mais quantitativa, escolheu-se um ponto do domínio em  $x = 40$ , 10 pontos antes do começo dos diferentes tipos de condições de contorno, para 6 tempos diferentes, e foi mostrado o valor da pressão para os diferentes  $y$ , obtendo os gráficos apresentados na Figura 4.6. Na Figura 4.7 é mostrada a diferença entre a pressão calculada com os diferentes tipos de condições não reflexivas e a pressão calculada pelo domínio de referência, para os diferentes valores



Tabela 4.6 - Tempos computacionais em porcentagem do tempo da solução de referência para a solução linear da equação de Euler. Tempo de referência 770.47 segundos, usando um computador HP de processador I7VPRO de 6Gb de memória RAM.

<b>Tempos computacional</b>	
<b>Condição não reflexiva</b>	<b>tempo(%)</b>
PML	10.3
ETA	10.4
ZA	5.1
ABC	4.9

de  $y$  no ponto  $x = 40$ .

Nas Figuras 4.6 e 4.7, pode-se observar que a medida que o tempo passa a condição que mais se assemelha com a solução de referência é a ETA. No entanto, no começo a ETA apresenta uma maior diferença em relação à solução de referência. Este comportamento é explicado pela necessidade de se aplicar o filtro numérico a cada iteração temporal, o que faz com que a solução seja mais dissipada, em comparação aos outros tipos de condições. Os outros tipos de condições de fronteira apresentam comportamento muito similares, no começo a PML tem os melhores resultados, mas com o passar do tempo vai perdendo sua efetividade.

Uma comparação do tempo de computação de cada uma das condições também foi feita e é apresentado em porcentagem do tempo de computacional do domínio de referência. A única diferença nos códigos computacionais das diferentes condições não reflexivas encontra-se na aplicação da mesma, garantindo assim que a diferença no tempo é o tempo gastado por cada condição.

Como é evidente na tabela 4.7 as condições de fronteira mais eficientes computacionalmente são a ABC e a ZA, que precisam da metade do tempo em comparação a PML, e a ETA. No entanto a eficácia das condições menos custosas é menor na diminuição das reflexões. É possível aumentar a eficiência na diminuição das reflexões da ZA em função do tempo computacional, o que pode ser feito aumentando o tamanho da zona de absorção.

Tentando igualar o tempo computacional das condições do tipo PML, e ETA, propõe-se usar na ZA uma zona de absorção com  $D = 30$ . Os resultados do aumento do tamanho da zona de amortecimento são apresentados na Figura 4.8 onde são apresentados os contornos de pressão para diferentes tempos, fazendo-se evidente

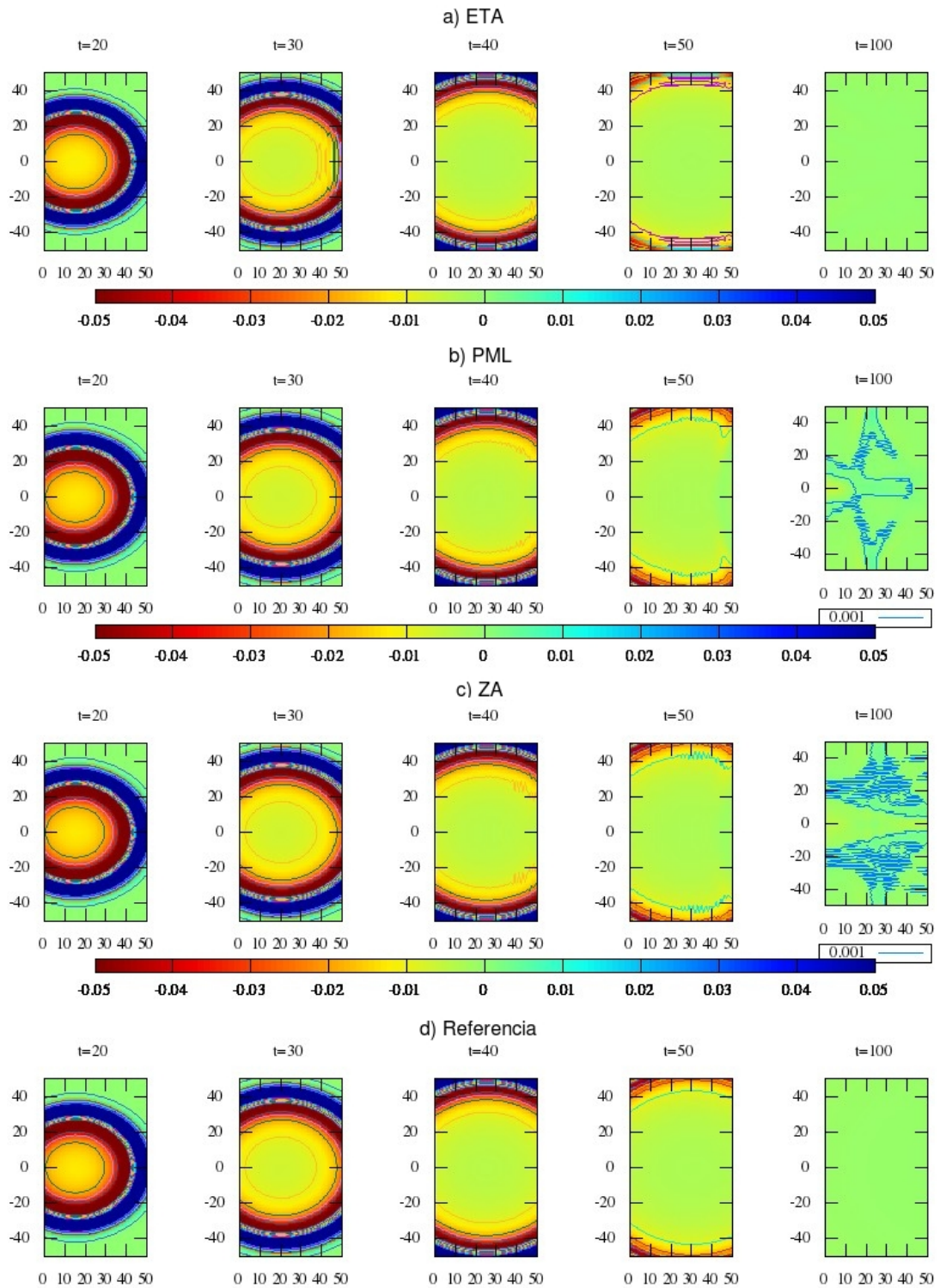


Figura 4.5 - Comparação dos contornos de pressão em diferentes tempos para a solução da equação linear de Euler para um escoamento uniforme com  $M=0.5$ , para 3 diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas e o domínio de referência. a) ETA, b) PML, c) ZA, d) domínio de referência.

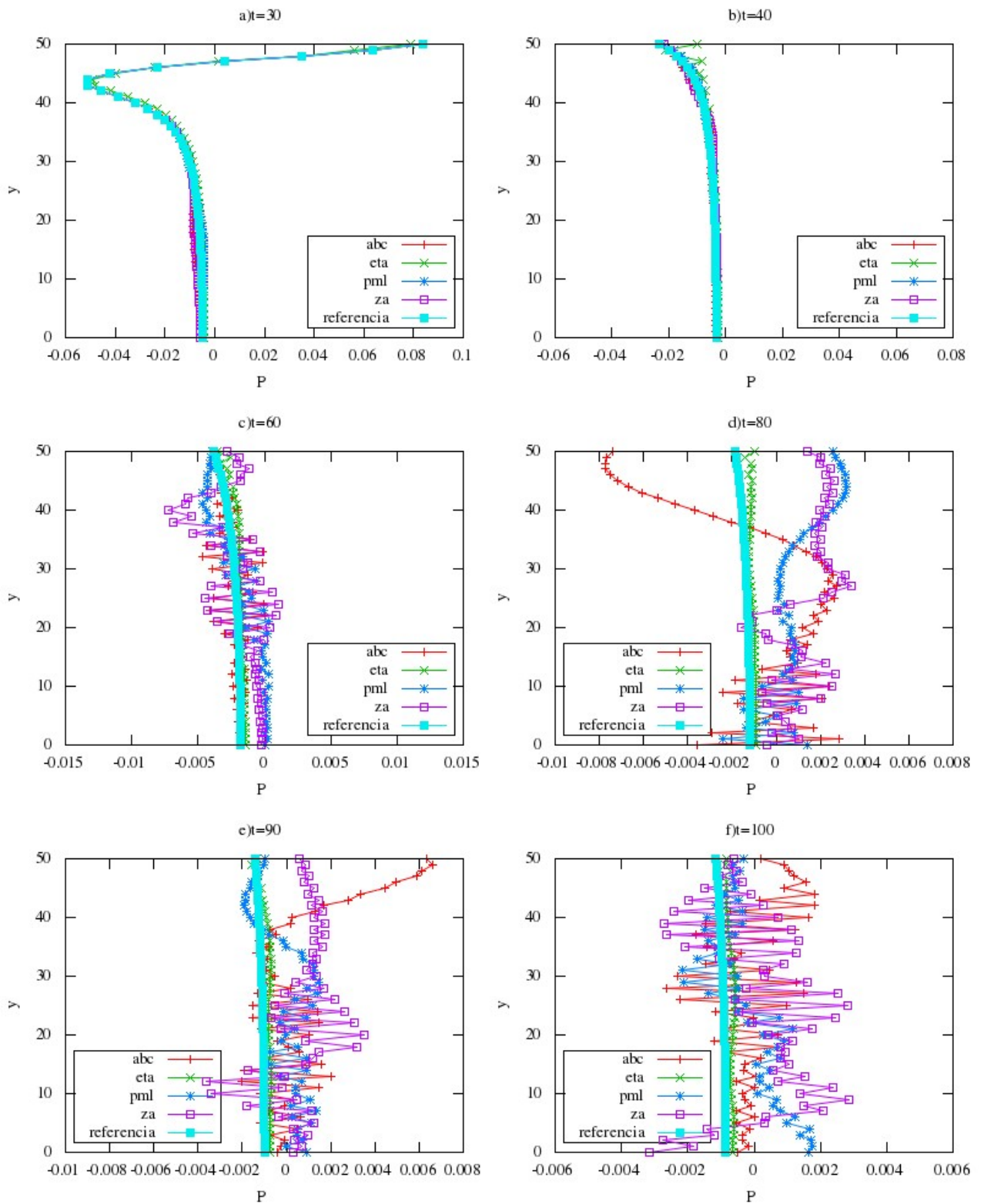


Figura 4.6 - Comparação da pressão medida em  $x = 40$  para diferentes  $y$  em múltiplos tempos, para as os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas e o domínio de referência.

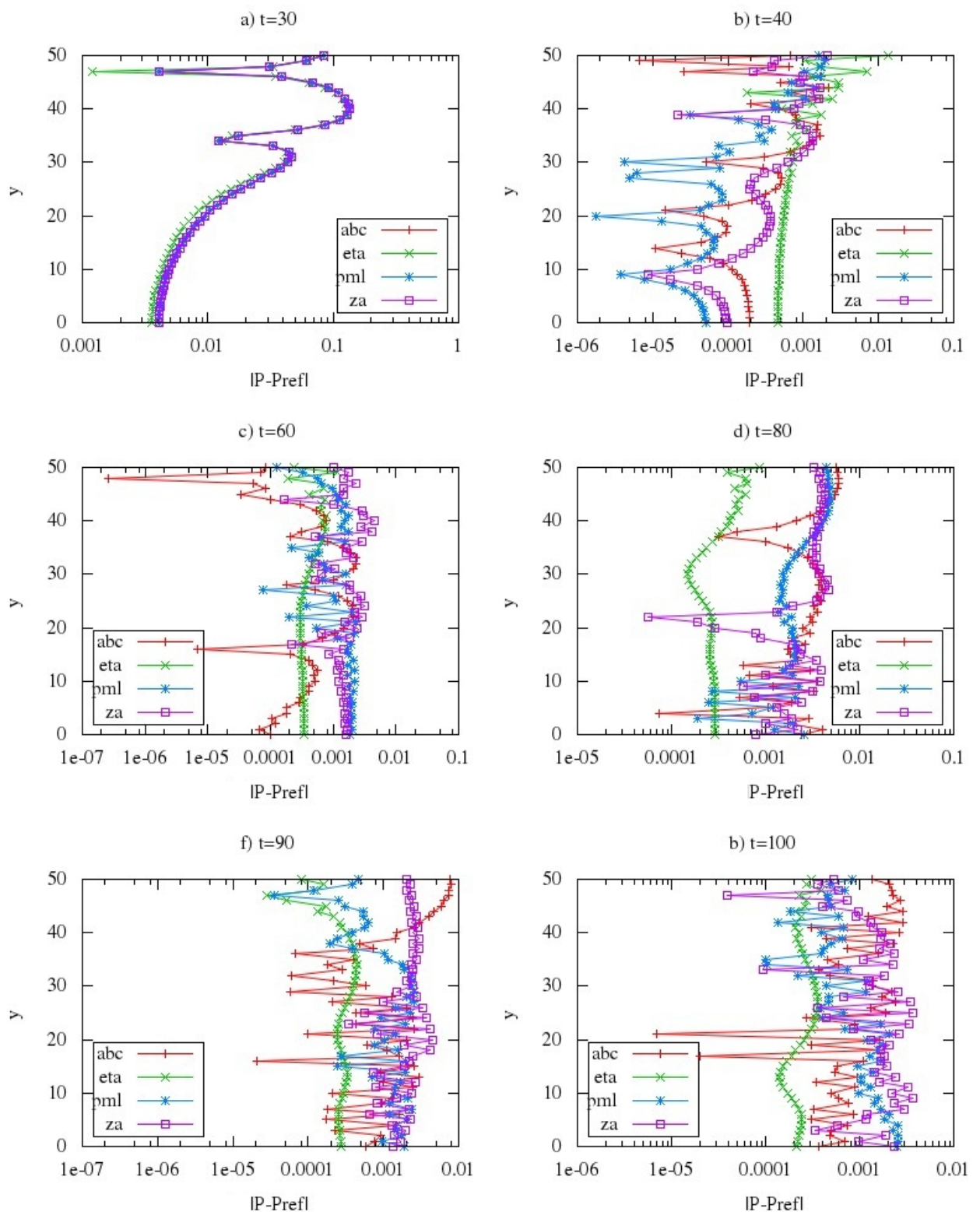


Figura 4.7 - Diferença de Pressão entre a pressão calculada usando os diferentes tipos de condições não reflexivas e a pressão calculada no domínio de referência. A pressão foi calculada no ponto  $x = 40$  para todos os  $y$  em diferentes tempos, para a solução da equação linear de Euler para um escoamento uniforme.

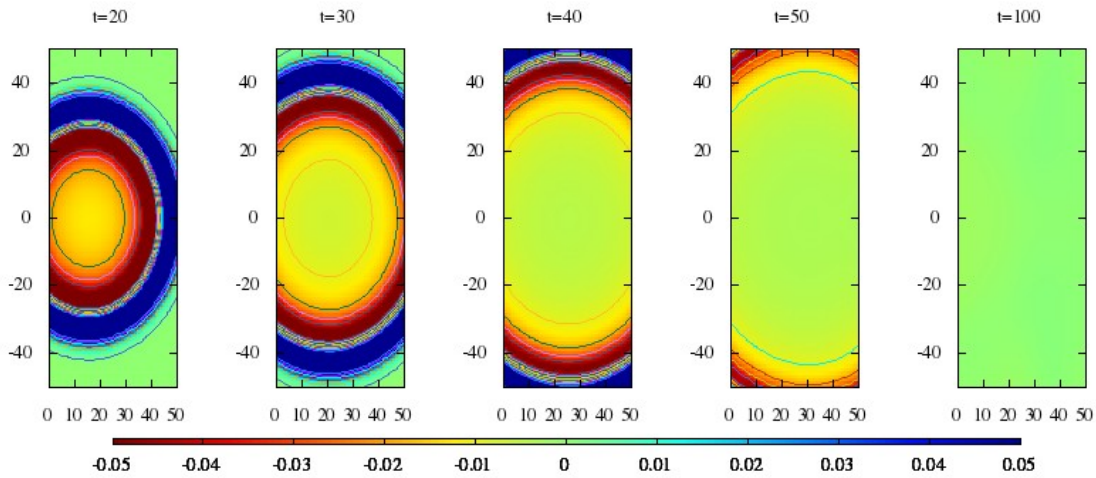


Figura 4.8 - Contornos de pressão em diferentes tempos para a solução da equação linear de Euler para um escoamento uniforme com  $M=0.5$ , usando a Zona de amortecimento com  $D = 30$ .

Tabela 4.7 - Tempos computacionais em porcentagem do tempo da solução de referência para a solução linear da equação de Euler. Tempo de referência 770.47 segundos, usando um computador HP de processador I7VPRO de 6Gb de memória RAM

Tempos computacional	
Condição não reflexiva	tempo(%)
PML	10.3
ETA	10.4
ZA30	10.95
ABC	4.9

a melhoria nos resultados ao ter aumentado a zona de absorção.

Na Figura 4.9 é apresentado novamente os resultados dos diferentes tipos de condições não reflexivas mas incluindo a ZA de maior tamanho (ZA30), permitindo fazer uma melhor comparação.

Igualmente, a tabela 4.7 mostra novamente a comparação dos tempos computacionais, incluindo o tempo computacional da zona de amortecimento de tamanho maior, onde é claro o aumento no tempo com o número de pontos da ZA no domínio.

Finalmente, com os resultados anteriores é possível dizer que as condição não reflexivas que apresentam melhores características tanto na diminuição das reflexões,

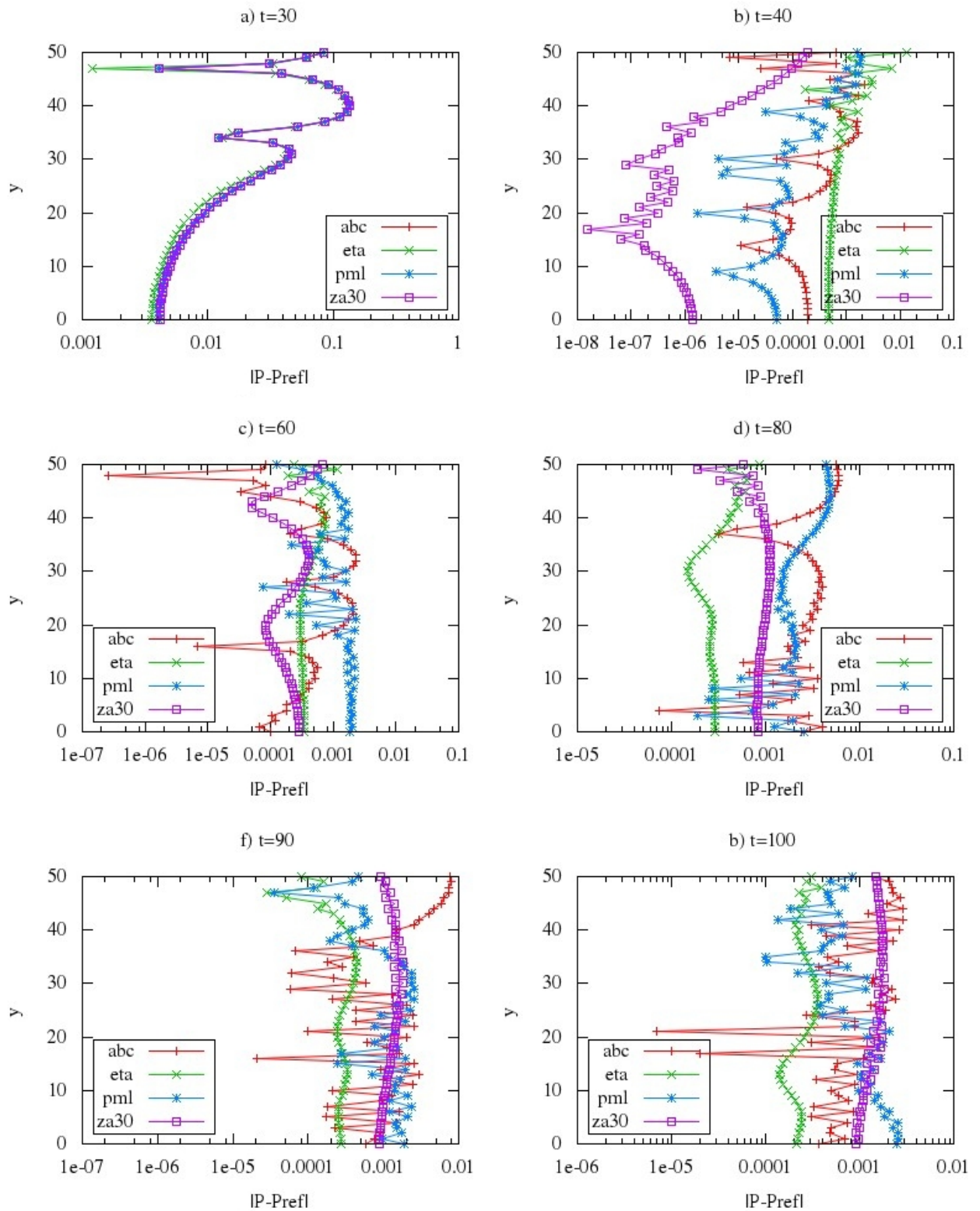


Figura 4.9 - Diferença entre a pressão calculada usando os diferentes tipos de condições de fronteira e a pressão calculada usando o domínio de referência. A pressões foram medidas no ponto  $x = 40$  para diferentes  $y$  em múltiplos tempos.

como no tempo de computação, ao ser implementadas na equação linear de Euler para um escoamento uniforme, são a ZA para tempos menores de 60 e a ETA para tempos maiores.

### 4.3 Implementação Dos Diferentes Tipos de Condições Não Reflexivas para a Solução da Equação Linear de Euler para um Escoamento Não Uniforme, Tipo camada de mistura.

As condições iniciais para um escoamento do tipo camada de mistura para as equações lineares de Euler são definidas como:

$$\begin{pmatrix} \rho_0 \\ u_0 \\ v_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\rho}(y) \\ \bar{M}_x(y) \\ 0 \\ \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

onde

$$\bar{M}_x(y) = \frac{1}{2} \left[ (M_{x1} + M_{x2}) + (M_{x1} - M_{x2}) \tanh \left( \frac{2y}{\delta} \right) \right], \quad (4.15)$$

e

$$\bar{\rho}(y) = \frac{1}{\bar{T}(y)}, \quad (4.16)$$

com

$$\bar{T}(y) = T_1 \frac{\bar{M}_x - M_{x2}}{M_{x1} - M_{x2}} + T_2 \frac{M_{x1} - \bar{M}_x}{M_{x1} - M_{x2}} + \frac{\gamma - 1}{2} (M_{x1} - \bar{M}_x)(\bar{M}_x - M_{x2}), \quad (4.17)$$

onde as variáveis  $\bar{M}_x$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{\rho}$ , são as variáveis que definem o escoamento base para a camada de mistura.

A temperatura  $\bar{T}(y)$  é determinada pela relação de Crocco-Busemann para escoamentos compressíveis. O parâmetro  $\delta$  determina a espessura da camada de mistura e  $M_x(y)$  representa a variação da velocidade na direção  $x$ , adimensionalizada pela velocidade do som  $a_0$ , tal como foi feito no capítulo de formulação da equação linear para um escoamento não uniforme.  $M_{x1}$  e  $M_{x2}$  são as velocidade na direção  $x$  na parte superior e inferior da camada de mistura. A definição dos demais parâmetros usados nas equações que definem a camada de mistura são apresentados na tabela 4.8.

Tabela 4.8 - Parâmetros usados na definição do escoamento não uniforme do tipo camada de mistura.

Parâmetros Camada de mistura	
$M_{x1}$	0.8
$M_{x2}$	0.2
$\delta$	0.4
$T_1$	1
$T_2$	0.8
$\gamma$	1.4

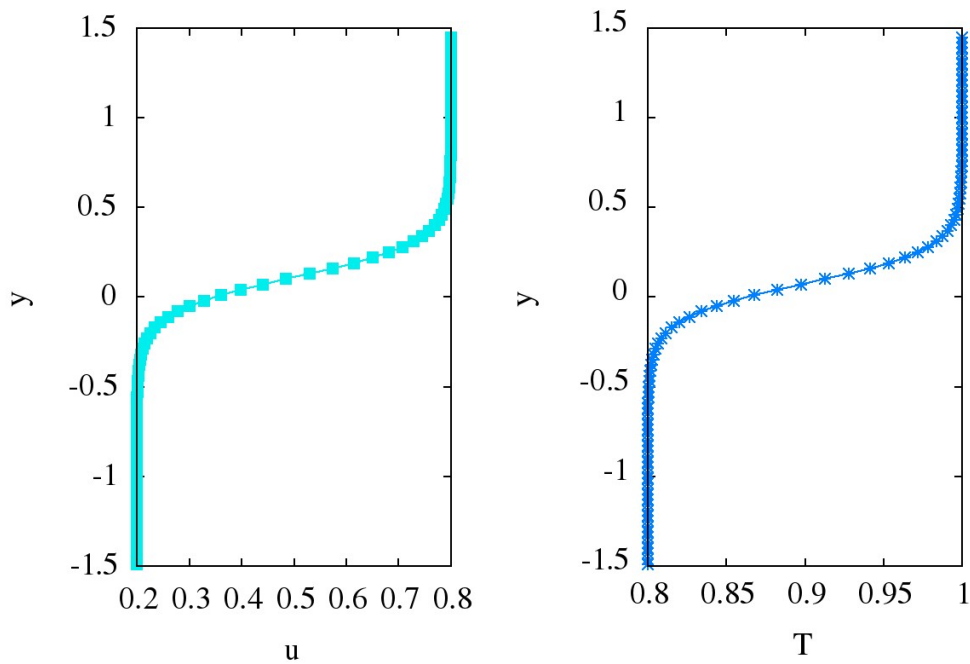


Figura 4.10 - Perfis de velocidade e temperatura do escoamento base da camada de mistura.

Na Figura (4.10) são apresentados os perfis de velocidade, e temperatura que serão usados na equação linear de Euler.

Para propiciar a formação dos vórtices de Kelvin-Helmholtz a camada de mistura foi excitada com um pulso de pressão do tipo gaussiano, aplicado como termo fonte na equação da energia da equação de Euler, definido como:

$$s(x, y, t) = a \sin(\omega t) e^{-(\ln 2)[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]/r_0}, \quad (4.18)$$



Tabela 4.9 - Parâmetros dos diferentes tipos condições de fronteira não reflexivas implementados e do domínio de referência, para a solução numérica da equação linear de Euler para um escoamento do tipo camada de mistura.

Parâmetros PML		Parâmetros ZA	
Método espacial	Drp	Método espacial	Drp
Método temporal	RK-46	Método temporal	RK-46
Filtro	a cada 5 $dt$	Filtro	a cada 5 $dt$
$(X_{min}, X_{max})$	(-1.8,7.8)	$(X_{min}, X_{max})$	(-1.8,7.8)
$(Y_{min}, Y_{max})$	(-1.8,1.8)	$(Y_{min}, Y_{max})$	(-1.8,1.8)
$(\Delta x, \Delta y)$	(0.04,0.01)	$(\Delta x, \Delta y)$	(0.04,0.01)
$\Delta t$	0.01	$\Delta t$	0.01
$(\sigma_{mx}, \sigma_{my}, \beta, D)$	(20,20,1,1/1.4116)	$(C_1, C_2, D)$	(0.01,20,10)
Tamanho PML $(D_x, D_y)$	(0.4,0.1)	Tamanho ZA $(D_x, D_y)$	(0.4,0.1)

Parâmetros ETA		Parâmetros domínio referência	
Método espacial	Drp	Método espacial	Drp
Método temporal	RK-46	Método temporal	RK-46
Filtro	a cada 5 $dt$	Filtro	a cada 5 $dt$
$(X_{min}, X_{max})$	(-1.8,7.8)	$(X_{min}, X_{max})$	(-60,50)
$(Y_{min}, Y_{max})$	(-1.8,1.8)	$(Y_{min}, Y_{max})$	(-10,10)
$(\Delta x, \Delta y)$	(0.04,0.01)	$(\Delta x, \Delta y)$	(0.04,0.01)
$\Delta t$	0.01	$\Delta t$	0.01
$D$	10		
Tamanho ETA $(D_x, D_y)$	(0.4,0.1)		

onde  $a = 5$  define a amplitude do pulso,  $w = \pi/2$  a frequência,  $x_0 = -0.5$  e  $y_0 = 0$  definem a localização do pulso no domínio e  $r_0 = 0.03$  sua espessura.

Uma vez definido o escoamento não uniforme da camada de mistura, foram implementados três tipos de condições de fronteira não reflexivas, a ZA, a PML e a ETA, de igual maneira como foram implementadas na seção anterior para o escoamento uniforme. A ABC não foi implementada porque como deixou-se claro a sua formulação foi desenvolvida para a equação linear de Euler para um escoamento uniforme. Os diferentes parâmetros que foram usados na implementação dos diferentes tipos de condições de fronteira são apresentados na tabela 4.9.

Os resultados da simulação do domínio de referência para diferentes tempos são apresentados na Figura 4.11, com o intuito de mostrar o domínio completo de solução e mostrar como é a propagação dos múltiplos pulsos de pressão gaussianos. Na figura 4.12 são apresentados os contornos de pressão para a solução da equação linear de Euler para a camada de mistura, usando os diferentes tipos de condições de fronteira.

Cada quadro do gráfico representa o contorno de pressão em um tempo específico, para uma região do domínio próxima a fronteira onde saem os múltiplos pulsos. O avanço temporal para cada condição pode-se observar na vertical. Por exemplo os quadros a), b), c), d) e e), são os diferentes contornos de pressão em tempos diferentes quando é usada a ZA nas fronteiras do domínio. Na figura podem-se comparar os diferentes contornos de pressão em relação à solução obtida com o domínio de referência, onde as reflexões nas fronteiras não interferem com a solução. Nota-se no gráfico que a PML apresenta um comportamento similar ao domínio de referência para tempos menores de 80 segundos, onde começa-se a perder a solução. A ZA, na configuração usada não consegue bons resultados, deformado completamente os pulsos. Esta deformação dos contornos de pressão também pode se ver na ETA. na necessidade de aumentar as zonas de amortecimento tanto na ETA como na ZA para conseguir melhores resultados, implicando na necessidade de aumentar as zonas de amortecimento tanto na ETA como na ZA para conseguir melhores resultados. Mesmo assim ETA conseguem os melhores resultados para os tempos maiores em relação a PML e a ZA.

Na Figura 4.13 a pressão é medida no ponto  $x = 7$  em todos os  $y$ , um ponto próximo da fronteira de saída. Pode-se observar mais claramente neste gráfico o comportamento das diferentes condições de contorno não reflexivas para diferentes tempos de simulação. Já na Figura 4.14 é mostrada a diferença entre a pressão medida com cada tipo de condição de fronteira e a pressão medida no domínio de referência em um determinado ponto. Nas figuras anteriores, fica mais evidente o bom comportamento da PML para tempos inferiores de 80 segundos, sendo bastante similar ao domínio de referência. No entanto o comportamento da PML não é bastante superior as outras duas condições, e no final do tempo se simulação é a condição que mais deforma a solução.

Com o intuito de fazer uma melhor comparação os tempos computacionais foram medidos para saber quanto é possível melhorar os resultados obtidos, em comparação ao tempo computacional do domínio de referência. Estes tempos em porcentagem do tempo do domínio de referência são apresentados na tabela 4.10. É evidente a grande diminuição do tempo computacional usando os diferentes tipo de condições de fronteira, pelo qual foi incrementado o tamanho das diferentes zonas de amortecimento para conseguir melhores resultados. Na tabela 4.11 são apresentados os tempos computacionais, em porcentagem do domínio de referência, usando  $D = 20$  para os três tipos de condições de fronteira implementados.

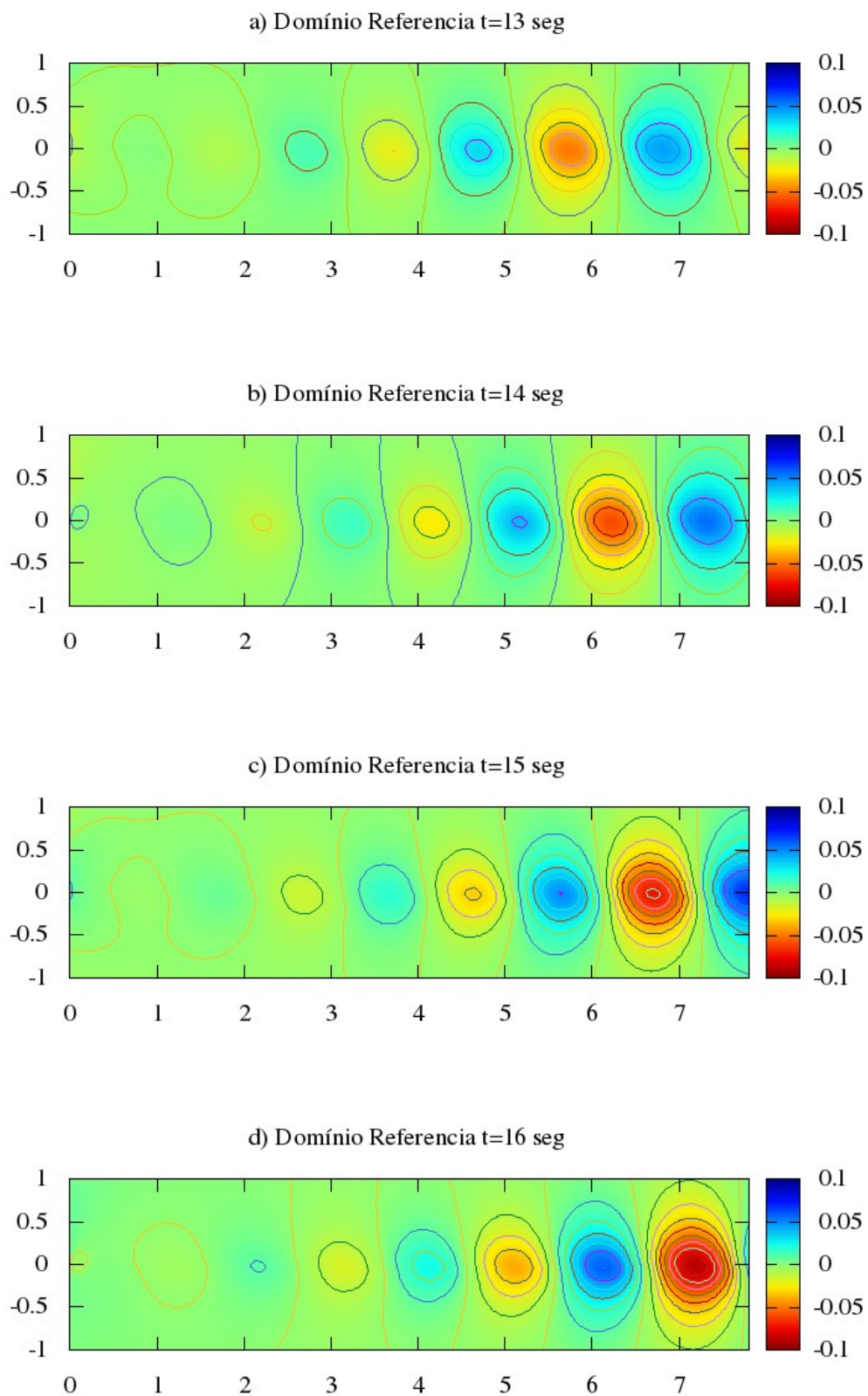


Figura 4.11 - Contornos de pressão em diferentes tempos para a solução da equação linear de Euler para uma camada de mistura no domínio de referência que será usado para comparar os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas.

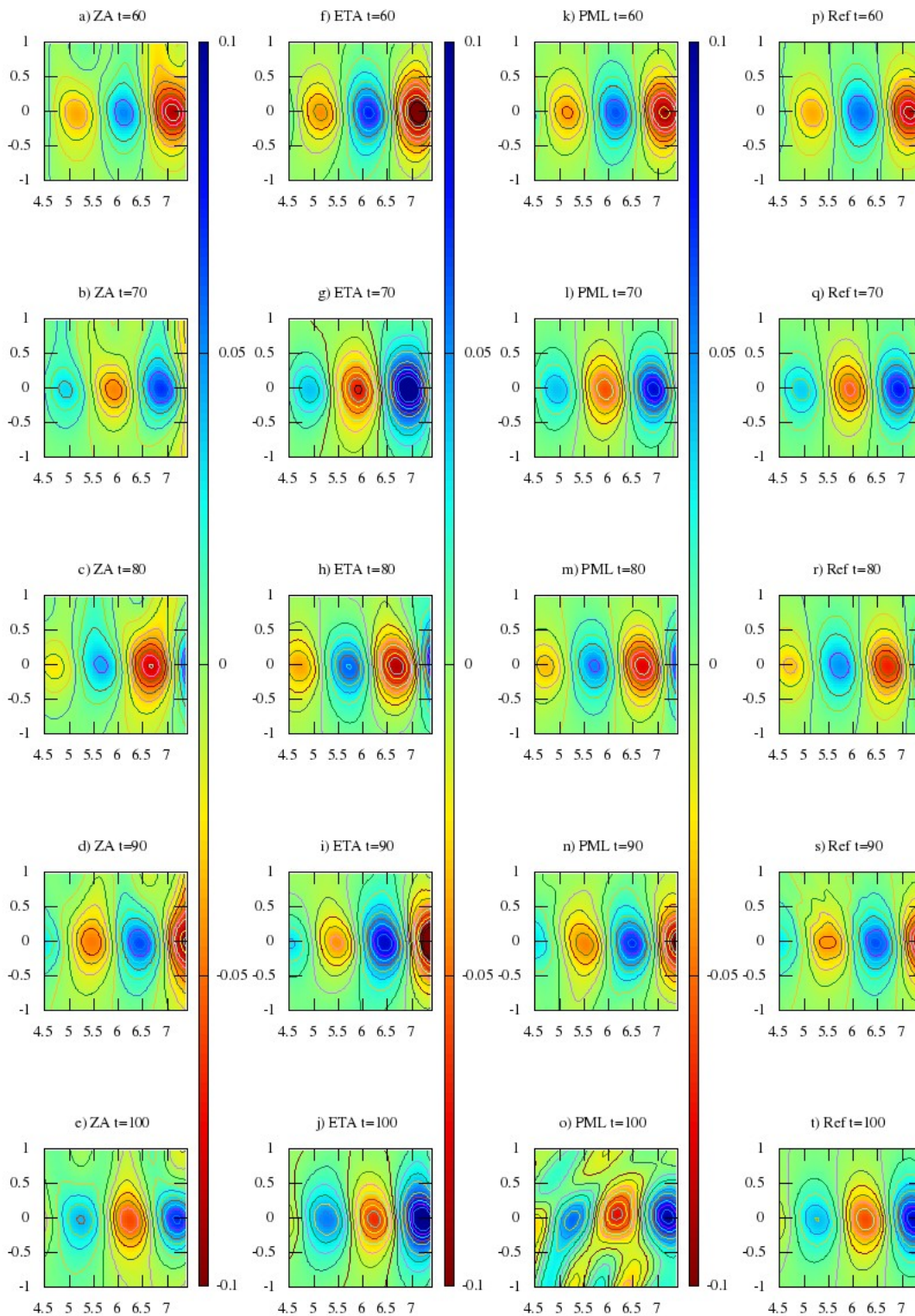


Figura 4.12 - Contornos de pressão em diferentes tempos para a solução da equação linear de Euler para uma camada de mistura usando os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas para sua comparação com o domínio de referência.

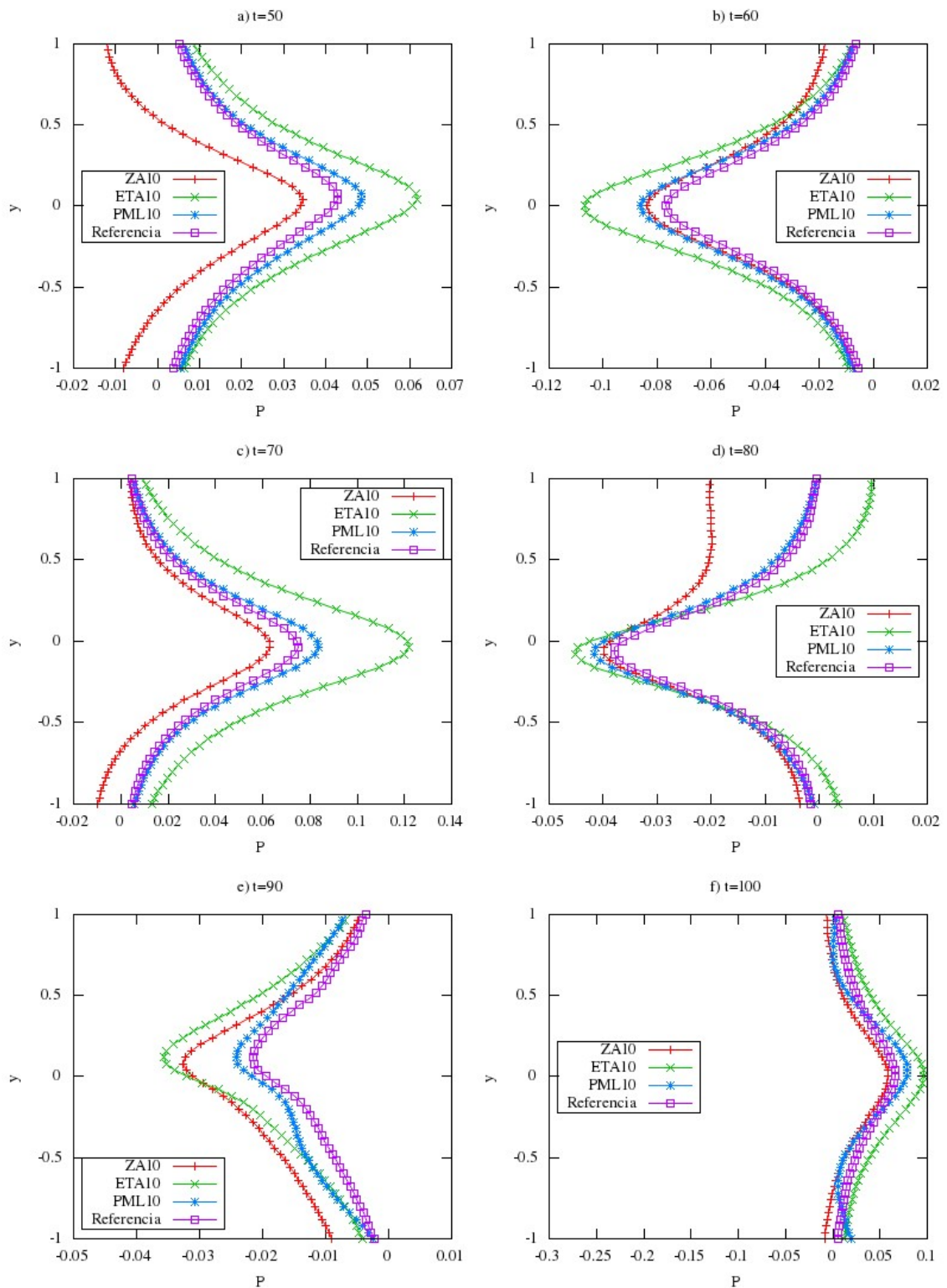


Figura 4.13 - Comparação da distribuição de pressão  $P(y)$  medida em  $x = 7$  em múltiplos tempos, para as os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas e o domínio de referência.

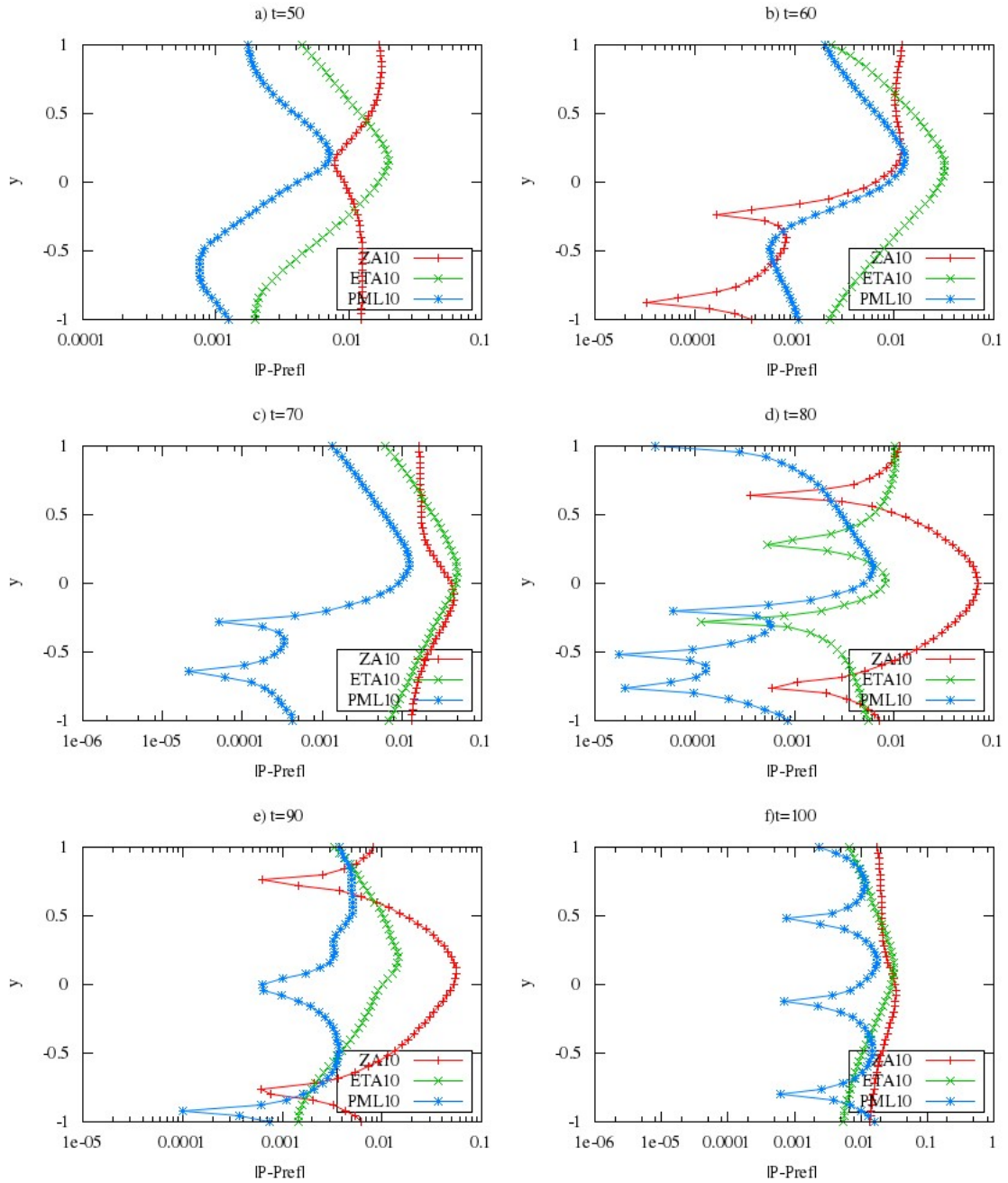


Figura 4.14 - Diferença de Pressão entre a pressão calculada usando os diferentes tipos de condições não reflexivas e a pressão calculada no domínio de referência. A pressão foi calculada no ponto  $x = 7$  ao longo de  $y$  em diferentes tempos.

Tabela 4.10 - Tempos computacionais em porcentagem do tempo da solução de referência para a solução numérica da equação linear de Euler para uma camada de mistura. Tempo domínio de referência=22935.97 segundos usando um computador HP, com processador I7VPRO e 6Gb de memória RAM.

<b>Tempos computacional</b>	
<b>Condição não reflexiva</b>	<b>tempo(%)</b>
PML10	2.12
ETA10	1.83
ZA10	1.7

Tabela 4.11 - Tempos computacionais em porcentagem do tempo da solução de referência para a solução numérica da equação linear de Euler para uma camada de mistura. Tempo domínio de referência=22935.97 segundos usando um computador HP, com processador I7VPRO e 6Gb de memória RAM.

<b>Tempos computacional</b>	
<b>Condição não reflexiva</b>	<b>tempo(%)</b>
PML20	3
ETA20	2.5
ZA20	2.3

Os contornos de pressão para o tempo final de simulação para as diferentes condições com  $D = 20$  são apresentados na Figura 4.15, mostrando claramente a melhoria do resultados alcançados para a PML e a ZA ao aumentar o numero de pontos da zona de absorção, mostrando soluções bastante similares com o domínio de referência. No entanto a PML continua apresentado os melhores resultados das diferentes condições avaliadas. A ETA melhorou bastante mas ainda não consegue obter um resultado que possa ser considerado aceitável quando é comparada com o domínio de referência e os resultados obtidos com as outras condições de fronteira, cujo custo computacional é bastante similar.

Tentou-se finalmente aumentar o domínio de absorção da ETA para obter resultados similares aos conseguidos com as demais condições, chegando a resultados aceitáveis para  $D = 60$ . O domínio de absorção da PML também foi aumentado para  $D = 30$  mais seu resultados não melhoraram significativamente. Enquanto a ZA obtiveram-se resultados melhores com  $D = 30$ .

Os contornos de pressão para diferentes tempos de simulação são apresentados na Figura 4.16, mostrando claramente a melhoria do resultados para a PML, a ETA, e a ZA, alcançando com o aumento da zona de absorção resultados bastante similares

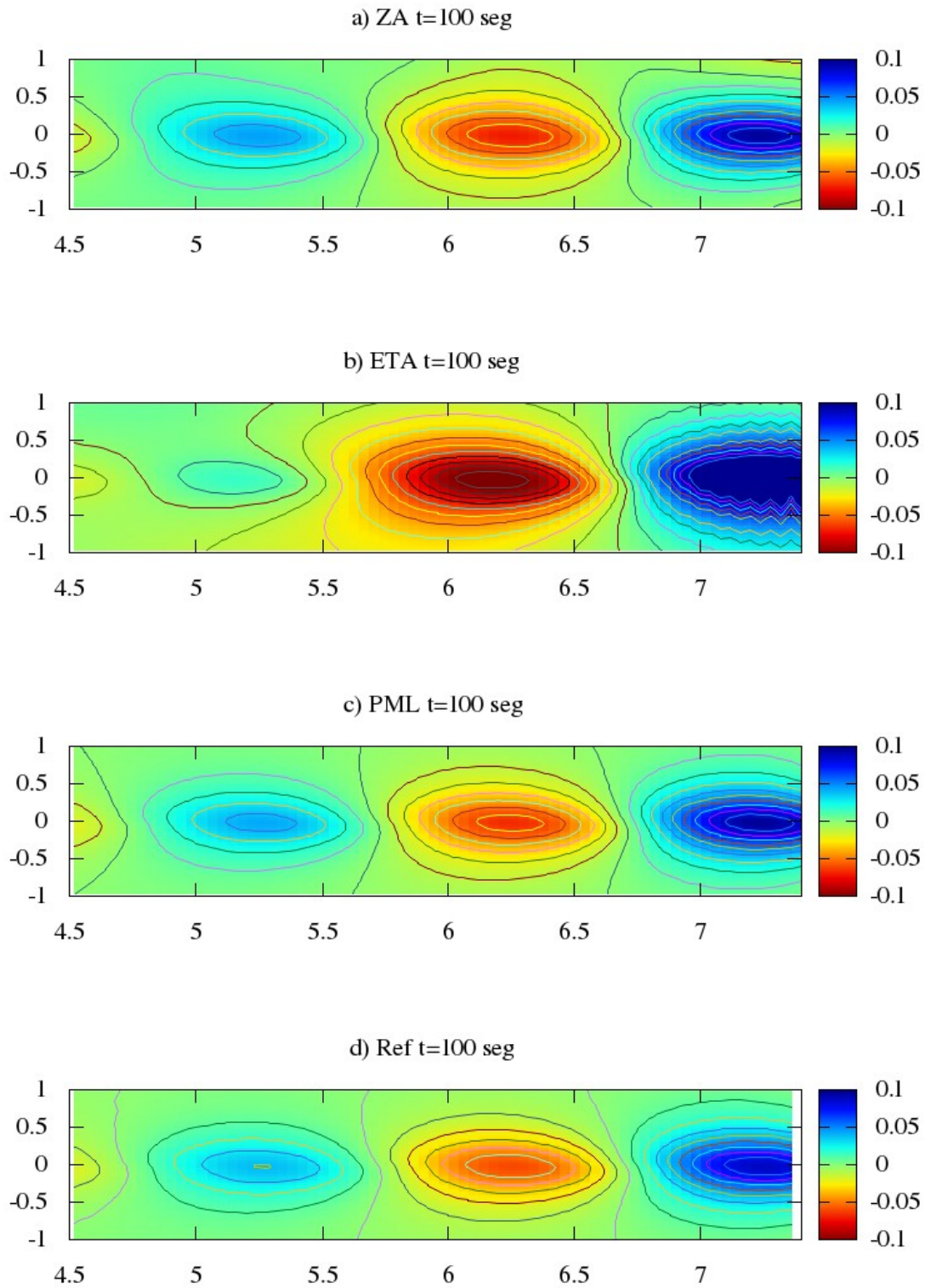


Figura 4.15 - Contornos de pressão em diferentes tempos para a solução da equação linear de Euler para uma camada de mistura usando os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas para sua comparação com o domínio de referência.



Tabela 4.12 - Tempos computacionais em porcentagem do tempo da solução de referência para a solução numérica da equação linear de Euler para uma camada de mistura. Tempo domínio de referência=22935.97 segundos usando um computador HP, com processador I7VPRO e 6Gb de memória RAM.

<b>Tempos computacional</b>	
<b>Condição não reflexiva</b>	<b>tempo(%)</b>
PML20	3
ETA60	5
ZA30	3.3

com o domínio de referência. Nas figuras 4.17 e 4.18, são apresentadas resultados mais detalhados que permitem fazer uma melhor comparação das diferentes condições.

Nestas figuras é mais evidente os bons resultados alcançados pelos diferentes tipos de condições não reflexivas, mostrando diferenças de pressão menores ao 1% em relação ao domínio de referência, fazendo difícil determinar qual condição seria a mais adequada para ser implementada na equação de Euler para um escoamento não uniforme. Para ter mais uma opção e comparação na tabela 4.12 são apresentados o custo computacional para os melhores resultados obtidos com ZA, a ETA e a PML.

Esta tabela junto com os gráficos anteriores permitem definir que a melhor condição que foi implementada na equação de Euler para um escoamento não uniforme é a PML, sendo mais eficiente computacionalmente e apresentando resultados menores do que 0.1% em comparação ao domínio de referência. No entanto a ZA apresenta resultados semelhantes a PML, tanto em eficiência computacional como na porcentagem de erro respeito ao domínio de referência (menor que 1%), para todos os tempos simulados. Vale ressaltar que a implementação na equação de Euler da ZA é mais simples que a PML. Já a ETA apresenta resultados semelhantes a PML e a ZA, mas com um custo computacional mais alto.

#### **4.4 Implementação dos Diferentes Tipos de Condições Não Reflexivas Para a Solução da Equação Não Linear de Euler Para um Escoamento Não Uniforme, Tipo Camada de Mistura.**

Finalmente foram implementadas as condições de fronteira não reflexivas do tipo PML, ETA e ZA, na solução numérica da equação não linear de Euler para o escoamento não uniforme do tipo camada mistura definido para na seção anterior. Para cada tipo de condição não reflexiva foram definidos os diferentes parâmetros iguais aos definidos para sua implementação na equação linear de Euler para o escoamento

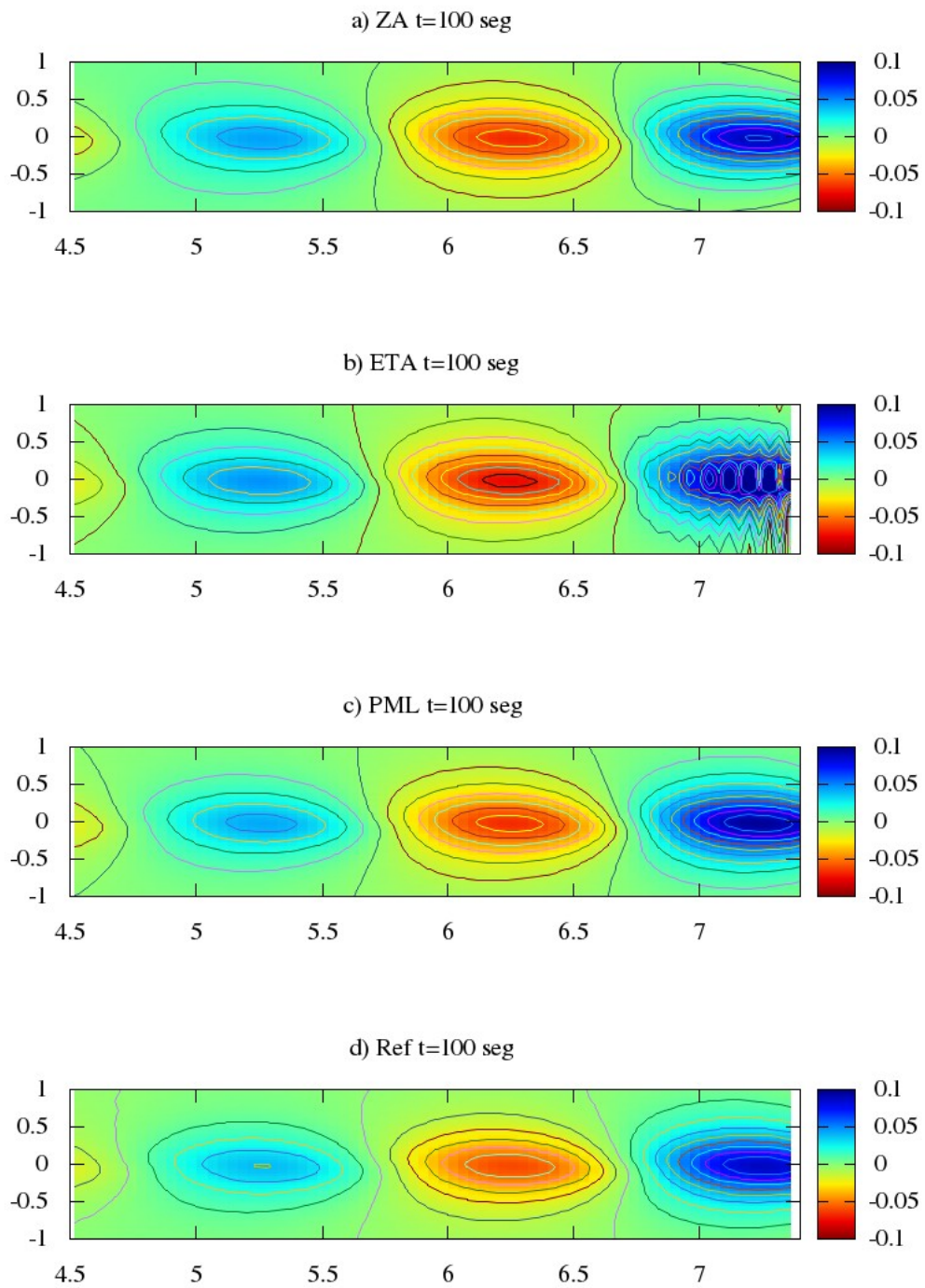


Figura 4.16 - Contornos de pressão no tempo final de simulação  $t = 100$ , para a solução da equação linear de Euler para uma camada de mistura usando os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas para sua comparação com o domínio de referência.

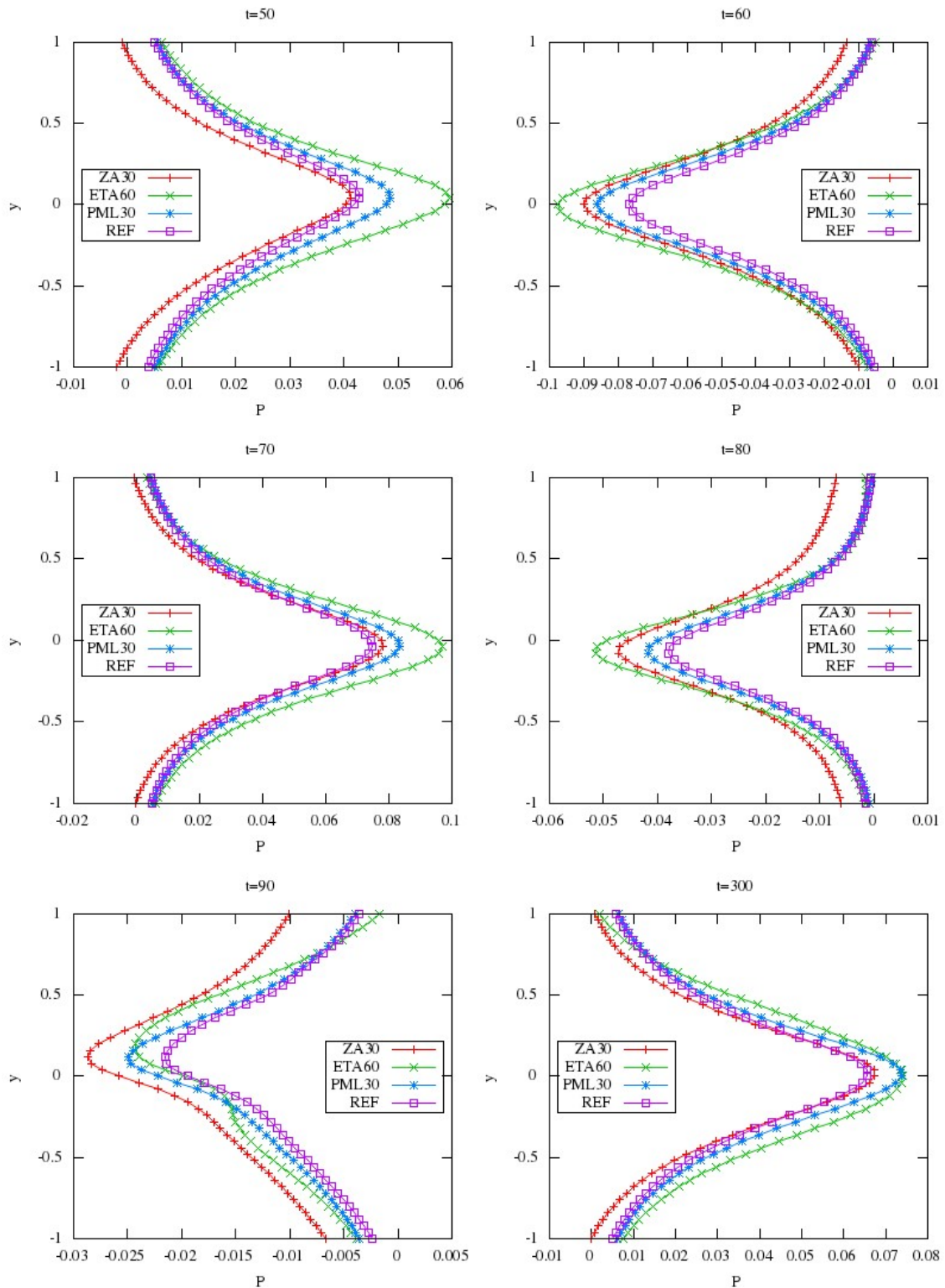


Figura 4.17 - Comparação da pressão medida em  $x = 7$  para diferentes  $y$  em múltiplos tempos, para as os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas e o domínio de referência.

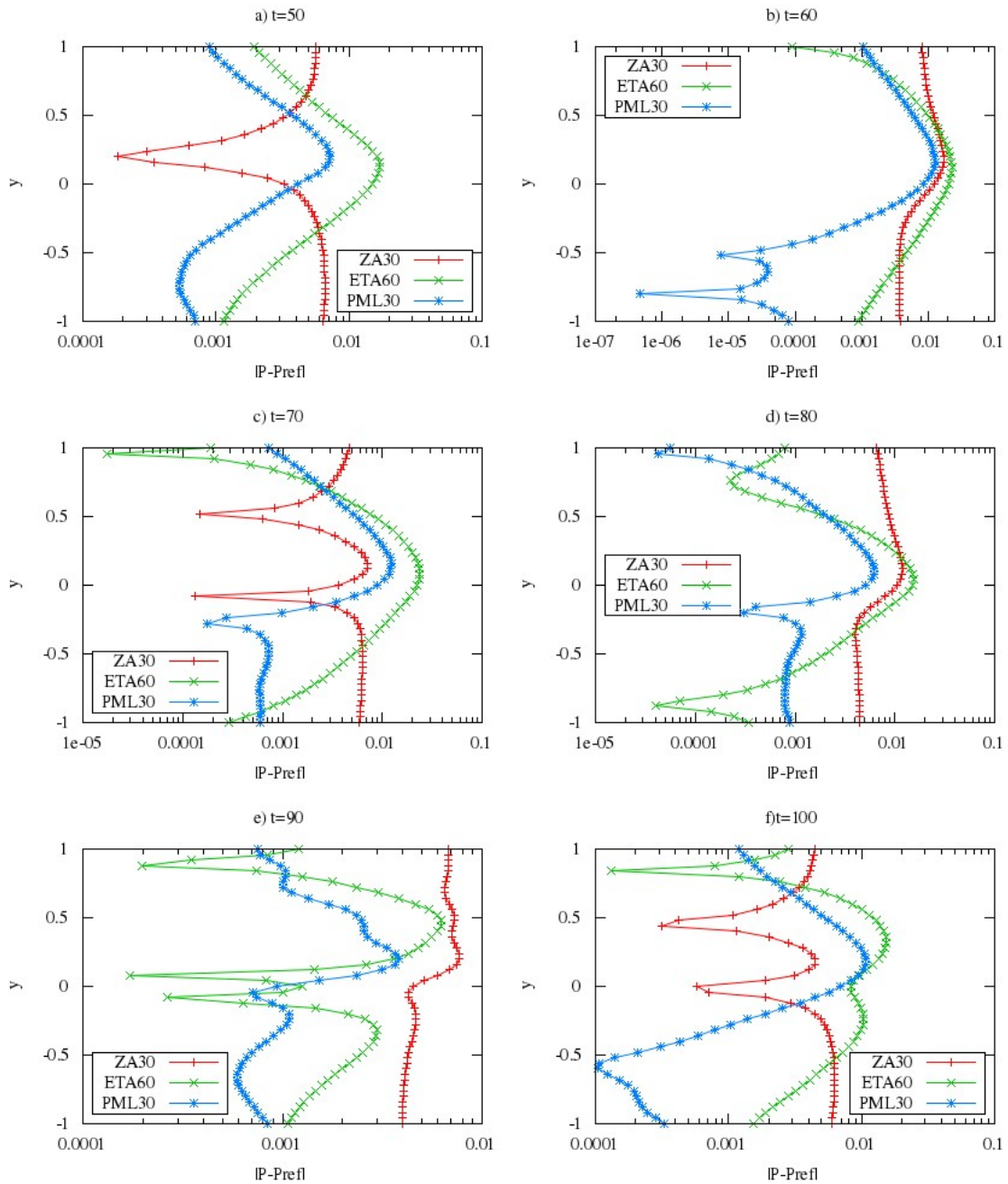


Figura 4.18 - Diferença de Pressão entre a pressão calculada usando os diferentes tipos de condições não reflexivas e a pressão calculada no domínio de referência. A pressão foi calculada no ponto  $x = 7$  para todos os  $y$  em diferentes tempos, para a solução da equação linear de Euler para um escoamento não uniforme.

Tabela 4.13 - Parâmetros dos diferentes tipos condições de fronteira não reflexivas implementados e do domínio de referência, para a solução numérica da equação não linear de Euler para um escoamento do tipo camada de mistura.

Parâmetros PML		Parâmetros ZA	
Método espacial	Drp	Método espacial	Drp
Método temporal	RK-46	Método temporal	RK-46
Filtro	a cada $dt$	Filtro	a cada $dt$
$(X_{min}, X_{max})$	(-1.5,9.5)	$(X_{min}, X_{max})$	(-1.5,9.5)
$(Y_{min}, Y_{max})$	(-1.1,1.1)	$(Y_{min}, Y_{max})$	(-1.1,1.1)
$(\Delta x, \Delta y)$	(0.05,0.01)	$(\Delta x, \Delta y)$	(0.05,0.01)
$\Delta t$	0.01	$\Delta t$	0.01
$(\sigma_{mx}, \sigma_{my}, \beta, D)$	(20,20,1,1/1.4116)	$(C_1, C_2, D)$	(0.01,20,10)
Tamanho PML $(D_x, D_y)$	(0.5,0.1)	Tamanho ZA $(D_x, D_y)$	(0.5,0.1)

Parâmetros ETA		Parâmetros domínio referência	
Método espacial	Drp	Método espacial	Drp
Método temporal	RK-46	Método temporal	RK-46
Filtro	a cada $dt$	Filtro	a cada $dt$
$(X_{min}, X_{max})$	(-1.5,9.5)	$(X_{min}, X_{max})$	(-30.0,30.0)
$(Y_{min}, Y_{max})$	(-1.1,1.1)	$(Y_{min}, Y_{max})$	(-4,4)
$(\Delta x, \Delta y)$	(0.05,0.01)	$(\Delta x, \Delta y)$	(0.05,0.01)
$\Delta t$	0.01	$\Delta t$	0.01
$D$	10		
Tamanho ETA $(D_x, D_y)$	(0.5,0.1)		

uniforme e não uniforme, usando os estiramentos de malha propostos, com os respectivos coeficientes de absorção. Os parâmetros que foram usados na implementação das condições de fronteira na equação não linear de Euler são apresentados na tabela 4.13.

Os resultados da simulação do domínio de referência para diferentes tempos são apresentados na Figura 4.19, mostrando o domínio de solução completo e como é a formação dos vórtices de Kelvin-Helmholtz. A formação desses vórtices pode ser visualizada plotando os contornos de vorticidade. Para calcular a vorticidade foram usadas as variáveis  $u$  e  $v$ , que representam o valor instantâneo da variável na decomposição da solução da equação não linear de Euler. Estas variáveis instantâneas são a soma do escoamento base e das perturbações. No caso da equação linear de Euler tanto para o escoamento uniforme quanto a camada de mistura, a PML foi formulada somente para as perturbações. Todas os gráficos apresentados nestas seção mostram unicamente as variáveis instantâneas.

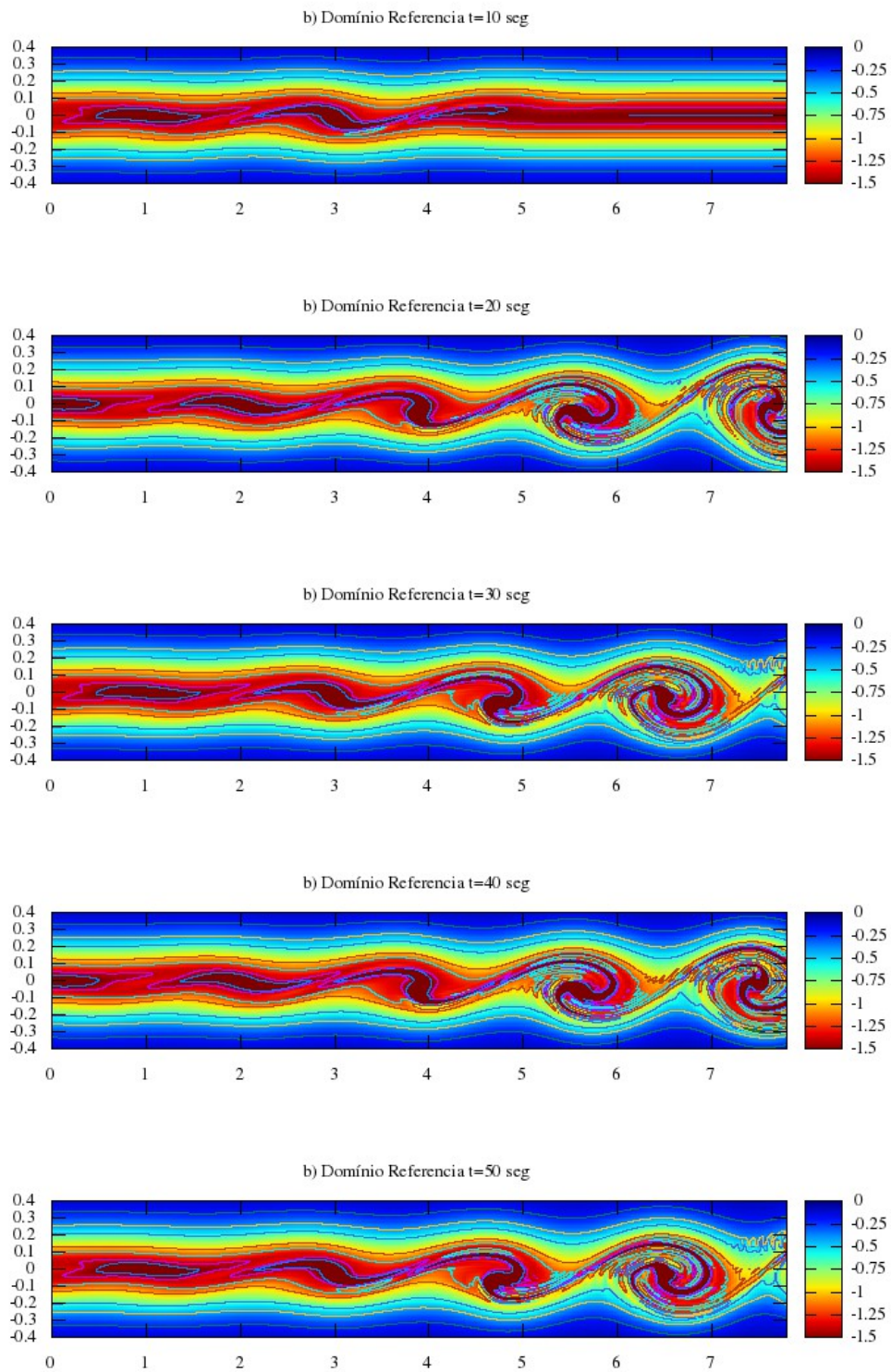


Figura 4.19 - Contornos de vorticidade em diferentes tempos para uma camada de mistura usando o domínio de referência.

Na figura 4.20 são apresentados os contornos de vorticidade para a solução da equação não linear de Euler para a camada de mistura, usando os diferentes tipos de condições de fronteira. Cada quadro do gráfico apresenta o contorno de vorticidade em um tempo específico, para uma região do domínio próxima à fronteira onde saíam os múltiplos vórtices. O avanço temporal para cada condição pode ser observado verticalmente, por exemplo os quadros a) ,b) ,c) ,d) e e) são os diferentes contornos de vorticidade em tempos diferentes quando é usada a ZA nas fronteiras do domínio. Na figura podem-se comparar os diferentes contornos de vorticidade para a ZA, a PML e a ETA em relação à solução obtida com o domínio de referência, onde as reflexões nas fronteiras não interferem com a solução. Visualmente é muito difícil fazer uma comparação entres os diferentes quadros da figura 4.20, apresentando todos aparentemente bons resultados, com exceção da ETA, que no tempo final simulado mostra como é afetado o domínio pelas reflexões nas fronteiras dos vórtices que estão saindo. Como a vorticidade não permite observar as diferenças entre as diferentes condições de fronteira implementadas foi necessário ver o comportamento de outra variável, para o qual foi escolhida a pressão, como foi feito para as resultados da seção anterior. Na Figura 4.21 são apresentados os diferentes contornos de pressão para as diferentes condições não reflexivas.

Como também foi evidente no caso da equação linear de Euler para a camada de mistura, os contornos de pressão da Figura 4.21 que mais se assemelham com a solução do domínio de referência são os obtidos usando a PML. As outras condições de fronteira precisam mais pontos para obter melhores resultados e mostram os contornos complemente deformados.

Uma vez mais, como foi feito para comparar os diferentes resultados da equação linear de Euler, foi medida a pressão num ponto do domínio, onde  $x = 9$  para todos os  $y$ . O ponto  $x = 9$  é um ponto próximo da fronteira de saída dos diferentes vórtices, podendo observar mais claramente o comportamento das diferentes condições de contorno não reflexivas. Isto é demonstrado nos gráficos 4.22 e 4.23 onde é mais evidente o bom comportamento da PML com poucos postos na zona de absorção. Nestas figuras também pode-se observar que a ETA apresenta problemas com tempos de solução maiores do que 50 segundo, apresentando problemas de estabilidade e perdendo quase que por completo a solução da equação não linear de Euler.

Antes de incrementar o número de pontos para a ETA e a ZA, os tempos computacionais foram medidos para saber quanto é possível melhorar os resultados obtidos, quando são comparados ao tempo computacional do domínio de referência. Estes

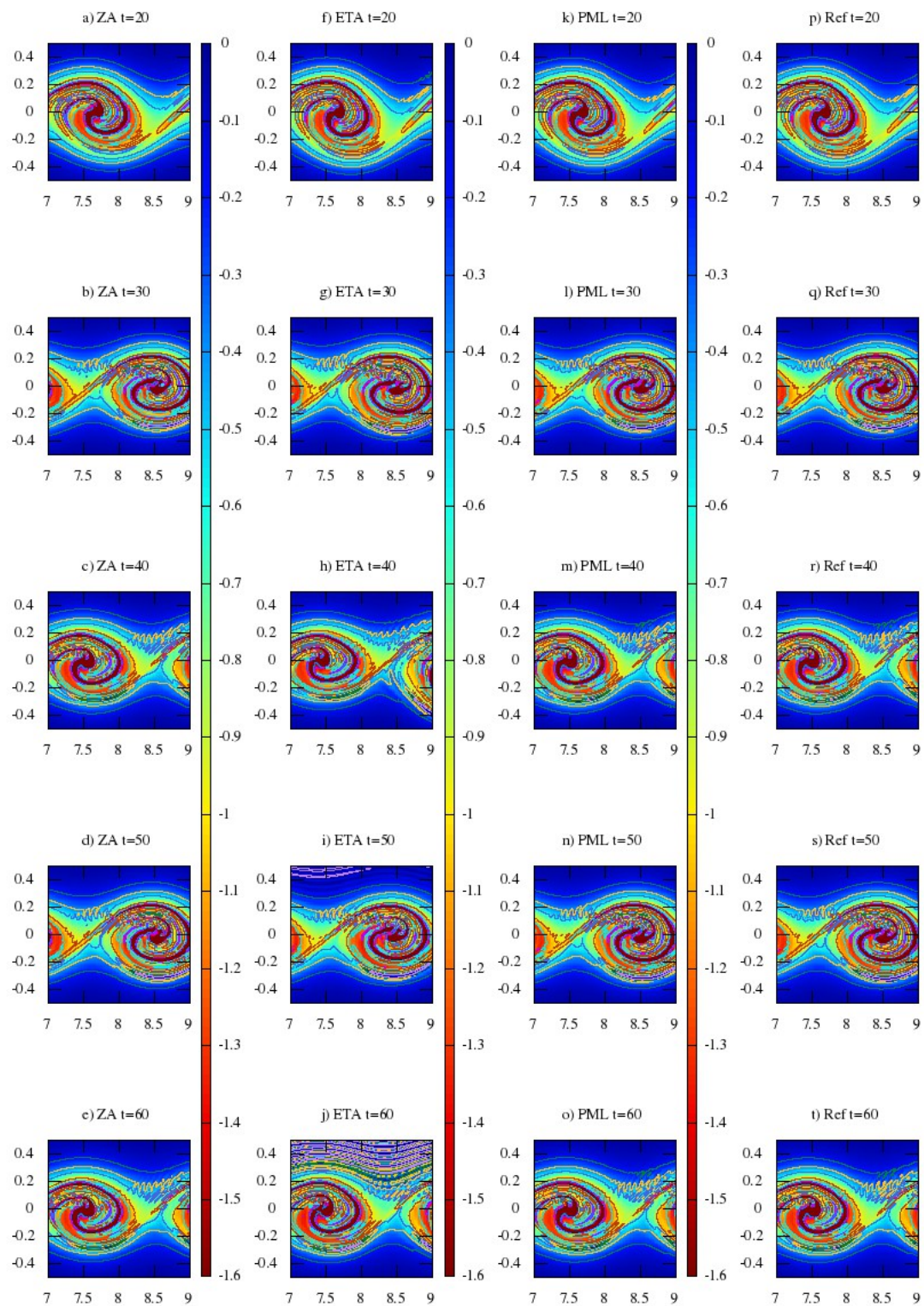


Figura 4.20 - Contornos de vorticidade em diferentes tempos para uma camada de mistura usando os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas e sua comparação com o domínio de referência.



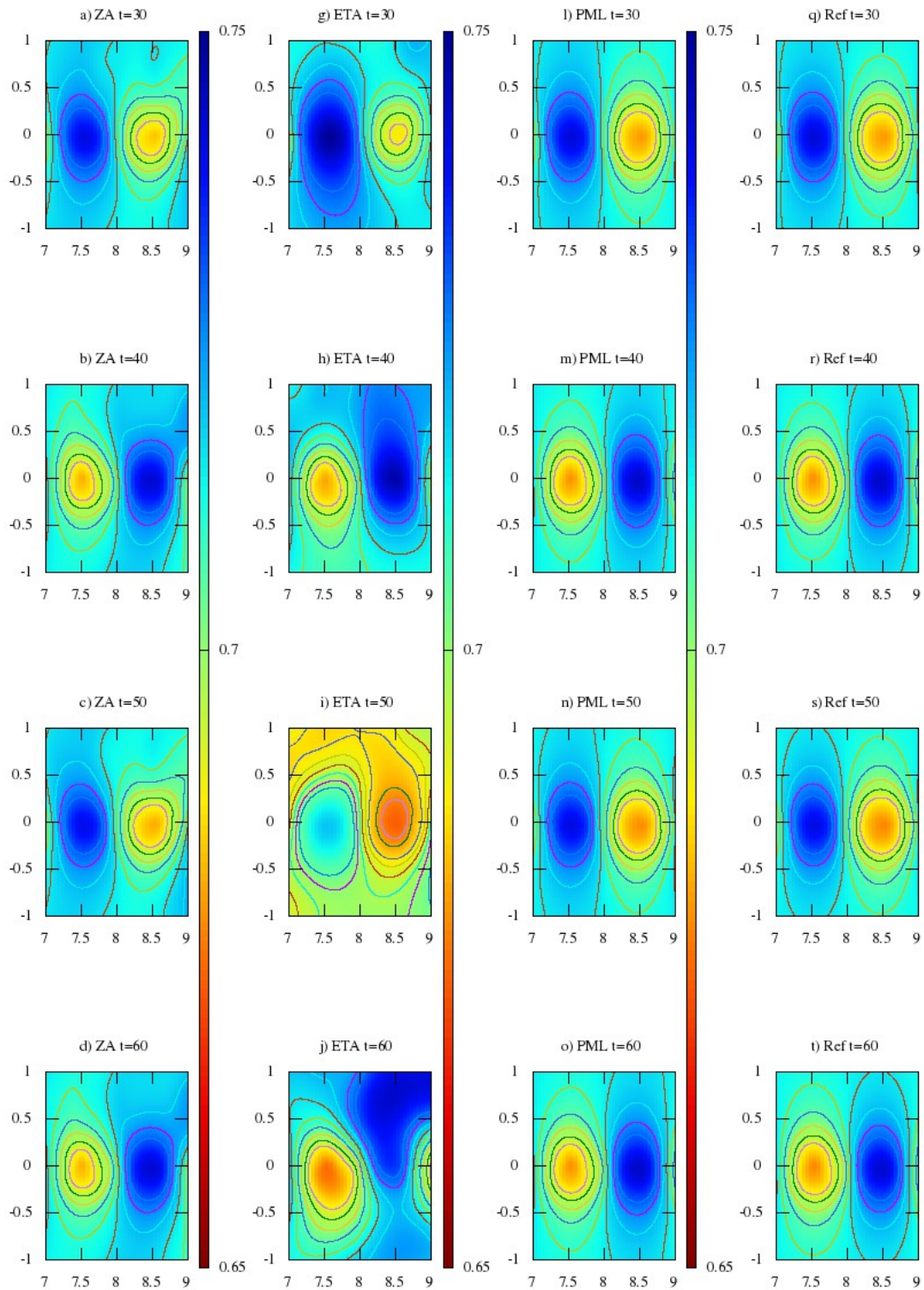


Figura 4.21 - Contornos de pressão em diferentes tempos para uma camada de mistura usando os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas e sua comparação com o domínio de referência.

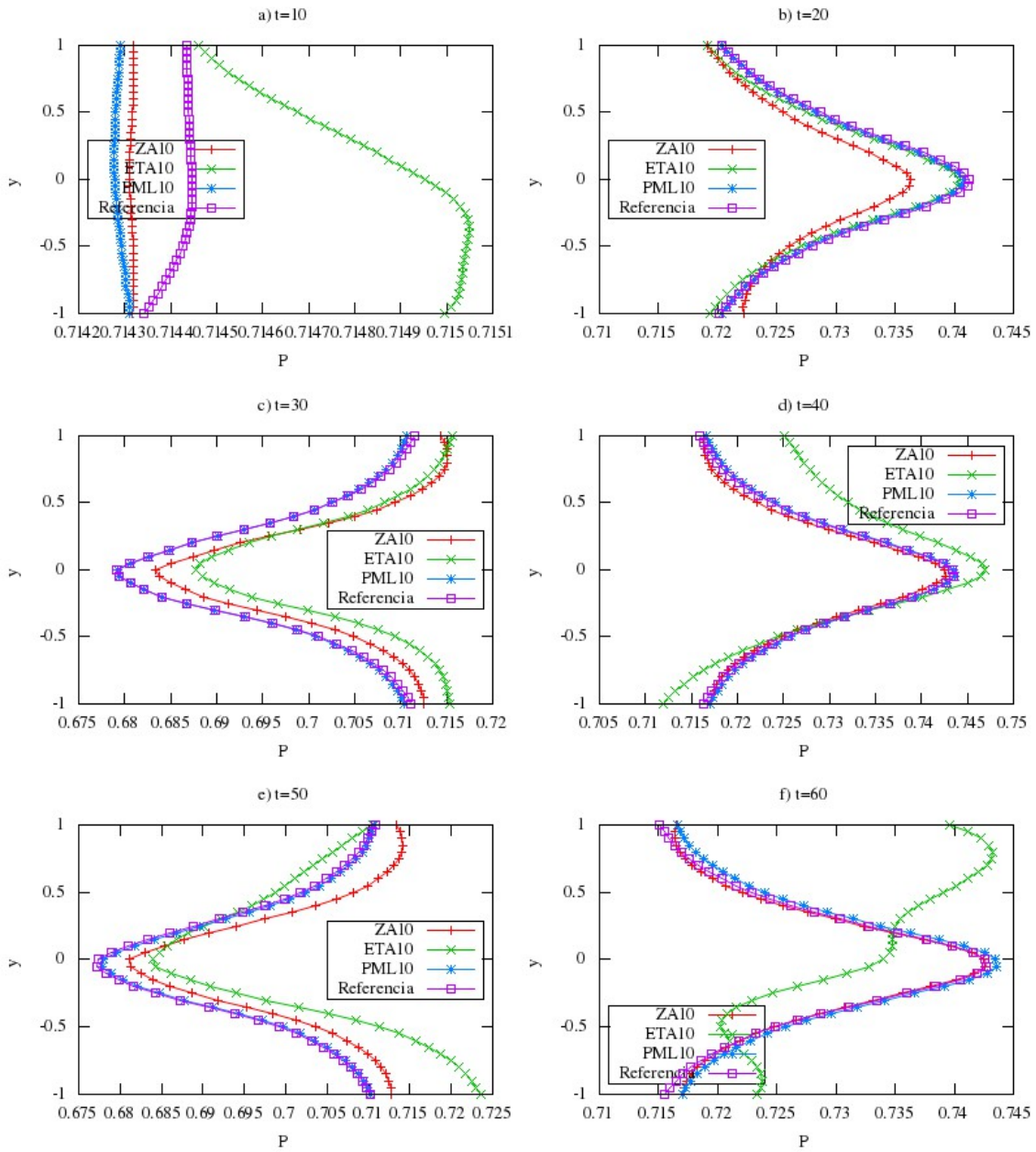


Figura 4.22 - Distribuição de pressão  $p(y)$  medida no ponto  $x = 9$ , em diferentes tempos para uma camada de mistura usando os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas e para o domínio de referência.

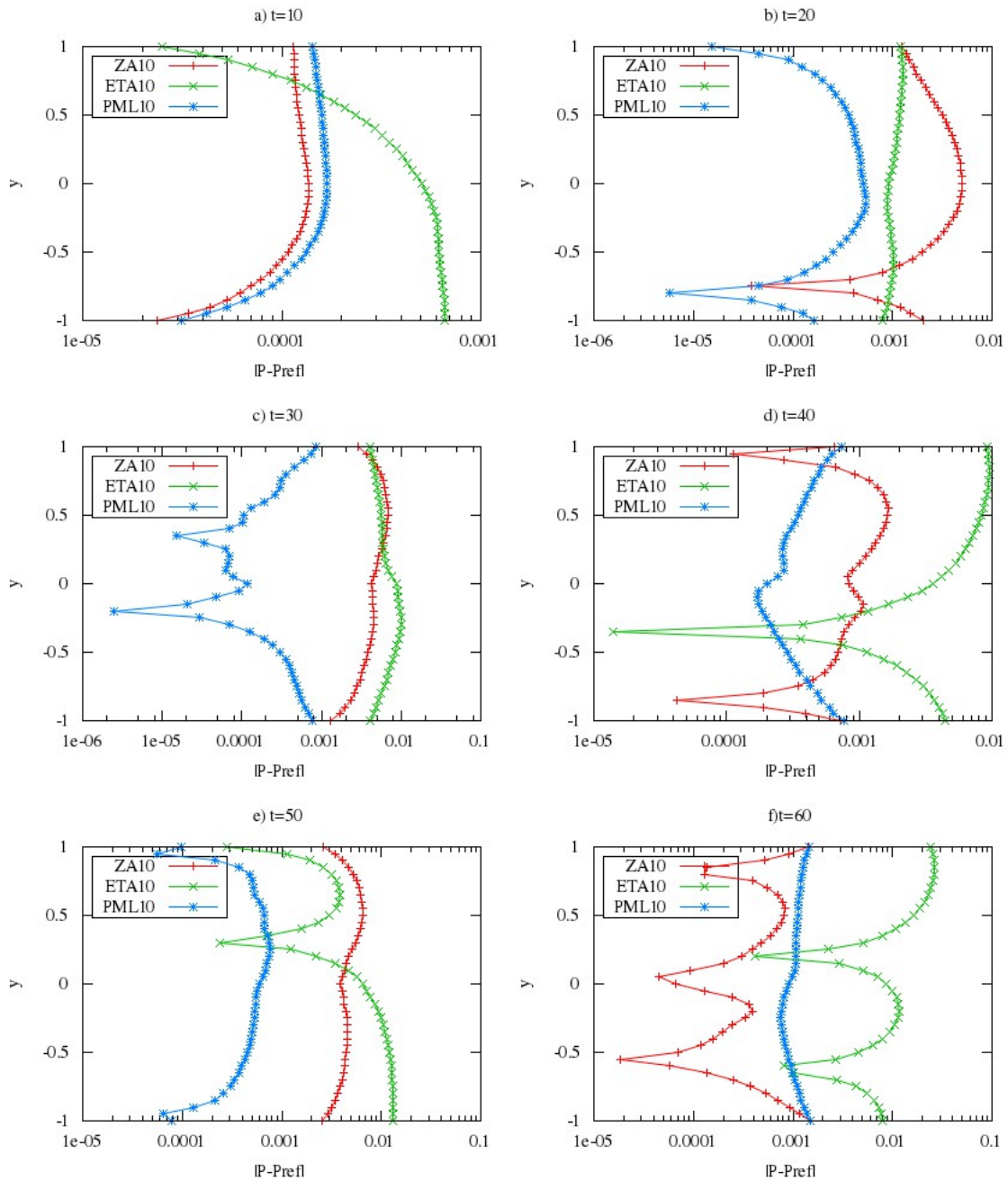


Figura 4.23 - Diferença de Pressão entre a pressão calculada usando os diferentes tipos de condições não reflexivas e a pressão calculada no domínio de referência. A pressão foi calculada no ponto  $x = 9$  para todos os  $y$ , em diferentes tempos para uma camada de mistura.

Tabela 4.14 - Tempos computacionais em porcentagem do tempo da solução de referência para a solução numérica da equação não linear de Euler para a camada de mistura. Tempo do domínio de referência de 47166.72 segundos usando um computador HP, de processador I7VPRO e 6Gb de memória RAM.

<b>Tempos computacional</b>	
<b>Condição não reflexiva</b>	<b>tempo(%)</b>
PML10	19.5
ETA10	14.4
ZA10	8.7

tempos em porcentagem do tempo do domínio de referência são apresentados na tabela 4.14.

O custo computacional da PML implementada na equação não linear de Euler é superior às outras duas condições, devido às duas equações a mais acrescentadas na sua formulação para  $q_1$  e  $q_2$ . A ETA chega a ser mais custosa que a ZA já que exige o uso do filtro para as diferentes fronteiras de absorção, depois de ser aplicada ao domínio interior.

Para melhorar os resultados obtidos com a aplicação da ETA e da ZA foi aumentada a zona de absorção ate alcançar resultados similares ao domínio de referência. No caso da ETA os melhores resultados foram atingidos com  $D = 40$ , podendo melhorar mais os resultados aumentando o número de pontos, mas incrementaria-se o custo computacional. Para a ZA os melhores resultados foram atingidos com  $D = 30$ , os quais não melhoram significativamente ao superar este valor. O mesmo acontece com a PML, que tem os melhores resultados com  $D = 20$ , não melhorando significativamente ao aumentar a zona de aplicação da condição não reflexiva.

Na tabela 4.15 são apresentados os tempos computacionais, em porcentagem do domínio de referência, para os melhores resultados alcançados com as diferentes condições de fronteira não reflexivas implementadas.

Os contornos de pressão para diferentes tempos de simulação são apresentados na Figura 4.24. Mostrado-se claramente a melhoria do resultados para a PML, a ETA, e a ZA, alcançando com o aumento da zona de absorção. Estes resultados obtidos com as diferentes condições de contorno não reflexivas, visualmente, são bastante similares com o domínio de referência.

Nas figuras 4.25 e 4.26, são apresentados resultados mais detalhados que permitem

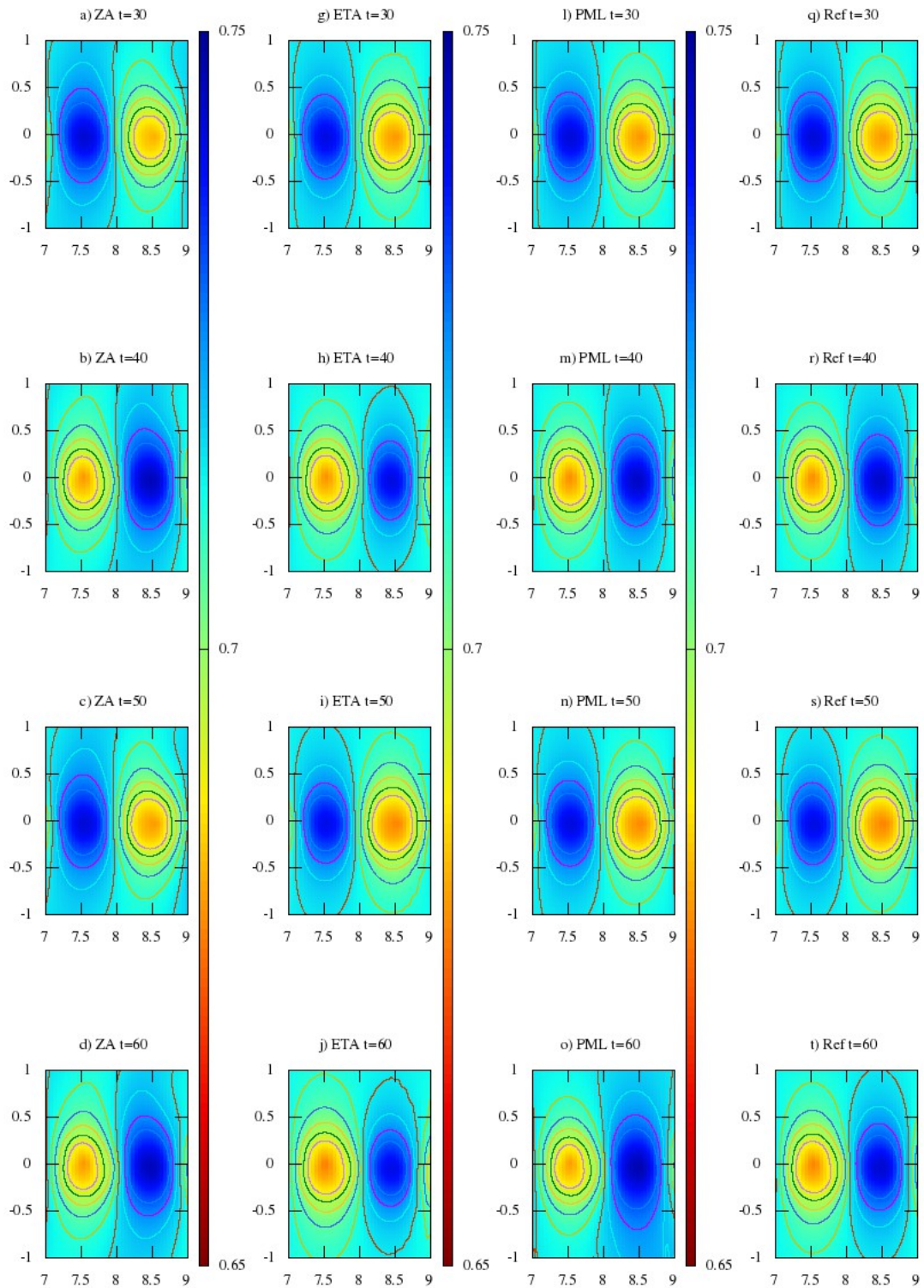


Figura 4.24 - Contornos de pressão em diferentes tempos para uma camada de mistura usando os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas e sua comparação com o domínio de referência.

Tabela 4.15 - Tempos computacionais em porcentagem do tempo da solução de referência para a solução numérica da equação não linear de Euler para a camada de mistura usando diferentes tipos de condições de fronteira de tamanho  $D = 20$ . Tempo do domínio de referência igual a 47166.72 segundos usando um computador HP, com processador I7VPRO e 6Gb de memória RAM.

<b>Tempos computacional</b>	
<b>Condição não reflexiva</b>	<b>tempo(%)</b>
PML20	25.2
ETA40	18
ZA30	15.24

fazer uma melhor comparação das diferentes condições. Nestas figuras são mais evidentes os bons resultados alcançados, mostrando diferenças menores do que 1% em relação ao domínio de referência.

O melhor resultado entre os diferentes tipos de condições não reflexivas implementadas foi alcançado com a ETA, mostrando na Figura 4.26 diferenças da ordem de 0.001% em relação ao domínio de referência, exceto no tempo  $t = 40$ , onde apresenta maior diferença e para o qual não se tem explicação. No entanto a ETA apresentou problemas de estabilidade para tamanhos menores que  $D = 40$ , como foi visto na Figura 4.20j, não conseguindo atingir o tempo final de simulação. A PML apresenta resultados muito similares, mas perde efetividade ao longo do tempo, sendo menos efetiva em comparação a ETA em tempos maiores. Além do que, o tempo computacional da PML é o maior de todas as condições implementadas. A ZA apresenta um comportamento muito estável em comparação com as outras duas condições, mantendo seu erro na ordem de 0.1% para todos os tempos apresentados e conseguido um custo computacional mais baixo. Desafortunadamente, não se alcançaram melhores resultados para ZA quando aumentou-se a zona de absorção até  $D = 60$  em relação a  $D = 30$ .

#### **4.5 Análises de Estabilidade da camada de mistura usando a equação não linear de Euler com a implementação da Zona de amortecimento.**

As condições de fronteira do tipo ZA e ETA implementadas para as equações não linear de Euler, apresentaram uma alta efetividade na diminuição das reflexões e uma alta eficiência numérica em relação ao domínio de referência. Elas são simples de implementar e sua formulação não dependem das equações onde foram implementadas. Porém, a ZA mostrou ser uma condição muito mais estável do que a

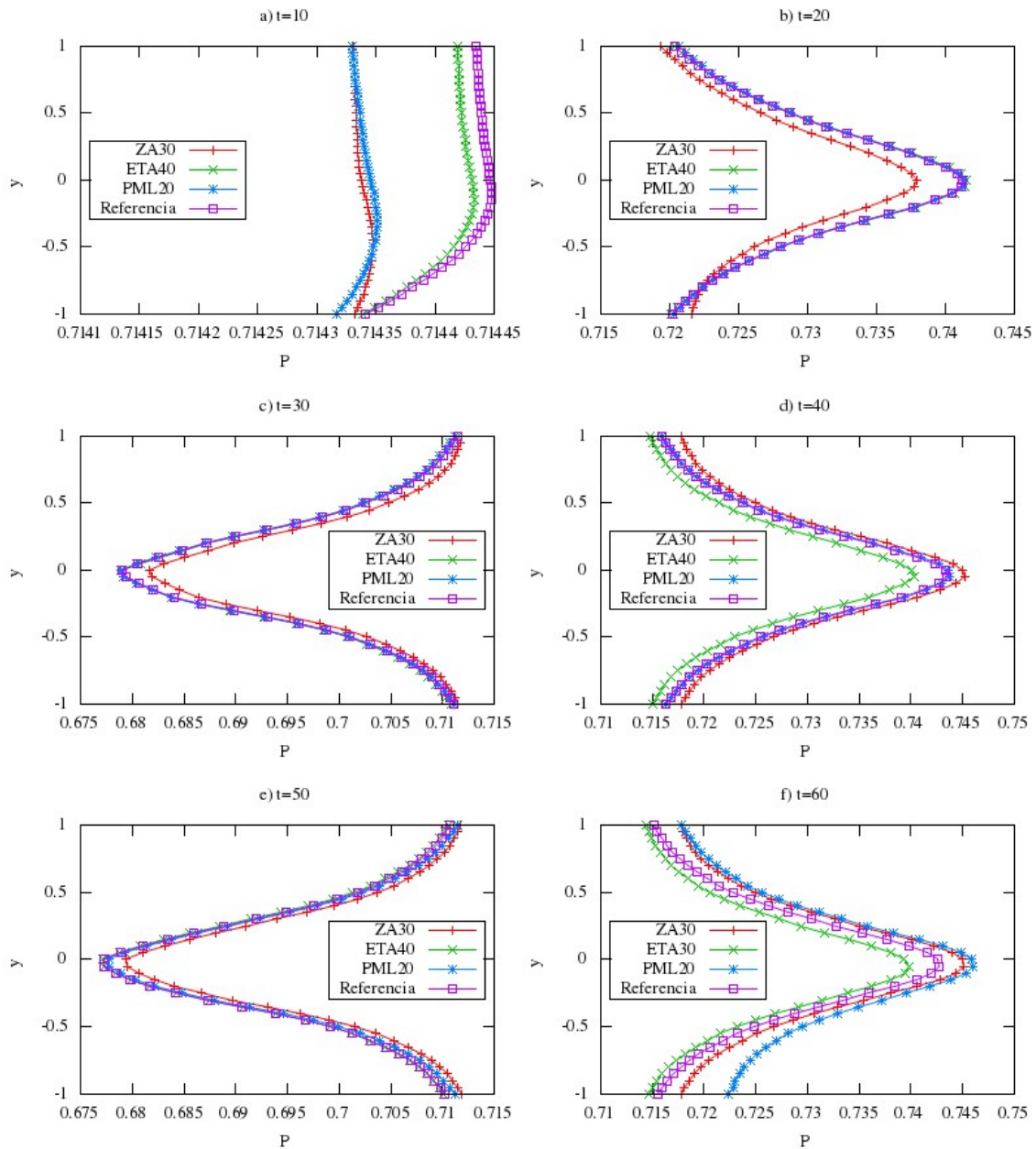


Figura 4.25 - Pressão medida no ponto  $x = 9$  para todos os  $y$ , em diferentes tempos para a solução da equação não linear de Euler para uma camada de mistura usando os diferentes tipos de condições de fronteira não reflexivas e para o domínio de referência.

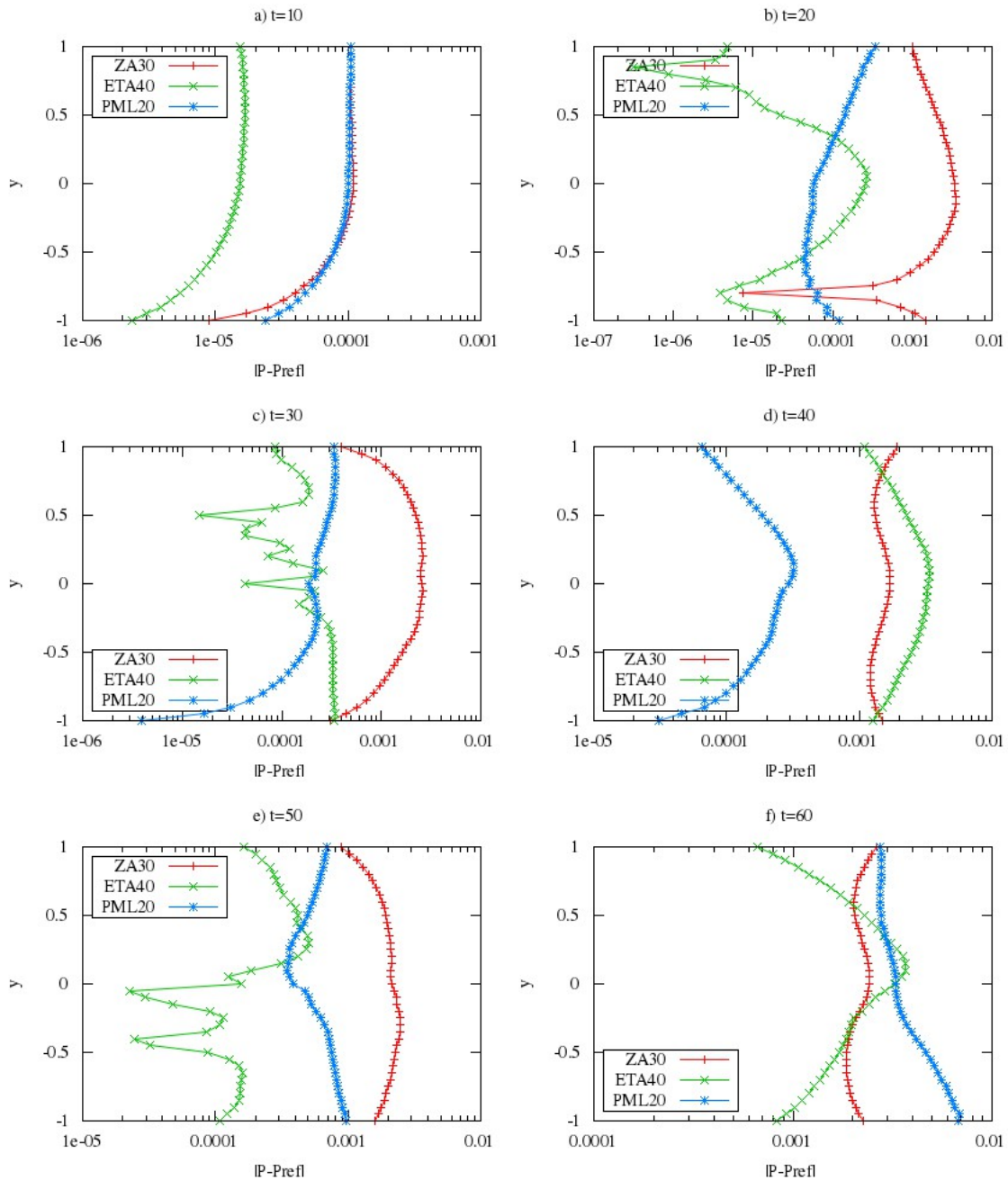


Figura 4.26 - Diferença de Pressão entre a pressão calculada usando os diferentes tipos de condições não reflexivas e a pressão calculada no domínio de referência. A pressão foi calculada no ponto  $x = 9$  para todos os  $y$ , em diferentes tempos, para a solução da equação não linear de Euler para uma camada de mistura.



ETA, que em muitos casos apresentou problemas de instabilidade, interrompendo a simulação numérica quando seu tamanho não era adequado.

A ZA mostrou ser a condição de contorno não reflexiva mais adequada para implementar na equação não linear de Euler, por seus bons resultados e seu menor custo computacional. Procedeu-se à realização de uma análise de estabilidade para a camada de mistura com o objetivo de avançar um pouco mais no entendimento da estabilidade na combustão. Para este estudo, a camada de mistura estudada na seção anterior, foi modificada com um jato e uma esteira, trocando os perfis de velocidade e temperatura, tal como foi feito por (SOARES et al., 2014) com uma análise de estabilidade linear. Com o código DNS desenvolvido nesta dissertação é possível observar a topologia dos vórtices de Kelvin-Helmholtz quando são modificados como componentes de esteiras e jatos. O contorno base é definido por uma combinação de uma camada de mistura do tipo tangente hiperbólica modificada por uma esteira ou um jato do tipo secante hiperbólica.

Para implementar a PML para os diferentes casos avaliados implicaria fazer a troca de variáveis proposta na equação 2.86 para garantir a consistência entre a velocidade de grupo de velocidade de fase. No entanto a escolha do  $\beta$  definido pela equação 2.87 não garante a estabilidade do método para estes problemas. Uma vez que o  $\beta$  foi determinado para o caso específico da camada de mistura. Fazendo-se necessário realizar uma análise de estabilidade para uma correta implementação da PML, ou usando o método de colocação espectral recomendado por Hu (HU, 2005) para encontrar as relações de dispersão para qualquer tipo de escoamento não uniforme e definir assim o  $\beta$  da transformação temporal 2.86.

Na Figura 4.27 são apresentados os perfis de velocidade e temperaturas para uma camada de mistura modificada por um jato ou uma esteira.

Uma vez definidos os contornos de velocidade e temperatura, foi alterada a frequências de excitação para os casos de análises, visando encontrar a frequência de maior amplificação para os vórtices de Kelvin-Helmholtz. Na Figura 4.28 são apresentados os contornos de vorticidade para as diferentes frequências de excitação  $\omega$  avaliadas para a camada de mistura sem nenhuma alteração.

Na Figura 4.28 pode-se observar visualmente que o maior crescimento atingido nos diferentes contornos de vorticidade ocorre com  $\omega=1$ , sendo evidente que para frequências menores é necessário um comprimento maior para o desenvolvimento das instabilidades. Para frequências maiores o tamanho dos vórtices diminui em relação

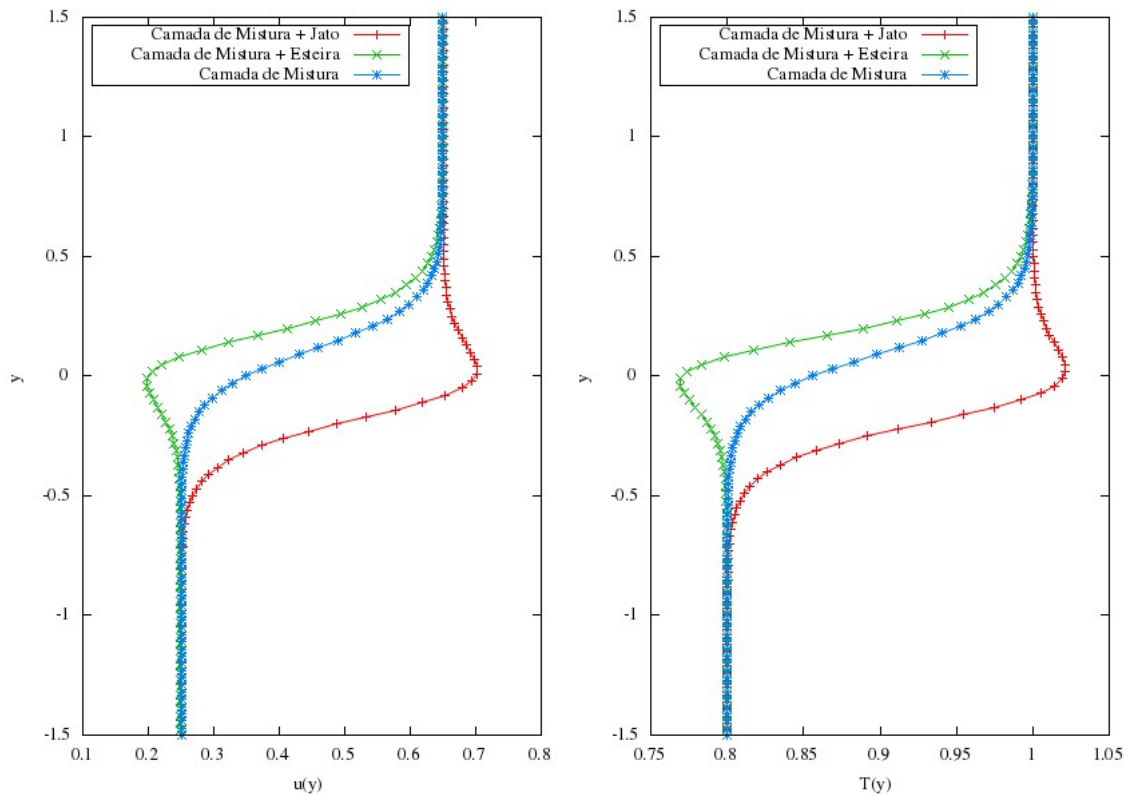


Figura 4.27 - Distribuição de velocidade  $u(y)$  e Temperatura  $T(y)$  usados para o análises de estabilidade.

ao contorno de vorticidade quando  $\omega=1$ .

Assim como foi feito para a camada de mistura, foi alterada a frequência de excitação para suas modificações com o jato e a esteira. Os contornos de vorticidade para as diferentes frequências avaliadas para a camada de mistura modificada com um jato são apresentados na Figura 4.29. A frequência de maior crescimento das instabilidade é  $\omega = 1$ , apresentando os maiores vórtices para a camada de mistura modificada com um jato.

Os diferentes contornos de vorticidade para a camada de mistura modificada com uma esteira são apresentados na Figura 4.30, determinado uma vez mais que a maior taxa de amplificação para a formação encontra-se em  $\omega = 1$ .

Determinadas as frequências que produzem os maiores crescimentos das instabilidades nos diferentes perfis de  $u(y)$  e  $T(y)$  avaliados, é possível comparar suas taxas de amplificação. Na figura 4.31 são comparadas as taxas de amplificação  $\alpha$  para a camada de mistura sem modificação, modificada com o jato e modificada como a esteira.

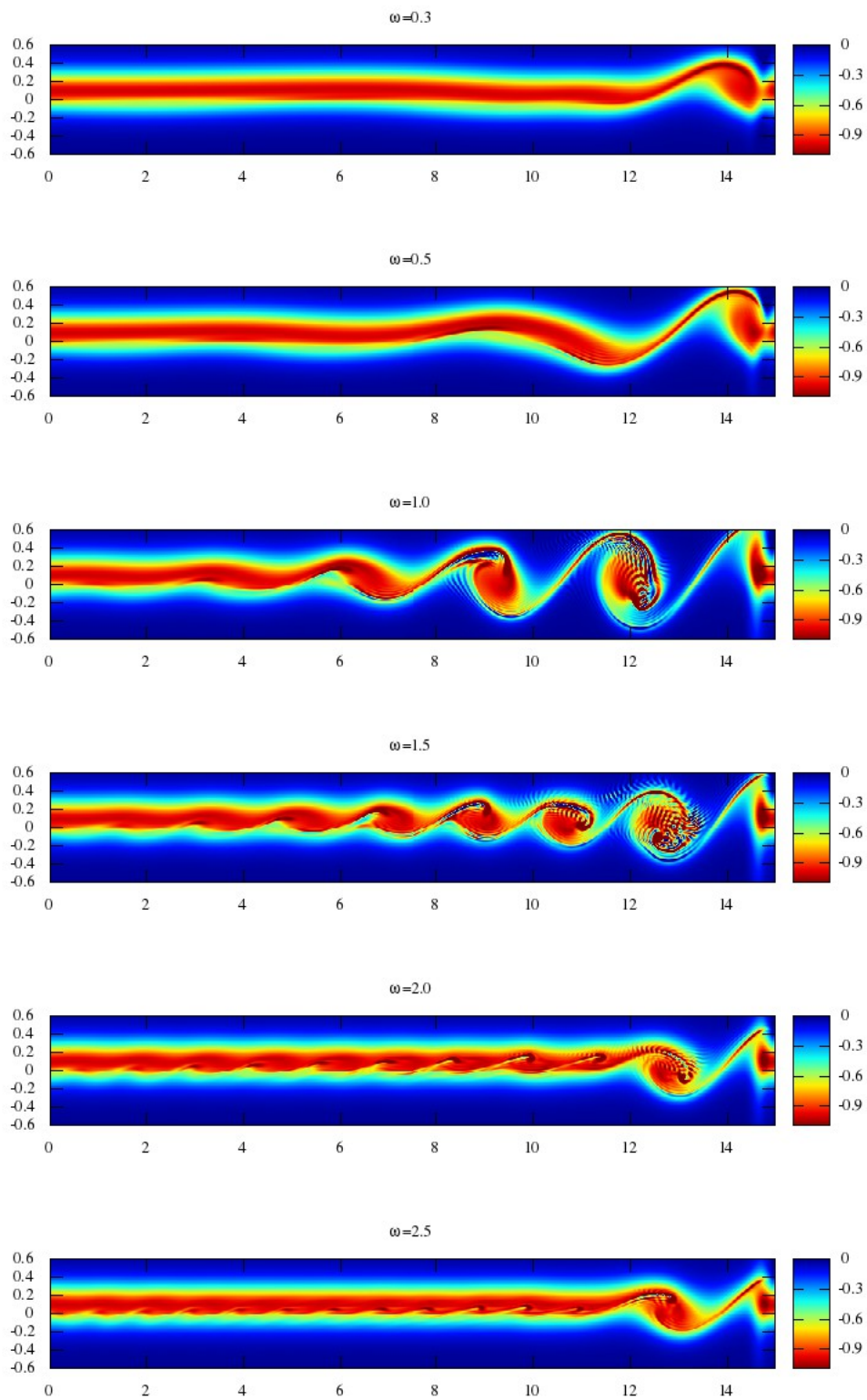


Figura 4.28 - Contornos de vorticidade da camada de misturas para diferentes frequências  $\omega$ .

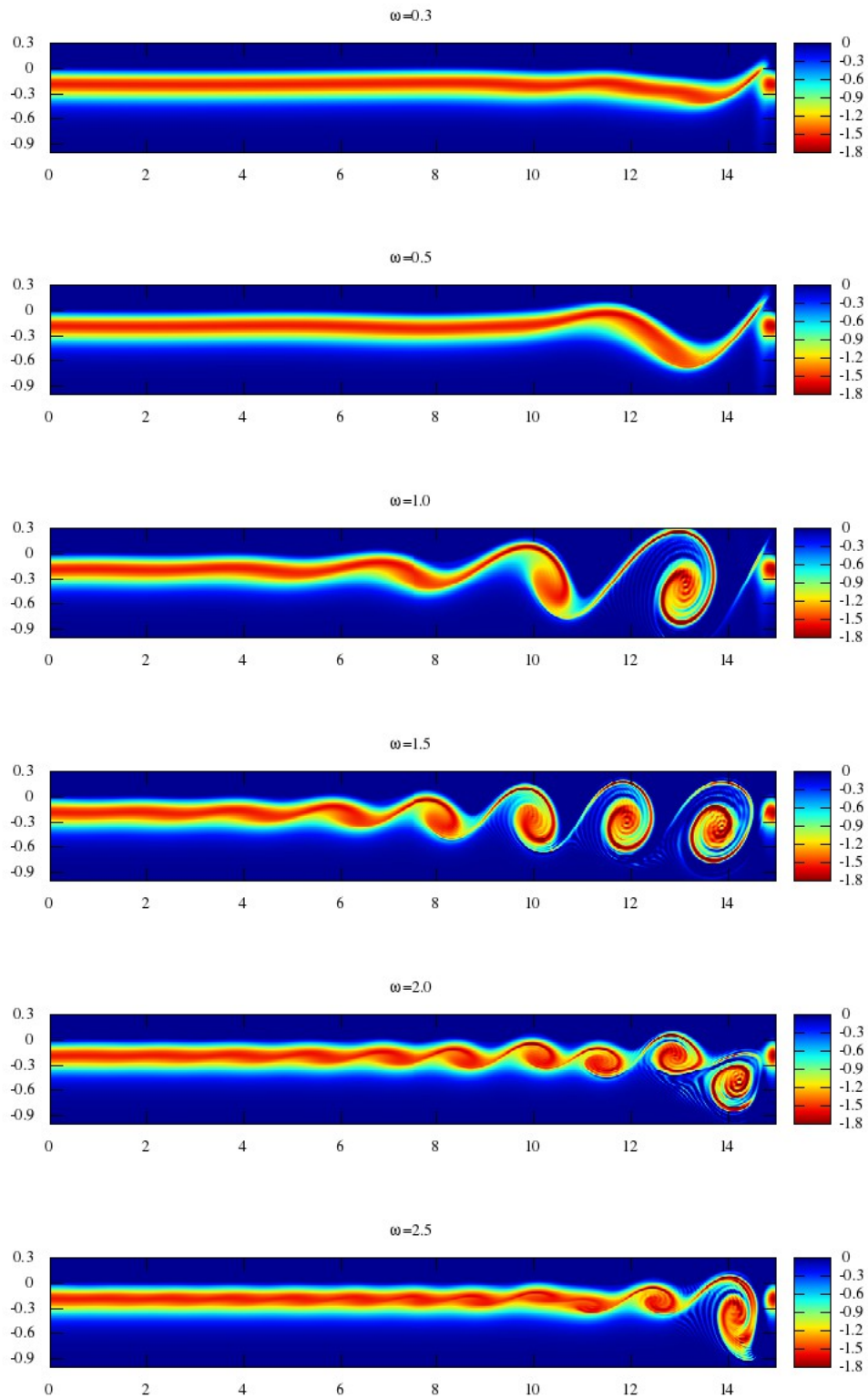


Figura 4.29 - Contornos de vorticidade da camada de misturas modificada com um jato para diferentes frequências  $\omega$ .

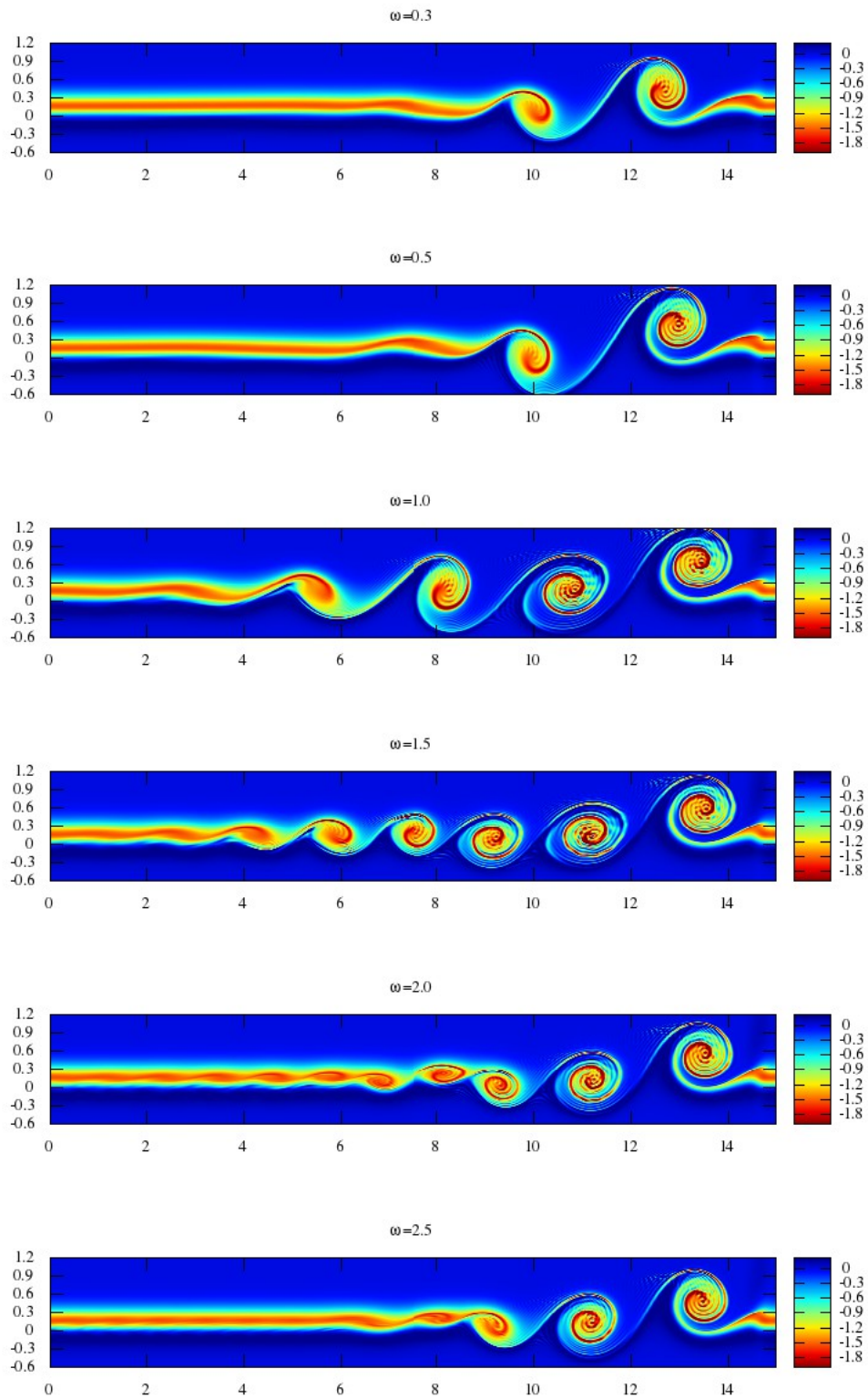


Figura 4.30 - Contornos de vorticidade da camada de misturas modificada com uma esteira para diferentes frequências  $\omega$ .

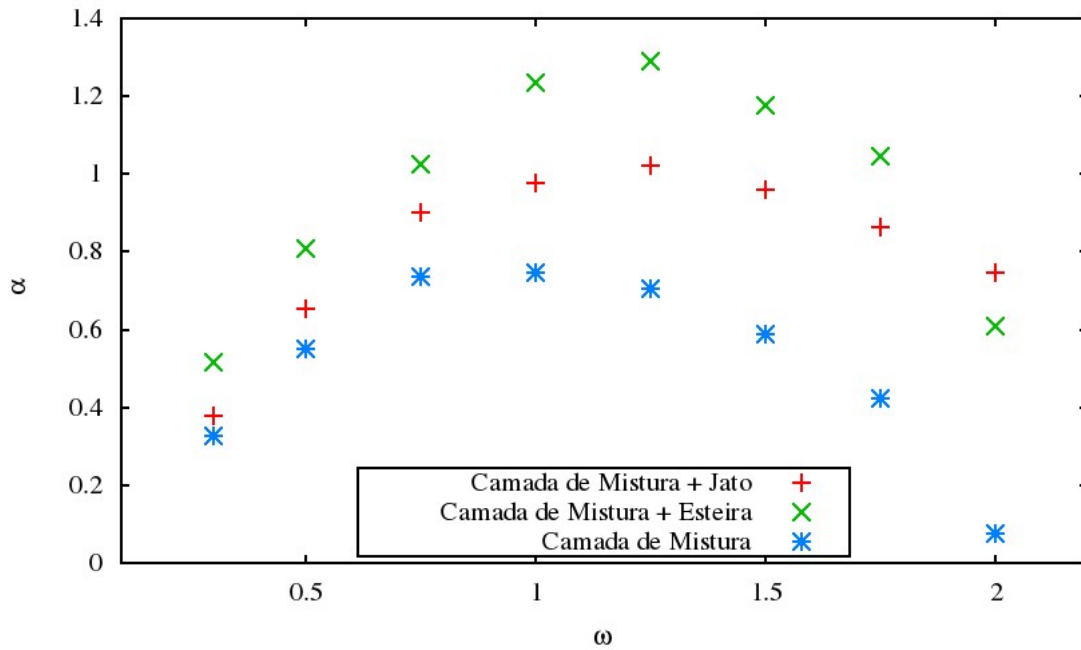


Figura 4.31 - Taxa de amplificação  $\alpha$  para os diferentes casos avaliados.

Na figura anterior foram calculadas mais frequências, podendo estabelecer como maior precisão a frequência que apresenta maior taxa de amplificação, sendo aproximadas das mencionadas anteriormente. Também é possível definir que a maior taxa de amplificação é atingida quando a camada de mistura é modificada como uma esteira.

Finalmente na Figura 4.32 foram comparadas os contornos de vorticidade para as frequências de maior amplificação dos diferentes casos avaliados.

A Figura 4.32 mostra o rápido crescimento dos vórtices e a maior intensidade de vorticidade atingida pela camada de mistura mais a esteira, em relação a camada de mistura sem modificação e à modificada com o jato. A figura mostra também que o crescimento da camada de mistura modificada com o jato apresenta maior vorticidade, mas a estrutura dos vórtices não muda significativamente em relação a camada de mistura sem modificação. No entanto, a estrutura regular dos vórtices de Kelvin-Helmholtz é modificada na camada de mistura modificada com a esteiras, não apresentando as estruturas típicas dos vórtices de Karman alcançados na esteira, formando uma estrutura mais complexa a camada de mistura modificada com a esteira.

Regressando as motivações desta dissertação, o resultado atingido com a camada

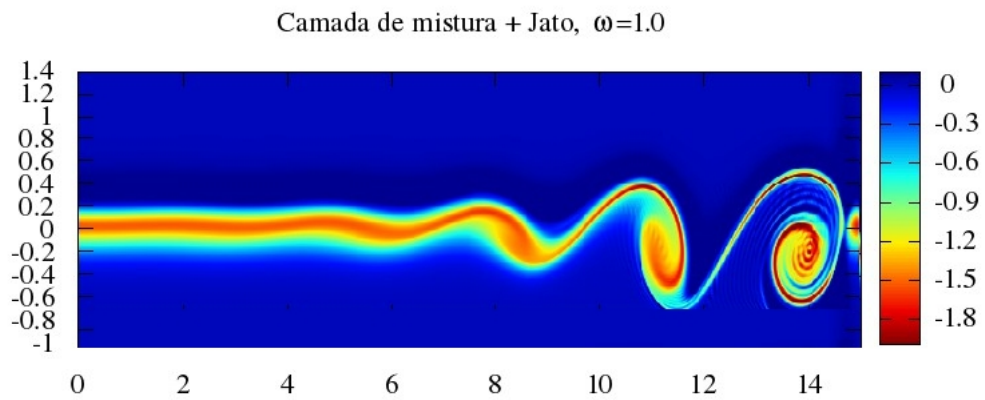
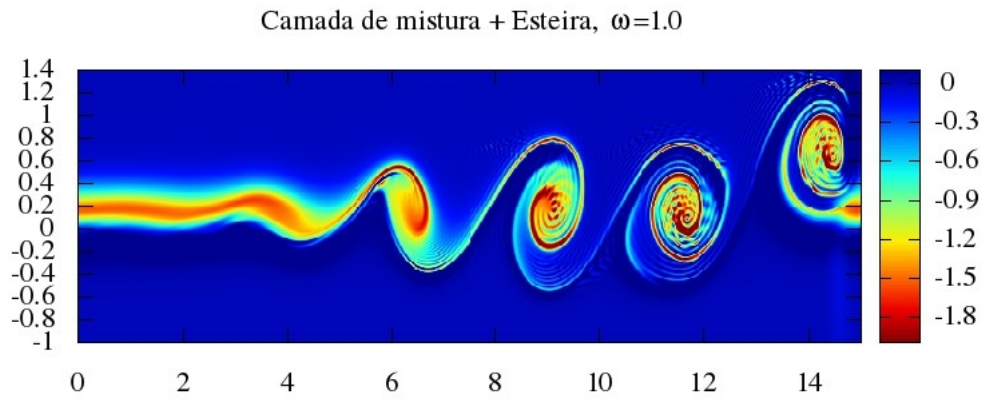
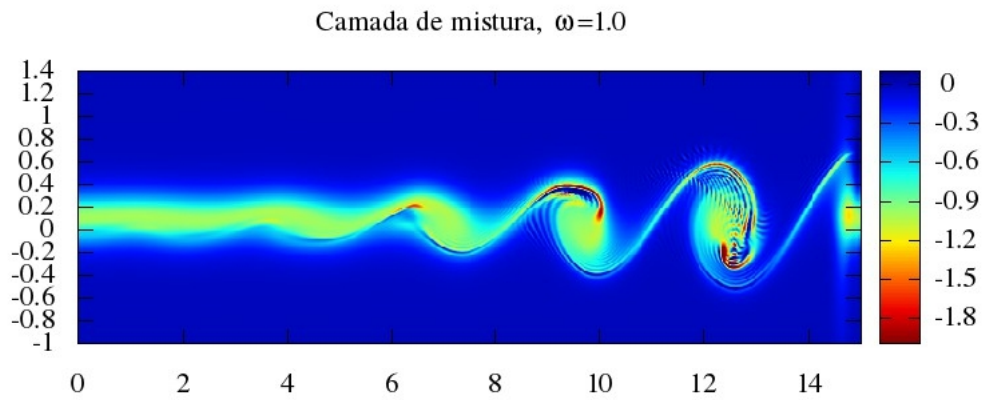


Figura 4.32 - Taxa de amplificação  $\alpha$  para os diferentes casos avaliados.

de mistura alterada com a esteira permitiria acelerar o processo de mistura entre um combustível e um oxidante, aumentando a velocidade da difusão entre as duas espécies e resultando na otimização das dimensões da câmara de combustão.



## 5 Conclusões

Nesta dissertação foi apresentado um estudo de condições de fronteira não reflexivas na sua implementação em uma camada de mistura compressível não viscosa. Para este estudo foram implementados três tipos de condições não reflexivas: a PML, a ETA e a ZA. Cada uma com suas vantagens e suas complicações. Para os diferentes casos avaliados foi evidente o bom comportamento das três condições, atingindo resultados satisfatórios quando foram comparadas com o domínio de referência. No entanto o objetivo desta dissertação além de implementar as diferentes condições de fronteira, era fazer uma comparação tanto na sua efetividade na absorção das reflexões quanto na sua eficiência computacional.

A PML evidenciou ser uma condição de contorno não reflexiva efetiva na diminuição das reflexões, mas com duas desvantagens. A primeira, a PML mostrou ser mais custosa computacionalmente nos casos avaliados, mesmo utilizando menos pontos do domínio em relação a ETA e ZA. Este aumento no custo computacional deve-se ao aumento do número de equações a ser resolvidas na zona da PML. A segunda desvantagem, a formulação da PML é complicada, implica em realizar varias transformações de coordenadas, além das que o método propõe, já que sua formulação pode levar a produzir instabilidades numéricas, as quais no lugar de diminuir as reflexões as aumentariam. Embora as transformações da PML já tenham sido definidas para ser implementadas nas equações de Euler e da Navier-Stokes para diferentes tipos de escoamentos, faz-se necessário fazer um estudo de estabilidade para usar PML para casos onde não foi implementada ainda. Este estudo implicaria em um maior trabalho, podendo obter resultados similares e até melhores com as condições não reflexivas do tipo ETA e ZA.

As condições de fronteira do tipo ZA e ETA implementadas para as equações de Euler, apresentaram uma alta efetividade na diminuição das reflexões e uma alta eficiência numérica em relação ao caso de referência. Elas, são simples de implementar e suas formulações não dependem das equações onde forem implementadas. Porém a ZA mostrou ser uma condição muito mais estável do que a ETA, que em muitos casos apresentou problemas de instabilidade, interrompendo a simulação numérica quando seu tamanho não era adequado.

Usando o código DNS de baixa dispersão e baixa dissipação numérica com a implementação da condição de fronteira do tipo ZA, desenvolvido nesta dissertação, foi realizado um estudo de estabilidade da camada de mistura modificada com escoamentos do tipo jato e esteira. Neste estudo foi confirmado, como foi feito em

(SOARES et al., 2014) usando uma análise de estabilidade linear, que a maior taxa de amplificação das instabilidades na camada de mistura é atingida quando é modificada por uma esteira ou jato. A configuração de camada de mistura mais a esteira apresenta maior taxa de amplificação em relação a camada de mistura mais jato e a camada de mistura sem modificação. Também foi possível observar no estudo de estabilidade as estruturas de crescimentos das diferentes configurações, o que não é possível de visualizar usando uma análise de estabilidade linear. Para a camada de mistura mais o jato o desenvolvimento de estruturas similares aos vórtices de Kelving-Helmholtz. Para a camada de mistura modificada com o esteira as instabilidades se desenvolvem em uma estrutura mais complexa, diferente dos vórtices de Kelving-Helmholtz desenvolvidos na camada de mistura e diferente dos vórtices de Karman desenvolvidos na esteira.

Esta dissertação tentou avançar um pouco mais na área de combustão em regime compressível, propondo como futuros trabalhos a implementação de espécies que representem o oxidante e combustível no processo de mistura e a implementação de um modelo de combustão no código DNS da camada de mistura usando as condições de fronteira do tipo ZA.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABARBANEL, S.; GOTTLIEB, D. A mathematical analysis of the pml method. **Computational Physics**, v. 142, 1997. 19

ABARBANEL, S.; GOTTLIEB, D.; HESTHAVEN, J. S. Well-posed perfectly matched layers for advective acoustics. **Computational Physics**, v. 154, 1999. 18, 19

B., E. N.; VISBAL, M. R. A general buffer zone-type non-reflecting boundary condition for computational aeroacoustics. **AIAA-paper**, v. 3300, p. 2003, 2003. ix, 38

BAYLISS, A.; ELI, T. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. **mathematic of computation**, v. 31, n. 139, 1977. 7, 8

\_\_\_\_\_. Radiation boundary conditions for wave-like equations. **mathematic of computation**, v. 33, n. 179, 1980. 8

BERENGER, J. P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. **Computational Physics**, v. 114, 1994. 10, 18, 19, 31

BERLAND, J.; BOGEY, C.; BAILLY, C. Low-dissipation and low-dispersion fourth-order runge–kutta algorithm. **Computers & Fluids**, Elsevier, v. 35, n. 10, p. 1459–1463, 2006. 50

BOGEY, C.; BAILLY, C. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 194, n. 1, p. 194–214, 2004. 59

COLONIUS, T.; LELE, S. K.; MOIN, P. Boundary conditions for direct computation of aerodynamic sound generation. **AIAA journal**, v. 31, n. 9, p. 1574–1582, 1993. 9, 10

GILES, M. B. Non reflecting boundary conditions for euler equation calculations. **AIAA**, Cambridge, Massachusetts, v. 28, p. 12, December 1990. 8, 36, 37

HAGSTROM, T.; HARIHARAN, S. I. Accurate boundary conditions for exterior problems in gas dynamics. **Computational Physics**, v. 51, n. 184, 1988. 8

HALL, K. C.; CRAWLEY, E. F. Calculation of unsteady flows in turbomachinery using the linearized euler equations. **AIAA**, v. 27, p. 777–787, June 1989. 7

HU, F. Q. On absorbing boundary conditions for linearized euler equations by a perfectly matched layer. **Computational Physics**, v. 129, n. 0244, 1996. 11, 19, 25

\_\_\_\_\_. On perfectly matched layer as an absorbing boundary condition. **AIAA**, v. 96, 1996. 18

\_\_\_\_\_. A stable, perfectly mathed layer for linearized euler equations in unsplit physical variables. **Computational Physics**, v. 173, 2001. ix, 11, 18, 19, 26, 29, 30, 67, 68

\_\_\_\_\_. A perfectly matched layer absorbing boundary condition for linearized euler equations with a non-uniform mean flow. **Computational Physics**, v. 208, 2005. 11, 33, 103

HU, F. Q.; HUSSAINI, M. Y.; MANTHEY, J. L. Low-dissipation and low-dispersion runge–kutta schemes for computational acoustics. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 124, n. 1, p. 177–191, 1996. 48, 49

HU, F. Q.; LI, X. D.; LIN, D. K. Absorbing boundary conditions for nonlinear euler and navier–stokes equations based on the perfectly matched layer technique. **Journal of computational physics**, Elsevier, v. 227, n. 9, p. 4398–4424, 2008. 11

JOHNSON, S. G. Notes on perfectly matched layers (pmls). **Lecture notes, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts**, 2008. ix, 16

KREISS, H.-O. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, Wiley Online Library, v. 23, n. 3, p. 277–298, 1970. 8

LELE, S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. **Journal of computational physics**, Elsevier, v. 103, n. 1, p. 16–42, 1992. 45

LIN, D. K.; LI, X. D.; HU, F. Q. Absorbing boundary condition for nonlinear euler equations in primitive variables based on the perfectly matched layer technique. **Computers e Fluids**, v. 40, 2011. 34

POINSOT, T. J.; LELEF, S. K. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. **Journal of computational physics**, Elsevier, v. 101, n. 1, p. 104–129, 1992. 9

QUIRINO, S. F. **Simulação numérica direta de camada cisalhante compressível com fonte de calor**. 2006. 103 p. (INPE-14661-TDI/1217.

Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), São José dos Campos, 2006. 5

RAI, M. M.; MOIN, P. Direct numerical simulation of transition and turbulence in a spatially evolving boundary layer. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 109, n. 2, p. 169–192, 1993. 9

SOARES, M. S.; FACHINI, F. F.; MENDONÇA, M. T. Effect of thickness ratio on the stability of mixing layers with a wake component. **Escola de transição e turbulencia, São Leopoldo**, 2014. 103, 112

STREETT, C. L.; MACARAEG, M. G. Spectral multi-domain for large-scale fluid dynamics simulations. **Applied Numerical Mathematics**, v. 6, 1989–90. 9

TAÁSAN, S.; NARK, D. M. An absorbing buffer zone technique for acoustic wave propagation. **AIAA**, v. 31, n. 9, 1993. 9

TAM, C. K. W. **Computational Aeroacoustics A Wave Number Approach**. First. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. ix, 42, 43, 44, 52

TAM, C. K. W.; WEBB, J. C. Dispersion-relation-preserving schemes for computational acoustics. **Computational Physics**, v. 107, n. 184, 1993. 8, 41

TAM, C. K. W.; WEBB, J. C.; DONG, Z. A study of the short wave components in computational acoustics. **Journal of Computational Acoustics**, World Scientific, v. 1, n. 01, p. 1–30, 1993. 47

THOMPSON, K. W. Time-dependent boundary conditions for hyperbolic systems ii. **Computational Physics**, Moffett Field, California, v. 89, p. 439–461, August 1990. 9

VERDON, J.; ADAMCZYK, J.; CASPAR, J. Subsonic flow past an oscillating cascade with steady blade loading—basic formulation. **Symposium Unsteady aerodynamics**, v. 2, 1975. 7

WASISTHO, B.; GEURTS, B. J.; KUERTEN, J. G. M. Simulation techniques for spatially evolving instabilities in compressible flow over a flat plate. **Computers and Fluids**, v. 26, n. 7, 1997. 68

