UM PROBLEMA DE DETERMINAÇÃO DE POLÍTICA ÓTIMA PARA SISTEMAS DE MANUTENÇÃO COM MÁQUINAS DE RESERVA E NÚMERO VARIÁVEL DE SERVIDORES

Samuel Roberto Ximenes Costa (CNPq/INPE)
Paulo Renato de Morais (CNPq/INPE)

RESUMO

Este trabalho considera um sistema de manutenção em que o número de servidores alocados pode ser alterado tanto em instantes de chegada de máquinas como em instantes de término de reparo. O sistema de produção possui um número finito de máquinas idênticas que falham após um tempo com distribuição exponencial e um número finito de máquinas de reserva. Após a falha, a máquina quebrada é substituída por uma reserva, se houver alguma disponível, e enviada para a oficina de reparo. Esta possui um número finito de servidores independentes em disponibilidade, cada um com tempo de serviço exponencial. A estrutura de custos inclui um custo de perda de produção, um custo de espera, um custo de reparo e um custo de alteração no número de servidores alocados. Este problema de controle é representado por um modelo de decisão semimarkoviano. O critério de otimalidade considerado é o custo médio por unidade de tempo a longo prazo. Um algoritmo de iteração de políticas é usado para determinar os parâmetros da política de controle ótima dentro de uma subclasse particular da classe das políticas estacionárias. Resultados numéricos são apresentados para o caso de dois servidores disponíveis.

ABSTRACT

This paper considers a maintenance system in which the number of operating servers can be adjusted both at arrival and repair completion epochs. The production system has a finite number of identical machines, each having an exponentially distributed lifetime, and a finite number of spares. After failure, a machine is replaced by a spare, if there is any available, and is sent to the repair facility. The repair facility has a finite number of independent servers available, each having an exponentially distributed service time. The cost structure includes a cost due to lost production, a holding cost, a repair cost, and a switch-over cost when the number of operating servers is adjusted. This control problem is represented by a semi-Markov decision model. The optimality criterion considered is the long-run average cost per unit time. A policy-iteration algorithm is used to compute the parameters of the optimal control policy within a particular subclass of the class of all stationary policies. Numerical results are given for the two-server case.

1 - INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é determinar uma política ótima de controle para um dado sistema de manutenção, que minimize o custo médio por unidade de tempo a longo prazo.

O sistema de manutenção enfocado neste trabalho é constituído por dois subsistemas: o subsistema produtivo e o subsistema de reparo (Figura 1).

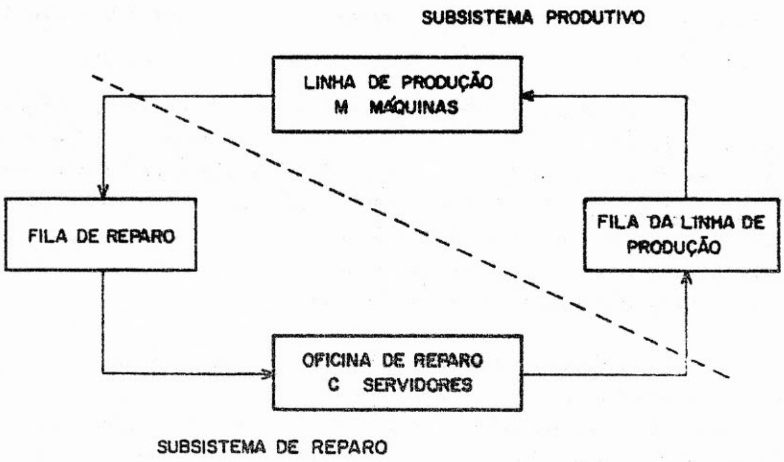

Fig. 1 - Sistema de manutenção

O subsistema produtivo é composto por (M+R) máquinas idênticas, sendo M máquinas na linha de produção e R máquinas de reserva, e uma fila da linha de produção. Os intervalos entre quebras de cada máquina são independentes e identicamente distribuídos, com distribuição exponencial com tempo médio entre falhas igual a $1/\lambda$. As máquinas de reserva não falham enquanto não entram na linha de produção. A linha de produção continua a operar com menos de M máquinas se há pelo menos uma máquina em boas condições.

Quando ocorre a quebra de uma máquina, esta é enviada para o subsistema de reparo e é substituída por uma das máquinas de reserva.

O subsistema de reparo é composto por uma oficina de reparo que pode conter no máximo C servidores e por uma fila de reparo. Cada máquina quebrada é atendida por um único servidor, e os tempos de reparo de cada máquina pelos servidores são independentes e identicamente distribuídos, com distribuição exponencial com tempo médio de reparo igual a $1/\mu$, e são independentes dos intervalos entre quebras. Não há prioridade de atendimento, utilizando-se a disciplina "FIFO" (a primeira a chegar é a primeira a ser atendida).

O estado do sistema é definido por um par de valores (i,s) que são o número de máquinas na fila de reparo e o número de servidores alocados, respectivamente. Este estado é observado sempre que ocorre uma quebra de máquina ou término de reparo. Neste último caso, a máquina consertada é enviada para o subsistema de produção, entrando ou não imediatamente em ação, dependendo de a linha de produção estar incompleta ou não.

Observado o estado do sistema, uma ação deve ser tomada. Esta ação pode ser aumentar, manter ou diminuir o número de servidores alocados na tarefa de reparar as máquinas. Para cada estado do sistema uma ação deve ser adotada, constituindo o conjunto delas uma política de manutenção.

A estrutura de custos adotada para este trabalho inclui um custo de perda de produção $CP>0$ por máquina em falta na linha de produção por unidade de tempo, um custo de espera na fila de reparo de $H>0$ por máquina por unidade de tempo, um custo de reparo de $W>0$ por servidor alocado por unidade de tempo e um custo de alocação $K(a,b)$ quando o número de servidores alocados é ajustado de a para b, onde $K(a,a)=0$ e

$$K(a,b) = \begin{cases} k^+ + K^+(b-a) & \text{para } b>a, \\ k^- + K^-(a-b) & \text{para } b<a, \end{cases}$$

com k^-, k^+, K^-, $K^+ \geq 0$.

Este problema de controle pode ser representado por um modelo de decisão semimarkoviano no qual os instantes de decisão são os instantes de quebra de máquina e de término de reparo.

Em qualquer instante de decisão o sistema pode ser classificado em um dos estados do espaço de estados finito

$$I = \{(i,s) | i=0,1,\dots,(M+R);\ s=0,1,\dots,C)\},$$

onde o estado (i,s) corresponde à situação em que i máquinas estão na fila de reparo, e s servidores estão alocados. Para qualquer estado $(i,s)\varepsilon I$ o conjunto das possíveis ações é $A=\{0,1,\dots C\}$, onde a ação $a\varepsilon A$ significa ajustar o número de servidores alocados para a. Define-se a seguir a classe de políticas admissíveis.

Define-se uma política estacionária denotada por f como uma regra de controle que sempre escolhe a ação $f(i,s)\varepsilon A$ quando o estado do sistema é $(i,s)\varepsilon I$. A classe de políticas admissíveis, denotada por F_0, é um subconjunto do conjunto das políticas estacionárias que tem a forma simples descrita abaixo. Caracteriza-se qualquer política $f\varepsilon F_0$ por números inteiros $s(i)$, $S(i)$, $T(i)$ e $t(i)$ para $i=0,1,\dots,(M+R)$, tal que:

a) $-1\leq s(i)<S(i)\leq T(i)<t(i)\leq C+1$ para $i\geq 0$,
   onde $s(M+R)=C-1$ e $t(M+R)=C+1$;

b) $s(i)\leq s(i+1)$ e $t(i)\leq t(i+1)$ para $i\geq 0$.

Se num instante de decisão existem i máquinas na fila de reparo e s servidores alocados, então sob esta política $f=(s(i), S(i), T(i), t(i))$ ajusta-se o número de servidores para cima para o valor $S(i)$ quando $s\leq s(i)$, o qual é mantido inalterado quando $s(i)<s<t(i)$ e ajustado para baixo para o valor $T(i)$ quando $s\geq t(i)$.

Observe que sob qualquer política da classe F_0 todos os C servidores são alocados ou permanecem alocados quando M+R máquinas estão na fila de reparo. Para uma melhor visualização de co mo se determina a ação a ser tomada sob uma dada política desta classe, considere a política abaixo para o caso em que M=2, R=1 e C=2:

f =

i	s(i)	S(i)	T(i)	t(i)
0	-1	0	0	1
1	0	1	1	2
2	0	1	2	3
3	1	2	2	3

Se o estado do sistema é (i,s)=(2,1), tem-se que s(2)=0, S(2)=1, T(2)=2, t(2)=3 e toma-se a ação a=1, ou seja, mantém-se inalterado o número de servidores. Se o estado do sistema é (i,s)=(3,0), tem-se que s(3)=1, S(3)=2, T(3)=2, t(3)=3 e toma-se a ação a=2, ou seja, aumenta-se o número de servidores de zero para 2.

O interesse deste trabalho é calcular uma política admissível ótima com custo médio mínimo por unidade de tempo a longo prazo dentro da classe F_0. Isso é feito através de um algoritmo de iteração de políticas, cuja descrição encontra-se na seção seguinte.

2 - RESULTADOS TEÓRICOS

Nesta seção objetiva-se obter as expressões para o cálculo das probabilidades de transição e dos tempos e custos esperados entre transições; apresentar os resultados obtidos por Tijms (1980), que são utilizados na elaboração de um algoritmo de iteração de políticas; e, finalmente, apresentar o algoritmo utilizado.

Definem-se as seguintes quantidades, dado que no instante zero o sistema está no estado $(i,s)\varepsilon I$ e adota-se a ação $a\varepsilon A$:

P(i,s;j,a) = probabilidade de que no próximo instante de decisão o estado do sistema seja (j,a);

T(i,s,a) = tempo esperado de transicão até o próximo instante de decisão;

$c(i,s,a)$ = custo esperado incorrido até o próximo instante de decisão.

Primeiramente deduzem-se as expressões para o cálculo das probabilidades de transição.

Em determinado momento em que uma máquina quebra ou termina um reparo, observa-se o estado do sistema; seja (i,s) o estado nesse instante. Se $i \leq R$ e adota-se a decisão $a \leq i$, existem M máquinas na linha de produção e todos os a servidores alocados estão trabalhando. Então a probabilidade de que no próximo instante de decisão o estado seja $(i-1,a)$ é a probabilidade de que ocorra um término de reparo antes que quebre uma máquina. Assim:

$$P(i,s;i-1,a) = Pr[\min(T_1,T_2,\ldots,T_a) < \min(Q_1,\ Q_2,\ldots,Q_M)],$$

onde T_k representa o tempo de reparo do k-ésimo servidor, $k = 1, 2,\ldots,a$, e Q_k representa o intervalo entre quebras da k-ésima máquina, $k = 1,2,\ldots,M$. Tem-se que o mínimo entre n variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial com parâmetro λ tem uma distribuição exponencial com parâmetro $n\lambda$. Assim,

$$Q_{min} = \min(Q_1,\ Q_2,\ldots,\ Q_M) \sim Exp(M\lambda) \text{ e}$$

$$T_{min} = \min(T_1,\ T_2,\ldots,\ T_a) \sim Exp(a\mu).$$

Finalmente,

$$P(i,s;i-1,a) = a\mu/(a\mu + M\lambda), \text{ se } i \leq R \text{ e } a \leq i.$$

Analogamente obtêm-se as seguintes probabilidades de transição:

$$P(i,s;i-1,a) = \begin{cases} i\mu/(i\mu+M\lambda), & \text{se } i \leq R \text{ e } a > i; \\ a\mu/(a\mu+(M+R-i)\lambda), & \text{se } i > R \text{ e } a \leq i; \\ i\mu/(i\mu+(M+R-i)\lambda), & \text{se } i > R \text{ e } a > i. \end{cases}$$

Notando que $P(i,s;i+1,a) = 1-P(i,s;i-1,a)$ e que $P(i,s;j,a) = 0$ se $j \neq i-1,\ i+1$, verifica-se que todas as probabilidades de transição foram calculadas.

Considerem-se agora os tempos esperados entre transições. Se $i \le R$ e $a \le i$, a próxima transição ocorre quando quebra uma das M máquinas da linha de produção ou quando um dos a servidores termina um reparo. Então a distribuição do tempo entre transições é a distribuição do mínimo entre M intervalos entre quebras e a tempos de reparo. Como todas as variáveis aleatórias envolvidas têm distribuição exponencial e são independentes, essa distribuição é exponencial com parâmetro $a\mu+M\lambda$; assim:

$$T(i,s,a) = 1/(a\mu+M\lambda), \quad \text{se } i \le R \text{ e } a \le i.$$

Analogamente obtêm-se os demais tempos esperados entre transições:

$$T(i,s,a) = \begin{cases} 1/(i\mu+M\lambda), & \text{se } i \le R \text{ e } a > i; \\ 1/(a\mu+(M+R-i)\lambda), & \text{se } i > R \text{ e } a \le i; \\ 1/(i\mu+(M+R-i)\lambda), & \text{se } i > R \text{ e } a > i. \end{cases}$$

Com a estrutura de custos definida na Seção 1, a expressão para o cálculo do custo esperado incorrido entre transições é:

$$c(i,s,a) = \begin{cases} T(i,s,a)(Hi+Wa+[i-R]^+ CP), & \text{se } a=s; \\ T(i,s,a)(Hi+Wa+[i-R]^+ CP) + k^+ + K^+(a-s), & \text{se } a>s; \\ T(i,s,a)(Hi+Wa+[i-R]^+ CP) + k^- + K^-(s-a), & \text{se } a<s; \end{cases}$$

onde

$$[i-R]^+ = \begin{cases} i-R, & \text{se } i>R; \\ 0, & \text{se } i \le R. \end{cases}$$

Determinadas as expressões para o cálculo das probabilidades de transição e dos tempos e custos esperados entre transições, apresenta-se a seguir o teorema que fornece o resultado teórico para elaboração do algoritmo de iteração de políticas. A prova deste teorema encontra-se em Tijms (1980).

TEOREMA - *Para quaisquer* $(i,s) \in I$ *e* $f \in F_0$,

$$w(i,s,f) = c(i,s,f(i,s))-g(f)T(i,s,f(i,s)) + \sum_{j=0}^{M+R} P(i,s;j,f(i,s))w(j,f(i,s),f), \qquad (2.1)$$

onde $g(f)$ *é o custo médio por unidade de tempo a longo prazo, sob a política* f, *e* $w(i,s,f)$ *é a função de custo relativo.*

A seguir apresenta-se o algoritmo de iteração de políticas, o qual foi desenvolvido por Tijms (1980) para sistemas de filas e adaptado neste trabalho para sistemas de manutenção.

Os parâmetros de entrada são as probabilidades de transição, os tempos e custos esperados entre transições e uma política inicial, $f \in F_0$, qualquer.

PASSO 1: Determinação das quantidades $g(f)$ e $w(i,s,f)$.

Seja $f=(s(i),S(i),T(i),t(i)) \in F_0$ uma política inicial qualquer. Calcule as quantidades $g(f)$ e $w(i,s,f)$ para $(i,s) \in I$, resolvendo o Sistema 2.1 de equações lineares e arbitrando um dos $w(i,s,f)$.

Antes de passar ao Passo 2, define-se a quantidade de melhoria de política que é ali utilizada. Para $(i,s) \in I$, $a \in A$ e $f \in F_0$, define-se:

$$TP(i,s,a,f)=c(i,s,a)-g(f)T(i,s,a)+ \sum_{j=0}^{M+R} P(i,s;j,a)w(j,a,f).$$

PASSO 2: Melhoria de política

a) Para qualquer $i=0,1,\ldots,(M+R-1)$ determine $S'(i)$ como o menor inteiro que minimiza $[K(0,a)+w(i,a,f)]$ para $s(i)<a<t(i)$ e determine $T'(i)$ como o maior inteiro que minimiza $[K(c,a)+w(i,a,f)]$ para $s(i)<a<t(i)$.

b) Sucessivamente para $i=0,1,\ldots,(M+R-1)$ determine $s'(i)$ e $t'(i)$ como se segue, onde se definem $s(-1)=-1$ e $t(-1)=0$. Defina $s'(i)$ como o maior inteiro d tal que $s(i)+1\leq d\leq \min[S'(i)-1,s(i+1)]$ e $K(s,S'(i))+w(i,S'(i),f)<w(i,s,f)$ para todo $s(i)<s\leq d$ se tal inteiro existir; caso contrário, faça $s'(i)$ igual a $\ell-1$, onde ℓ é o menor inteiro tal que $\min[0,s(i-1)+1]\leq\ell\leq s(i)$ e $TP(i,s,s,f)\leq K(s,S'(i))+w(i,S'(i),f)$ para todo $\ell\leq s\leq s(i)$ se tal inteiro existir; caso contrário, faça $s'(i)=s(i)$. Defina $t'(i)$ como o menor inteiro d' tal que $\max[T'(i)+1,t(i-1)]\leq d'\leq t(i)$ e $K(s,T'(i))+w(i,T'(i),f)<w(i,s,f)$ para todo $d'\leq s<t(i)$ se tal inteiro d' existir; caso contrário, faça $t'(i)$ igual a $\ell'+1$, onde ℓ' é o maior inteiro tal que $t(i)\leq\ell'<\min[t(i+1)-1,C]$ e $TP(i,s,s,f)\leq K(s,T'(i))+w(i,T'(i),f)$ para todo $t(i)\leq s\leq\ell'$ se tal inteiro ℓ' existir; caso contrário, faça $t'(i)=t(i)$.

PASSO 3: Comparação das políticas

Seja $f'=(s'(i),S'(I),T'(i),t'(i))$. Se $f'=f$ então pare; caso contrário, retorne ao Passo 1 com f substituído por f'.

Segundo Tijms, este algoritmo gera uma sequência de políticas melhoradas dentro da classe F_0, onde a questão de convergência para a política ótima contudo permanece por ser resolvida. A condição de otimalidade abaixo foi fornecida por Tijms e verificada numericamente para as políticas ótimas obtidas neste trabalho.

CONDIÇÃO DE OTIMALIDADE: Se para algum $f\epsilon F_0$, $\min_{a\epsilon A} TP(i,s,a,f_0)=w(i,s,f_0)$ para todo $(i,s)\epsilon I$, então $g(f_0)\leq g(f)$ para todo $f\epsilon F_0$, isto é, f_0 é a política de custo médio mínimo dentro da classe F_0.

3 - RESULTADOS NUMÉRICOS

Com os resultados obtidos na seção anterior, implementou-se um programa computacional. A listagem deste programa encontra-se em Costa (1984).

Apresentam-se a seguir os resultados de alguns testes feitos com o algoritmo de iteração de políticas apresentado na seção anterior para $M=3$, $R=1$, $C=2$, $\mu=1,5$, $\lambda=1$, e $k^-=k^+=0$.

A Tabela 1 apresenta os parâmetros das políticas ótimas obtidas, $s^*(i)$, $S^*(i)$, $T^*(i)$ e $t^*(i)$ para i=0,1,2,3,4 e para vários valores de H, bem como seus respectivos custos médios mínimos por unidade de tempo a longo prazo, g^*. Considerou-se que $W=K^-=K^+=1$ e CP=0. Analisando esta tabela, verifica-se que o número de servidores alocados ao sistema de manutenção aumenta com o aumento do custo de espera na fila de reparo, H.

TABELA 1

EFEITO NA POLÍTICA ÓTIMA DO AUMENTO NO CUSTO DE ESPERA NA FILA DE REPARO (H)

H	zero	0,01	1,00	4,00	10,00	100,00
i	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*
0	-1 0 1 2	-1 0 1 2	-1 0 1 2	-1 0 2 3	-1 0 2 3	-1 0 2 3
1	-1 0 1 2	-1 0 1 2	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3
2	-1 0 2 3	-1 0 2 3	0 1 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3
3	-1 0 2 3	-1 0 2 3	0 1 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3
4	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3
g*	1,67	1,69	3,74	8,95	19,38	175,77

A Tabela 2 é semelhante à Tabela 1, só que altera-se apenas o custo de reparo W, e fixam-se $H=K^-=K^+=1$ e CP=0. Analisando esta tabela, observa-se que o número de servidores alocados diminui com o aumento do custo de reparo.

A Tabela 3 é semelhante à Tabela 1, só que varia-se apenas o custo de alocação de servidores ao sistema de manutenção, K^- e K^+, e fixam-se H=W=1 e CP=0. Analisando esta tabela, observa-se que as alterações no número de servidores alocados diminuem com o aumento do custo de alocação dos servidores.

TABELA 2

EFEITO NA POLÍTICA ÓTIMA DO AUMENTO NO CUSTO DE REPARO DO SERVIDOR (W)

W	zero	0,01	1,00	4,00	10,00	100,00
i	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*
0	-1 0 2 3	-1 0 2 3	-1 0 1 2	-1 0 1 2	-1 0 0 1	-1 0 0 1
1	1 2 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3	-1 0 0 2	-1 0 0 1	-1 0 0 1
2	1 2 2 3	1 2 2 3	0 1 2 3	-1 0 2 3	-1 0 0 1	-1 0 0 1
3	1 2 2 3	1 2 2 3	0 1 2 3	-1 0 2 3	-1 0 0 1	-1 0 0 1
4	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3
g*	1,74	1,76	3,74	7,41	11,25	56,25

TABELA 3

EFEITO NA POLÍTICA ÓTIMA DO AUMENTO NO CUSTO DE ALOCAÇÃO DOS SERVIDORES (K^+ e K^-)

$K^-=K^+$	zero	0,01	1,00	4,00	10,00	100,00
i	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*	s*S*T*t*
0	-1 0 0 1	-1 0 0 1	-1 0 1 2	-1 0 2 3	-1 0 2 3	-1 0 2 3
1	0 1 1 2	0 1 1 2	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3
2	1 2 2 3	1 2 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3
3	1 2 2 3	1 2 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3
4	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3	1 2 2 3
g*	3,15	3,15	3,74	3,74	3,74	3,74

A Tabela 4 apresenta o custo médio mínimo por unidade de tempo a longo prazo, g*, obtido fixando os custos de espera na fila de reparo (H=10), de reparo (W=50), de alocação de servido res ($K^-=K^+=30$, $k^-=k^+=0$), M=10, C=2 e variando o custo de perda de produção (CP) e o número de máquinas de reserva (R). Observando esta tabela, verifica-se que o custo médio a longo prazo em alguns casos atinge um valor mínimo para R>1, o que indica que é interessante nesses casos utilizar mais de uma máquina de reserva.

TABELA 4

VARIAÇÃO DO NÚMERO DE MÁQUINAS DE RESERVA (R)

CUSTO MÉDIO MÍNIMO A LONGO PRAZO (g*)						
CP \ R	1	2	3	4	5	6
30	133,72	136,54	140,45	144,59	148,29	152,26
40	145,81	146,21	147,94	149,98	152,75	156,05
50	157,29	155,29	154,32	155,09	157,09	159,84
60	168,24	163,17	160,42	160,16	161,43	163,58

4 - COMPARAÇÃO COM O MODELO ADOTADO POR VAKULATHIL

Vakulathil (1983) estudou um sistema de manutenção com M máquinas na linha de produção e uma máquina de reserva (R=1). As máquinas na linha de produção são idênticas, com distribuição do tempo de quebra exponencial com parâmetro λ. A oficina de reparo conta com um único servidor cujo tempo de reparo admite-se ter uma distribuição geral F_k, com média $1/\mu_k$, k=1,2. Isto é, o servidor pode trabalhar com uma de duas taxas de reparo distintas. Os instantes de observação do sistema são os instantes de término de reparo, quando então uma das duas taxas de reparo tem de ser escolhida para ser utilizada no próximo reparo.

A estrutura de custos adotada no modelo estudado por Vakulathil inclui um custo de espera na fila H, um custo de reparo W_i quando o servidor trabalha a taxa μ_i e um custo de troca da taxa de reparo K_i quando ocorre a troca da taxa μ_i para a outra, i=1,2.

Para comparar os resultados numéricos dos dois modelos de controle de sistemas de manutenção, compatibilizam-se os valores dos parâmetros de entrada. Os resultados apresentados a seguir foram obtidos para os seguintes valores dos parâmetros de entrada:

Modelo de duas taxas ($M=3$, $R=1$)	Modelo de dois servidores ($M=3$, $R=1$, $C=2$)
$\mu_1 = 1{,}5$;	$\mu = 1{,}5$;
$\mu_2 = 3$;	$\lambda = 1$;
$\lambda = 1$.	$k^- = k^+ = 0$;
	$CP = 0$.

Admitiu-se ainda que no modelo de Vakulathil a distribuição do tempo de reparo é exponencial.

A Tabela 5 foi obtida fixando $W_1=1$, $W_2=2$, $K_1=4$, $K_2=4$, $W=1$, $K^+=K^-=4$ e variando o custo de espera na fila de reparo, H. Por esta tabela verifica-se que, com o aumento do custo de espera na fila de reparo, o modelo de dois servidores apresenta um menor custo médio ótimo por unidade de tempo a longo prazo. Este resultado não parece ser intuitivo e decorre do fato de que a classe de políticas adotada no modelo de duas taxas não permite usar somente a taxa μ_2 (servidor mais rápido), enquanto no modelo de dois servidores a classe de políticas considerada permite que os dois servidores estejam permanentemente alocados.

TABELA 5

EFEITO DA VARIAÇÃO DO CUSTO DE ESPERA NA FILA (H) NOS DOIS MODELOS

	H	zero	0,01	1,00	4,00	10,00	100,00
g*	MODELO DE DUAS TAXAS	0,94	0,96	3,47	9,74	21,35	195,48
	MODELO DE DOIS SERVIDORES	1,67	1,69	3,74	8,95	19,38	175,77

A Tabela 6 foi obtida fixando $H=1$, $K_1=4$, $K_2=4$, $K^+=K^-=4$ e variando os custos de reparo W_1, W_2 e W. Observando esta tabela, verifica-se que, para valores relativamente pequenos e relativamente grandes de W_1, W_2 e W, o modelo de dois servidores apresenta um menor custo médio ótimo por unidade de tempo a longo prazo, enquanto para valores intermediários o modelo de duas taxas de reparo apresenta um menor custo médio por unidade de tempo.

TABELA 6

EFEITO DA VARIAÇÃO DO CUSTO DE REPARO (W,W_1,W_2) NOS DOIS MODELOS

	$W=W_1=W_2/2$	zero	0,01	1,00	4,00	10,00	100,00
g^*	MODELO DE DUAS TAXAS	2,53	2,54	3,47	6,28	11,90	96,24
	MODELO DE DOIS SERVIDORES	1,74	1,76	3,74	7,41	11,25	56,25

A Tabela 7 foi obtida fixando $W_1=1$, $W_2=2$, $W=1$, $H=1$ e variando os custos de troca da taxa de reparo e de alocação de servidores K_1, K_2, K^+ e K^-. Observando esta tabela, verifica-se que, com o aumento dos custos de troca da taxa de reparo e de alocação de servidores, o modelo de duas taxas de reparo apresenta um menor custo médio ótimo por unidade de tempo. Esta conclusão pode ser explicada pelo fato de o modelo de dois servidores apresentar um maior número de alterações no número de servidores alocados, por se observar o sistema em um número maior de instantes de tempo.

TABELA 7

EFEITO DA VARIAÇÃO DOS CUSTOS DE TROCA DA TAXA DE REPARO (K_1, K_2) E DE ALOCAÇÃO DOS SERVIDORES (K^+,K^-) NOS DOIS MODELOS

	$K^+=K^-=K_1=K_2$	zero	0,01	1,00	4,00	10,00	100,00
g^*	MODELO DE DUAS TAXAS	3,21	3,21	3,47	3,47	3,47	3,47
	MODELO DE DOIS SERVIDORES	3,15	3,15	3,74	3,74	3,74	3,74

4 - COMENTÁRIOS FINAIS

Este trabalho obteve resultados gerais para as expressões que permitem o cálculo das probabilidades de transição e dos tempos e custos esperados entre transições. Estes são importantes pelo fato de permitir a implementação e obtenção de resultados para qualquer número de máquinas na linha de produção, qualquer número de máquinas de reserva e ainda para qualquer número de servidores disponíveis. Com a inclusão do custo de perda de produção, tornou-se possível determinar o número ótimo de máquinas de reserva que minimiza o custo médio por unidade de tempo do sistema a longo prazo.

Das comparações entre o modelo de duas taxas e o modelo de dois servidores, pode-se concluir que não é possível determinar "a priori" qual dos dois leva a um menor custo médio ótimo por unidade de tempo. Portanto, não é possível afirmar que é mais econômico aumentar o número de servidores, ou melhorar a qualidade do servidor, sem antes obter os resultados numéricos para cada modelo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COSTA, S.R.X. *Um problema de determinação de política ótima para sistemas de manutenção com máquinas de reserva e número variável de servidores.* Dissertação de Mestrado em Análise de Sistemas e Aplicações. São José dos Campos, Instituto de Pesquisas Espaciais, 1984.

TIJMS, H.C. An algorithm for average costs denumerable state semi-Markov decision problems with applications to controlled production and queueing systems. In: HARTLEY, R.; THOMAS, L.; WHITE, D.J. ed. *Recent developments in Markov decision theory.* New York, Academic Press, 1980. p. 143-179.

VAKULATHIL, A. *Controle da taxa de reparo em um sistema de manutenção.* Tese de Mestrado em Pesquisa Operacional. São José dos Campos, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 1983.

Impresso no Setor de
Reprografia do
Inst. de Matemática e Coppe
U F R J