

I

INPE-541-RI/237

DPD

TÍTULO: *O uso de transformações de
forma na obtenção de efeitos
pictóricos por computador*

AUTORES: Arry Carlos Buss Filho
José Antônio Gonçalves Pereira

Publicado em outubro/74

cc.:12


Chefe da Div. Proces. de Dados

INDICE

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO	1
------------------	---

CAPÍTULO II

TRANSFORMAÇÕES - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	3
2.1 - Representação de um ponto	3
2.2 - Representação matricial do ponto	6
2.3 - Transformação por translação	6
2.4 - Rotação	9
2.5 - Transformação por deformação	11

CAPÍTULO III

TRANSFORMAÇÕES POR DEFORMAÇÃO	17
3.1 - Funções deformadas	17
3.2 - Deformação de funções em coordenadas polares	24
3.3 - Um algoritmo para transformações por deformação	26

BIBLIOGRAFIA	35
--------------------	----

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Frequentemente é mencionada a expressão "Arte por computador". De forma mais comum são encontradas as frases "o computador fez ..." e a sem dúvida muito mais feliz "fulano fez isto no computador". É evidentemente a terceira expressão a que exprime melhor a realidade - o computador, como máquina que é, se presta como um meio ou como uma ferramenta para a confecção da obra de arte.

As principais utilizações do computador como produtor de "arte" podem ser agrupadas em quatro categorias:

- 1) O computador é um mero "pincel" para a realização física da obra. Nesta categoria temos como exemplo próximo a obra do finado Waldemar Cordeiro, realizada primeiro na USP e depois na UNICAMP. O computador, especificamente a impressora e a "Plotter", eram meros instrumentos de reprodução. Neste mesmo caso o próprio levantamento dos dados era realizado por meios semi-automáticos, quais sejam a clichéria com grande retículo.
- 2) O computador é utilizado como uma ferramenta na composição de imagens. Utiliza exclusivamente a "plotter" e em geral se limita a geração de figuras pela justaposição de símbolos elementares, tais como retas e cur

vas, onde o artista tem a seu cargo a escolha adequada dos elementos que comporão o desenho e a sua posição relativa. Seu principal adepto é Derby Scanlon dos Estados Unidos (Ref.1) que obtem efeitos surpreendentes por meio de retas tangentes a geratrizes de hiperboles.

- 3) O computador é utilizado como ferramenta auxiliar de cálculo e composição, na geração de imagens obtidas por transformações de figuras por rotação, translação e deformação. Esta técnica é a explicada no presente trabalho e uma amostra dos efeitos é apresentada ao longo dos capítulos seguintes.
- 4) O computador é utilizado como pseudo criador de imagens. Através da geração de valores pseudo aleatórios o computador vai compondo, baseado em condições de contorno que dirigem o desenho que está sendo criado. Esta técnica será objeto de um futuro trabalho.

Vale porém, realçar aqui, que a formalização e a computarização para obtenção de figuras não implica em uma sujeição da arte a esquemas lógicos, antes, porém, trata-se de colocar todo um poderoso ferramental matemático a serviço da mesma, com a possibilidade quase infinita de novas técnicas, novos materiais e novas concepções.

CAPÍTULO II

TRANSFORMAÇÕES - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

As transformações mais simples a que podemos submeter uma figura são a translação e a rotação. Num grau maior de complexidade temos o que genericamente chamaremos de deformação. Neste capítulo trataremos dos aspectos que definem a transformação dos pontos de uma figura a traçar, em termos de suas coordenadas. Uma discussão mais cuidadosa de determinados tipos de deformação de comprovado efeito pictórico serão vistas nos capítulos seguintes.

Como preâmbulo às transformações veremos inicialmente a representação de um ponto genérico de uma figura, em termos numéricos. Serão vistos os dois tipos mais comuns de representação por meio de pares ordenados - as chamadas coordenadas cartesianas ortogonais e as coordenadas polares.

2.1 - Representação de um ponto

Seja um par de eixos de referência, ortogonais, sobre os quais definimos uma escala de medida de comprimento; suponhamos ainda o seguinte:

- um ponto genérico que suporemos pertencente à figura a representar;

- um segmento de reta que une este ponto \bar{a} origem (cruzamento dos dois eixos) e finalmente um terceiro eixo que tenha como suporte este segmento e cuja escala de medida, por simplicidade, seja a mesma que a dos anteriores, e cuja origem seja a mesma, orientada no sentido da origem para o ponto a representar.
- suponhamos ainda uma escala angular que meça os ângulos formados por este novo eixo e o eixo chamado X, seu sentido positivo sendo do eixo X para o eixo contendo o ponto.

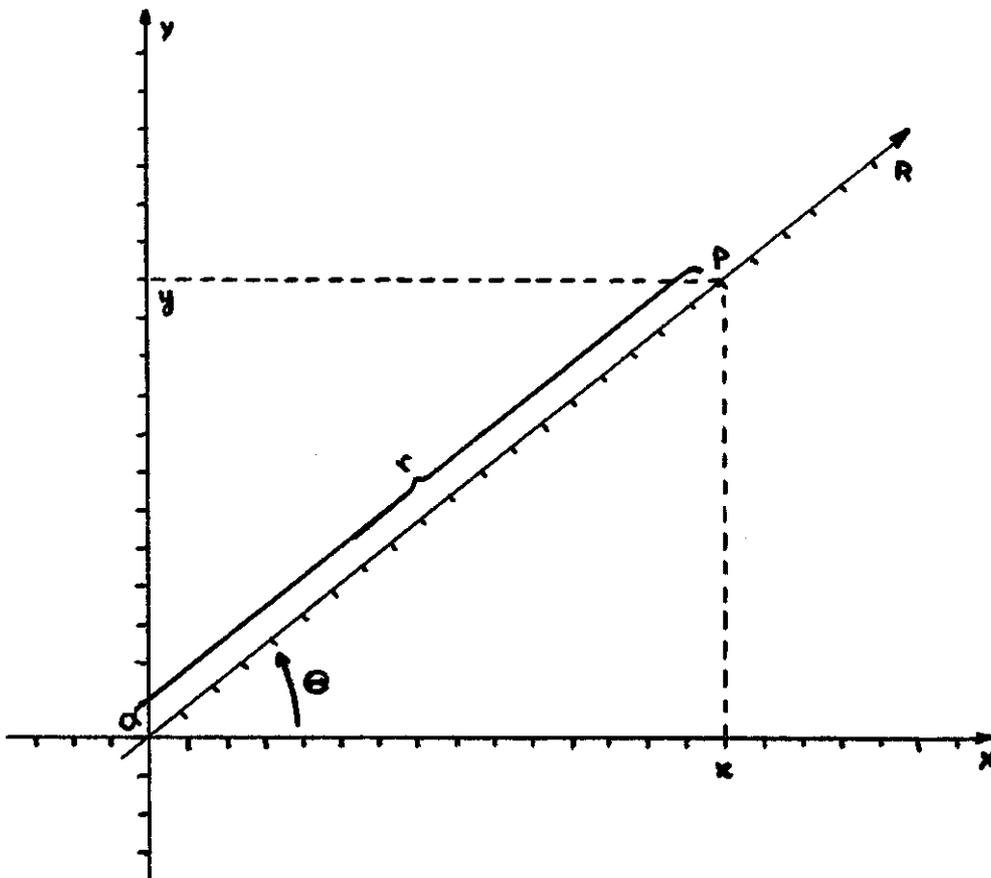


Fig. 2.1

Vemos claramente que qualquer ponto P pode ser definido univocamente por um par de valores; temos porém duas alternativas:

- 1) a distância (r) sobre o eixo R, sempre positiva, e o ângulo θ tomado entre os eixos R e X, positivo no sentido anti-horário, e com valores entre 0 e 2π .

Estas são as coordenadas polares do ponto, que podem ser escritas como um par ordenado, na forma

$$(r, \theta)$$

- 2) O par de distâncias x, y , medidos ao longo dos eixos X e Y respectivamente, como o comprimento das projeções do segmento OP sobre os mesmos. Estas são as coordenadas cartesianas do ponto, escritas como o par ordenado

$$(x, y)$$

A relação entre as duas formas de definir o ponto no plano são evidentemente

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta, \end{cases} \quad (2.1)$$

ou inversamente

$$\begin{cases} \theta = \arctg y/x, \quad x \neq 0 \\ r = + \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad (2.2)$$

2.2 - Representação matricial do ponto

Se consideramos as coordenadas como componentes de um vetor, podemos pô-lo como uma matriz coluna, e assim um ponto genérico P da nossa figura poderá ser definido pela matriz.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix}$$

2.3 - Transformação por translação

É, dentre as transformações mencionadas, talvez a mais simples. Suponhamos na figura abaixo, que todos os pontos P da nossa forma a transladar se desloquem em relação à posição antiga P', de um segmento de reta cujas projeções nos eixos meçam Δx e Δy .

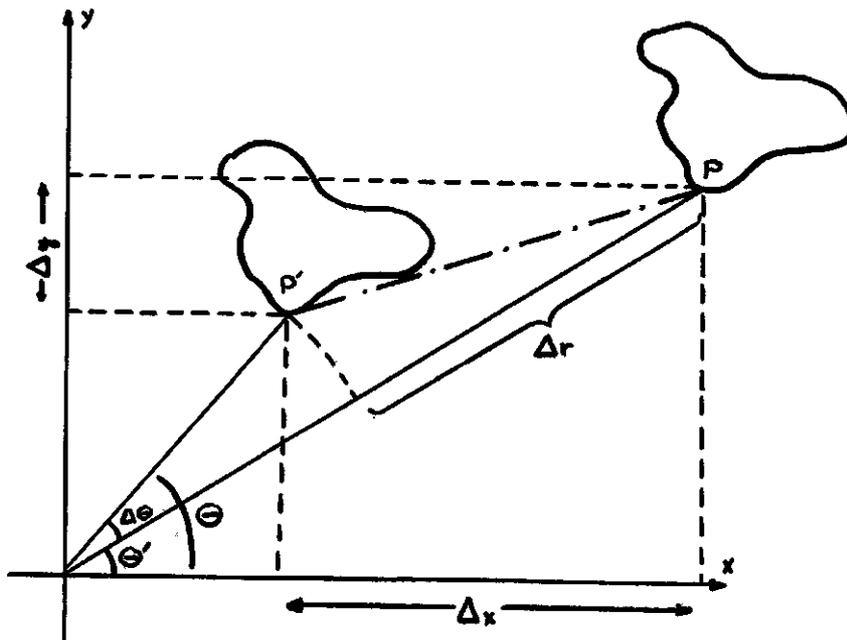


Fig. 2.2

É evidente pela figura, que este deslocamento \bar{e} é equivalente a mover a origem, na mesma direção e da mesma distância, em sentido contrário. Para caracterizar tal deslocamento, basta ver que a relação entre $P(x,y)$ e $P'(x', y')$ \bar{e} dada pela soma das matrizes

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' + \Delta x \\ y' + \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

se nos lembramos que, de uma maneira geral, a soma de duas matrizes \bar{e} dada por

$$\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{C} \quad (2.4)$$

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

A matriz coluna $\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$, comum \bar{a} transformação de todos os pontos, \bar{e} ent \bar{a} o

chamada MATRIZ DE TRANSLAÇÃO, e \bar{e} somada \bar{a} s matrizes de coordenadas dos pontos para a obtenção das novas.

Reexaminando a figura, no caso de coordenadas polares, podemos ver imediatamente que um deslocamento genérico pode ser decomposto em um incremento em (r) - translação ao longo do eixo r - e um deslocamento angular (rotação). Neste caso, tamb \bar{e} m, a matriz de translação \bar{e} uma matriz coluna que se soma \bar{a} de coordenadas

$$\begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r' \\ \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta \theta \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

onde Δr e $\Delta \theta$ s \bar{a} o funç \bar{o} es bastante complicadas, como podemos ver abaixo:

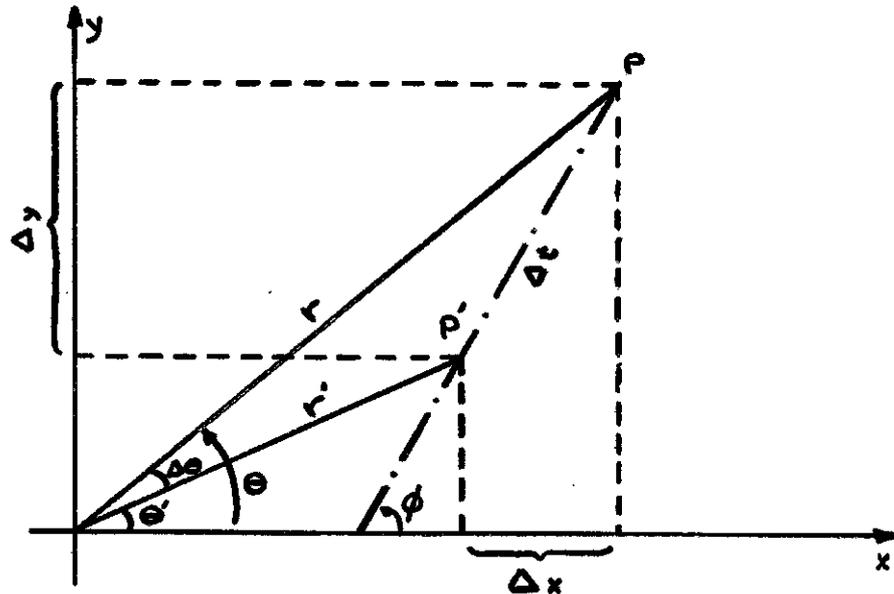


Fig. 2.3

Lembrando que $x = x' + \Delta x$ e $y = y' + \Delta y$ temos

$$\begin{cases} r \cos \theta = r' \cos \theta' + \Delta t \cos \theta \\ r \sin \theta = r' \sin \theta' + \Delta t \sin \theta \end{cases} \quad (2.6)$$

segue-se que

$$r^2 = r'^2 + \Delta t^2 + r' \Delta t (\cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta) \quad (2.7)$$

se examinamos o triângulo POP' , temos que

$$\Delta t^2 = r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \Delta \theta \quad (2.8)$$

e de 7 e 8 tiramos que, para uma translação de amplitude Δt na direção θ' , os componentes da matriz de translação serão

$$\begin{cases} \Delta \theta = \arcsin \frac{\Delta t^2 - r'^2 - (r' + \Delta r)^2}{2r'(r' + \Delta r)} \\ \Delta r = r'^2 + \Delta t^2 + r' \Delta t (\cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta) \end{cases} \quad (2.9)$$

Pelo aspecto tenebroso das expressões pode-se perceber

que coordenadas polares não serão recomendáveis para representar translações.

2.4 - Rotação

Genericamente, uma rotação de uma figura pode ser tomada em relação a um qualquer eixo que fure o plano da mesma. Aqui porém, só veremos o caso em que o traço do eixo no plano da figura coincide com a origem. Quando tal não for o caso, uma translação será efetuada, a rotação também, e a seguir nova translação devolverá a origem ao seu devido local. Examinemos a figura seguinte, onde θ é o ângulo de rotação da figura, θ' o antigo ângulo que faz o raio vetor do P' com o eixo X.

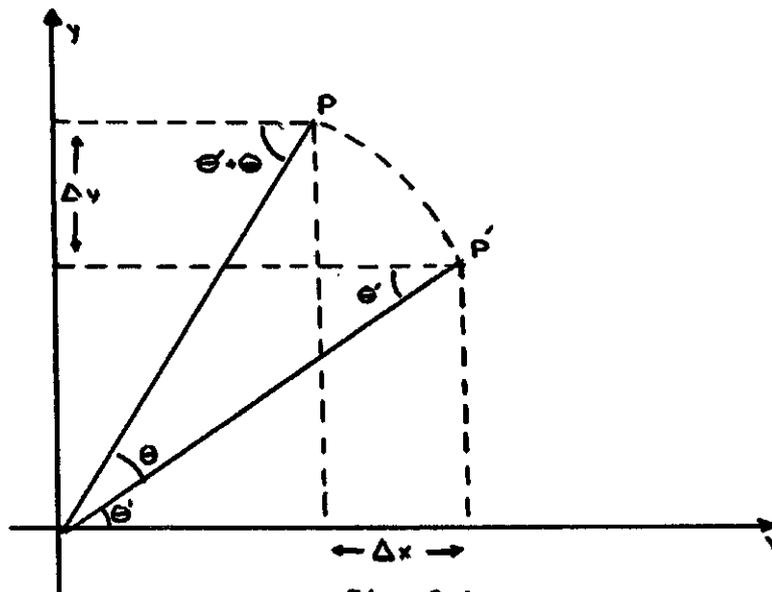


Fig. 2.4

é fácil ver, da figura, que

$$\begin{cases} \Delta x = r \cos(\theta' + \theta) - r \cos\theta' \\ \Delta y = r \sin(\theta' + \theta) - r \sin\theta' \end{cases} \quad (2.10)$$

Lembrando as relações:

$$\begin{cases} \cos(\theta + \theta') = \cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta' \\ \sin(\theta + \theta') = \sin\theta \cos\theta' + \cos\theta \sin\theta' \end{cases} \quad (2.11)$$

vem

$$\begin{cases} \Delta x = r (\cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta') - r\cos\theta' \\ \Delta y = r (\sin\theta \cos\theta' + \cos\theta \sin\theta') - r\sin\theta' \end{cases} \quad (2.12)$$

e ainda, já que (1)

$$\begin{cases} x' = r \cos\theta' \\ y' = r \sin\theta' \end{cases} \quad (2.13)$$
$$\begin{cases} \Delta x = x' \cos\theta - y' \sin\theta - x' \\ \Delta y = y' \sin\theta + x' \cos\theta - y' \end{cases}$$

como

$$\begin{cases} x = x' + \Delta x \\ y = y' + \Delta y \end{cases} \quad (2.14)$$

vem

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta \end{cases} \quad (2.15)$$

Se nos lembramos do produto de matrizes, onde para $A = B \times C$ temos

$$A_{ij} = \sum B_{ik} C_{kj}, \text{ podemos escrever}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

e a matriz quadrada assim encontrada recebe o nome de matriz de rotação.

Ainda da mesma figura, vemos que o raio vetor r permanece constante, portanto em coordenadas polares a rotação é caracterizada não por um produto de matrizes, mas igualmente por uma soma de colunas

$$\begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r' \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta\theta \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

2.5 - Transformação por deformação

A variedade de transformações de deformação possíveis é imensa. Um tipo, porém, é completamente corriqueiro - a mudança de escala - ampliar ou reduzir o tamanho da figura. Temos, em cartesianas,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

ou em polares

$$\begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r' \\ \theta' \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

onde λ_1 e λ_2 são entidades adimensionais, evidentemente. No caso mais comum, para cartesianas a mudança de escala será igual para ambas as coordenadas, ou seja $\lambda_1 = \lambda_2$ e em vez de um produto matricial podemos ter a multiplicação da coluna por um escalar

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Analogamente, no caso de polares, \bar{e} o normal não se altera os ângulos, ou seja $\lambda_2 = 1$, e teremos então

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda r' \\ \theta \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

O caso mais geral de transformação será, portanto, diante de tudo o que foi visto até agora neste capítulo, uma multiplicação por uma matriz quadrada

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

onde, evidentemente, $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$ serão funções não mais adimensionais, seja das coordenadas, seja de alguma outra variável. Como última generalização, podemos acrescentar uma translação (e uma rotação pura no caso de polares) conseguindo

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1^r & \lambda_2^r \\ \lambda_3^r & \lambda_4^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\ \text{e nesta matriz está embutida também a rotação; ou} \\ \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Esta será então o tipo mais geral de transformação de deformação.

Não é comum, porém, para efeitos pictóricos, que se tenha uma matriz completa; em geral não mudamos os ângulos, ou apenas giramos a figura levemente, e neste caso, em coordenadas polares obteremos maior simplicidade de cálculos, reduzindo-nos a

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r^1 \\ \theta^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta \theta \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Apresentamos a seguir dois exemplos simples, que envolvem rotação e mudança de escala em ambos os casos, e também translação no segundo deles. Basicamente teremos uma elipse girando em torno de uma origem, que tem sua escala aumentada. No segundo caso temos também deslocamento desta origem.

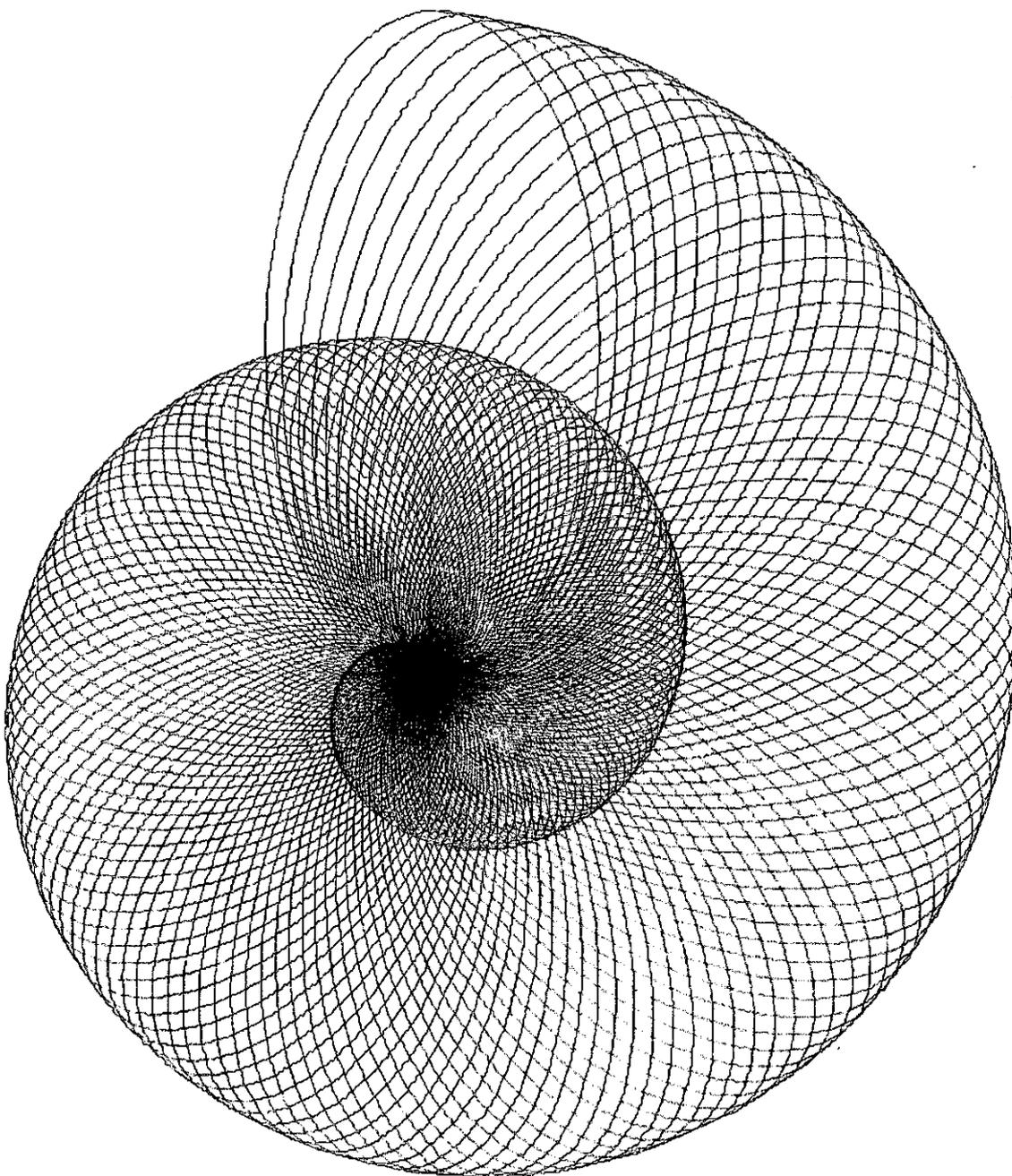


Fig. 2.5

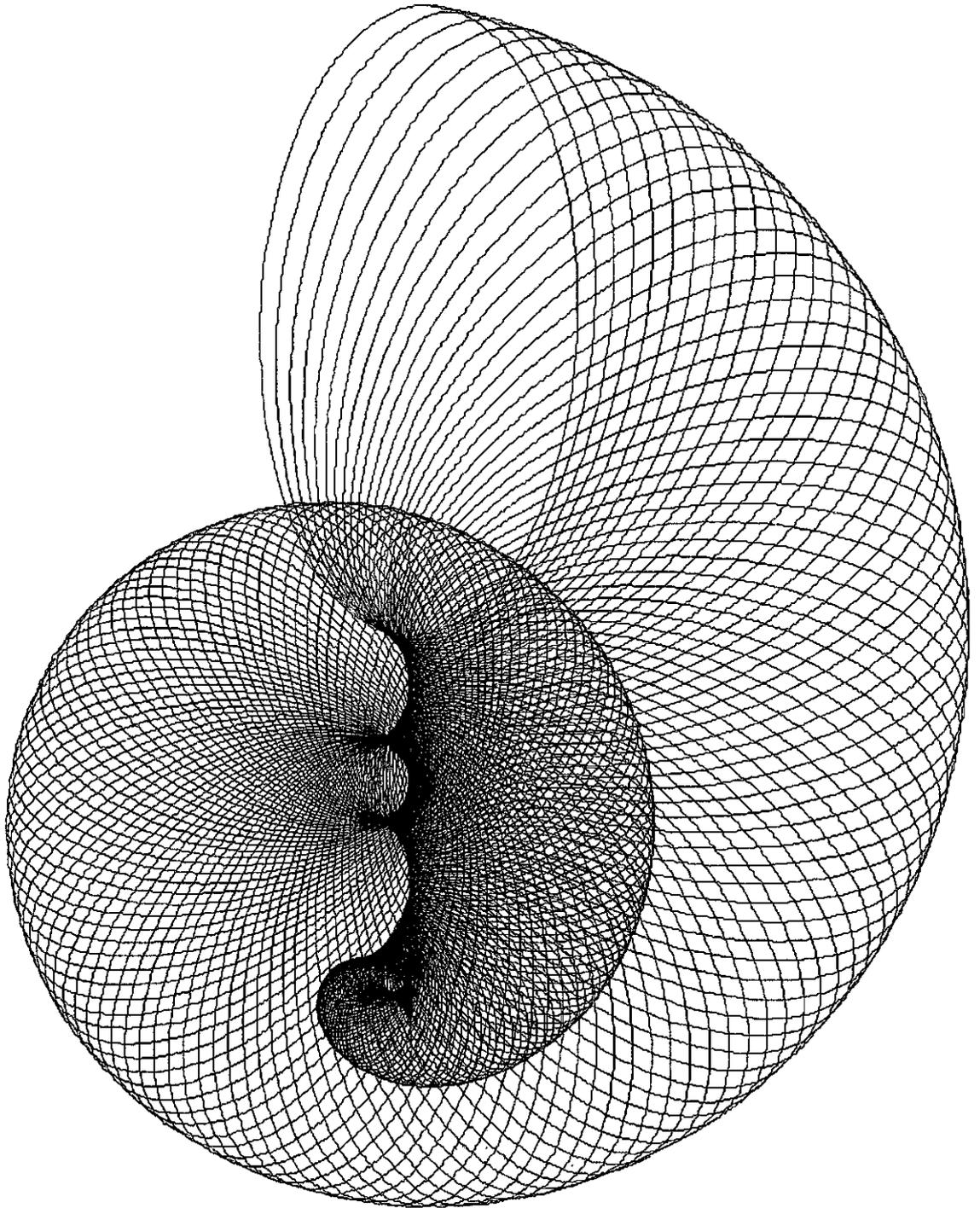


Fig. 2.6

Voltando à equação (2.24), podemos ver que temos no fundo duas equações para a obtenção dos valores de r e θ , quais sejam

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \lambda r' + \Delta r \\ \theta = \theta + \Delta\theta \end{array} \right.$$

Já vimos que se $\lambda = \text{cte}$, temos simplesmente uma deformação de escala. No caso mais geral, λ será uma função mais ou menos complicada que introduzirá, além de uma eventual mudança de escala, uma deformação da forma da figura em transformação. Este tipo de funções é exatamente o que trataremos no próximo capítulo.

CAPÍTULO III

TRANSFORMAÇÕES POR DEFORMAÇÃO

3.1 - Funções deformadas

Basicamente uma transformação por deformação é a interferência que uma função deformante $d(X)$ realiza sobre uma função $\phi_1(X)$ gerando uma nova função $\phi_2(X)$.

Entre os vários tipos de interferência existentes podemos citar os seguintes:

$$\phi_2(X) = A \cdot \phi_1(X) + B \cdot d(X) \quad (3.1)$$

$$\phi_2(X) = A \cdot \phi_1(X) \cdot d(X) \quad (3.2)$$

Sobrepondo os efeitos de (3.1) e (3.2) temos:

$$\phi_2(X) = A \cdot \phi_1(X) \cdot d_1(X) + B d_2(X) \quad (3.3)$$

onde $d_1(X)$ e $d_2(X)$ são funções deformantes e A e B independem de X.

Mostraremos a seguir uma maneira formal que permite manter dois tipos de controle sobre a deformação: o primeiro diz respeito à máxima deformação permitida sobre ϕ_1 e o segundo fornece meios para ajustar a deformação segundo um critério de evolução.

Definimos como função fator de deformação toda função $g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ tal que exista pelo menos um par (ϕ_1, ϕ_2) pertencente a $[0,1]$ para o qual $g(\phi_1) = 0$ e $g(\phi_2) = 1$. A variável ϕ , definida sobre $[0,1]$, chamamos fator de evolução da transformação, e as seguintes convenções são feitas:

$$\begin{aligned} \phi &= 0 && \text{início da transformação} \\ \phi &= 1 && \text{término da transformação} \\ g(\phi) &= 0 && \text{nenhuma deformação} \\ g(\phi) &= 1 && \text{deformação total} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Podemos dizer que a função $g(\phi)$ descreve como varia o fator de deformação a medida que evoluimos na transformação. Esta função é normalizada com a finalidade de não envolvermos fatores de escala indesejáveis. Na figura 3.1 damos alguns exemplos de função fator de deformação.

Sejam $\delta_0(X)$ e $\delta_L(X)$ duas funções quaisquer na variável X , chamadas respectivamente função inicial e função limite de deformação.

Definimos a função deformada $D(X, g(\phi))$ como sendo qual quer função que satisfaça as seguintes condições:

$$D(X, g(\phi)) = \delta_0(X) \quad \text{para } g(\phi) = 0 \quad (3.5)$$

$$D(X, g(\phi)) = \delta_L(X) \quad \text{para } g(\phi) = 1 \quad (3.6)$$

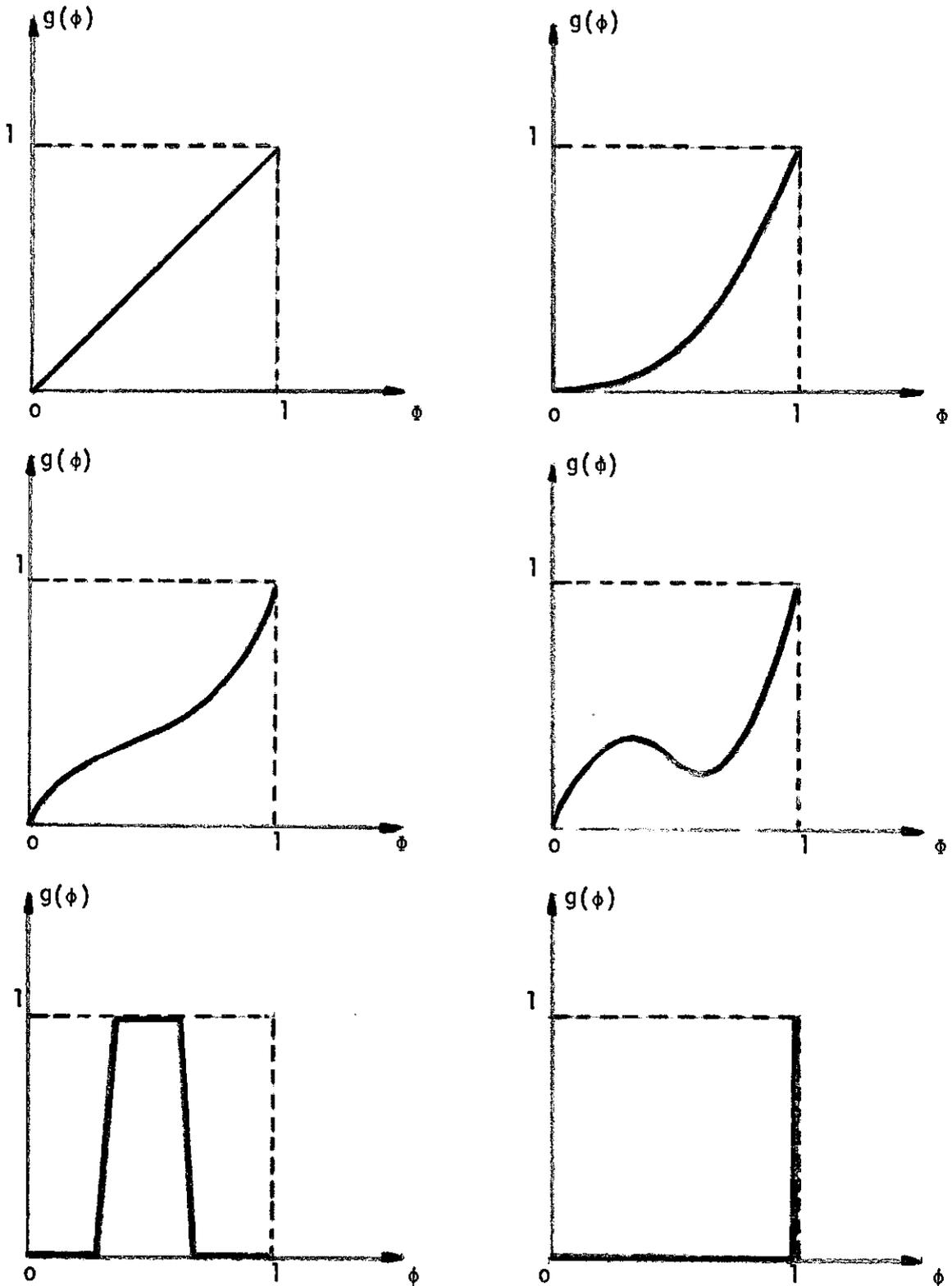


Fig. 3.1 - Exemplos de função fator de deformação

Uma das possíveis definições de $D(X, g(\phi))$ que satisfaça (3.5) e (3.6) pode ser escrita como:

$$D(X, g(\phi)) = f_0(X) (1 - g(\phi)) + f_l(X) g(\phi) \quad (3.7)$$

Para a representação adotada $D(X, g(\phi))$ nada mais é do que a ponderação feita entre as funções $f_0(X)$ e $f_l(X)$ através da função fator de deformação $g(\phi)$ (figura 3.2).

Comparando as equações (3.3) e (3.7) observamos que para cada valor de $g(\phi)$ será criada uma função $f_2(X)$ onde podemos fazer as seguintes analogias:

$$\begin{aligned} A &= 1 - g(\phi) \\ B &= g(\phi) \\ d_1(X) &= 1 \\ d_2(X) &= f_l(X) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Embora as considerações feitas até o momento sejam de caráter geral, podemos dizer que nem todas as deformações nos levam a efeitos pictóricos. Adiante encontra-se deduzida a expressão de uma particular função $g(\phi)$ que produziu resultados bastantes satisfatórios.

Observando o fato que a equação (3.7) satisfaz as equações (3.5) e (3.6), podemos dizer que o comportamento da deformação será regido por $g(\phi)$.

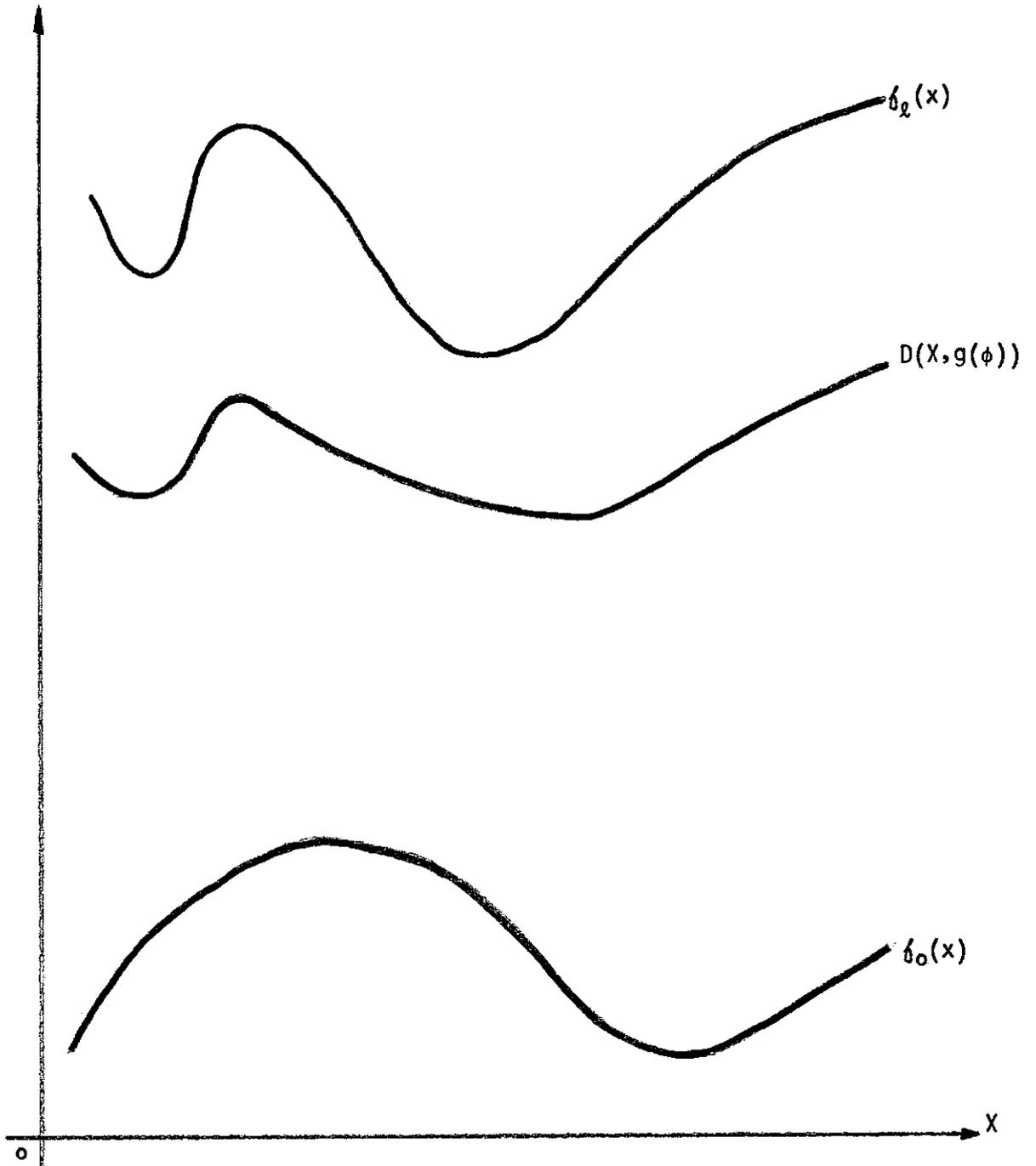


Fig. 3.2 - Funções envolvidas na transformação de deformação

O objetivo da aplicação da deformação não está na obtenção de uma única função deformada, mas na criação de uma família de curvas deformadas $D(X, g(\phi))$ onde cada uma delas corresponde a um valor particular de ϕ . O valor de ϕ da primeira curva é feito igual a zero, o da última curva igual a 1, e os das curvas intermediárias, para um melhor controle e simplicidade, equiespaçados.

Como já foi mostrado anteriormente (figura 3.1) podemos ter uma forma genérica para a função fator de deformação. A seguir mostraremos umas das possíveis formas desta função e que foi utilizada na elaboração das figuras 3.5 a 3.9.

Seja a função mostrada na figura abaixo:

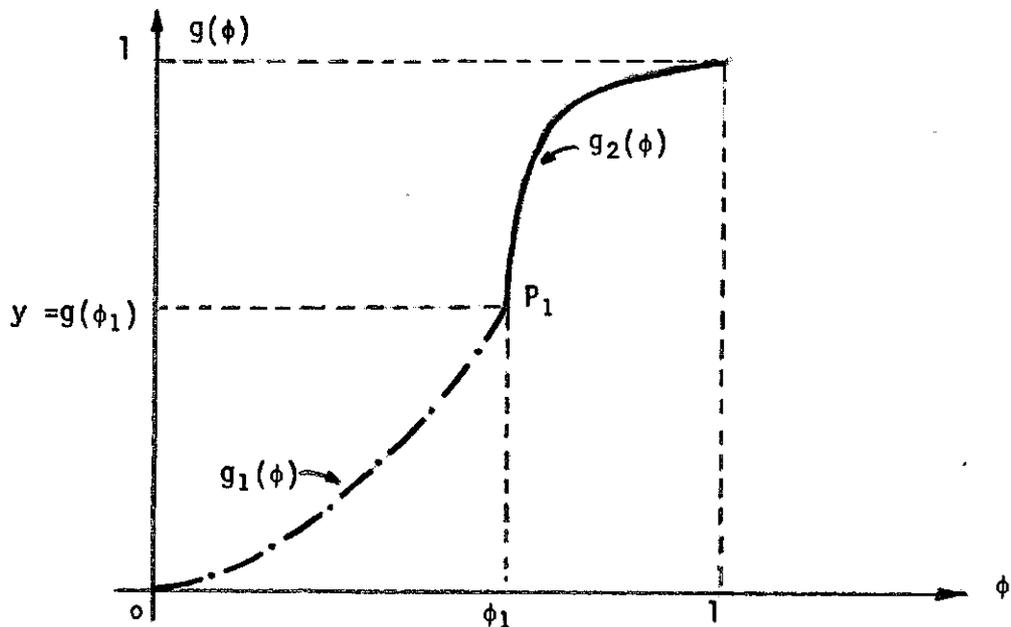


Fig. 3.3 - Função fator de deformação usada no algoritmo.

onde $P_1(\phi_1, g(\phi_1))$ é um ponto genérico tal que:

$$g(\phi) = g_1(\phi) \quad \phi \leq \phi_1,$$

$$g(\phi) = g_2(\phi) \quad \phi \geq \phi_1$$

$$0 \leq \phi_1 \leq 1.$$

Considerando $g_1(\phi)$ e $g_2(\phi)$ como sendo exponenciais submetidas as condições de contorno:

$$g_1(0) = 0,$$

$$g_1(\phi_1) = g_2(\phi_1) = y_1,$$

$$g_2(1) = 1,$$

então $g_1(\phi)$ e $g_2(\phi)$ podem ser escritas na forma:

$$g_1(\phi) = A e^{B\phi} + C \quad 0 \leq \phi \leq \phi_1 \quad (3.9)$$

$$g_2(\phi) = A' e^{B'\phi} + C' \quad \phi_1 \leq \phi \leq 1 \quad (3.10)$$

onde

$$A = \frac{y_1}{e^{B\phi_1} - 1},$$

$$C = -A,$$

$$A' = \frac{y_1 - 1}{e^{B'\phi_1} - e^{B'}} , \tag{3.11}$$

$$C' = 1 - A' e^{B'}$$

e B e B' são as constantes de crescimento das exponenciais.

Substituindo convenientemente as equações (3.11) em (3.9) e (3.10) e levando em consideração os intervalos de validade de $g_1(\phi)$ e $g_2(\phi)$ podemos escrever:

$$g(\phi) = \frac{y_1(e^{B\phi} - 1)}{e^{B\phi_1} - 1} \left[\mu(\phi) - \mu(\phi - \phi_1) \right] + \frac{y_1(e^{B'\phi} - e^{B'}) - (e^{B'\phi} - e^{B'\phi_1})}{e^{B'\phi_1} - e^{B'}} \left[\mu(\phi - \phi_1) - \mu(\phi - 1) \right] \tag{3.12}$$

onde μ é a função degrau unitário para nós definida como:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= 0 & x < 0 \\ \mu(x) &= 1 & x \geq 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

3.2 - Deformação de funções em coordenadas polares

Não foi feita até o presente momento nenhuma restrição

com relação a natureza da variável X das equações (3.3) e (3.7), no entanto as coordenadas polares são as que permitem fazer as simplificações mais significativas na implementação por computador dos algoritmos de formação de curvas de contornos fechados, com as quais facilmente obtemos efeitos pictóricos utilizando este tipo de transformação.

A figura 3.4 mostra um exemplo típico das curvas a que nos referimos. Podemos considerá-la como uma função em coordenadas polares e escrevê-la na forma:

$$\rho = F(\theta) \quad (3.14)$$

onde:

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ F(0) = F(2\pi) \end{aligned} \quad (3.15)$$

desde que para cada θ exista um e somente um valor de ρ .

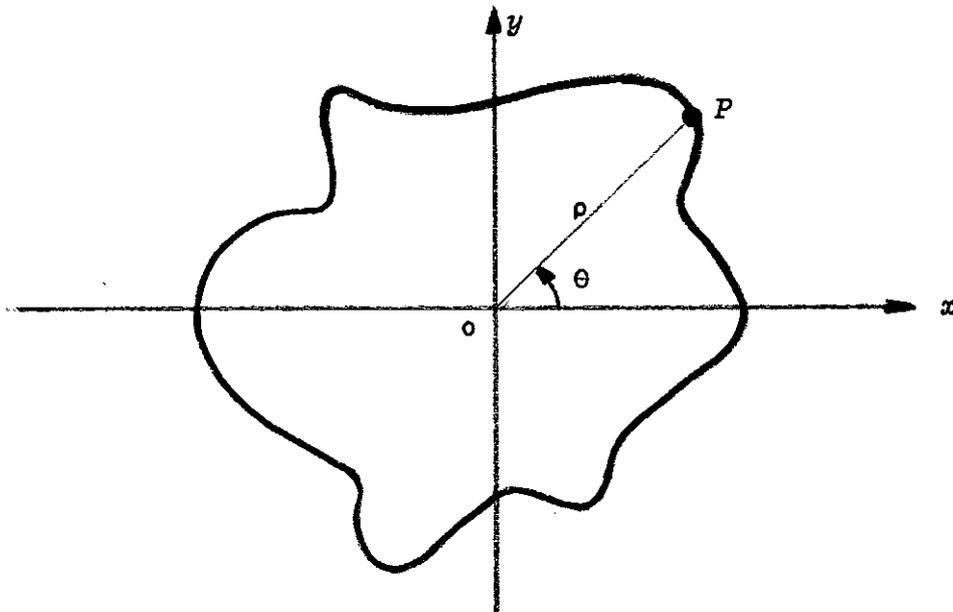


Fig. 3.4 - Exemplo de curva de contorno fechado

Do que foi visto podemos concluir que se as curvas envolvidas forem do tipo de contornos fechados e puderem ser postas sob a forma de funções em coordenadas polares, com as restrições dadas pelas equações (3.15), todas as conclusões obtidas de (3.3) e (3.7) continuam sendo válidas. Estas equações podem ser consideradas como da forma dada por (3.14) desde que a variável X seja substituída por θ .

3.3 - Um algoritmo para transformações por deformação

O que caracteriza o efeito decorrente da aplicação de uma transformação por deformação aos pontos de uma função é a forma da função deformante envolvida.

Seria impossível no presente trabalho termos a intenção de pretender analisar todos os tipos de funções deformantes, pois apenas a citação de alguns tipos de efeitos obtidos por deformação, tais como: aleatório, mudança de escala, compressão ou distensão em uma direção, interferência entre funções, são suficientes para vermos o grande número de variações existentes.

Apresentamos a seguir um algoritmo para a implementação em computadores das transformações por deformação que são obtidas quando utilizamos a equação (3.7), isto é, dada uma função inicial e uma função limite de deformação gerar uma família de curvas deformadas que nos levam da primeira até a segunda.

As figuras 3.5,3.6,3.7,3.8 e 3.9 são alguns exemplos dos efeitos obtidos com o auxílio do presente algoritmo. Nas figuras citadas o mecanismo utilizado consta em definir três funções f_1 , f_2 e f_3 e usar o algoritmo duas vezes. Na primeira vez f_1 é a função inicial e f_2 é a função limite de deformação e na segunda f_2 é a função inicial e f_3 é a função limite de deformação.

Considerações iniciais sobre o algoritmo:

- tanto a função inicial f_0 como a função limite de deformação f_L estão em coordenadas polares.
- estas funções estão tabeladas para N valores de θ crescentes e equiespaçadas, variando de 0° a 360° inclusive.
- para uma entrada genérica $n, 1 \leq n \leq N$, na tabela temos os seguintes valores: $\theta(n)$, $f_0(n)$ e $f_L(n)$.
- para melhor controle da deformação são definidos R_0 e R_L que são os raios dos círculos que circunscrevem as funções $f_0(\theta)$ e $f_L(\theta)$ e os valores tabelados para estas funções são divididos pelos seus respectivos raios a fim de que sejam normalizados, isto é, compreendidos entre 0 e 1.
- $g(\phi)$ é a função fator de deformação da transformação.
- a família gerada possui M curvas, onde $m, 1 \leq m \leq M$, é uma curva genérica.

- a rotina Plot (x, y, p) usada no algoritmo traça um segmento de reta entre a posição atual da pena e o ponto especificado pelas coordenadas cartesianas x e y , o parâmetro p indica se o deslocamento é para ser feito com a pena levantada ou abaixada.

Algoritmo de deformação:

P1. [Inicialização]

Plot (0,0, levantada);

$m \leftarrow 0$;

P2. [Geração de uma nova curva]

$m \leftarrow m + 1$;

Se $m > M$ então o algoritmo termina;

$\phi \leftarrow (m - 1) / (M - 1)$;

$G \leftarrow g(\phi)$;

$R \leftarrow R_o \times (1 - G) + R_\phi \times G$;

Pena \leftarrow levantada;

$n \leftarrow 0$;

P3. [geração dos pontos de uma curva]

$n \leftarrow n + 1$;

Se $n > N$ então ir para P2;

$D \leftarrow (\delta_o(n) \times (1 - G) + \delta_\phi(n) \times G) \times R$;

$X \leftarrow D \times \cos(\theta(n))$;

$Y \leftarrow D \times \sin(\theta(n))$;

Plot (X, Y, Pena);

Pena ← abaixada;

Ir para P3;

O algoritmo apresentado transforma os pontos da função δ_0 dado pelo par tabelado em coordenadas polares $(\theta(n), \delta_0(n))$ no par $(\theta(n), D)$. Se aplicarmos a este novo par as equações (2.3) e (2.17) estaremos introduzindo os efeitos de rotação e translação na transformação.

A inclusão destes efeitos pode ser feita de uma maneira bem simples, substituindo no algoritmo os comandos que calculavam X e Y.

Para maior generalidade supomos que para cada curva da família tabelamos um ângulo $\beta(m)$ de rotação e as coordenadas cartesianas $(dx(m), dy(m))$ de translação em relação a curva inicial.

Os comandos de cálculo de X e Y do algoritmo passam a ter a forma:

$$X = D \times \cos (\theta(n) + \beta(m)) + dx(m);$$

$$Y = D \times \text{sen} (\theta(n) + \beta(m)) + dy(m);$$

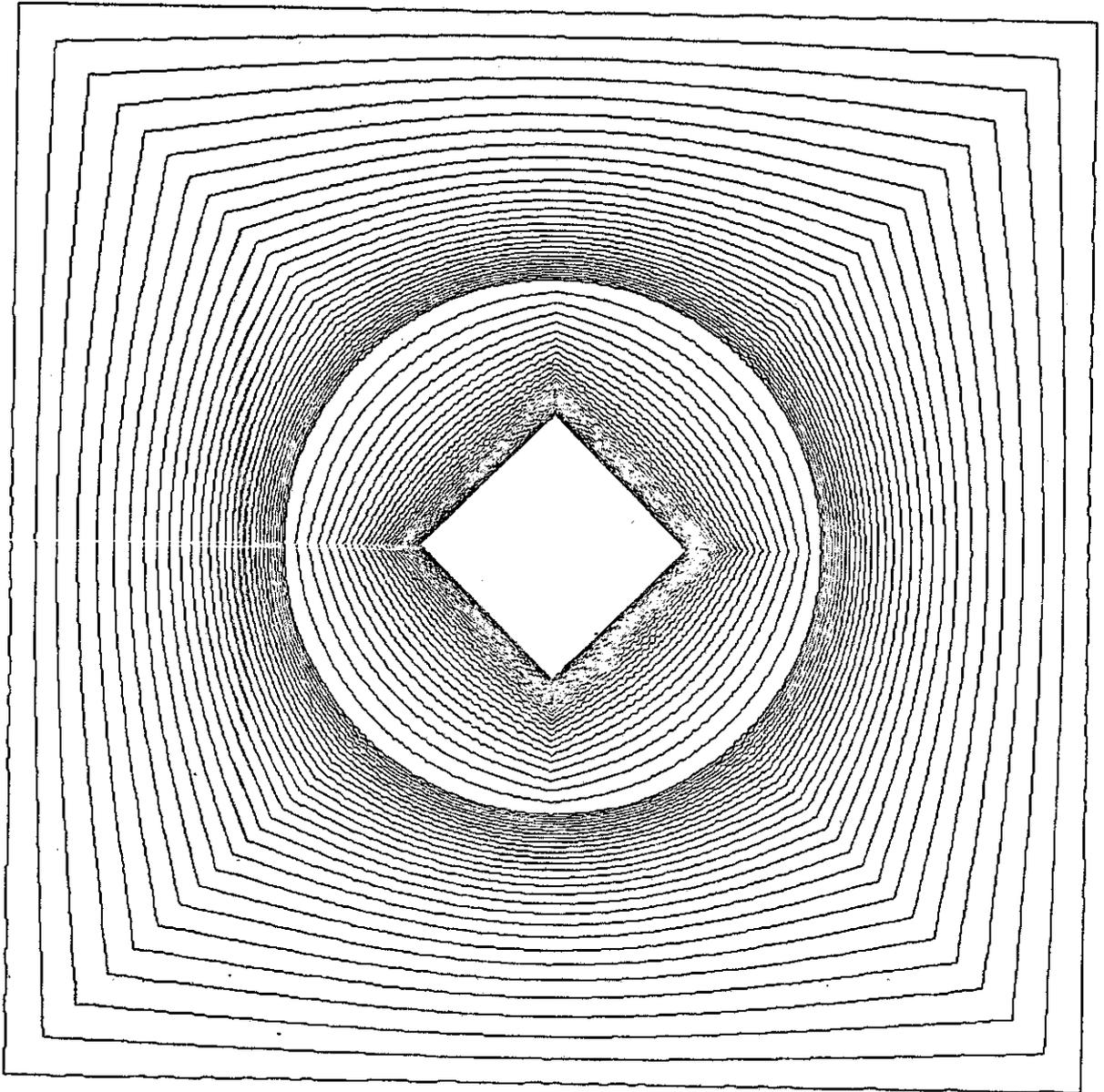


Fig. 3.5

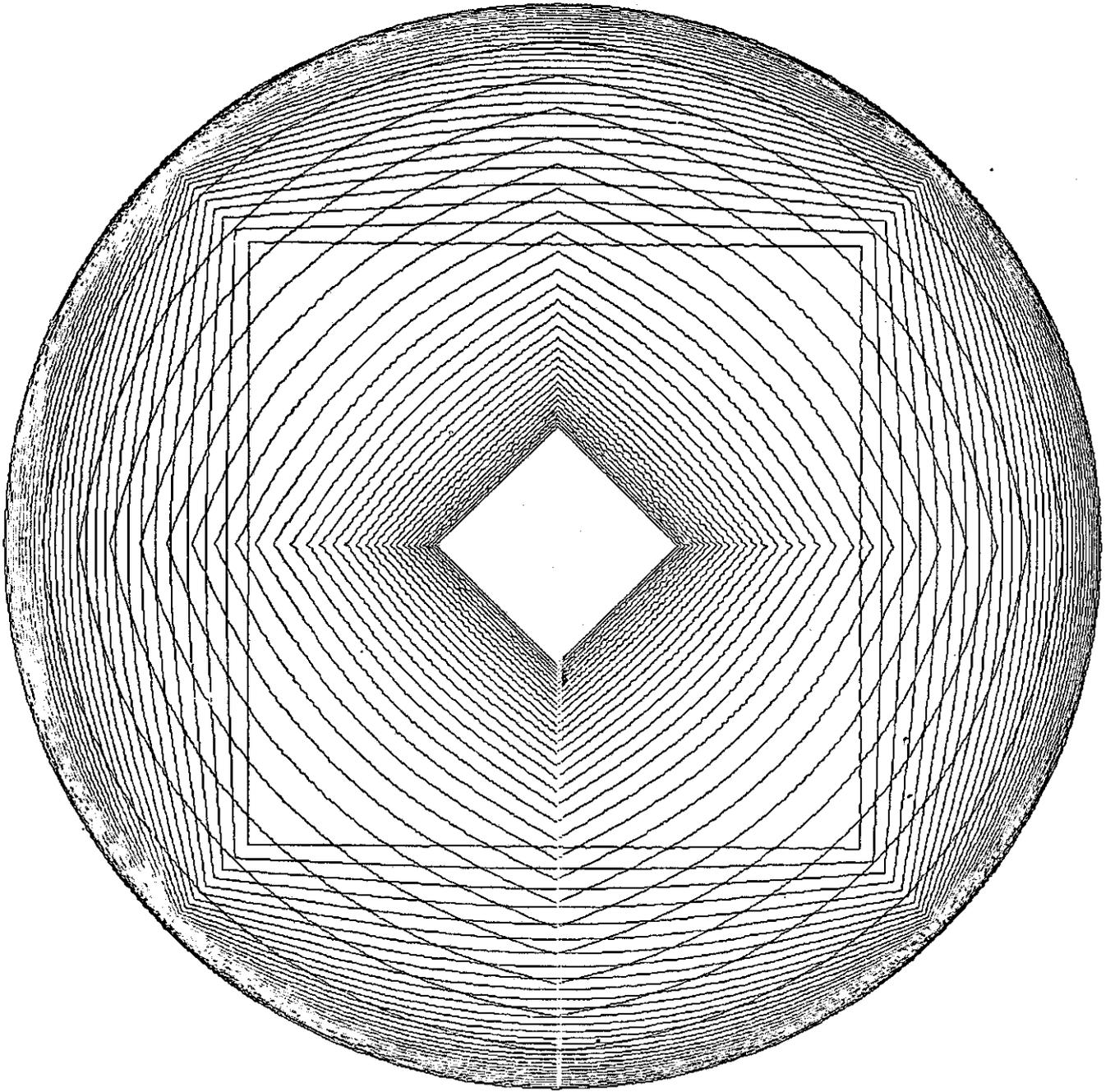


Fig. 3.6

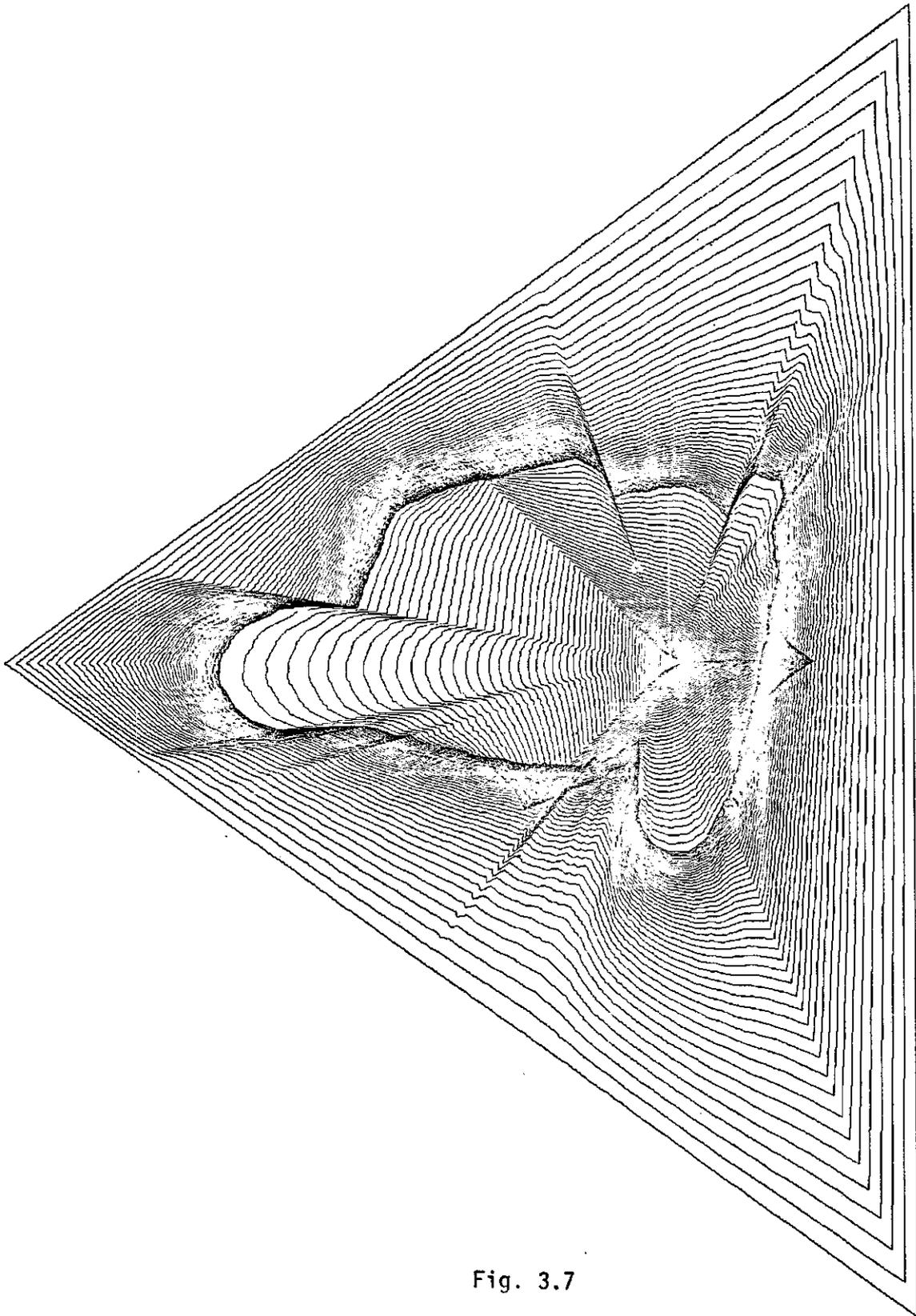


Fig. 3.7

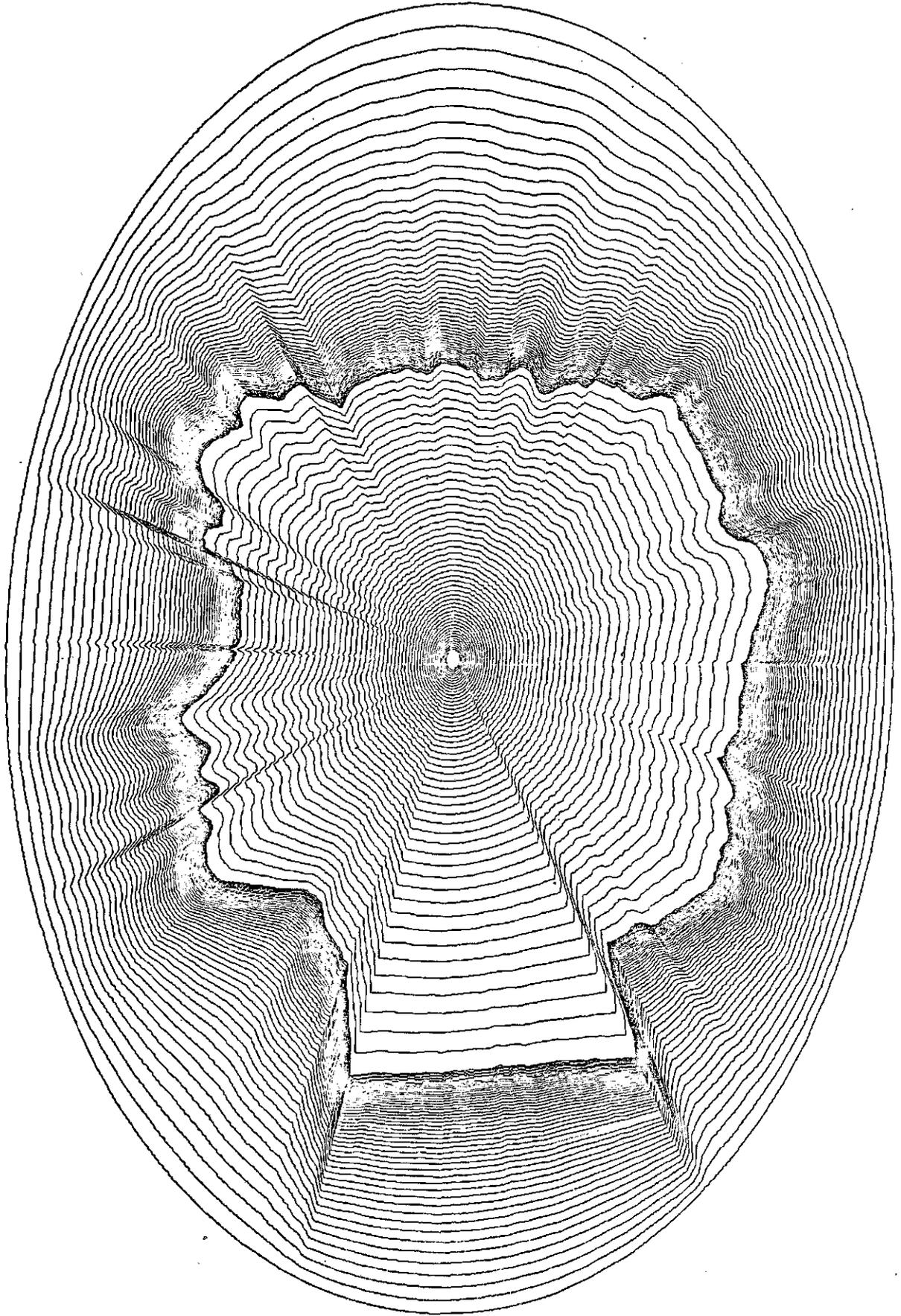


Fig. 3.8

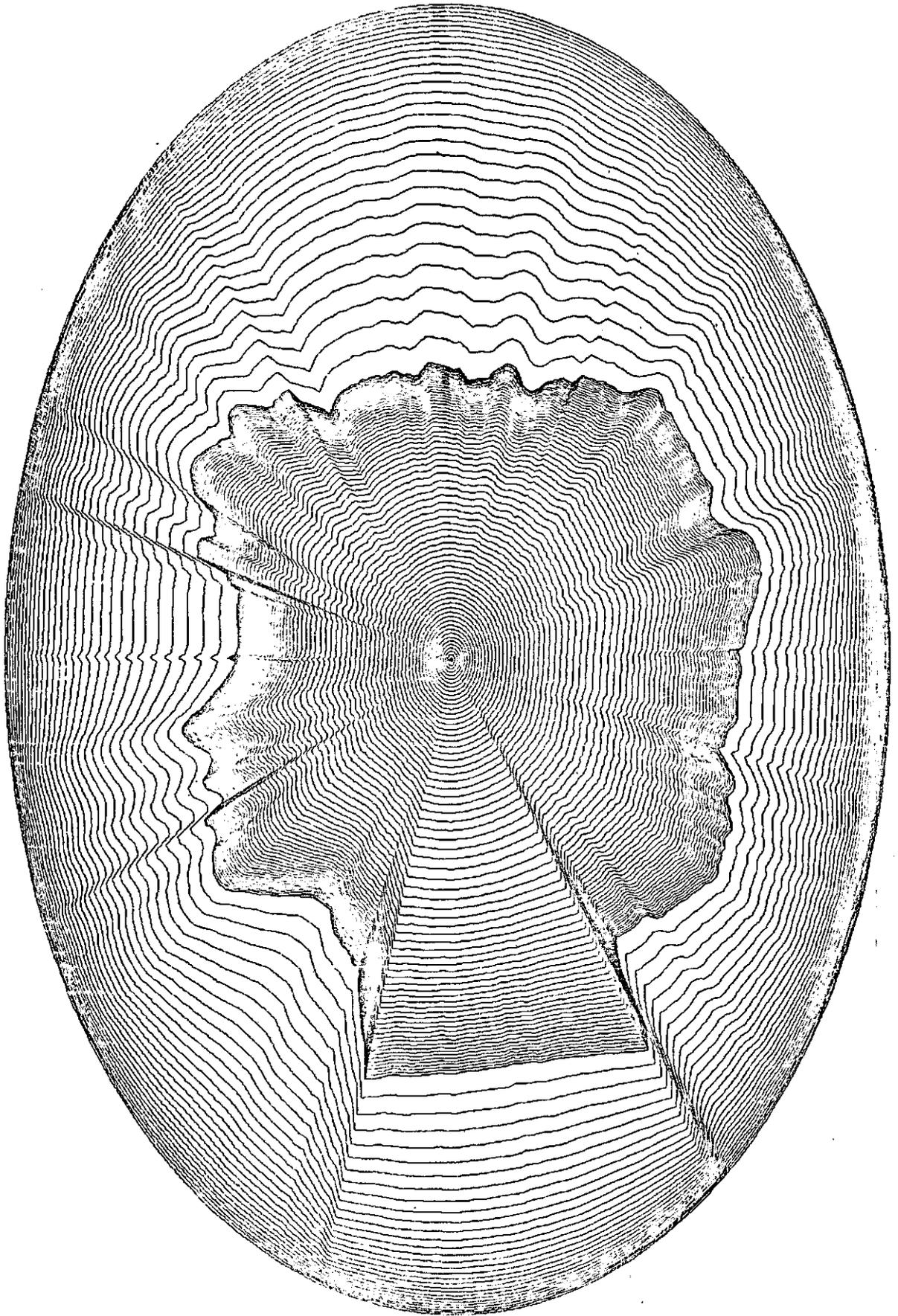


Fig. 3.9

BIBLIOGRAFIA

DERBY SCANLON - in COMPUTER ART CONTEST COMPUTERS AND AUTOMATION Vol.20,
Nº 8, Aug., 1971.

SYDNEY ROBERISON - in COMPUTER ART CONTEST COMPUTERS AND AUTOMATION
Vol. 18, Nº 8, Aug., 1969.

MASAO KOMURA - in COMPUTER ART CONTEST COMPUTERS AND AUTOMATION Vol.17 ,
Nº 8, Aug. 1968.

EUNICE JACQUES - ARTE PELO COMPUTADOR - UMA ESTÉTICA RACIONAL - JORNAL
DO BRASIL, 13 de Junho de 1973.