MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21b/2016/04.20.19.52-TDI

ESTUDO DE TÉCNICAS FRACTAL E MULTIFRACTAL PARA ANÁLISE DE IRREGULARIDADES NA IONOSFERA EQUATORIAL

Gabriel Fornari

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada, orientada pelos Drs. Reinaldo Roberto Rosa, e Francisco Carlos de Meneses Junior, aprovada em 13 de maio de 2016.

URL do documento original:
<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3LHFT8S>

INPE
São José dos Campos
2016

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
Gabinete do Diretor (GB)
Serviço de Informação e Documentação (SID)
Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970
São José dos Campos - SP - Brasil
Tel.:(012) 3208-6923/6921
Fax: (012) 3208-6919
E-mail: pubtc@inpe.br

COMISSÃO DO CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (DE/DIR-544):
Presidente:
Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação (CPG)
Membros:
Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)
Dr. André de Castro Milone - Coordenação de Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)
Dra. Carina de Barros Melo - Coordenação de Laboratórios Associados (CTE)
Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação de Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)
Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação de Observação da Terra (OBT)
Dr. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)
Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SID)
BIBLIOTECA DIGITAL:
Dr. Gerald Jean Francis Banon
Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SID)
REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:
Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SID)
Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)
EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:
Marcelo de Castro Pazos - Serviço de Informação e Documentação (SID)
André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SID)

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21b/2016/04.20.19.52-TDI

ESTUDO DE TÉCNICAS FRACTAL E MULTIFRACTAL PARA ANÁLISE DE IRREGULARIDADES NA IONOSFERA EQUATORIAL

Gabriel Fornari

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada, orientada pelos Drs. Reinaldo Roberto Rosa, e Francisco Carlos de Meneses Junior, aprovada em 13 de maio de 2016.

URL do documento original:
<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3LHFT8S>

INPE
São José dos Campos
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Fornari, Gabriel.

F767e Estudo de técnicas fractal e multifractal para análise de irregularidades na ionosfera equatorial / Gabriel Fornari. – São José dos Campos : INPE, 2016.

xxiv + 133 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21b/2016/04.20.19.52-TDI)

Dissertação (Mestrado em Computação Aplicada) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2016.

Orientadores : Drs. Reinaldo Roberto Rosa, e Francisco Carlos de Meneses Junior.

1. Ionosfera equatorial. 2. Bolhas de plasma. 3. Medidas in situ. 4. Análise espectral. 5. Comportamento multifractal. I.Título.

CDU 523.4-853:543.4

Esta obra foi licenciada sob uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License.

Aluno (a): *Gabriel Fornari*

Título: "ESTUDO DE TÉCNICAS FRACTAL E MULTIFRACTAL PARA ANÁLISE DE IRREGULARIDADES NA IONOSFERA EQUATORIAL".

Aprovado (a) pela Banca Examinadora em cumprimento ao requisito exigido para obtenção do Título de *Mestre* em *Computação Aplicada*

Dr. Ezzat Selim Chalhoub

Presidente / INPE / SJCampos - SP

Dr. Reinaldo Roberto Rosa

Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

Dr. Francisco Carlos de Meneses Junior

Orientador(a) / INPE / São José dos Campos - SP

Dr. Jerônimo dos Santos Travelho

Membro da Banca / INPE / São José dos Campos - SP

Dr. Francisco Carlos Rocha Fernandes

Convidado(a) / UNIVAP / São José dos Campos - SP

Dr. Arian Ojeda González

Convidado(a) / UNIVAP / São José dos Campos - SP

Este trabalho foi aprovado por:

( ) maioria simples

(X) unanimidade

São José dos Campos, 13 de Maio de 2016

"Não tem dúvida: o método socrático de perguntas e respostas dá no vinte, quase sempre. Ao menos quando escrito assim em cima do papel, seja por platão ou mesmo por mim."

Mario de Andrade
em *"Amar, Verbo Intransitivo"*, 1927

AGRADECIMENTOS

Antes de mais nada, dedico o primeiro agradecimento ao Deus em quem acredito. Serei eternamente grato aos meus amados pais e, principalmente, a meu querido irmão. Não posso deixar de mencionar meus orientadores, Reinaldo e Xico, cujas discussões contribuíram de forma fundamental em minha formação, embora muitas vezes sobre assuntos um tanto "não acadêmicos" e em horários nem sempre cristãos. Agradeço muito à equipe do LAC, em especial à Jéssica, sempre disposta a ajudar e que me auxiliou em diversos momentos. Sou muito grato aos meus amigos, pelas mais diversas ocasiões que passamos juntos. Relembro, com pesar, dos meus colegas de curso; embora nem todos tenham chegado no fim dessa caminhada, todos fizeram parte dela. Agradeço, também, aos funcionários do INPE, que sempre se esforçaram em manter as instalações limpas, sempre prezaram pela segurança dos prédios (muitas vezes me deixando do lado de fora deles) e que sempre me precaveram sobre as assombrações e espíritos que vagam por aí. Sou grato à ADC e aos seus funcionários que, embora nem sempre muito presentes, me permitiram uma vida mais saudável e menos sedentária e, também, ao CNPq, que permitiu que eu me dedicasse integralmente à pesquisa. Por último, reconheço todos aqueles que contribuíram de forma indireta, mas não menos importante, para que eu escolhesse esse caminho.

RESUMO

O estudo das irregularidades do plasma ionosférico avançou significativamente nas últimas décadas, devido ao esforço combinado envolvendo simulação computacional, técnicas de sondagem remota e medidas *in situ* utilizando instrumentos a bordo de foguetes e satélites. Modelos relacionados ao mecanismo de instabilidade de Rayleigh-Taylor procuram explicar o aparecimento e evolução de um tipo de irregularidade, conhecida como "bolha de plasma", que surge a partir de perturbações na base da região F e evolui em direção ao topo da ionosfera noturna com diferentes tamanhos de escala. O entendimento sobre a relação entre irregularidades de diferentes escalas advém, principalmente, da análise da inclinação do ajuste linear de intervalos de frequência do espectro de potência de Fourier obtidos para séries temporais extraídas de medidas de parâmetros do plasma ionosférico. Alguns autores acreditam que as variações observadas no padrão dessas inclinações seriam decorrentes de um efeito tipo cascata direta, onde irregularidades maiores dão origem a menores. Seja pela limitação dos dados disponíveis ou das técnicas utilizadas em diversos estudos, esse problema segue em aberto. O presente trabalho se propõe a realizar uma análise espectral de medidas *in situ* de flutuações de densidade eletrônica e campo elétrico da ionosfera equatorial na presença de bolhas de plasma, obtidas a partir de instrumentos a bordo de um foguete de sondagem, utilizando as técnicas de DFA e MF-DFA, para a seguir comparar os resultados da primeira com seus respectivos espectros de Fourier. O primeiro método permite a análise de séries temporais não estacionárias, enquanto o segundo pode revelar o comportamento multifractal de sinais. Devido a limitações intrínsecas dos dados, um estudo computacional comparativo dos métodos com foco na sua eficácia é também realizado usando séries temporais geradas por modelos. Os resultados revelam um comportamento similar entre o espectro de potência e o DFA, sendo que diferentes índices espectrais, obtidos através do coeficiente angular de ajustes lineares, são exibidos por ambas as técnicas. No caso do MF-DFA, nenhum comportamento multifractal em dados de flutuação de densidade eletrônica é encontrado. Por outro lado, os dados de flutuação de campo elétrico exibem comportamentos multifractais cuja amplitude espectral é suficientemente grande para garantir a confiabilidade dos resultados.

Palavras-chave: Ionosfera equatorial. Bolhas de plasma. Medidas *in situ*. Análise espectral. Comportamento multifractal.

STUDY OF FRACTAL AND MULTIFRACTAL TECHNIQUES FOR ANALYSIS IN EQUATORIAL IONOSPHERE IRREGULARITIES

ABSTRACT

The study of ionospheric plasma irregularities advanced significantly in recent decades, due to a combined effort involving computer simulation, remote sensing techniques and in situ measurements using instruments aboard rockets and satellites. Models related to Rayleigh-Taylor instability mechanism seek to explain the appearance and evolution of a kind of irregularity known as "plasma bubble", which arises from disturbances on the basis of the F region and evolves toward the top of the nocturnal ionosphere with different scale sizes. The understanding of the relationship between different scales of irregularities comes mainly from the analysis of the slope of frequency ranges of Fourier power spectrum obtained from extracted time series of measurements of ionospheric plasma parameters. Some authors believe that the observed variations in the pattern of these slopes are derived from a direct cascade effect, where major irregularities give rise to smaller ones. Maybe due to the limited data available or the techniques used in the studies, this problem is still open. This study aims to perform a spectral analysis of electron density and electric field fluctuations of in situ measurements of equatorial ionosphere in the presence of plasma bubbles, obtained from instruments aboard a sounding rocket, using the techniques of DFA and MF-DFA, and to compare the results of the first with respective Fourier spectrums. The first method allows for the analysis of nonstationary time series, whereas the latter can reveal multifractal behavior in signals. Due to inherent limitations of the data, a comparative computational study of the methods focusing on their effectiveness is also performed using model-based time series. The results show a similar behavior between the power spectrum and DFA, and different spectral indices, obtained through the angular coefficient of linear fits, are revealed by both techniques. In the case of MF-DFA, no multifractal behavior in the electron density fluctuation data is found. On the other hand, the electric field fluctuation data exhibit behaviors multifractal the spectral amplitude is large enough to ensure reliability of results.

Palavras-chave: Equatorial ionosphere. Plasma bubbles. In situ measurements. Spectral analysis. Multifractal behaviour.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

2.1 Exemplo de estimativa do comprimento da costa sudoeste da Noruega utilizando o método dos quadrados. 6
2.2 Cálculo da dimensão fractal baseado no método *box counting*. 7
2.3 Quatro primeiras iterações da curva de Koch. 9
2.4 Ilustração do conceito de auto-similaridade e auto-afinidade. 11
2.5 Análise R/S de vários tipos de fenômenos naturais. 13
2.6 Resultado da simulação do lançamento de 10 moedas 1000 vezes. 14
2.7 Processo binomial multiplicativo para $n = 11$ e $p = 0,25$. 16
2.8 Subconjuntos fractais do processo binomial multiplicativo para $p = 0,25$. 18

3.1 Estágios de construção da série temporal baseada no modelo multifractal de turbulência. 31

4.1 Exemplo do passo a passo do DFA usando dois tipos de escalas. 36
4.2 Cálculo de $h(q)$ para um ruído branco em que as escalas foram mal escolhidas. 37
4.3 Cálculo de $h(q)$ de um sinal fractal e um sinal multifractal. 39
4.4 Espectro de singularidades $f(\alpha)$ para um sinal fractal e um sinal multifractal. 39
4.5 Exemplo de RGFs. 41
4.6 Análise do Espectro de Potência, DFA e MF-DFA de ruídos brancos ($H = 0,5$) com diferentes resoluções. 43
4.7 Comportamento do Espectro de Potência, DFA e MF-DFA de RGFs com diferentes resoluções. 44
4.8 Comportamento do MF-DFA2 e MF-DFA3 do movimento browniano ($H = 1,5$) com diferentes resoluções. 45
4.9 Exemplo de ruídos brancos com tendências polinomiais. 46
4.10 Espectro de potência de séries não estacionárias com diferentes resoluções. 46
4.11 Flutuações de séries não estacionárias com diferentes tamanhos. 47
4.12 Espectro de singularidades estimado pelo MF-DFA de séries não estacionárias com diferentes tamanhos. 48
4.13 Comportamento do Espectro de Potência, DFA e MF-DFA de séries não estacionárias com diferentes resoluções. 49
4.14 Exemplo de série temporal com duas inclinações ($H = 0,5$ e $H = 1,5$). . 49
4.15 Espectro de potência de série com duas inclinações. 50

4.16 Função de flutuação de séries com duas inclinações. 51
4.17 Comportamento do ω de séries com duas inclinações para séries de diferentes tamanhos. 51
4.18 Exemplo de série multifractal. 52
4.19 Espectro de singularidades de séries multifractais. 53
4.20 Comportamento do MF-DFA de séries mutifractais com diferentes tamanhos. 53
4.21 Tempo de processamento dos métodos espectro de potência, DFA e MF-DFA de séries temporais com diferentes tamanhos. 54

5.1 Perfis verticais da temperatura da atmosfera neutra e da densidade eletrônica da ionosfera. 58
5.2 Perfil vertical de bolhas de plasma obtido através de um foguete de sondagem. 60
5.3 Espectros de potência de flutuação de densidade eletrônica obtida pelo Plumex I. 62

6.1 Disposição da instrumentação do experimento IONEX-II a bordo do segundo estágio de um foguete tipo Sonda III. 66
6.2 Detalhes da carga útil do experimento IONEX-II. 67
6.3 Correspondência entre tempo e altura do foguete durante o experimento. 69
6.4 Perfis verticais de densidade eletrônica medidos durante os voos de subida (*upleg*) e descida (*downleg*) do experimento IONEX-II. 70
6.5 Exemplo da seleção dos intervalos amostrais de acordo com o perfil de tensão no sensor da SL. 72
6.6 Perfil dos intervalos amostrais: localização, classificação e quantidade. . . 73
6.7 Exemplo do processo de filtragem das amostras. 73
6.8 Exemplo do processo de remoção da tendência das amostras por meio do EMD. 74

7.1 Posição dos 6 exemplos escolhidos através do perfil de densidade eletrônica. 77
7.2 Séries temporais de $\delta Ne/Ne$ e $\delta E/E$ do caso 1. 78
7.3 Espectros de Fourier e DFA de $\delta Ne/Ne$ do caso 3. 80
7.4 Espectros de Fourier e DFA de $\delta E/E$ do caso 4. 82
7.5 Resultados do MF-DFA dos casos 1, 2 e 3. 85

C.1 Espectros de Fourier e DFA de $\delta Ne/Ne$ do caso 1. 97
C.2 Espectros de Fourier e DFA de $\delta Ne/Ne$ do caso 2. 98
C.3 Espectros de Fourier e DFA de $\delta Ne/Ne$ do caso 4. 99
C.4 Espectros de Fourier e DFA de $\delta Ne/Ne$ do caso 5. 100
C.5 Espectros de Fourier e DFA de $\delta Ne/Ne$ do caso 6. 101

C.6 Espectros de Fourier e DFA de $\delta E/E$ do caso 1. 102
C.7 Espectros de Fourier e DFA de $\delta E/E$ do caso 2. 103
C.8 Espectros de Fourier e DFA de $\delta E/E$ do caso 3. 104
C.9 Espectros de Fourier e DFA de $\delta E/E$ do caso 5. 105
C.10 Espectros de Fourier e DFA de $\delta E/E$ do caso 6. 106

LISTA DE TABELAS

Pág.

4.1 Variáveis de entrada dos algoritmos. 35
4.2 Argumentos de entrada dos algoritmos. 40

5.1 Índices espectrais obtidos a partir de espectros de potência de experimentos de medidas *in situ* de parâmetros do plasma ionosférico realizadas com foguetes de sondagem. 61

7.1 Características do foguete nos 6 diferentes intervalos amostrais escolhidos. 78
7.2 Argumentos usados nas análises dos casos de $\delta Ne/Ne$ e $\delta E/E$. 79
7.3 Índice α do espectro de potência ($m = 0$) e do DFA ($m = 1, \ldots, 5$) de $\delta Ne/Ne$. 81
7.4 Índice α do espectro de potência ($m = 0$) e do DFA ($m = 1, \ldots, 5$) de $\delta E/E$. 83
7.5 Índice ω de $\delta Ne/Ne$. 84
7.6 Índice ω de $\delta E/E$. 86

C.1 Limites inferior (s_i) e superior (s_f) das escalas usadas nos dados de $\delta Ne/Ne$. 95
C.2 Limites inferior (s_i) e superior (s_f) das escalas usadas nos dados de $\delta E/E$. 95
C.3 Valores de ω de $\delta Ne/Ne$. 96
C.4 Valores de ω de $\delta E/E$. 96

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AC	–	Corrente alternada
DC	–	Corrente contínua
DFA	–	Detrended Fluctuation Analysis
EMD	–	Empirical Mode Decomposition
FFT	–	Fast Fourier Transform
LT	–	Hora local
Matlab	–	Laboratório de Matrizes (Software)
MBF	–	Movimento Browniano Fracionário
MF-DFA	–	Multifractal Detrended Fluctuation Analysis
NaN	–	Not a Number
R/S analysis	–	rescaled range analysis
SL	–	Sonda de Langmuir
SDCE	–	Sonda Dupla de Campo Elétrico
SCAF	–	Sonda Capacitiva de Alta Frequência
RGF	–	Ruído Gaussiano Fracionário
TFD	–	Transformada de Fourier Discreta

LISTA DE SÍMBOLOS

$\vec{B}$	–	Campo geomagnético do ambiente
c_k	–	Coeficiente de Fourier
D	–	Dimensão de Haudorff-Besicovitch
dt	–	Intervalo entre duas amostras
f	–	Frequência
$F(s)$	–	Valor da flutuação em função de s
$f(\alpha)$	–	Dimensão fractal em função de α
H	–	Coeficiente de Hurst
$h(q)$	–	Expoentes de Hurst generalizados em função de q
$\vec{L}$	–	Vetor entre os dois sensores da sonda de campo elétrico
m	–	Grau do polinômio usado no destendenciamento
N	–	Quantidade de elementos em um vetor
p	–	Fração de distribuição da população
P	–	Potência
q	–	Expoente de ponderação
s	–	Intervalo temporal (escala)
$\vec{V}$	–	Velocidade do foguete
α	–	Inclinação do DFA; e, Expoente de Lipschitz-Hölder
α_1	–	Índice espectral das grandes escalas do DFA
α_2	–	Índice espectral das pequenas escalas do DFA
β	–	Inclinação do espectro de potência
β_1	–	Índice espectral das baixas frequências do espectro de potência
β_2	–	Índice espectral das altas frequências do espectro de potência
δ	–	Tamanho da caixa
δE	–	Flutuação de campo elétrico
$\delta E/E$	–	Flutuação de campo elétrico destendenciada
δNe	–	Flutuação de densidade eletrônica
$\delta Ne/Ne$	–	Flutuação de densidade eletrônica destendenciada
δq	–	Variação do expoente de ponderação
$\delta\varphi$	–	Diferença de potencial
τ	–	Expoente de massa
φs	–	Diferença de potencial entre os sensores da sonda de campo elétrico
ω	–	Diferença entre α_{max} e α_{min} no espectro de singularidades

SUMÁRIO

Pág.

1 INTRODUÇÃO 1

2 SÉRIES TEMPORAIS FRACTAIS E MULTIFRACTAIS 5

2.1 *O Problema da Escala* 5

2.2 *A Dimensão Fractal* 7

2.3 *Auto-similaridade e Auto-Afinidade* 10

2.4 *Séries Temporais* 12

2.5 *Fractais e Multifractais* 14

2.5.1 Conjunto de Subconjuntos Fractais 15

2.5.2 O espectro de singularidades $f(\alpha)$ 17

3 DESCRIÇÃO DAS METODOLOGIAS 21

3.1 *Espectro de Potência* 21

3.2 *Detrending Fluctuation Analysis* 23

3.3 *Multifractal Detrending Fluctuation Analysis* 26

3.4 Modelos de geração de Séries Temporais 27

3.4.1 Modelos Monofractais 28

3.4.2 Modificações em séries monofractais 29

3.4.3 Modelo Multifractal 30

3.5 Análise da Complexidade Computacional 33

4 ANÁLISE DAS METODOLOGIAS 35

4.1 Configurando os Algoritmos 35

4.2 Influência da Resolução das Séries 40

4.2.1 Ruído Gaussiano Fracionário e Movimento Browniano Fracionário . . . 41

4.2.2 Séries com Tendências 43

4.2.3 Séries com duas Inclinações 48

4.2.4 Séries Multifractais 51

4.3 Tempo de Processamento 54

5 IRREGULARIDADES NA IONOSFERA EQUATORIAL 57

5.1 Atmosfera Neutra e Ionosfera 57

5.1.1 Bolhas de Plasma 59

6 EXPERIMENTO E PRÉ-PROCESSAMENTO DE DADOS . . 65
6.1 Experimento 65
6.2 Procedimentos de pré-processamento dos dados 70

7 RESULTADOS 77
7.1 Comparação entre DFA e Espectro de Potência 79
7.1.1 Análise da Flutuação de Densidade Eletrônica 79
7.1.2 Análise da Flutuação de Campo Elétrico 82
7.2 MF-DFA 84

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS 87

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 89

APÊNDICE C - RESULTADOS 95
C.1 Escalas alternativas usadas como Parâmetros do MF-DFA 95
C.2 Resultados do MF-DFA usando as Escalas do Apêndice C.1 95
C.3 Comparação entre DFA e Espectro de Potência 96
C.3.1 Análise da Flutuação de Densidade Eletrônica 96
C.3.2 Análise da Flutuação de Campo Elétrico 100

APÊNDICE B - FUNÇÕES 107
B.1 Espectro de Potência 107
B.2 DFA 109
B.2.1 Escalas logarítmicas 111
B.3 MF-DFA 112
B.4 Filtro de Fourier 115
B.5 Modificação da série 117
B.5.1 Adição de tendência 117
B.5.2 Filtro de Fourier Modificado 118
B.6 P-model 120
B.6.1 P-model analítico 121
B.6.2 Processo Binomial Multiplicativo analítico 123
B.7 Processo de Decomposição Empírico (EMD) 125

APÊNDICE C - SCRIPTS 129
C.1 Análise através do DFA 129
C.2 Geração dos Gráficos 130

1 INTRODUÇÃO

O termo ionosfera é, de maneira geral, definido como uma parte da atmosfera que possui quantidade suficiente de elétrons livres para influenciar a propagação de ondas de rádio (RISHBETH, 1988). Desde a sua primeira detecção, tem-se procurado explicar diversos aspectos de sua natureza que se mostram afetados por processos de produção e perda de íons/elétrons livres, reações químicas e perturbações de ondas mecânicas, além de efeitos de difusão e transporte devido aos ventos neutros e aos campos elétrico e magnético (NAVA, 2011).

Após o pôr do sol, estruturas com densidade eletrônica menor que o meio ionosférico, conhecidas como bolhas de plasma, podem ser detectadas na ionosfera equatorial e de baixas latitudes por meio de instrumentos instalados em solo ou medidas *in situ* realizadas por sondas a bordo de foguetes e satélites (HYSELL, 2000; ABDU, 2012). A detecção dessas bolhas por instrumentos que operam com características bastante distintas produz nomenclaturas próprias, como "Spread F" e "índice de cintilação", que são adotadas para definir a mesma manifestação, o que leva muitas vez a uma impressão errônea de que se trata de diferentes fenômenos. Sua ocorrência na ionosfera noturna influencia a confiabilidade dos sistemas eletrônicos espaciais e terrestres, causando atraso e até interrupção na comunicação e transmissão de sinais eletromagnéticos.

Um importante passo na compreensão da geração desse tipo de irregularidade teve origem a partir da ideia de que as bolhas de plasma surgem na base da ionosfera noturna à semelhança do mecanismo de instabilidade de Rayleigh-Taylor utilizado na abordagem para fluidos neutros (WOODMAN; LA HOZ, 1976). Mais tarde, esse mecanismo foi generalizado para incluir perturbações de natureza eletromagnética.

Atualmente, se sabe que o tamanho de escala das bolhas de plasma pode variar de centímetros a centenas de quilômetros. A maior parte dos estudos encontrados na literatura estão voltados para as bolhas de média e grande escalas, que variam da ordem de centenas de metros a dezenas de quilômetros. Alguns autores acreditam que a formação das pequenas escalas é creditada a um efeito tipo cascata direta, onde irregularidades maiores vão se fragmentando em bolhas cada vez menores (WOODMAN, 2009). Diversos trabalhos usando sensores a bordo de foguetes e satélites foram publicados sobre a formação de irregularidades de pequenas escalas e foram responsáveis por coletar dados de parâmetros ionosféricos em diferentes intervalos de altitude, latitude e condições aeronômicas (HYSELL et al., 1994; JAHN; LABELLE, 1998; RODRIGUES et al., 2009; SPICHER et al., 2014).

Na maior parte desses trabalhos, a técnica de análise utilizada baseia-se na avaliação do coeficiente angular do ajuste linear de intervalos de frequência dos espectros de Fourier obtidos para séries temporais extraídas de medidas de flutuações de parâmetros do plasma ionosférico, tais como a densidade eletrônica e campo elétrico. Alguns métodos alternativos, como a transformada Hilbert-Huang são capazes de produzir espectros com indicações mais legíveis de mudança de regime (CHEN et al., 2001), enquanto que a técnica de espectro cruzado revela informações capazes de distinguir diferentes processos que causam o mesmo comportamento em espectros de Fourier (SPICHER et al., 2015).

A divergência nos valores do coeficiente angular do ajuste linear disponíveis na literatura e a subjetividade do método de ajuste linear de intervalos de frequência dos espectros de Fourier surgiram como a principal motivação deste trabalho, que se propõe realizar uma análise espectral de medidas *in situ* de flutuação de densidade e campo elétrico da ionosfera equatorial utilizando as técnicas de DFA (Detrended Fluctuation Analysis) e MF-DFA (Multifractal Detrended Fluctuation Analysis). A primeira técnica é considerada análoga ao espectro de potência, com a vantagem de poder ser aplicada em séries temporais não estacionárias. Já a sua generalização, o MF-DFA, é baseada na teoria de fractais, de modo que é possível verificar se as flutuações analisadas apresentam comportamento multifractal.

Adicionalmente, foi realizado um estudo minucioso usando diferentes sinais gerados por modelos com o intuito de compreender as características dos parâmetros coletados pelo experimento, o comportamento das técnicas à medida que a resolução dos dados diminui e suas respostas para séries não-estacionárias. Por último, o espectro de Fourier é também obtido para as mesmas flutuações e comparado com os resultados fornecidos pelo DFA e MF-DFA.

A primeira parte da presente dissertação é composta de três capítulos: o capítulo 2, de embasamento teórico que classifica as técnicas de análise espectral que serão utilizadas (DFA, MF-DFA e espectro de potência); o capítulo 3, que apresenta a base matemática dessas técnicas; e o capítulo 4 que analisa as metodologias do capítulo anterior em diferentes contextos a fim de estudar seus comportamentos. O capítulo 5, marca do início da segunda parte da dissertação, contextualiza, em linhas gerais, o fenômeno físico que será analisado neste trabalho. O capítulo seguinte, 6, descreve em detalhes o experimento responsável pela aquisição dos dados onde as técnicas são empregadas. O capítulo 7 apresenta os resultados obtidos com as técnicas selecionadas e sua comparação associada à explicação de fenômenos ionosféricos, enquanto

que as considerações finais do trabalho podem ser encontradas no capítulo 8.

2 SÉRIES TEMPORAIS FRACTAIS E MULTIFRACTAIS

Este capítulo é dividido em 5 seções. As duas primeiras introduzem o conceito de fractais, enquanto que a terceira seção define as características dos fractais. A seção 2.4 introduz o conceito de séries temporais e o coeficiente de Hurst, ao passo que a última seção, 2.5, discute o conceito de fractalidade e multifractalidade em séries temporais.

2.1 *O Problema da Escala*

Fractal (do latim, fractus) significa fração, irregular, quebrado. Geometrias inteiras e regulares - como um quadrado, um círculo, ou uma reta - não são fractais. Uma vez que o termo em si não é de uso comum, sua definição ainda está em aberto. Mandelbrot, autor do conceito de geometria fractal, procurou definir o termo da seguinte maneira: "Um fractal é um conjunto em que a dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica". Tempos depois, propôs uma definição ainda mais simples: "Um fractal é uma forma feita de partes que, de alguma maneira, são similares à forma original".

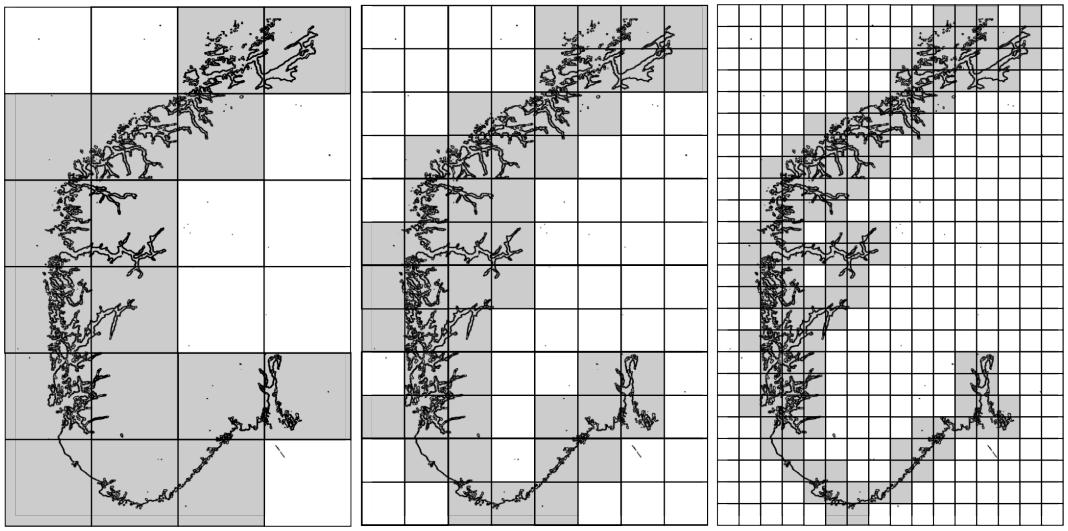
Um exemplo clássico de fractal é a costa da Noruega. Uma questão que surge a esse respeito é como medir o comprimento dessa costa. Uma forma seria, a partir de uma imagem de satélite, determinar o que é terra, o que é mar e traçar uma linha separando os dois. O comprimento total da linha seria equivalente ao comprimento da costa, i.e., a linha seria a representação da costa. Porém, o simples fato de traçar a linha corretamente pela costa não é uma tarefa trivial: a rigor, há que se definir o que é rio e o que é mar, o momento exato em que um rio começa, e outros problemas relacionados. Se o importante é saber apenas estimar o comprimento total dessa linha imaginária, podemos desprezar essas questões.

Uma maneira de calcular o tamanho da costa seria traçar retas de tamanho δ que acompanhassem a costa de uma extremidade à outra do mapa. Contando o número de retas usadas, $N(\delta)$, e multiplicando pelo seu tamanho δ, seria obtido um comprimento aproximado da costa. Obviamente, a medida que a escala δ fosse se tornando menor, novas saliências seriam detectadas e chegaríamos mais próximo do comprimento real. Além disso, quanto menor a escala, maior seria o número de retas utilizadas.

Um método alternativo pode ainda ser aplicado para o mesmo fim: ao invés de sobrepor retas à linha costeira, poderiam ser usados quadrados. Cobrindo o mapa

com uma malha, o número de quadrados de lado δ necessários para cobrir a costa é, de certa maneira, proporcional ao número de retas usadas seguindo o método anterior; à medida que a escala se torna menor, o número de quadrados aumenta, e a medida tende a se aproximar do comprimento real da costa. A Figura 2.1 representa o método da contagem de quadrados da costa sudoeste da Noruega.

Figura 2.1 - Exemplo de estimativa do comprimento da costa sudoeste da Noruega utilizando o método dos quadrados.



Fonte: produção do próprio autor.

Sendo $L(\delta) = N(\delta)\delta$ o comprimento estimado da costa e L_N o comprimento real da costa, espera-se que, quando δ for suficientemente pequeno, $L(\delta) \approx L(N)$. Na prática, porém, não é isso o que acontece. Mesmo diminuindo a escala, o comprimento estimado da costa nunca chega a um valor constante. A medida que δ se torna menor, o número de quadrados aumenta e isso se repete sem mostrar sinal de chegar ao fim. Como pode ser visto na Figura 2.2, mesmo diminuindo o valor de δ, o comprimento da costa não atinge um valor constante. Assim, o comprimento da costa é tratado como uma lei de escala, seguindo a fórmula

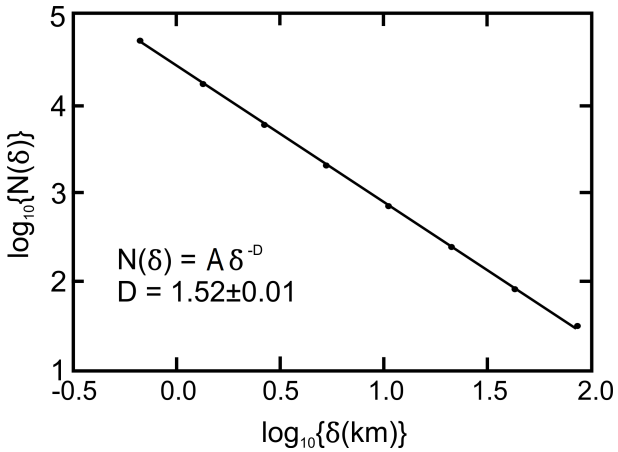
$$N(\delta) = A\delta^{-D}, \tag{2.1}$$

onde A é igual ao tamanho original da linha L_N, se essa última fosse uma linha reta.

Supondo mais uma vez que a medida estimada $L(\delta)$ atingisse a medida real L_N para um certo valor de δ, então $A = L_N$.

Substituindo em 2.1, obtém-se $L(\delta) = A\delta^{1-D}$. Como $A = L_N$, D deveria ser 1. No entanto, a costa da Noruega é dita fractal com dimensão $D = 1,52$ e o método descrito é chamado de método da contagem de caixas (*box counting*); a dimensão D é chamada de dimensão da contagem de caixas (*box counting dimension*) ou dimensão da caixa (*box dimension*). O comprimento da costa da Noruega para diferentes valores de δ são mostrados na Figura 2.2. O cálculo da dimensão fractal é explicado mais detalhadamente na seção 2.2.

Figura 2.2 - Cálculo da dimensão fractal baseado no método *box counting*.



O número de "caixas" necessário para cobrir a costa da Figura 2.1 aumenta seguindo a lei de potência $N(\delta) \sim \delta^{-D}$. Para esse exemplo da Noruega, $D \simeq 1,52$.

Fonte: Feder (1988).

2.2 *A Dimensão Fractal*

Um quadrado é uma figura bidimensional. Embora não seja um fractal, tentar calcular sua dimensão fractal é um valioso exercício para compreender a ideia por trás dos fractais. Supondo que o quadrado é uma figura cuja dimensão seja desconhecida, é necessário empregar o método box counting para estimar sua dimensão. Como foi feito no caso da costa da Noruega, a ideia é cobrir a imagem original de quadradinhos e ir diminuindo os seus tamanhos. Começando com 4 quadradinhos e dividindo cada um em mais quatro, é trivial notar que o número de quadradinhos é multiplicado por 4 a cada iteração. Com isso, obtém-se uma progressão geométrica de quociente

igual a 4. Considerando i o índice da série, pode-se obter o número de quadradinhos $N(i)$ através da seguinte equação:

$$N(i) = 4^i. \tag{2.2}$$

À medida que i cresce, é necessário saber a área de cada quadradinho. Supondo que não se sabe a dimensão da figura que está sendo calculada, pode-se dizer que esta possui uma área proporcional ao lado elevado a sua dimensão, ou seja, $A = L^D$. Na primeira iteração há 4 quadradinhos, cada um possui a medida do lado igual a metade do quadrado original. Também é fácil ver que a área de um quadradinho é seu lado elevado à mesma dimensão da figura, ou seja,

$$A(i) = \left(\frac{L}{2^i}\right)^D. \tag{2.3}$$

Por último, multiplicando a área de cada quadradinho pela sua quantidade, a área estimada do quadrado original será dada por

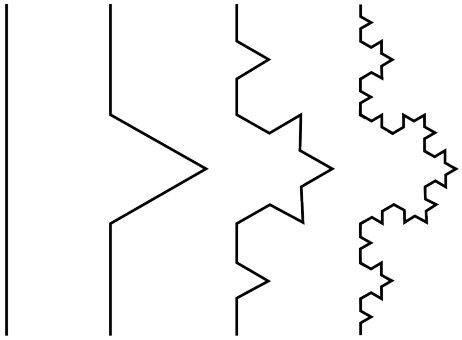
$$A_i = A(i)N(i) = \left(\frac{L}{2^i}\right)^D 4^i = \left(\frac{4}{2^D}\right)^i L^D. \tag{2.4}$$

Para $i \to \infty$, a área estimada tende a área original, i.e., $A_i \to A$. Porém, isso só faz sentido se $4/2^D = 1$. Como era esperado, $D = 2$. Embora seja trivial que a dimensão de uma quadrado seja 2, esse processo ilustra o cálculo da dimensão D.

Utilizaremos agora a curva de Koch para calcular a dimensão fractal. A curva de Koch pode ser construída a partir dos seguintes passos: dada uma linha de tamanho L, é necessário reparti-la em três segmentos de igual comprimento $L/3$. O segmento central é então removido e dois novos segmentos contendo o mesmo tamanho $L/3$ são colocados no lugar formando um triângulo equilátero sem a base. Para cada novo segmento, os mesmos passos são repetidos. A Figura 2.3 ilustra as quatro primeiras iterações desse processo.

Como a curva de Koch é um processo conhecido, não há necessidade de contar o número de quadrados necessários para preencher suas curvas. Tomando o índice i como o número de iterações do processo, é fácil perceber que o número de segmentos gerados a cada passo é $N(i) = 4^i$. O comprimento de cada segmento é uma terça parte do

Figura 2.3 - Quatro primeiras iterações da curva de Koch.



Fonte: produção do próprio autor.

segmento original, ou seja, a cada iteração os segmentos ficam com 1/3 do seu tamanho original. Na i-ésima iteração, o comprimento será $A(i) = (L/3^i)^D$. Seguindo os mesmos passos do exemplo anterior, chega-se na equação $D = ln(4)/ln(3) \approx 1,26$.

Neste caso, D é a dimensão de Hausdorff-Besicovitch. A formalização do conceito da dimensão de Hausdorff-Besicovitch não será tratada aqui, pois foge do escopo deste trabalho. Em linhas gerais, podemos dizer que quando a dimensão de Hausdorff-Besicovitch é um número não inteiro, ela é dita fractal. Essa é a primeira definição de Mandelbrot para fractais: um conjunto em que a dimensão de Hausdorff-Besicovitch exceda estritamente a dimensão topológica. A dimensão topológica está relacionada à geometria euclidiana - retas têm dimensão 1, planos 2, e sólidos 3. Daí o fato de que, em linhas gerais, quando D não é número inteiro, D é dito fractal. Para um estudo mais profundo acerca do assunto ver seção 2.3 do livro de Feder (1988).

Existem diversos tipos de fractais. A curva de Koch é apenas um deles. Quando esses fractais são gerados, eles não tem fim. Por isso, não faz sentido perguntar o comprimento de um fractal, pois ele nunca acaba. Essa é uma característica intrínseca deles: complexidade infinita (NUNES, 2006). Além disso, para uma certa escala, o fractal é sempre igual, não importa o quanto ele é aproximado. E essa é outra característica deles: auto-similaridade. Assim, chega-se à segunda definição do Mandelbrot: um fractal é uma forma feita de partes que, de alguma maneira, são similares à forma original.

2.3 *Auto-similaridade e Auto-Afinidade*

Uma figura é auto-similar se, independente da escala usada, se ampliada ou reduzida, possui sempre a mesma aparência (NUNES, 2006). Fractais são auto-similares. Se, por exemplo, a curva de Koch for ampliada em uma determinada escala, ela permanecerá idêntica à anterior, como se nada tivesse acontecido. E, se ela for ampliada de novo, uma nova curva de Koch surgirá idêntica às duas anteriores. Esse processo pode ser repetido infinitamente e nunca será obtida uma unidade "mínima", responsável pela formação de toda a estrutura. Esse é o conceito de auto-similaridade.

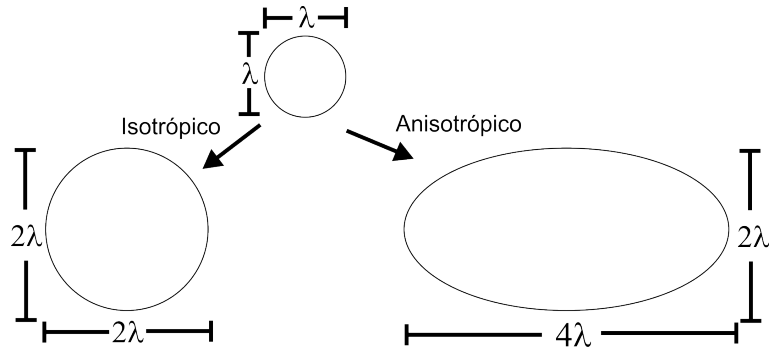
Além disso, alguns objetos não são auto-similares estritos. Fractais gerados por processos repetitivos, como no caso da curva de Koch (ver Figura 2.3), são auto-similares estritos porque, a cada iteração, o processo se repete, a figura é novamente gerada, e apenas a escala muda. Esses fractais “ideais”, gerados por modelos matemáticos e renderizados por computadores, apresentam auto-similaridade perfeita. Essa auto-similaridade perfeita, porém, não existe em conjuntos aleatórios e fractais naturais. O que existe é uma auto-similaridade estatística, em que os momentos estatísticos são idênticos (ou próximos) para as diferentes escalas do conjunto. Fractais encontrados na natureza muitas vezes possuem ordens estatísticas muito próximas, mas não idênticas.

Dessa forma, podemos definir dois tipos de conjuntos auto-similares. Antes de definilos, é necessário apresentar o conceito de transformação similar. É chamada de transformação similar a transformação de certos pontos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_K)$, determinados em um espaço de dimensão K, em pontos $x' = (rx_1, rx_2, \ldots, rx_K)$ em que r é uma razão de escala. Um conjunto de pontos C é dito auto-similar em relação a razão de escala r se C é a união dos N subconjuntos não-sobrepostos $C_1, \ldots, C_N$ que está em concordância com os conjuntos $r(C)$, obtidos a partir de C pela transformação similar em que $0 < r < 1$. Concordância, aqui, diz respeito aos subconjuntos de C que, após rotações e/ou translações, são idênticos ao conjunto de pontos $r(C)$. Um conjunto C é considerado estatisticamente auto-similar se C é a união de N subconjuntos diferentes, os quais, após serem reescalonados por uma razão r, são idênticos em todos os sentidos estatísticos ao conjunto $r(C)$ (FEDER, 1988). Além disso, estruturas naturais, como no caso da costa da Noruega, são estatisticamente auto-similares para escalas contidas em um certo intervalo. Não é difícil perceber que a costa da Noruega não pode ser aproximada infinitamente; ela é fisicamente limitada. Mas, para um dados intervalo de escalas, a dimensão D é válida.

Como foi definido anteriormente, as relações de escala em um fractal auto-similar

são isotrópicas, i.e., a razão r é igual para todas as dimensões. Isso significa que as ampliações ou reduções modificam o tamanho do objeto uniformemente em todos os eixos espaciais (BARABÁSI; STANLEY, 1995). Porém, alguns conjuntos não podem ser reescalonados de forma isotrópica, mas de forma anisotrópica. Isso significa que os eixos não serão redimensionados igualmente em todas as direções. Esse conceito é chamado de auto-afinidade, e é ilustrado na Figura 2.4.

Figura 2.4 - Ilustração do conceito de auto-similaridade e auto-afinidade.



Fonte: adaptada de Barabási e Stanley (1995).

Dessa forma, podemos definir o que é transformação afim. Uma transformação afim é a transformação de pontos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_K)$, definidos em um espaço de dimensão K, em pontos $x' = (r_1 x_1, r_2 x_2, \ldots, r_K x_K)$, em que as razões de escala $r_1, r_2, \ldots, r_K$ não são iguais. A partir daqui, pode-se definir o conceito de conjunto auto-afim. Um conjunto C é considerado auto-afim quando C é a união de todos os N subconjuntos $C_1, \ldots, C_N$ não sobrepostos que estão em concordância com o conjunto $r(C)$. Sendo que $r(C)$ foi obtido através de uma transformação afim a partir de C e r é um vetor de razões de escala $r = r_1, r_2, \ldots, r_K$. A definição de conjunto estatisticamente auto-afim segue a mesma definição anterior, porém com respeito aos momentos estatísticos (FEDER, 1988).

Supondo uma figura auto-afim que tenha a relação de invariância $x \to 4x$, $y \to 2y$, como mostra a Figura 2.4. Se um pedaço desta for cortado e ampliado, o eixo x deve ser multiplicado por um fator de 4, enquanto que o eixo y deve ser multiplicado por um fator de 2 para que a figura mantenha sua forma original. Ou seja, $F(4x) = 2F(x) = 4^{1/2}F(x)$. De forma geral, se um objeto possui invariância de escala de acordo com a regra $x \to bx$, $y \to ay$, temos (BUNDE; SHLOMO, 2009)

$$F(bx) = aF(x) \equiv b^H F(x), \tag{2.5}$$

em que H é chamado coeficiente de Hurst. Assim como a dimensão fractal, o coeficiente de Hurst é obtido através de uma lei de escala. Para uma discussão mais detalhada sobre o assunto, ver o capítulo 10 do livro Feder (1988). Na próxima seção, 2.4, o expoente de Hurst é discutido no contexto do comportamento de séries temporais.

2.4 *Séries Temporais*

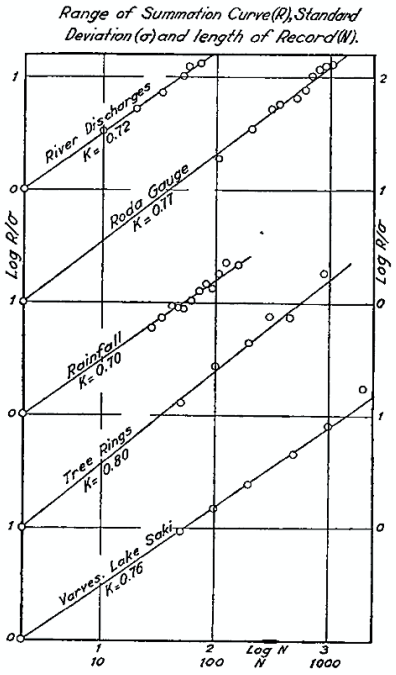
No presente trabalho, séries temporais são definidas como sendo um vetor unidimensional de números $x_1, x_2, \ldots, x_N$ que representam os valores de diversas medidas x observadas ao longo do tempo, em que os intervalos entre as medidas geralmente são iguais ou muito próximos (KANTELHARDT, 2012).

Muitas vezes, séries temporais auto-afins são consideradas fractais, mesmo que elas não sejam fractais em seu sentido estrito (KANTELHARDT, 2012). Nesse sentido, no lugar da dimensão fractal, o expoente de Hurst pode ser usado para caracterizar seus comportamentos de escala. O expoente de Hurst for criado por Harold Edwin Hurst, um engenheiro que passou a maior parte da sua vida estudando o comportamento de reservatórios de água. Uma excelente síntese do seu trabalho pode ser encontrada no capítulo 8 do livro Feder (1988). Hurst desenvolveu um novo método estatístico - chamado *rescaled range analysis* (R/S *analysis*) - para analisar séries temporais de reservatórios de água. Ele analisou séries de diferentes fenômenos naturais e constatou diferentes valores de H, todos entre $0,5$ e 1, como mostra a Figura 2.5.

Como forma de compreender o significado do valor do expoente, Hurst analisou sua técnica em "passeios aleatórios" (*random walks*). Mais tarde, Mandelbrot generalizou o "passeio aleatório" para movimento browniano fracionário (FEDER, 1988). Uma forma de gerar "passeios aleatórios" é jogando moedas para cima e plotando em um gráfico o valor total do somatório do valor das moedas, sendo $+1$ o valor da cara, e -1 da coroa. Na prática, foi isso o que Hurst fez. A Figura 2.6 mostra o resultado da simulação de 10 moedas não viciadas jogadas 1000 vezes.

Usando a análise R/S, obtém-se $H \approx 0,5$. Hurst também realizou outros experimentos forçando certas tendências nos resultados e constatou que $H > 0,5$. Essas tendências eram responsáveis pela criação de uma "memória" nos resultados. No caso das moedas, não havia tendências e, consequentemente, não havia "memória".

Figura 2.5 - Análise R/S de vários tipos de fenômenos naturais.



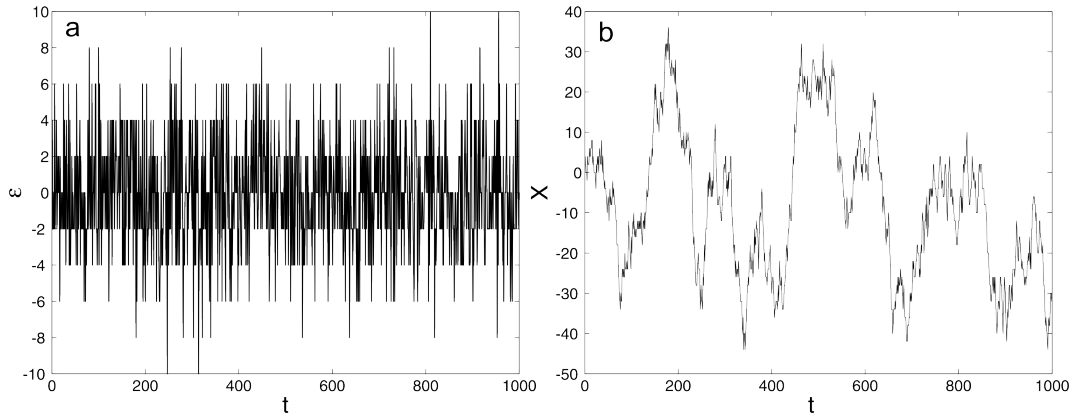
O coeficiente de Hurst é representado pela letra K na imagem; Mandelbrot adotou a letra H no lugar do K.

Fonte: Hurst et al. (1965).

Esse resultado é perfeitamente plausível se comparado aos resultados obtidos das análises das séries temporais da quantidade de água dos reservatórios. Supondo que o lago é alimentado apenas pela chuva, a vazão de água de uma lagoa não depende apenas das chuvas que ocorreram recentemente, mas também pelas chuvas que ocorreram em um certo período anterior. A quantidade de água irá aumentar quando as precipitações forem maiores que a média por um longo período de tempo. E esse excesso gerado irá contribuir para os períodos de seca. Porém, se os períodos de seca forem longos, o nível de água também abaixará e uma única chuva não será capaz de repor a quantidade de água perdida. E assim o ciclo se repete. Esse tipo de "memória" revela a persistência em um sinal.

Séries auto-afins são consideradas persistentes no sentido de que valores altos são seguidos por valores altos, e valores baixos são seguidos por valores baixos (KANTELHARDT, 2012). A persistência em "passeios aleatórios" é trivial: um valor é estritamente dependente do valor anterior. Porém, uma série pode ser, ao invés de persistente, independente ou anti-persistente. Quando $H \simeq 0,5$, a série é dita inde-

Figura 2.6 - Resultado da simulação do lançamento de 10 moedas 1000 vezes.



(a) Sequência de resultados independentes em que $\varepsilon(t)$ é calculado a partir do número de caras mais o número de coroas obtido. (b) "Caminhada aleatória" obtida através da integração de ε, $X(t) = \sum_{u=1}^{t} \varepsilon(u)$.

Fonte: produção do próprio autor.

pendente. Isso significa que o valor de um incremento é independente do valor do outro incremento. Quando $H > 0,5$, a série é dita persistente e, quando $H < 0,5$, a série é dita anti-persistente. Dessa forma, pode-se afirmar que uma série persistente possui correlação de longo alcance, e é chamada de correlacionada. Da mesma maneira, uma série independente é considerada não correlacionada, e uma série anti-persistente, anti-correlacionada (BUNDE; SHLOMO, 2009).

2.5 *Fractais e Multifractais*

A análise de uma série temporal através de um expoente, como é feito, por exemplo, quando se usa o expoente de Hurst, descreve o comportamento da série segundo uma lei de escala. Quando esse comportamento pode ser definido por um único valor, a série é dita fractal. Porém, muitos fenômenos apresentam comportamentos mais complexos e uma pluralidade de expoentes é necessária para defini-los. Nesses casos, é necessário usar o conceito de multifractais, e a série é chamada de multifractal.

Fractais estão associados a ideia de que, independente da escala, seja em termos globais, ou de forma microscópica, a distribuição de uma variável se comporta de uma única maneira. Isso nem sempre acontece. O ouro, por exemplo, pode ser encontrado em grande quantidades em poucos locais, em pouca quantidade em muitos locais, e em pouquíssima quantidade quase em todo lugar. As medidas multifractais

estão relacionadas ao estudo da distribuição de uma grandeza, física ou não, em um determinado espaço (FEDER, 1988).

A ideia de uma medida fractal sendo representada por diferentes subconjuntos fractais entrelaçados, cada um com um expoente de escala próprio, é uma explicação para o termo multifractal. Porém, para compreender com maior clareza o seu significado, é necessário um conhecimento mais detalhado sobre o assunto. A subseção 2.5.1 é dedicada à definição de multifractais. A subseção 2.5.2 é destinada às medidas comumente usadas nesta área. Uma revisão mais completa sobre o assunto pode ser vista no capítulo 6 do livro Feder (1988).

2.5.1 Conjunto de Subconjuntos Fractais

O conceito de multifractal será definido a partir de um exemplo conhecido como processo binomial multiplicativo. Supõe-se uma população de E elementos distribuída em um intervalo $S = [0, 1]$. Para caracterizar a distribuição da população, ela será repartida em segmentos de tamanho $\delta_n = 2^{-n}$, sendo n o número de gerações dos segmentos produzidos pelo processo de subdivisão. Na n-ésima geração, para cobrir todo intervalo S, $2^n = N$ segmentos são necessários. Sendo $i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, pode-se numerar os segmentos como E_i, em que E_i é o segmento de tamanho δ que contém uma determinada população. A fração da população $\mu_i = E_i/E$ é a medida que será usada para caracterizar a população do segmento E_i. Então, a distribuição da população ao longo da linha é dada pelo conjunto

$$M_n = \{\mu_i\}_{i=0}^{N-1}. \tag{2.6}$$

A soma de todas as medidas de uma dada região L do conjunto é dada por

$$T(L) = \sum_{i \in L} \mu_i. \tag{2.7}$$

Para caracterizar a distribuição, é necessário considerar o seguinte processo multiplicativo: tomando o intervalo $S = [0, 1]$, ao dividi-lo ao meio, atribuir, para a metade da esquerda, uma fração p da população e, para a metade da direita, o restante da fração, $1 - p$. Nesse caso, usando a equação 2.6 para $n = 2$, temos

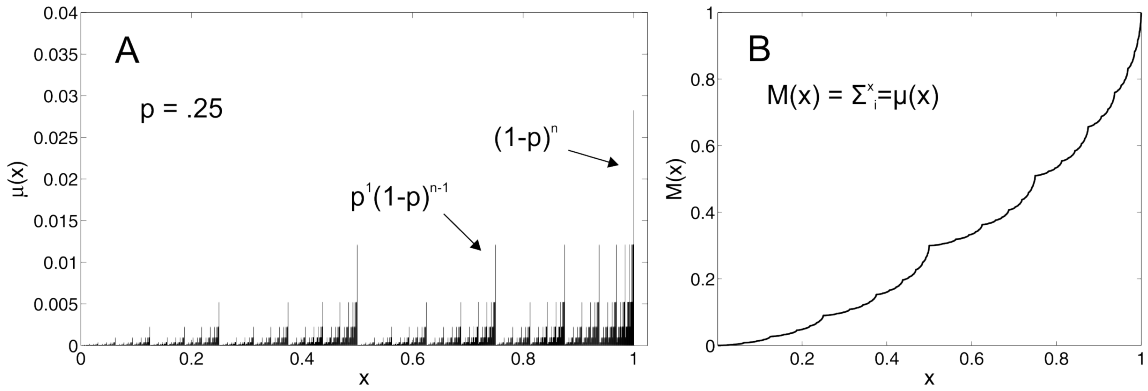
$$M_2 = \{\mu_i\}_{i=0}^{N-1} = \mu_0\mu_0, \mu_0\mu_1, \mu_1\mu_0, \mu_1\mu_1, \tag{2.8}$$

em que $\mu_0 = p$ e $\mu_1 = 1-p$. Todos os $N = 2^2$ pedaços tem tamanho $\delta_2 = 2^{-2}$. Após n gerações, $N = 2^n$ segmentos cobrirão o intervalo S. O tamanho de cada um será δ^{-n} e a fração da população será, em um dado segmento do índice $i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, $\mu_i = \mu_0^g \mu_1^{n-g}$, em que g é o número de vezes que μ_0 se repete. Esse processo pode ser visto como um número binário de n dígitos, em que g é o número de zeros. A partir da equação 2.7 podemos definir a medida:

$$T(x) = \sum_{i=0}^{x \cdot 2^n} \mu_i, \tag{2.9}$$

em que x define o índice do segmento, $i = x2^n$. Aqui, x é a representação do número binário cujo valor g está associado. A Figura 2.7 mostra as medidas μ_i e $T(x)$ para $n = 11$ e $p = 0,25$.

Figura 2.7 - Processo binomial multiplicativo para $n = 11$ e $p = 0,25$.



(A) A fração da população μ em função da sua posição x. (B) A medida $M(x)$ para os intervalos [0, x] em função de x.

Fonte: produção do próprio autor.

Como mostra a Figura 2.7, existe apenas um segmento com a medida mais alta $(1-p)^n$. Existem 11 segmentos com a medida $(1-p^{n-p})p^1$, e assim por diante. Para generalizar essa distribuição de medidas, será usada a análise combinatória

$$N_n(\xi) = \binom{n}{g} = \frac{n!}{g!(n-g)!}, \tag{2.10}$$

em que ξ é a fração de zeros de cada medida e é definido como $\xi = g/n$. Substituindo g em 2.10,

$$N_n(\xi) = \binom{n}{n\xi} = \frac{n!}{(n\xi)!((1-\xi)n)!}. \tag{2.11}$$

Cada intervalo está associado a uma medida $\mu_{xi} = \Delta^n(\xi)$, com $\Delta^n(\xi) = \mu_0^{\xi}\mu_1^{(1-\xi)} = p^{\xi}(1-p)^{(1-\xi)}$. Assim, pode-se dizer que os segmentos cobrem todo o intervalo $S = [0, 1]$ e também descrevem a distribuição de toda a população. Na n-ésima geração, os $N_n(\xi)$ elementos têm comprimento $\delta_n = 2^{-n}$ e a mesma medida μ_{ξ}. Esses segmentos formam um subconjunto $S_n(\xi)$. A quantidade de zeros $g = n\xi$ é igual para todos os elementos do subconjunto. Claro, cada elemento tem sua própria sequência de 0's e 1's. Pode-se chegar, no limite $n \to \infty$, que o subconjunto S_{ξ} é um conjunto fractal. Então, para calcular a dimensão fractal da medida $T_d(S_{\xi})$, baseado no cálculo da seção 2.2, basta resolver a equação:

$$T_d(S_{\xi}) = \sum_{S_{\xi}} \delta^d = N_n(\xi)\delta^d. \tag{2.12}$$

Resolvendo a equação 2.12 obtém-se que a dimensão fractal, $D(\xi)$, do conjunto S_{ξ}, é igual a $f(\xi)$, onde (FEDER, 1988)

$$f(\xi) = -\frac{\xi\ ln(\xi) + (1-\xi)ln(1-\xi)}{ln(2)}. \tag{2.13}$$

A dimensão fractal $D(\xi)$ não é um valor, mas uma função. Os subconjuntos S_{ξ} são fractais com dimensão fractal definida por $f(\xi)$. A medida T distribuída ao longo do intervalo S é caracterizada pela união de todos os subconjuntos S_{ξ}. Essa é uma forma de definir multifractal: um conjunto de subconjuntos fractais. Os subconjuntos fractais do processo binomial multiplicativo com $p = 0,25$ pode ser visto na Figura 2.8.

2.5.2 O espectro de singularidades $f(\alpha)$

O parâmetro ξ não é muito útil e na prática usa-se o expoente de Lipschitz-Hölder, α, em seu lugar. Considerando o processo multiplicativo para uma determinada geração n, a medida $T(x)$ será formada por incrementos de valores $\mu_{\xi} = \Delta^n(\xi)$ para todo x que tem $g = n\xi$ zeros em sua representação binária. Escolhendo um ponto

$x(\xi)$, correspondente a um valor qualquer ξ, o valor de $T(x(\xi))$ pode ser definido em função do ponto $x(\xi) + \delta$, com $\delta = 2^{-n}$. Ou seja, $T(x(\xi)) = T(x(\xi) + \delta) - \mu_\xi$. O incremento entre esses pontos é μ_{xi}, e pode ser definido por

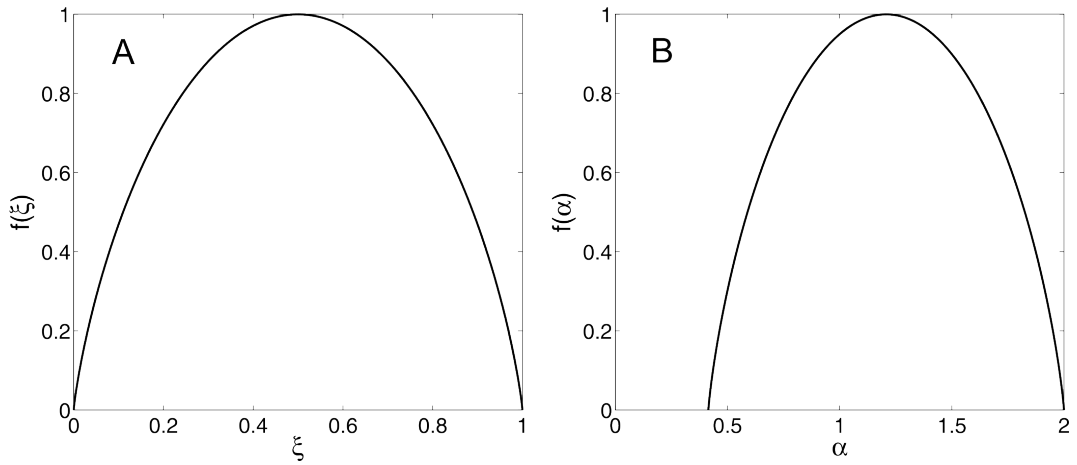
$$\mu_\xi = T(x(\xi) + \delta) - T(x(\xi)) = \delta^\alpha. \tag{2.14}$$

Logo, α pode ser definido pela relação (FEDER, 1988)

$$\alpha(\xi) = \frac{ln(\mu_\xi)}{ln(\delta)} = -\frac{\xi ln(p) + (1-\xi)ln(1-p)}{2}. \tag{2.15}$$

Dessa forma, a medida $T(x)$ possui "singularidades" caracterizadas através do expoente α. Cada subconjunto S_α possui uma dimensão fractal $f(\alpha) = f(\xi(\alpha))$. A curva $f(\alpha)$ versus α é chamada de espectro de singularidades. A comparação entre a curva de $f(\xi)$ versus ξ e o espectro de singularidades, com $p = 0,25$, pode ser visto na Figura 2.8.

Figura 2.8 - Subconjuntos fractais do processo binomial multiplicativo para $p = 0,25$.



(A) A dimensão fractal dos subconjuntos S_ξ em função da fração de zeros ξ. (B) A dimensão fractal dos subconjuntos S_ξ em função do expoente α; comumente chamado de espectro de singularidades.

Fonte: produção do próprio autor.

Uma outra medida, diretamente relacionada com o expoente α, é o chamado expo-

ente de massa $\tau(q)$. Analisando o método *box counting* é fácil perceber que ele é um método "bruto". As medidas dentro das caixas não são uniformes; algumas caixas podem ter apenas alguns pontos do conjunto, enquanto outras podem ter diversos pontos. Analisando a costa da Noruega é fácil perceber que algumas caixas incluem diversas enseadas que cobrem quase a totalidade da área da caixa, enquanto outras apenas um pequeno pedaço da costa, encobrindo uma parcela mínima da área da caixa. Uma forma de equilibrar o "peso" das caixas é usando uma potência para ponderar as medidas. Dado um conjunto S contendo E elementos, em que E_i é o número de elementos da i-ésima célula. O "peso" $\mu_i = E_i/E$ é usado para definir a medida

$$M_d(q,\delta) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i^q \delta^d = N(q,\delta)\delta^d. \tag{2.16}$$

Essa medida tem o expoente $d = \tau(q)$, que depende da potência q. Pode-se notar que cada medida μ_i está elevada à potência q. A partir da equação 2.16, pode-se calcular que o número de caixas ponderado $N(q,\delta)$ se comporta da forma

$$N(q,\delta) = \sum_i \mu_i^q \sim \delta^{-\tau(q)}, \tag{2.17}$$

em que o expoente de "massa" é dado por

$$\tau(q) = -\lim_{\delta\to 0} \frac{ln(N(q,\delta))}{ln(\delta)}. \tag{2.18}$$

Se $q = 0$, $\mu_i^{q=0} = 1$, e $N(q=0,\delta) = N(\delta)$ é simplesmente o número de caixas necessário para cobrir o conjunto. A depender do valor de q escolhido, algumas medidas serão mais favorecidas que outras. De forma geral, $q << -1$ favorece células com valores pequenos de μ_i, enquanto valores de $q >> 1$ favorecem células com valores altos de μ_i. Além disso, pode-se mostrar que $\tau(q)$ possui uma relação direta com $f(\alpha)$ (FEDER, 1988). Essas relações são assim definidas

$$\alpha(q) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\tau(q);\ \ f(\alpha(q)) = q\alpha(q) + \tau(q). \tag{2.19}$$

A relação de α e q vai além do contexto matemático. Em uma população homogênea,

as caixas que encobrem as medidas de distribuição da população terão sempre o mesmo valor e, independente do valor de q, terão sempre o mesmo comportamento de escala. É importante notar que o valor das caixas varia a depender da potência a qual é elevada; o que não varia é o comportamento quando o tamanho da caixa varia. Isso não ocorre em distribuições multifractais, em que o valor das caixas não são homogêneos e, devido à ponderação sofrida por elas, apresentam comportamentos de escala diferentes.

Em séries temporais estatisticamente auto-afins, o comportamento pode ser dado pelo expoente de Hurst usando, inclusive, a sua própria análise - *R/S analysis*. Porém, aplicando algum outro tipo de análise em que ocorra a ponderação das medidas, um espectro de singularidades pode revelar o comportamento multifractal da série. No próximo capítulo, 3, algumas técnicas fractais e multifractais serão definidas e implementadas.

3 DESCRIÇÃO DAS METODOLOGIAS

Sinais fractais estocásticos são caracterizados por uma variedade de medidas estatísticas relacionados à sua auto-similaridade (auto-afinidade). Diversas técnicas de análise de séries temporais fractais foram propostas, como os métodos de Higuchi, de Whittle, a análise R/S (de Hurst), a transformada de Fourier e a análise wavelet. A depender da técnica, os sinais podem ser caracterizados através de diferentes formas, como a dimensão fractal D, o expoente de Hurst H, e o expoente β do espectro de potência (TAQQU et al., 1995; MALAMUD; TURCOTTE, 1999).

Diversas áreas de pesquisa, como sequenciamento de bases do DNA, análise da frequência cardíaca, registros de temperatura, precipitação e velocidade do vento são exemplos de aplicações diretas dessas técnicas. Duas excelentes revisões sobre o assunto são as de Taqqu et al. (1995) e Malamud e Turcotte (1999). Uma revisão mais recente, que estende o contexto das técnicas fractais ao âmbito do contexto multifractal, é a de Kantelhardt (2012).

O objetivo deste capítulo é discutir as técnicas adotadas no presente trabalho. Para cada técnica aqui definida, sua implementação equivalente (código) é apresentada no Apêndice B. Duas metodologias foram escolhidas: a análise de flutuação destendenciada (DFA); e sua generalização: a análise de flutuação destendenciada multifractal (MFDFA). Além dessas duas, a análise do espectro de potência será também discutida. As três primeiras seções do capítulo são dedicadas às três técnicas citadas. Já a seção 3.4 é dedicada à definição de modelos geradores de séries temporais que terão, mais tarde, a finalidade de validar as técnicas implementadas.

3.1 *Espectro de Potência*

O espectro de potência consiste, como o próprio nome indica, em um gráfico da potência associada a cada componente da frequência *versus* a frequência (CHAPRA, 2013). Embora seja uma técnica bem estabelecida e amplamente usada, existem diferentes formas de calculá-la, que dão origem a uma família de análises espectrais. O espectro de potência é um dos membros dessa família. Aqui, ele será definido baseado na descrição de Heinzel et al. (2002).

A transformada de Fourier ideal, em cuja teoria a análise espectral é fundamentada, se baseia em uma sequência de informações temporais contínua e infinita. Porém, na prática, por conta de limitações como a frequência de amostragem e o tamanho da amostra obtido, é necessário calcular a transformada de Fourier discreta (TFD),

que pode ser definida como

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-ik\omega_0 j}, \tag{3.1}$$

para $k = 0, 1, \ldots, N-1$ e $\omega_0 = 2\pi/N$, sendo N o tamanho da série temporal. Por motivos de desempenho computacional, a transformada rápida de Fourier (do inglês, Fast Fourier Transform - FFT) foi utilizada. Durante o desenvolvimento do código, a FFT não foi desenvolvida, mas utilizada do pacote de ferramentas do Matlab. Através da TFD obtém-se os coeficientes de Fourier, c_k, que estão diretamente associados ao espectro do sinal. A potência é, então, calculada a partir do quadrado dos coeficientes de Fourier,

$$P_k = \frac{2 \cdot |c_k|^2}{W^2}, \tag{3.2}$$

onde W está associado à janela escolhida (esse assunto é discutido no final da seção). Cada componente da potência, P_k, está associado a uma frequência f. A maior frequência que pode ser medida é a frequência de *Nyquist*, que é igual a metade da frequência amostral. A menor frequência calculável é igual ao inverso do intervalo temporal da série. E, obviamente, não é possível calcular variações que ocorram mais rapidamente que o intervalo amostral. A frequência é, então, calculada como

$$f_i = \frac{i}{N/2} f_{nyquist}, \tag{3.3}$$

em que $i = 0, 1, 2, \ldots, N/2$ e $f_{nyquist} = f_{amostral}/2$. A frequência amostral, $f_{amostral}$, pode ser obtida através do inverso do intervalo amostral. Para uma série temporal com intervalo amostral equidistante de valor igual a dt, $f_{amostral} = 1/dt$. Reescrevendo a equação 3.3,

$$f_i = \frac{i}{N} \cdot f_{amostral}, \tag{3.4}$$

pode-se calcular a frequência associada a cada termo da potência. Nesse trabalho, a frequência $f_{i=0}$ é descartada por conta de um conjunto de razões (HEINZEL et al., 2002). Além disso, a definição encontrada em Chapra (2013) é idêntica à

proposta aqui, com exceção do fator 2 presente na equação 3.2. Então, tomando $i' = 1, 2, 3, \ldots, N/2$, pode-se demonstrar que séries auto-afins possuem uma relação entre o espectro de potência, $P_{i'}$, e a frequência, $f_{i'}$, que segue a lei de potência

$$P_{i'} \sim f_{i'}^{-\beta}, \tag{3.5}$$

em que β é a medida da intensidade da persistência do sinal e está diretamente relacionado ao coeficiente de Hurst.

Por último, é necessário definir o termo W. Em linhas gerais, W é o "somatório da janela". Como a transformada de Fourier é baseada na ideia de que o sinal é infinito, para realizar a transformada em um intervalo finito supõe-se que o mesmo é infinito e multiplica-se por uma janela. A janela possui um determinado valor w_i para cada índice i presente no intervalo amostral e 0 para os demais valores. Assim, o sinal mantém a característica de ser infinito, porém com valor 0 para qualquer índice diferente daqueles pertencentes ao intervalo selecionado. Se a transformada for realizada apenas escolhendo o intervalo desejado, é dito que a janela escolhida é a retangular. Ou seja, todos os termos do intervalo são multiplicados por $w_i = 1$, totalizando $N \cdot 1 = N$, e $W = N$. Caso a janela escolhida seja a de Hanning,

$$w_i = \frac{1}{2}\left[1 - cos\left(\frac{2\pi \cdot i}{N}\right)\right];\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1, \tag{3.6}$$

e $W = \sum_{i=0}^{N-1} w_i$. Diferentes janelas podem ser aplicadas nas séries, cada uma com suas próprias características. Uma revisão completa sobre diferentes técnicas de análise espectral e janelamento pode ser encontrada em Heinzel et al. (2002). A implementação, em Matlab, aqui descrita pode ser encontrada no Apêndice B.1.

3.2 *Detrending Fluctuation Analysis*

Em tradução literal, a "análise de flutuação destendenciada" (DFA) pode ser descrita como um método que analisa as correlações de longo alcance em séries temporais sem detectar pequenas e aparentes correlações de curto alcance. Desde a sua publicação, em 1994, como uma nova forma de analisar nucleotídeos em moléculas de DNA (PENG et al., 1994), o método foi aplicado a diversas outras áreas (KANTELHARDT, 2012). Além de ganhar popularidade, o método foi generalizado de outras formas, entre elas, o destendenciamento usando polinômios de diferentes ordens (BUNDE et al., 2000), a análise multifractal (KANTELHARDT et al., 2002), e a generalização para

uso de dados com outras dimensões (GU; ZHOU, 2006). Além disso, o expoente α do DFA está diretamente relacionado com o expoente β do espectro de potência e com o expoente de Hurst, H. Segundo Heneghan e McDarby (2000), o DFA e o espectro de potência não devem ser consideradas medidas diferentes.

O cálculo do DFA pode ser dividido em quatro etapas. Tomando x como uma série finita unidimensional de comprimento N, $\overline{x}$ como a média da série e s como um intervalo temporal (escala de tempo), o método pode ser definido como segue.

1. O primeiro passo é integrar o sinal original, x, para se obter o perfil do mesmo. Para isso, é necessário calcular a soma cumulativa da série temporal e subtrair da sua média. Ou seja,

$$y(i) \equiv \sum_{k=1}^{i}(x_k - \overline{x}) \tag{3.7}$$

   para $i = 1, 2, \ldots, N$.

2. Após obter o perfil, y, é necessário dividi-lo em $N_s \equiv int(N/s)$ segmentos não sobrepostos de tamanho s. Em alguns casos, em que a escala, s, não é divisora exata do tamanho da série, uma pequena parcela de dados pode ficar de fora dos cálculos. Para assegurar que isso não aconteça, o mesmo procedimento de segmentação é repetido no lado oposto do sinal. Assim, $2N_s$ segmentos são obtidos.

3. Para cada um dos $2N_s$ segmentos, um polinômio é aproximado por mínimos quadrados para representar a tendência local $y_t(i)$. Depois, o perfil $y(i)$ é destendenciado removendo-se essa tendência

$$F^2(t, s) \equiv \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\{y[(t-1)s + i] - y_t(i)\}^2, \tag{3.8}$$

   para $t = 1, 2, \ldots, N_s$. O mesmo procedimento deve ser feito para a outra metade dos segmentos,

$$F^2(t, s) \equiv \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\{y[N - (t - N_s)s + i] - y_t(i)\}^2, \tag{3.9}$$

   para $t = N_s + 1, N_s + 2, \ldots, 2N_s$. Assim, se a série estiver contaminada por tendências, elas serão eliminadas depois dessa etapa.

4. Por último, a média de todos os segmentos é obtida

$$F(s) \equiv \sqrt{\frac{1}{2N_s}\sum_{t=1}^{2N_s}[F^2(t,s)]}. \tag{3.10}$$

Em seu trabalho, Peng et al. (1994) usou uma reta para remover as tendências, definindo o polinômio padrão do DFA como um polinômio de ordem 1. Porém, polinômios com graus maiores podem ser usados, como quadráticos e cúbicos. Quando isso ocorre, o método é chamado de DFA1, DFA2, DFA3, ..., DFAm, sendo m a ordem do polinômio usado (BUNDE et al., 2000). A depender do grau do polinômio usado, diferentes tendências poderão ser removidas, alterando os resultados. Da mesma forma, por motivos de ajuste por mínimos quadrados, $s \geq m+2$. Além disso, quando $s > N/4$, o número de segmentos se torna muito pequeno, e o cálculo da média se torna impreciso. Por convenção, as escalas $s > N/4$ não são consideradas no cálculo (KANTELHARDT et al., 2002).

5. Pode-se provar que dados de $F(s)$ tem um comportamento exponencial. Isso revela uma lei de potência que pode ser descrita como

$$F_2(s) \sim s^{\alpha}. \tag{3.11}$$

Assim como o espectro de potência, o expoente α também é obtido através de uma lei de potência, mas associada ao intervalo de tempo, s, que é o inverso da frequência. Se $\alpha \approx 1/2$, o sinal é não correlacionado. Se $\alpha < 1/2$, o sinal possui anti-correlações de longo alcance e é anti-persistente. Caso $\alpha > 1/2$, o sinal possui correlações de longo alcance, revelando persistência no sinal. Em ruídos, α possui o mesmo comportamento que o expoente de Hurst, H, ou seja, $\alpha \approx H$.

O código do DFA pode ser visto no Apêndice B.2. O coeficiente α está diretamente relacionado com o coeficiente β do espectro de potência, associando o DFA e o espectro de potência como uma única medida (HENEGHAN; MCDARBY, 2000). A relação entre α e β é dada por

$$\alpha \approx 2\beta - 1. \tag{3.12}$$

3.3 *Multifractal Detrending Fluctuation Analysis*

O *multifractal detrending fluctuaton analysis* (MF-DFA), uma generalização do método DFA, foi publicado em 2002 para caracterizar séries temporais não estacionárias (KANTELHARDT et al., 2002). Assim como no DFA, polinômios de diferentes ordens podem ser usados para destendenciar as séries. A depender do grau do polinômio utilizado, o MF-DFA recebe um nome correspondente a MF-DFA1 , MF-DFA2, MF-DFA3, para polinômios lineares, polinômios quadráticos e cúbicos, respectivamente. Generalizando: MF-DFAm, sendo m a ordem do polinômio. Além disso, o MF-DFA foi estendido para outra dimensões (GU; ZHOU, 2006).

A caracterização multifractal advém do fato de que algumas séries temporais não possuem comportamento homogêneo, i.e., em alguns casos, um único expoente de escala não é suficiente para caracterizar o comportamento da série. Isso significa que, se a série possui comportamentos diferentes ao longo do tempo, uma análise multifractal pode ser útil para revelar esses comportamentos. Isso é feito ponderando os segmentos destendenciados obtidos através do DFA. De forma resumida, o MF-DFA é isso: uma ponderação do DFA.

Como o MF-DFA é uma extensão do DFA, apenas as últimas etapas do método serão descritas. As três primeiras etapas são idênticas e podem ser vistas na seção 3.2. Tomando q como o fator de ponderação das medidas, as etapas subsequentes são definidas a seguir:

4. A média de todos os segmentos é calculada para se obter a função de flutuação em função de q

$$F_q(s) \equiv \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{t=1}^{2N_s} [F^2(t,s)]^{q/2} \right\}^{1/q}, \tag{3.13}$$

onde q é qualquer valor real. Esse é um ponto crucial entre o DFA e o MF-DFA. No DFA, tem-se $q = 2$, resultando em uma única sequência de valores e, consequentemente, em um único expoente para a série temporal. No caso do MF-DFA, q pode assumir diferentes valores e, dessa forma, gerar diferentes expoentes de escala. Caso a série possua um comportamento fractal, os expoentes gerados serão iguais (ou muito próximos) e ela poderá ser caracterizada através de um único expoente, de forma que um método fractal possa ser usado sem grandes problemas. Por outro lado, se a série possuir um comportamento multifractal, um método mais robusto

é necessário.

Quando $q \to 0$, o expoente diverge, e não é possível calcular $F_0(s)$ pela equação 3.13. Para esse caso, uma fórmula logarítmica é usada,

$$F_0(s) \equiv exp\left\{\frac{1}{4N_s}\sum_{t=1}^{2N_s} ln[F^2(t,s)]\right\}. \tag{3.14}$$

5. Uma vez obtida as funções de flutuação, é necessário analisar o gráfico de $F_q(s)$ *versus* s em escala logarítmica da mesma forma que é feito no DFA, porém, para todos os valores de q. Em outras palavras, o MF-DFA é também associado à lei de potência

$$F_q(s) \sim s^{h(q)}. \tag{3.15}$$

A equação 3.15 é muito parecida com a equação 3.11. A diferença, mais uma vez, está no fato de que, agora, o expoente $h(q)$ é uma função de q, em que $h(q)$ é chamado de expoente de Hurst generalizado, ou seja, diversos expoentes serão calculados a depender do valor de q. Vale lembrar que, quando $q = 2$, $h(2) = \alpha$, que é o expoente calculado pelo DFA.

Por último, pode-se provar que o expoente de Hurst generalizado $h(q)$ se relaciona com o expoente de massa $\tau(q)$ através da fórmula (KANTELHARDT et al., 2002)

$$\tau(q) = qh(q) - 1, \tag{3.16}$$

A partir daqui pode-se chegar no espectro de singularidades, constituído pela intensidade da singularidade, ou expoente de Hölder, α, e pela dimensão fractal dos subconjuntos da série, $f(\alpha)$, através da transformação de Legendre (KANTELHARDT et al., 2002)

$$f(\alpha) = q\alpha - \tau(q); \alpha = \tau'(q). \tag{3.17}$$

3.4 Modelos de geração de Séries Temporais

Para testar e analisar o comportamento dos métodos acima, séries temporais com diferentes características serão geradas por meio de modelos e empregadas nos métodos. Foram selecionados dois modelos principais: um de séries fractais (ou mo-

nofractais), e um de séries multifractais. Ambos os modelos podem ser resolvidos analiticamente, e os resultados das técnicas podem ser validados através da comparação dos resultados.

Além disso, serão apresentadas técnicas para modificar as séries originais e, dessa maneira, gerar novas situações para estudar as técnicas. Nas subseções 3.4.1, 3.4.2 e 3.4.3 os modelos são definidos e explicados. O capítulo 4 é dedicado ao estudo das metodologias aqui propostas.

3.4.1 Modelos Monofractais

Sinais fractais aleatórios podem ser modelados por meio de duas grandes classes de sinais: o Ruído Gaussiano Fracionário (RGF) e o Movimento Browniano Fracionário (MBF). Respectivamente, essas classes são generalizações do ruído Gaussiano branco e do movimento Browniano. A relação entre eles é trivial: os incrementos do MBF formam o processo do RGF e, do contrário, a soma acumulada do RGF gera um MBF.

Nesse trabalho, as formas discretas do RGF e do MBF serão usadas, embora a nomenclatura aqui usada não faça distinção entre a forma discreta e a forma contínua. Dessa forma, o RGF pode ser obtido através das diferenças do MBF:

$$x_{RGF}(i) = x_{MBF}(i) - x_{MBF}(i-1), \tag{3.18}$$

em que x_{RGF} é a série temporal do RGF, x_{MBF} é a série do MBF e i é o índice da série. Da mesma forma, para se obter o MBF a partir do RGF, basta fazer

$$x_{MBF}(n) = \sum_{i=1}^{n} (x_{RGF}(i) - \overline{x_{RGF}}), \tag{3.19}$$

em que $\overline{x_{RGF}}$ é a média da série. Aqui, a equação 3.18 será chamada de derivada numérica e a equação 3.19 de integral numérica.

Uma forma de gerar RGF com correlações de longo alcance ($0,5 < H < 1,5$) é através da técnica conhecida como filtragem de Fourier (MAKSE et al., 1996). A filtragem de Fourier é baseada na transformada de Fourier de uma série não correlacionada. A série pode ser gerada, por exemplo, através do processo de arremessar uma moeda para cima diversas vezes e anotar os resultados. Calculando o espectro através da

transformada de Fourier, o espaço temporal da série é alterado para o espaço de frequências. Para uma série não correlacionada, o espectro obtido é plano ($\beta = 0$). O resultado deve então ser multiplicado por $f^{-\beta/2}$:

$$c'_k = c_k \cdot f_k^{-\beta/2}, \tag{3.20}$$

onde f_k é a frequência associada ao coeficiente de Fourier c_k. Por último, basta realizar a transformada inversa de Fourier de c'_k e filtrar a parte real do resultado para obter uma série correlacionada em função do tempo. Para evitar contaminação do sinal por conta das transformadas de Fourier, apenas a parte central da série obtida é aproveitada; o primeiro e o último quarto da série são descartados. Para uma série com N pontos, apenas $N/2$ são aproveitados. A implementação em Matlab desse método pode ser vista no Apêndice B.4.

O *toolbox* do Matlab possui uma função, *wfbm(H, L)*, em que H é o expoente de Hurst e L é o comprimento da série desejada, que também pode ser usada para gerar MBF. O método usado no Matlab é baseado em wavelets, e foi proposto inicialmente por Abry e Sellan (1996) sendo mais tarde alterado por Bardet et al. (2003). Mais informações sobre essa função podem ser vistas na documentação do Matlab, Matlab (2015b).

Caso a opção escolhida seja a da filtragem de Fourier, a série gerada será um RGF e o expoente do DFA tem o comportamento $\alpha \approx H$. Se a opção escolhida for a outra, então a série será um MBF e $\alpha \approx H + 1$. Em ambos os casos $\beta = 2\alpha - 1$. As séries podem ser derivadas ou integradas para se transformar um RGF em um MBF e vice-versa (HENEGHAN; MCDARBY, 2000).

3.4.2 Modificações em séries monofractais

Diversas modificações podem ser feitas em séries temporais para compreender o comportamento do DFA em diferentes contextos. Alguns exemplos são a adição de tendências na série original, a criação de não estacionariedades, o uso de filtros não-lineares antes da aplicação do método, e a perda gradativa de amostras da série (HENEGHAN; MCDARBY, 2000; KANTELHARDT et al., 2001; HU et al., 2001; CHEN et al., 2002; CHEN et al., 2005; MA et al., 2010). Neste trabalho, duas situações foram escolhidas: a adição de tendências nas séries e a criação de séries com mais de um comportamento. Nesta seção, serão descritos os métodos usados para alterar as séries.

Para adicionar uma tendência polinomial a uma série temporal x, basta somar cada ponto da série a um valor polinomial correspondente, ou seja,

$$x_i = x_i + a \cdot (i/N)^m, \tag{3.21}$$

em que a é uma constante, i o índice da série, $i = 1, \ldots, N$, m o grau do polinômio e N o comprimento da série. A série modificada x' será, então, uma série (correlacionada ou não) com uma tendência artificial que depende do valor de m. É importante ressaltar que o valor de m não precisa ser necessariamente inteiro. Por último, pode-se dizer que a tendência adicionada torna a série não estacionária (ordens estatísticas variam ao longo do tempo), e que o DFA deve ser capaz de removê-la para calcular a verdadeira correlação da série. A implementação desse método pode ser vista no Apêndice B.5.1.

Para criar séries com mais de um comportamento deve-se recorrer ao método modificado da filtragem de Fourier. Da mesma maneira que no método original, a técnica consiste em transformar uma série não correlacionada para o espaço de frequência e, após selecionar uma frequência f_x, modificar o declive do espectro a partir desse ponto. Dessa forma, o espectro ficará "quebrado" de forma que as frequências $f < f_x$ serão correlacionadas ($H > 0,5$) e as frequências $f > f_x$ serão não correlacionadas ($H \approx 0,5$). Semelhante à equação 3.20,

$$c'_{k'} = c_{k'} \cdot \left(\frac{f_{k'}}{f_x} \right)^{-\beta/2}, \tag{3.22}$$

em que k' é o índice das frequências $f > f_x$ e $f_x = 1/s_x$. A última etapa é usar a transformada inversa de Fourier e selecionar a parte real do resultado para obter a série temporal. A função do filtro de Fourier modificado pode ser vista no Apêndice B.5.2.

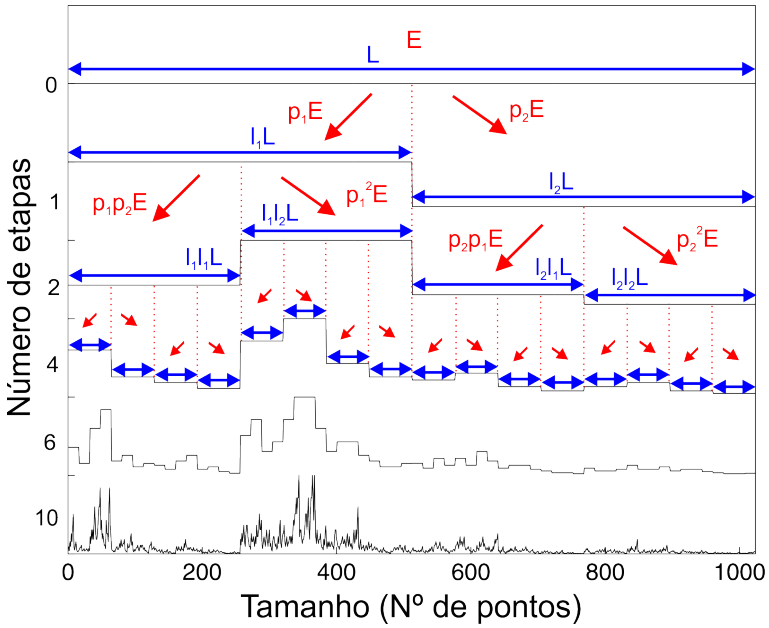
3.4.3 Modelo Multifractal

Sinais multifractais podem ser gerados por diferentes modelos (KANTELHARDT, 2012). Nesse trabalho, o modelo escolhido para geração de casos de teste foi o modelo binomial multiplicativo (o mesmo descrito na seção 2.5.1). Além de ser um modelo simples, Meneveau e Sreenivasan (1987) demonstraram que experimentos envolvendo cascatas não-homogêneas de energia em fenômenos turbulentos são

muito bem descritos por ele. Nessa seção, a explicação do algoritmo usado para gerar sinais multifractais será dada a partir do fenômeno de distribuição de energia em cascatas de turbulência.

O chamado p-model é baseado na ideia de dissipação de energia na qual um vórtex de tamanho r se divide em 2^d novos vértices de tamanho igual a $r/2$, sendo d a dimensão espacial. Para séries temporais, $d = 1$. A dissipação de energia, então, é dada de forma não homogênea, em que uma fração p_1 da energia é distribuída igualmente entre uma metade dos 2^d vórtices enquanto a fração $p_2 = 1 - p_1$ é distribuída igualmente entre a outra metade. Como p_2 é complemento de p_1, a letra p será usada para indicar distribuição de energia entre as escalas, sendo $p = p_1 = 1-p_2$.

Figura 3.1 - Estágios de construção da série temporal baseada no modelo multifractal de turbulência.



Fonte: produção do próprio autor.

O processo de construção de um sinal unidimensional para a dissipação de energia E pode ser visto na figura 3.1. Dado um intervalo de tamanho L e altura igual a dissipação média E_L, basta dividir o intervalo em dois segmentos de tamanho $l_1 = l_2 = L/2$ e atribuir as alturas $2p_1E_L$ e $2p_2E_L$ aos novos segmentos, sendo $p_1 = 1-p_2$. Essa etapa é repetida várias vezes para cada segmento gerado, e diferentes estágios da construção do sinal vão sendo obtidos. Para gerar sinais aleatórios, é necessário alternar a posição p_1 aleatoriamente entre direita e esquerda.

Em 2008 foi proposta uma generalização para o p-model, em que a distribuição da energia se dá não só de forma não-homogênea, mas de forma assimétrica (SZCZEPANIAK; MACEK, 2008). Dessa forma, a cascata de dissipação de energia não se repartiria em dois segmentos de tamanhos iguais, como mostra a figura 3.1, mas em segmentos de tamanhos arbitrários l_1 e l_2. Trivialmente, se $l_1 = l_2 = 1/2$, o p-model volta a ser igual ao p-model original. O código desse algoritmo pode ser encontrado no Apêndice B.6.

Baseando-se no conjunto de Cantor pode-se chegar a uma expressão analítica para a curva $f(\alpha)$ (MENEVEAU; SREENIVASAN, 1987)

$$f(\alpha) = \frac{(n/m-1)ln(n/m-1) - (n/m)ln(n/m)}{ln(l_1) + (n/m-1)ln(l_2)}, \tag{3.23}$$

e

$$\alpha = \frac{ln(p_1) + (n/m-1)ln(p_2)}{ln(l_1) + (n/m-1)ln(l_2)}, \tag{3.24}$$

em que n/m representa a fração de 0's do processo binomial multiplicativo e $n = 1, 2, \ldots, m$. Além disso, a relação direta entre as dimensões generalizadas D_q e q é dada pela equação transcendental (SZCZEPANIAK; MACEK, 2008)

$$p^q l_1^{(1-q)D_q} + (1-p)^q l_2^{(1-q)D_q} = 1. \tag{3.25}$$

Se $l_1 = l_2 = 1/2$, então a equação 3.25 pode ser reescrita na forma

$$(1-q)D_q = \frac{ln(p^q + (1-p)^q)}{ln2}, \tag{3.26}$$

em que $(1-q)D_q = \tau(q)$ (FEDER, 1988). Assim, através da equação 3.23, é possível obter o espectro de singularidades $f(\alpha)$ analiticamente. O código implementando a resolução analítica do p-model pode ser visto no Apêndice B.6.1. A implementação do processo binomial multiplicativo, em que $l_1 = l_2 = 1/2$, pode ser vista no Apêndice B.6.2.

3.5 Análise da Complexidade Computacional

A complexidade computacional pode ser analisada sob dois aspectos principais: a complexidade de tempo e complexidade de espaço. O primeiro caso está relacionado à análise em termos do tempo total de processamento gasto, e o segundo caso na análise do uso de memória durante a execução do algoritmo. Neste trabalho, será abordada a complexidade temporal dos métodos do espectro de potência, DFA e MF-DFA. Para denotar o tempo de execução dos algoritmos, será usada a notação de limite assintótico superior, definida em Cormem et al. (2002):

$$O(g(N)) = \{f(N) : \textit{existem constantes positivas } c \textit{ e } N_0 \textit{ tais que } 0 \leq f(N) \leq cg(N) \textit{ para todo } N \geq N_0\}. \tag{3.27}$$

Na prática, o custo computacional da função $f(N)$ possui um limite superior definido pela função $g(N)$ para uma entrada arbitrária de N elementos. A depender do hardware utilizado, a quantidade de operações processadas por unidade de tempo pode variar. Por isso é importante classificar a complexidade do algoritmo usando uma notação assintótica; assim, os custos dos algoritmos podem ser comparados entre si, sem que a variação do hardware usado influencie no tempo de execução.

O primeiro caso de estudo é o espectro de potência. Como definido na seção 3.1, o espectro de potência consiste em, basicamente, calcular os coeficientes da série de Fourier. Se a transformada de Fourier discreta fosse usada, a complexidade computacional seria da ordem de $O(N^2)$. Porém, o algoritmo usado foi o FFT. Para uma entrada unidimensional, múltipla de 2, de tamanho N, menos de $3Nlog_2(N)$ operações são necessárias, o que significa que a complexidade computacional do método é $O(NlogN)$ (MATLAB, 2015a).

A análise do DFA é um pouco mais complexa se comparada à análise de Fourier. O algoritmo do DFA, como descrito na seção 3.2, é baseado no destendenciamento por meio de ajustes de polinômios. O ajuste é feito por mínimos quadrados, o que implica a construção de um sistema linear de $(b^2 + b)$ elementos, sendo b o número de coeficientes do polinômio, ou a ordem do polinômio mais um. Para cada elemento do sistema, é necessário calcular o somatório dos termos. Então, o ajuste de mínimos quadrados tem um custo de $O(Nb^2)$, para $N >> b$ e N elementos.

Como o DFA é calculado a partir de um vetor de escalas, s_i, é necessário analisar as possíveis variações no parâmetro s para se obter o grau de complexidade do

método. Analisando um caso extremo, em que $i = 1$, $s_1 = N$, tem-se que a série com N elementos é repartida em um único segmento de tamanho N. Trivialmente, o custo do DFA seria o equivalente a calcular o polinômio por mínimos quadrados da série inteira. Se $i = 1$, mas $s_1 = N/4$, então quatro segmentos de tamanho $N/4$ seriam calculados. O custo para um único segmento seria $O(Nb^2/4)$; como são quatro segmentos, o custo fica $O(Nb^2/4+Nb^2/4+Nb^2/4+Nb^2/4) = O(Nb^2)$. Logo, pode-se perceber que a medida que o número de segmentos aumenta, os tamanhos dos mesmos diminui, e o custo computacional permanece o mesmo.

Assim, o que influencia o tempo de processamento do algoritmo é a quantidade de escalas usadas i. Para s_i linear, $s = 1, 2, 3, \ldots, N$, tem-se $i = N$, e seria necessário calcular N vezes o ajuste por mínimos quadrados. Isso revela um custo computacional quadrático, com $O(N^2b^2)$. Mesmo escolhendo $s = 1, 2, 3, \ldots, N/4$ e removendo os valores de s inferiores a $b + 1$, o custo computacional continua quadrático, com $O(N^2b^2/4 - Np^3)$. Uma maneira de diminuir o custo computacional é diminuir a quantidade de escalas usadas. Escolhendo $s = 1, 2, 4, 8, \ldots, N$, tem-se $i = log_2(N)$. Efetuando os mesmos passos anteriores, tem-se que a complexidade do algoritmo diminui para a ordem linear-logarítmica $O(Nlog(N)b^2)$.

O MF-DFA, generalização do DFA, deve possuir complexidade computacional no mínimo igual a do DFA. Se todos os segmentos fossem calculados para cada parâmetro q, então a complexidade do método seria da ordem de $O(qN^2b^2)$, caso s fosse linear. Porém, basta calcular os valores dos segmentos e armazená-los para, no final do algoritmo, calcular os novos valores associados a q. Desse modo, a complexidade temporal do método é $O(N^2b^2 + q(N/4 - b - 1)) = O(N^2b^2)$, para s linear, e $O(Nlog(N)b^2 + q(log(N/4 - b - 1))) = O(Nlog(N)b^2)$, caso s tenha comportamento exponencial.

4 ANÁLISE DAS METODOLOGIAS

Neste capítulo serão feitas análises das metodologias apresentadas no capítulo anterior. Na primeira seção, os parâmetros de entrada dos métodos serão explorados. Na seção 4.2, diferentes séries temporais serão usadas para verificar a confiabilidade dos resultados em função da resolução dos sinais de entrada. Na última seção, o tempo de processamento será discutido baseado em análises empíricas. Os códigos utilizados para gerar os resultados apresentados na subseção 4.2.1 podem ser encontrados no Apêndice C.

4.1 Configurando os Algoritmos

As variáveis de entrada são responsáveis pela configuração dos algoritmos e imprescindíveis para seu uso correto. Cada algoritmo descrito no capítulo 3 possui seu próprio conjunto de variáveis de entrada, que podem ser vistas na Tabela 4.1. Aqui, essas variáveis serão analisadas. É importante ressaltar que, embora a série temporal seja uma variável de entrada, ela não é um parâmetro de configuração do método e, portanto, será tratada na próxima seção.

Tabela 4.1 - Variáveis de entrada dos algoritmos.

Método	Variável 1	Variável 2	Variável 3
Espectro de Potência	Tipo de janela	-	-
DFA	Escalas	Grau do polinômio	-
MF-DFA	Escalas	Grau do polinômio	Fator de ponderação

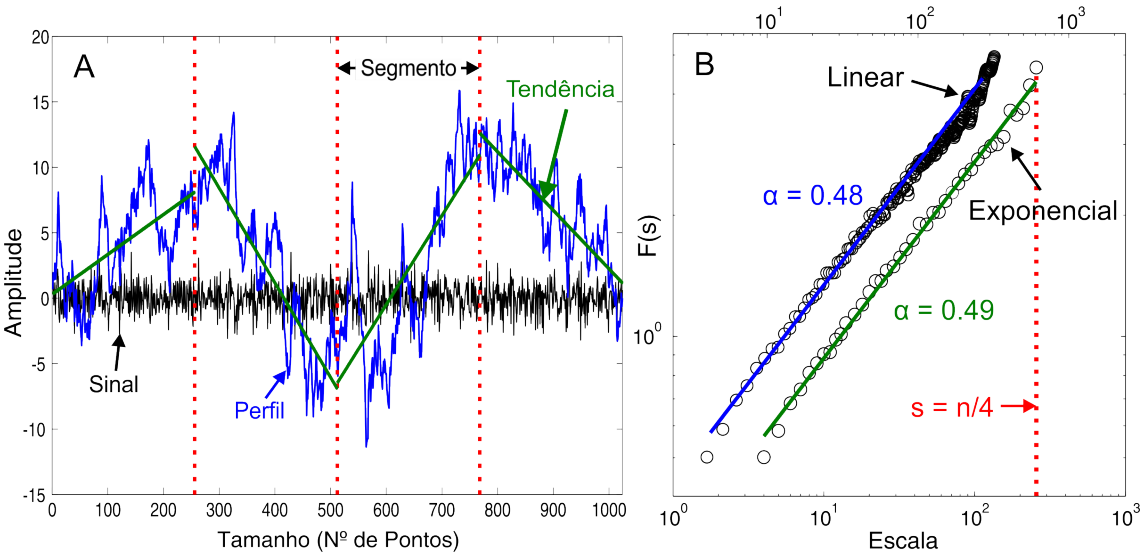
O espectro de potência possui três argumentos de entrada obrigatórios. A primeira é a série temporal e a segunda está ligada à primeira, sendo o tempo associado a cada ponto da série. É a partir dele que a frequência do espectro é calculada. A terceira variável é responsável pelo janelamento da série. O janelamento de espectros de potência é um assunto bem discutido em Heinzel et al. (2002). Nesse trabalho, os espectros serão calculados usando a janela de Hanning, pois é amplamente usada na área de estudo das irregularidades ionosféricas, e.g., Jahn e LaBelle (1998), Rodrigues et al. (2009), Spicher et al. (2014).

O DFA tem três variáveis de entrada, incluindo a série temporal. As duas restantes são de extrema importância para utilizar corretamente o método. Uma delas é o grau do polinômio usado no destendenciamento das séries, que será melhor discutido na

subseção 4.2.2. Porém, vale adiantar que, como geralmente não se conhece a priori as tendências que as séries possuem, o uso de diferentes graus de polinômios elimina esse problema. A outra variável diz respeito às escalas, responsáveis por definir o tamanho dos subconjuntos da série. É desejável que se tenha a maior abrangência possível de escalas, variando do limite inferior até o superior. O limite inferior depende do grau do polinômio usado. O limite superior não é bem definido, mas aconselha-se que não ultrapasse 25% do tamanho da série (KANTELHARDT et al., 2002). Os valores intermediários podem ser de duas maneiras: lineares, em que todos os valores são usados; e exponenciais, em que os valores aumentam exponencialmente.

A Figura 4.1(A) ilustra a etapa do DFA para o valor de escala $N/4$, que é representado pelo último ponto no gráfico em escala logarítmica, conforme mostrado na Figura 4.1(B). Repetindo o processo para todas as escalas, obtém-se o gráfico de flutuações. É importante notar que há dois gráficos, o gráfico em azul, correspondente à análise com escalas lineares, e o verde, correspondente às escalas exponenciais.

Figura 4.1 - Exemplo do passo a passo do DFA usando dois tipos de escalas.



(A) Ilustração das etapas do DFA para o caso em que $s = N/4$. (B) Resultado do DFA para escalas espaçadas linearmente e exponencialmente. As escalas lineares foram deslocadas para a esquerda para permitir sua visualização.

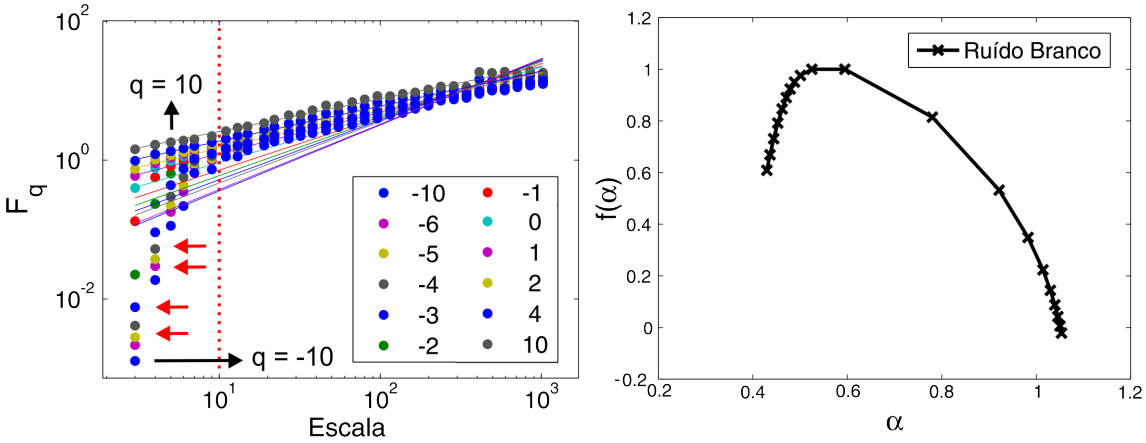
Fonte: produção do próprio autor.

Como a quantidade de escalas é maior para o caso linear, a quantidade de cálculos realizados é maior, e, consequentemente, o processamento é mais lento. Além disso,

não há ganho na confiabilidade dos resultados. Inclusive, nesse exemplo houve piora, já que o ruído branco não apresenta correlação e, por isso, deveria ter $\alpha \approx 0,5$. As escalas usadas neste trabalho foram definidas para abrangerem a maior quantidade de valores possível mantendo a condição de exponencialmente espaçadas. A função para gerar escalas com essas características pode ser vista no Apêndice B.2.1.

O MF-DFA, com 4 variáveis de entrada, tem as três primeiras iguais às do DFA. Embora elas já tenham sido discutidas, deve haver cuidado na escolha das escalas. O limite inferior não pode depender do grau do polinômio, mas deve ser superior a 10 (KANTELHARDT et al., 2002). A Figura 4.2 mostra o que acontece se os valores das escalas violarem essa condição.

Figura 4.2 - Cálculo de $h(q)$ para um ruído branco em que as escalas foram mal escolhidas.



As setas em vermelho indicam as flutuações ponderadas por pesos negativos ($q < 0$) em que as escalas são menores que 10. É importante notar que o sinal usado possui 4096 pontos. Se a resolução fosse menor, as consequências seriam ainda piores.

Fonte: produção do próprio autor.

Como as flutuações são ponderadas, as escalas que apresentam valores de flutuação muito baixos (setas em vermelho na Figura 4.2) levam ao cálculo errado do expoente $h(q)$ para valores de $q < 0$. Consequentemente, o espectro de singularidades revela comportamentos inesperados, como no exemplo da Figura 4.2, em que um ruído branco apresentou características multifractais. Mesmo usando os valores propostos na literatura, é sempre importante estar atento a esses fatos, analisando outras formas de gráficos e não apenas o espectro de singularidades.

O último parâmero, fator de ponderação, q, é o que diferencia o DFA do MF-DFA.

Como pode ser visto na Figura 4.2, as flutuações calculadas para um conjunto de escalas são ponderadas usando diferentes valores de q, gerando um leque de expoentes chamados coeficientes de Hurst generalizados, $h(q)$. Então, a variável q deve abranger uma extensão de valores reais negativos e positivos. Na literatura, os valores de q variam de -20 a 20 (MUZY et al., 1994; KANTELHARDT et al., 2002), sendo que os valores intermediários escolhidos nem sempre são lineares.

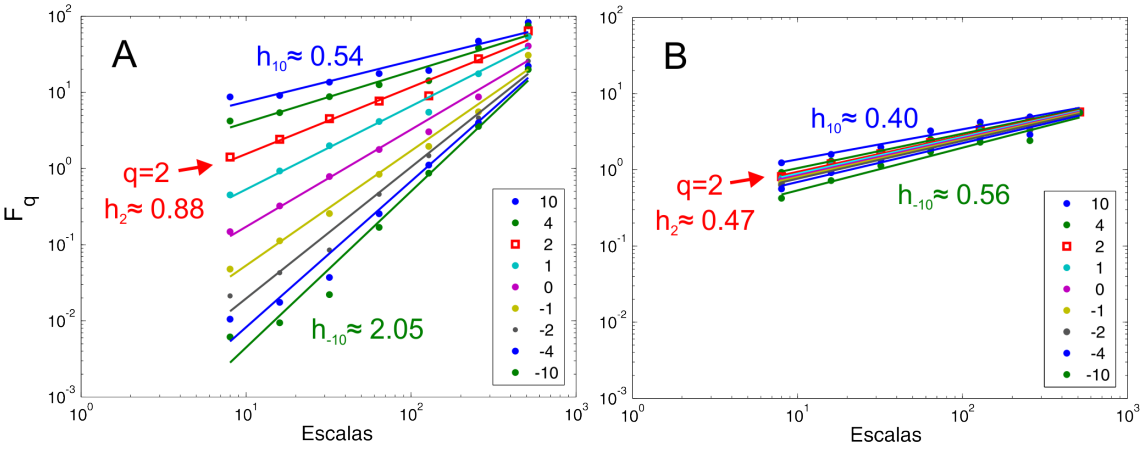
O que torna o MF-DFA uma generalização do DFA são as potências q. No DFA as flutuações dos segmentos são elevadas ao quadrado, ou seja, $q = 2$; posteriormente, a média do quadrado desses segmentos é calculada. No MF-DFA essa é apenas mais uma etapa. Ao invés de usar uma única potência, uma série de potências, q, é usada. A Figura 4.3 ilustra esse processo para dois sinais típicos.

Como a Figura 4.3 mostra, uma característica multifractal é detectada apenas se as pequenas e grandes flutuações possuírem comportamentos de escala diferentes. Para valores de q negativos, as pequenas flutuações irão dominar o cálculo da média, e, consequentemente, irão predominar na descrição do comportamento das escalas. O contrário ocorre para valores positivos de q, ou seja, as grandes flutuações irão dominar o cálculo da média. Além disso, as grandes flutuações geralmente são caracterizadas por um expoente de escala menor do que as pequenas flutuações. Isso ocorre porque o valor de $F_q(s)$ para $s = N$ é independente de q, no sentido de que há apenas um segmento a ser ponderado. Para $s << N$, as flutuações estão diretamente relacionadas ao valor de q. E, para $q < 0$, o valor de $F_q(q)$ é menor do que $F_q(s)$ quando $q > 0$. Para $s = N$ ambos são iguais, já que $F_q(s)$ é independente de q. Isso explica o fato de os expoentes de escala serem menores para grande flutuações e maiores para pequenas flutuações. Vale ressaltar que essas análises são baseadas em um sinal tipicamente multifractal. Em um sinal fractal, é esperado que os expoentes tanto das pequenas como das grandes flutuações sejam iguais ou muito próximos, com uma pequena convergência a medida que s aumenta.

Para os mesmos sinais que geraram a Figura 4.3, foram calculados os espectros de singularidade, que podem ser vistos na Figura 4.4. A única diferença está na taxa de variação, Δq. Na Figura 4.3, apenas alguns valores de q foram usados, mas os limites, -10 e 10, são os mesmos. No caso do sinal fractal, $\Delta q = 1$, e para o sinal multifractal, $\Delta q = 0,2$.

É importante notar que o valor de $h(q)$ permanece o mesmo para diferentes valores de Δq. Porém, os valores de $f(\alpha)$ e α variam, pois são dependentes dos valores de q, como mostram as equações 3.16 e 3.17. Além disso, para $q > 10$ ou $q < -10$ os

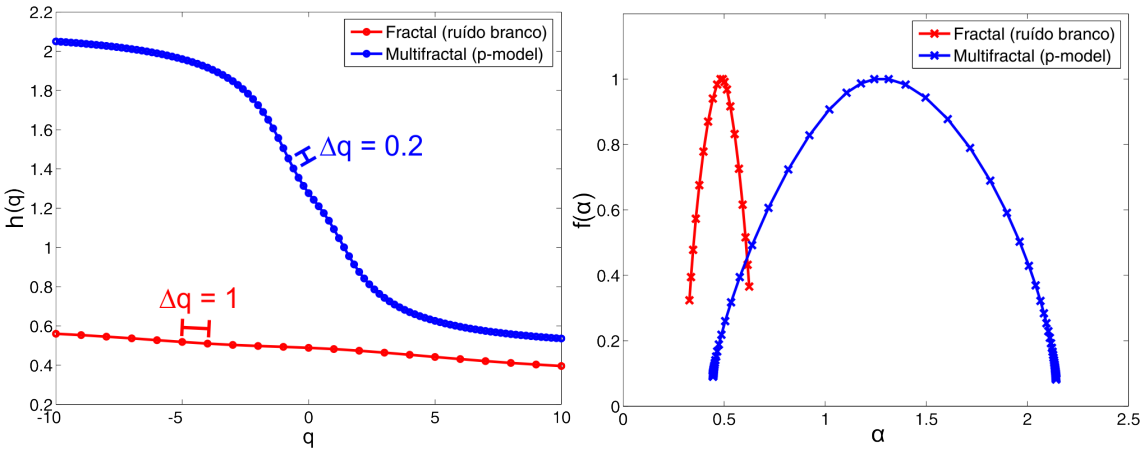
Figura 4.3 - Cálculo de $h(q)$ de um sinal fractal e um sinal multifractal.



(A) Sinal Multifractal gerado através do p-model. (B) Sinal fractal gerado através do filtro de Fourier. Os expoentes de Hurst generalizados, $h(q)$, têm maior amplitude no caso multifractal, conforme esperado.

Fonte: produção do próprio autor.

Figura 4.4 - Espectro de singularidades $f(\alpha)$ para um sinal fractal e um sinal multifractal.



O espaçamento dos valores de q são responsáveis pela suavização do espectro de singularidades e pela geração aglomerados nas extremidades ($q \approx 10$ e $q \approx -10$).

Fonte: produção do próprio autor.

resultados de $h(q)$ são pouco alterados gerando apenas um aumento na quantidade de pontos nas extremidades da parábola, criando aglomerados. Por esse motivo, não há necessidade realizar análises com grande amplitude nos valores de q. Por último, é necessário lembrar que a quantidade de cálculos aumenta a medida que o tamanho

de q aumenta, o que torna o processamento mais lento.

4.2 Influência da Resolução das Séries

Por serem métodos estatísticos, a resolução da série influencia diretamente no valor dos resultados. Por isso, este capítulo fará uma abordagem empírica da confiabilidade dos métodos em função do tamanho das séries. Embora vários trabalhos discutam o comportamento dos métodos em diferentes contextos (HENEGHAN; MCDARBY, 2000; KANTELHARDT et al., 2001; HU et al., 2001; CHEN et al., 2002; CHEN et al., 2005; MA et al., 2010), nenhum deles analisa minuciosamente esse aspecto.

Foram selecionados dois modelos diferentes para gerar séries temporais: o filtro de Fourier e o p-model. O primeiro gera séries fractais com diferentes valores de Hurst (H). O segundo séries multifractais, com diferentes graus de não-homogeneidade (p). A partir desses modelos, séries com resolução inicial de 65536 pontos foram geradas; a resolução N foi sendo diminuída pela metade, gerando séries de 32768, 16384, e assim por diante até atingir o mínimo de 1024 pontos. Para as diferentes séries temporais geradas das subseções que seguem os argumentos usados são todos iguais e podem ser vistos na Tabela 7.2.

Tabela 4.2 - Argumentos de entrada dos algoritmos.

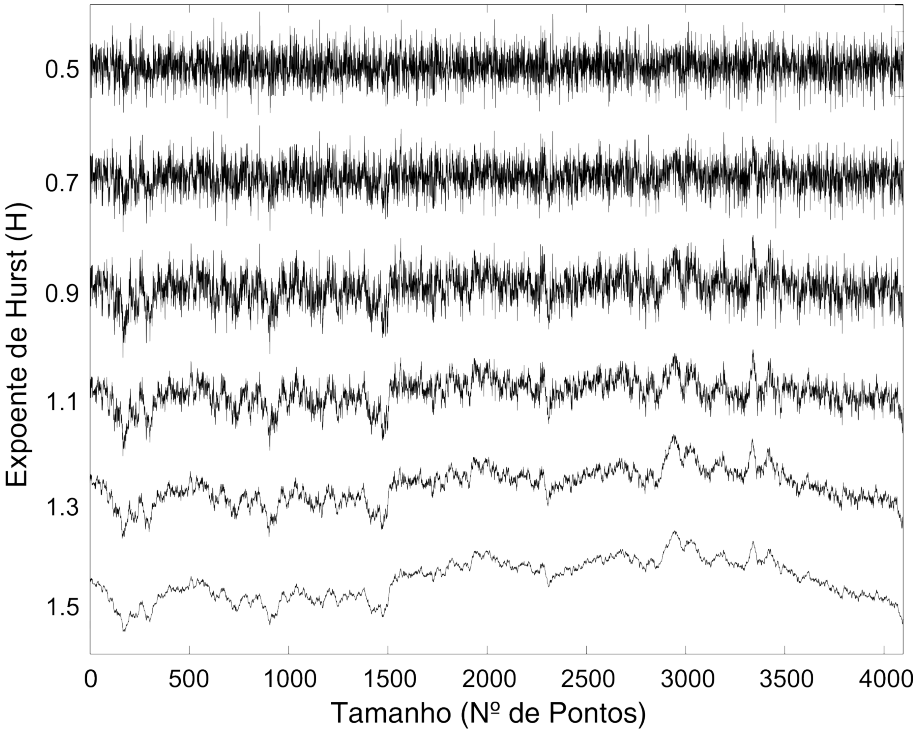
Variável de Entrada	Método	Valor
Tipo de Janela	Espectro de Potência	Hanning
Grau do Polinômio (m)	DFA	1, 2 e 3
Grau do Polinômio (m)	MF-DFA	1, 2 e 3
Escalas	DFA	$m+2$ até $N/4$ (exponencial)
Escalas	MF-DFA	10 até $N/4$ (exponencial)
Fator de Ponderação (q)	MF-DFA	$-10; -9; -8; \ldots; 8; 9; 10$

Por último, os resultados serão expressos em função de variáveis de saída. No caso do espectro de potência, o β será usado; para o DFA, o expoente α será usado. Ambos são obtidos a partir do ajuste por mínimos quadrados em gráfico de escala logarítmica das flutuações. No caso do MF-DFA será usado o ω, que é obtido a partir da diferença entre o maior e menor valor do expoente de Lipschitz-Hölder, o α do espectro de singularidades.

4.2.1 Ruído Gaussiano Fracionário e Movimento Browniano Fracionário

A primeira análise é feita utilizando RGFs. No primeiro caso, três diferentes coeficientes de Hurst foram escolhidos para gerar séries estacionárias: $0,5$; $0,7$ e $0,9$. No segundo caso ($H = 1,5$) a série é não estacionária e pode ser gerada através da integração do ruído branco, i.e., RGF cujo $H = 0,5$. A Figura 4.5 mostra o comportamento das séries temporais a medida que o expoente de Hurst aumenta.

Figura 4.5 - Exemplo de RGFs.



O primeiro exemplo, $H = 0,5$, é conhecido como ruído branco e a série é não correlacionada. A medida que H aumenta, a série passa a ter maior grau de correlação. Para $H > 1$, as séries não são mais estacionárias e passam a ser MBFs com $H_{MBF} = H_{RGF} - 1$.

Fonte: produção do próprio autor.

Um conjunto de 50 séries temporais foi gerado para cada expoente de Hurst e cada resolução. Os métodos usados foram o filtro de Fourier, para gerar séries com $H = 0,5$ e $H = 1,5$, e a função baseada em wavelets da biblioteca padrão do Matlab, $wfbm$, para $H = 0,7$ e $H = 0,9$. Como a função do Matlab gera MBFs, para transformá-los em RGFs foi necessário derivá-lo numericamente. Essa mudança foi feita porque os resultados do espectro de potência apresentaram valores abaixo do esperado usando o filtro de Fourier e, alterando o método, os resultados voltaram

ao normal. No caso do DFA, os valores não sofreram alterações significativas.

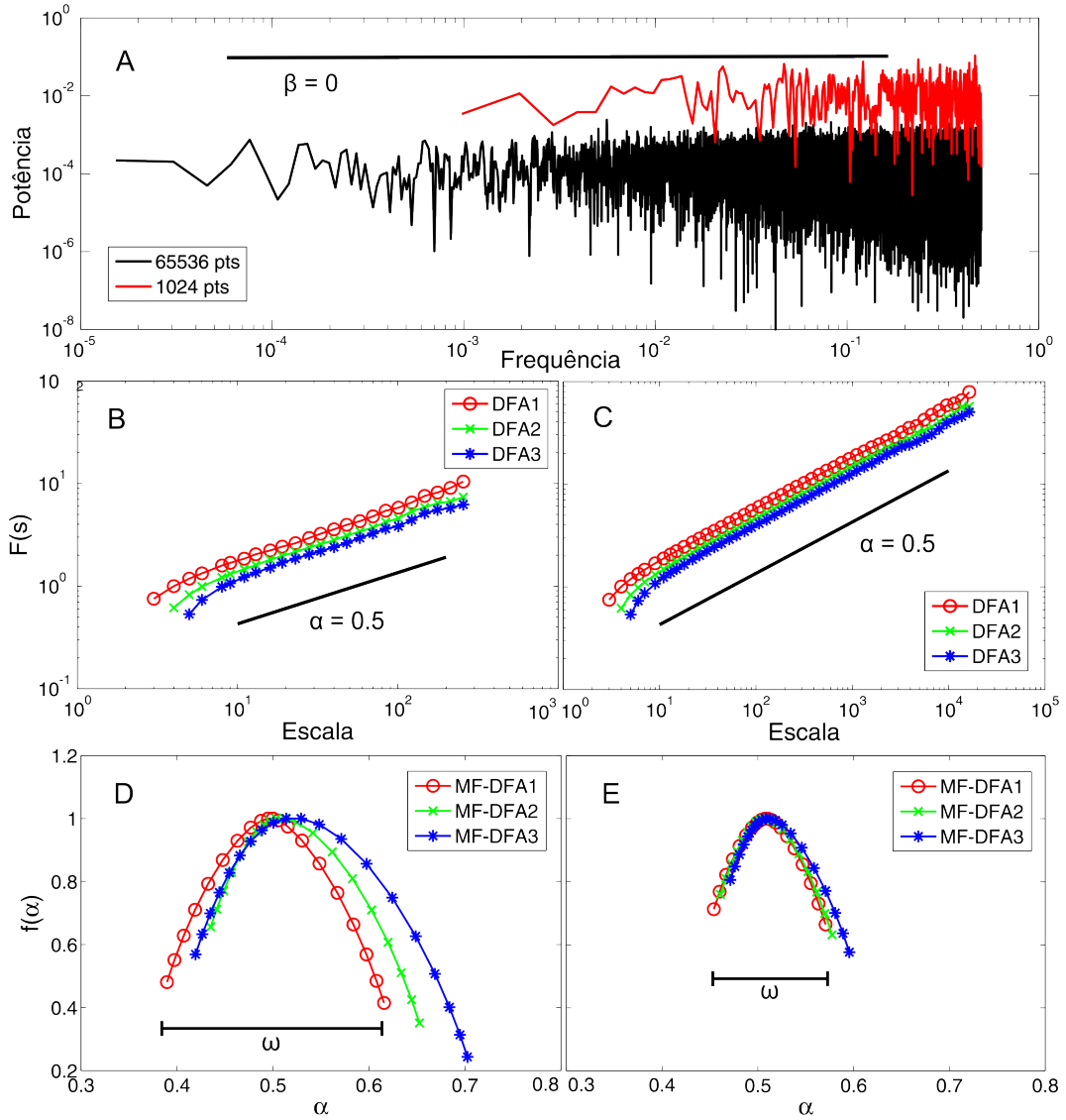
Os casos em que a resolução é extrema (1024 e 65536 pontos) podem ser vistos na Figura 4.6. Os comportamentos exibidos nos painéis B, C, D e E foram calculados estimando a média entre os resultados das análises das 50 séries temporais. Já no painel A foi selecionada uma entre as 50 análises, pois a média corromperia o resultado.

Como a Figura 4.6 ilustra o caso médio dos resultados, nem todas as flutuações possuem esse formato e, consequentemente, a tendência da inclinação apresenta variações. A Figura 4.7 mostra o comportamento dos métodos à medida que a quantidade de pontos da série aumenta e, através das barras de erro, representa a amplitude de variação dos resultados.

Conforme esperado, a amplitude dos resultados diminui a medida que a resolução das séries aumenta, mas a média continua próxima dos valores teóricos. Comparando o DFA com o espectro de potência, pode-se notar que o DFA apresenta barras de erro um pouco menores para as séries curtas, e, assim, maior confiabilidade nesses casos. Por outro lado, a relação $\beta = 2\alpha - 1$ mostra que o índice β tem o dobro de variação, o que facilita a discriminação de séries temporais com diferentes índices espectrais. Os valores do DFA são um pouco mais altos do que realmente deveriam. A explicação para isso pode ser vista na Figura 4.7, que mostra que as escalas iniciais têm uma depreciação, formando uma espécie de borda. Essa característica é intrínseca do método. É aconselhável não usar essas escalas no cálculo do índice espectral (HU et al., 2001) ou usar um mecanismo que elimine esse problema (KANTELHARDT et al., 2001).

Como as séries são estacionárias, o polinômio aplicado nos métodos DFA e MF-DFA tem grau 1. Os resultados para outros graus do polinômio apresentam valores muito próximos e, por isso, não são apresentados. A única exceção é o MF-DFA e para séries com $H = 1,5$. Como mostra a Figura 4.8, os resultados usando polinômios de graus 2 e 3 são melhores. Além disso, as barras de erro são consideravelmente menores. Por último, vale ressaltar que o uso de diferentes polinômios são imprescindíveis para a correta classificação dos sinais. Além disso, a repetição é uma boa alternativa para séries curtas, já que o tamanho das séries não garante um resultado muito confiável.

Figura 4.6 - Análise do Espectro de Potência, DFA e MF-DFA de ruídos brancos ($H = 0,5$) com diferentes resoluções.



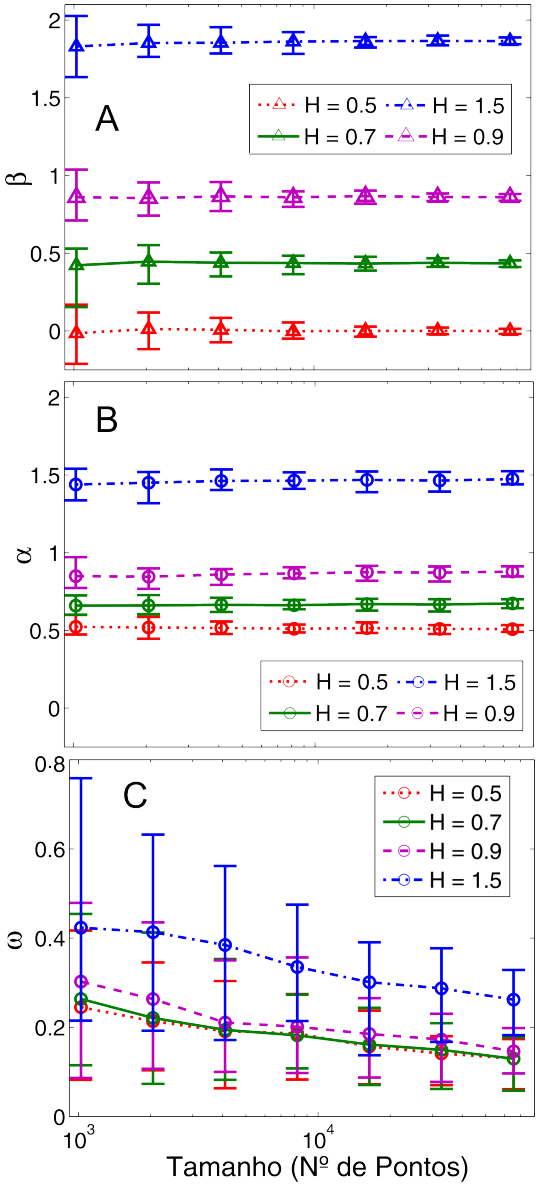
(A) Espectro de potência. (B) Flutuações médias de séries com 1024 pontos. (C) Flutuações médias de séries com 65536 pontos. (D) Espectro de singularidades médio de séries com 1024 pontos. (E) Espectro de singularidades médio de séries com 65536 pontos. A diferença no aumento da resolução do sinal não aponta nenhuma melhora no Espectro de Potência e no DFA, mas revela uma melhoria na amplitude do espectro de singularidades, ω, do MF-DFA.

Fonte: produção do próprio autor.

4.2.2 Séries com Tendências

A fim de analisar a influência de tendências externas em séries temporais foram gerados, através do método do filtro de Fourier, ruídos brancos ($H = 0,5$) e adicionadas

Figura 4.7 - Comportamento do Espectro de Potência, DFA e MF-DFA de RGFs com diferentes resoluções.



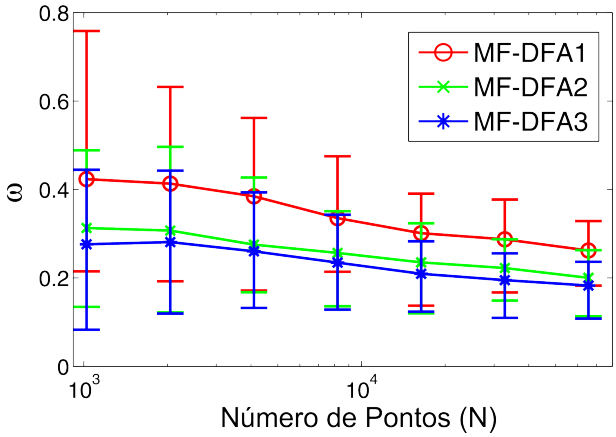
(A) Espectro de potência. (B) DFA1. (C) MF-DFA1. O eixo x está em escala logarítmica para facilitar a visualização. As barras de erro representam o maior e menor valores obtidos nas análises.

Fonte: produção do próprio autor.

tendências a eles. Para cada tamanho de N, foram gerados conjuntos de 50 séries temporais com tendências lineares e quadráticas, $m = 1$ e $m = 2$, respectivamente. A constante de multiplicação escolhida foi $a = 10^3$.

Exemplos contendo séries de ruído branco com tendências polinomiais podem ser

Figura 4.8 - Comportamento do MF-DFA2 e MF-DFA3 do movimento browniano ($H = 1,5$) com diferentes resoluções.



O uso de polinômios de graus 2 e 3 mostram resultados mais próximos do esperado com barras de erro menores. As barras de erro representam o maior e menor valores obtidos nas análises.

Fonte: produção do próprio autor.

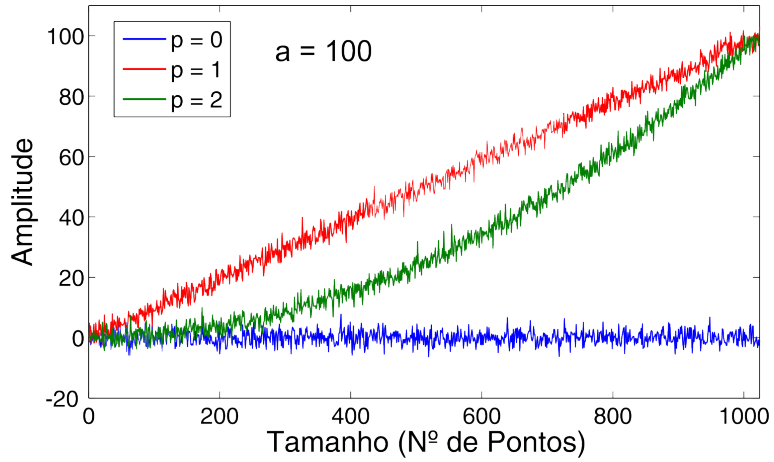
vistas na Figura 4.9. É fácil perceber que as séries têm uma tendência linear para $m = 1$ e quadrática, quando $m = 2$, o que as torna não estacionárias. A tendência dessas séries não é gerada pelas suas próprias flutuações, mas por conta de algum fenômeno externo (nesse exemplo, pela manipulação proposital da série). Quando isso acontece, alguns métodos não são capazes de "filtrar" o comportamento das flutuações da tendência espúria, como será mostrado aqui.

A Figura 4.10 mostra os resultados do espectro de potência da série com tendência linear. Embora o β tenha sido calculado, é visível que o resultado não corresponde às flutuações do sinal. Nesse caso, $\beta \approx 1,8$, enquanto que o correto seria $\beta = 0$. Uma vez que o espectro de potência não pode ser usado em séries não estacionarias, uma opção é usar wavelets para calcular o espectro.

O DFA é capaz de remover tendências espúrias de séries temporais, mas, para isso, é necessário escolher corretamente o grau do polinômio usado no processo. Para uma tendência polinomial de grau 1, é necessário usar um polinômio de grau no mínimo 2. Para uma tendência de grau 2, um polinômio de grau 3, e assim por diante. A Figura 4.11 mostra a média dos resultados das flutuações.

É interessante notar que a resolução das séries não influencia o formato das curvas, mas define o ponto de quebra delas. Além disso, quando a tendência é quadrática

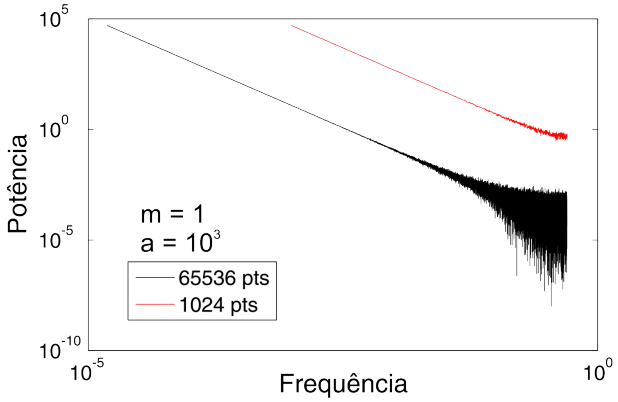
Figura 4.9 - Exemplo de ruídos brancos com tendências polinomiais.



Nesse exemplo, a constante usada foi $a = 10^2$.

Fonte: produção do próprio autor.

Figura 4.10 - Espectro de potência de séries não estacionárias com diferentes resoluções.

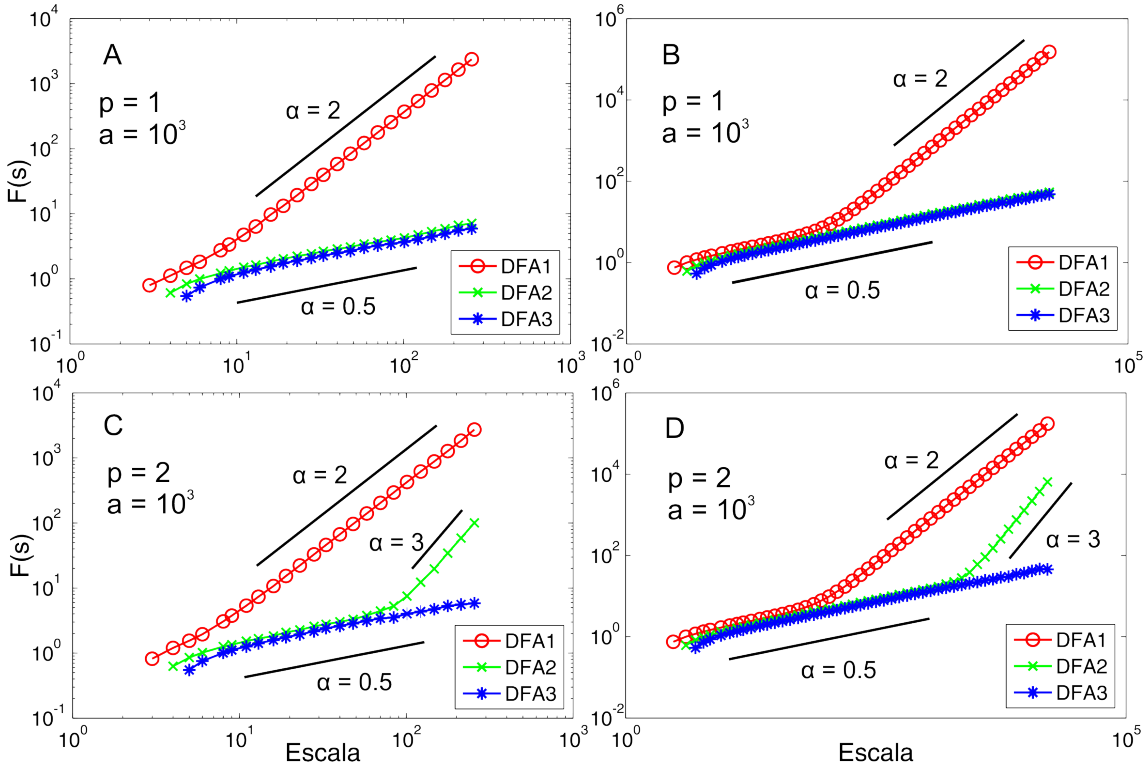


O declive do espectro, β, é influenciado pela tendência polinomial inserida na série e compromete o resultado.

Fonte: produção do próprio autor.

(letras C e D), o único polinômio usado capaz de remover totalmente a tendência da série é o polinômio de grau 3. Ambos outros apresentam ponto de quebra. Além disso, essa é uma forma de compreender o significado do ponto de quebra. O ponto de quebra registra o ponto em que o sinal muda de comportamento. Se a é muito pequeno, a tendência causa pouquíssima influência no sinal e s precisa ser muito grande para que essa tendência influencie seu cálculo. Se a é grande, apenas escalas pequenas registrarão as flutuações do ruído branco, e, à medida que s aumenta, a

Figura 4.11 - Flutuações de séries não estacionárias com diferentes tamanhos.



(A) Sinal com 1024 pontos com tendência linear ($m = 1$). (B) Sinal com 65536 pontos com tendência linear ($m = 1$). (C) Sinal com 1024 pontos com tendência quadrática ($m = 2$). (D) Sinal com 65536 pontos com tendência quadrática ($m = 2$).

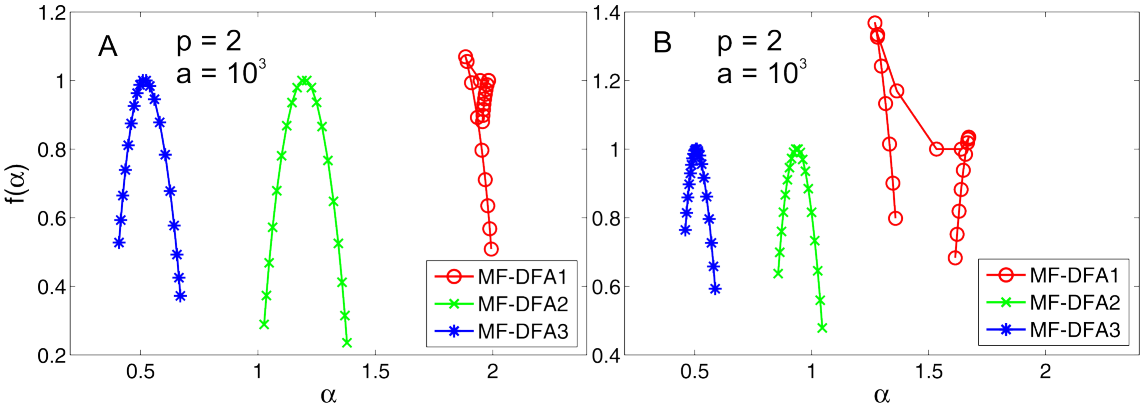
Fonte: produção do próprio autor.

tendência passará a ser parte do cálculo das flutuações. É por isso que a constante a define o ponto de quebra.

Como pode ser visto na Figura 4.12, o espectro de singularidades pode apresentar um formato estranho no seu comportamento, caso o polinômio usado não seja conveniente. Isso ocorre devido ao fato de que o leque de flutuações (ver Figura 4.3 A) abre, ao invés de fechar. Quando o tamanho da série aumenta, o leque aumenta ainda mais, o que gera um ω ainda maior.

O fato de não haver um espectro com a concavidade para baixo, como é comum, não anula o resultado. As vezes, sinais fractais apresentam as flutuações ponderadas quase paralelas, mas que divergem um pouco, o que gera o mesmo problema. Uma vez mais, vale ressaltar a importância do uso de diferentes graus de polinômios no método.

Figura 4.12 - Espectro de singularidades estimado pelo MF-DFA de séries não estacionárias com diferentes tamanhos.



(A) Sinal com 1024 pontos. (B) Sinal com 65536 pontos. O aumento no número de pontos da série melhorou os resultados do MF-DFA2 e MF-DFA3, mas piorou o resultado do MF-DFA1.

Fonte: produção do próprio autor.

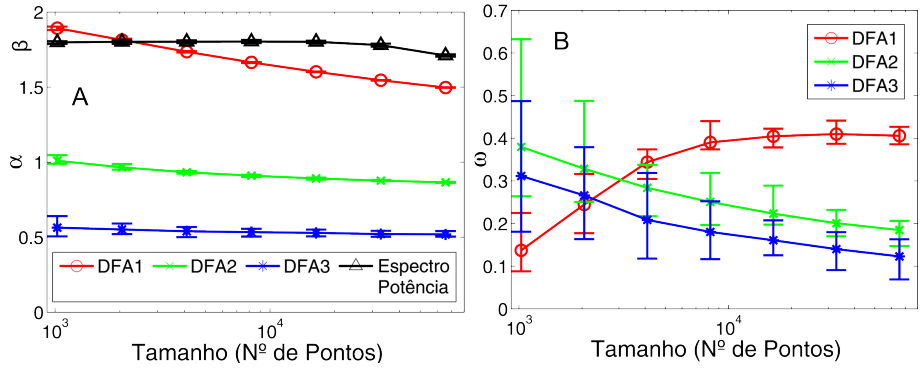
Por último, o comportamento de todos os métodos em função da resolução dos dados pode ser visto na Figura 4.13. O espectro de potência está alocado no mesmo gráfico que o DFA, mas seu valor no eixo y equivale ao valor do expoente β, ao invés de α. O DFA1 pode ser comparado ao espectro de potência, porém o segundo não apresenta ponto de quebra no espectro de forma tão visível como no primeiro. O cálculo da inclinação foi feito usando todas as escalas e, consequentemente, ignorando o ponto de quebra. O comportamento do MF-DFA1 de aumentar o valor de ω à medida que a resolução da série aumenta é decorrente do fenômeno explicado na Figura 4.12.

4.2.3 Séries com duas Inclinações

Na subseção anterior vimos que pontos de quebra, ou pontos de transição, podem ser gerados de forma espúria. No entanto, isso nem sempre acontece. Muitas vezes, sinais apresentam diferentes inclinações ao longo das escalas que são consequências de diferentes processos. A detecção correta desses pontos é muito importante e, geralmente, feita manualmente, embora exista tentativa de automatizar o processo (GE; LEUNG, 2012).

Nesta subseção, os pontos de quebra não serão calculados, mas serão usados para analisar o comportamento das metodologias. Um conjunto de 50 séries temporais foi gerado através do filtro de Fourier modificado com duas inclinações: $0,5$ e $1,5$. O ponto de quebra escolhido foi $s_x = 25 \rightarrow f_x = 0,04$. A Figura 4.14 mostra um

Figura 4.13 - Comportamento do Espectro de Potência, DFA e MF-DFA de séries não estacionárias com diferentes resoluções.

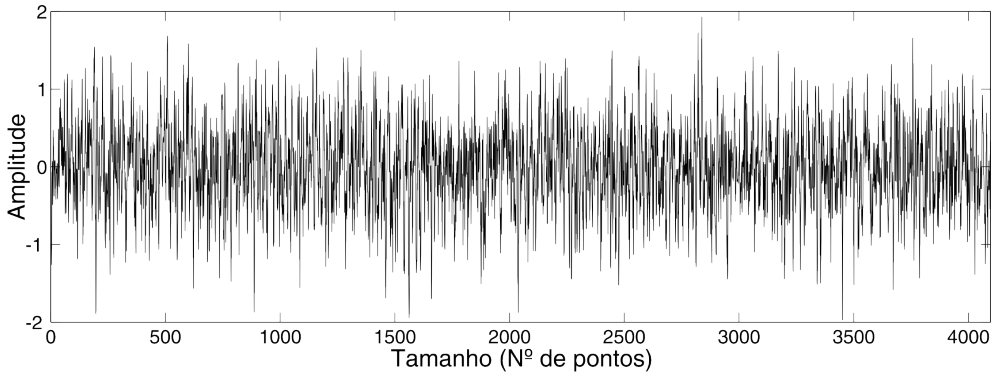


(A) Resultado do DFA e do espectro de potência. Os valores referentes ao DFA equivalem ao α, e o espectro de potência ao β. (B) Amplitude do espectro multifractal, ω. As barras de erro correspondem aos valores máximo e mínimo obtidos.

Fonte: produção do próprio autor.

exemplo da série temporal com as mesmas configurações.

Figura 4.14 - Exemplo de série temporal com duas inclinações ($H = 0,5$ e $H = 1,5$).

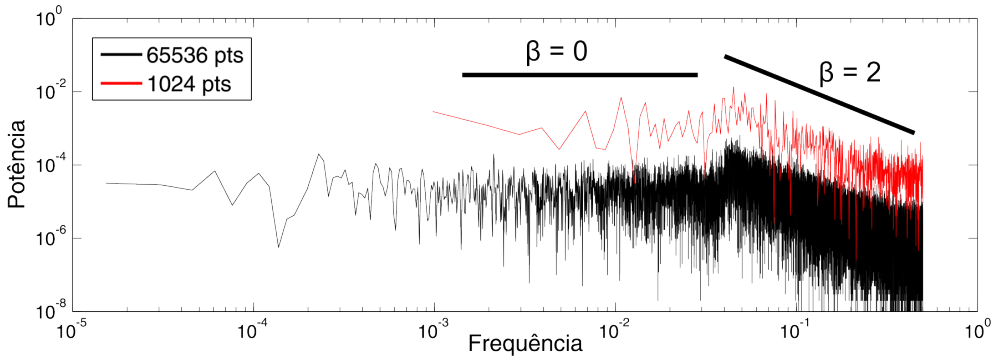


A série foi gerada através do filtro de Fourier modificado com ponto de quebra $f_x = 0,04$.

Fonte: produção do próprio autor.

O espectro de potência de uma série típica com duas inclinações pode ser visto na Figura 4.15. O ponto de transição das inclinações está próximo de $f_x = 0,04$ e aparece mais nitidamente no espectro cuja série tem maior resolução. Os valores das inclinações estão conforme esperado, ou seja, $\alpha \approx 0,5 \rightarrow \beta \approx 0$ e $\alpha \approx 1,5 \rightarrow \beta \approx 2$.

Figura 4.15 - Espectro de potência de série com duas inclinações.



O ponto de quebra do espectro de potência aparece nitidamente em $f_x = 0,04$.

Fonte: produção do próprio autor.

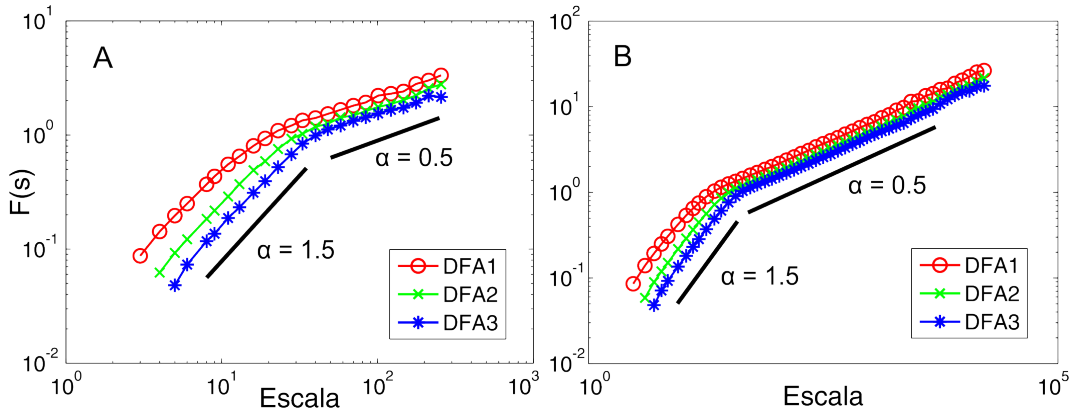
Comparando os resultados obtidos na Figura 4.15 com os resultados da Figura 4.16, pode-se notar a similaridade no formato das curvas. A diferença está na inversão do eixo x, uma vez que $s = 1/f$. Além disso, o grau do polinômio usado no destendenciamento modifica a posição do ponto de quebra do DFA. Quanto maior o grau, mais para a direita o ponto de quebra se encontra.

Comparando os resultados obtidos na subseção 4.2.2 (ver Figura 4.11), pode-se notar que o ponto de transição das inclinações é muito mais próximo para diferentes ordens do DFA quando as inclinações não são espúrias. Isso é decorrente do processo de destendenciamento: quando as inclinações são intrínsecas ao sinal, os polinômios não são capazes de removê-las, ao contrário do que acontece com as tendências. Além disso, independente da resolução do sinal, os pontos de quebra apresentam valores próximos um do outro, o que não ocorre no outro caso.

Para comparar o espectro de potência com o DFA é necessário tomar certo cuidado. Além de inverter os valores do eixo x, fazendo $s_x = 1/f_x$, é necessário corrigir os pontos de quebra de acordo com o grau do polinômio. A relação direta entre o espectro de potência e o DFA e a explicação do método de correção do deslocamento da função de flutuação são encontradas em Kiyono (2015).

Por último, a Figura 4.17 mostra o comportamento da amplitude do espectro de singularidades, ω, em função da resolução dos sinais. Nesse caso, a amplitude diminui em função do aumento do tamanho das séries, e revela a ausência de multifractalidade no sinal. Séries muito curtas, como nos outros casos (ver subseções 4.2.1 e 4.2.2), apresentam a amplitude de espectro alta e podem ser classificados como

Figura 4.16 - Função de flutuação de séries com duas inclinações.

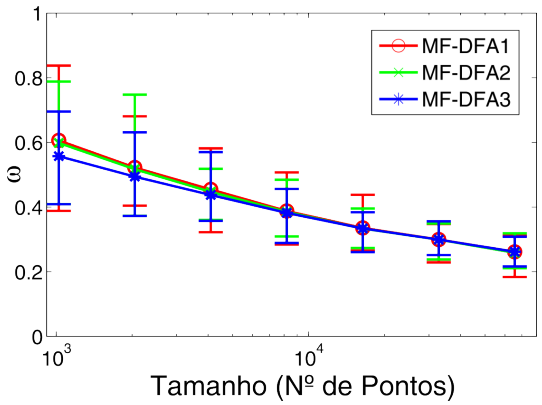


(A) 1024 pontos. (B) 65536 pontos. O ponto de quebra do DFA1 pode ser visto em $s_x \approx 20 \rightarrow 1/f_x \approx 0,05$, do DFA2 em $s_x \approx 30$ e do DFA3 em $s_x \approx 40$.

Fonte: produção do próprio autor.

multifractais erroneamente.

Figura 4.17 - Comportamento do ω de séries com duas inclinações para séries de diferentes tamanhos.



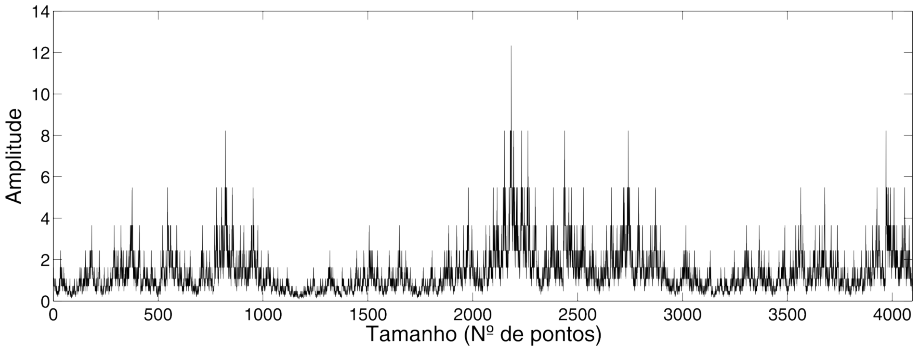
Fonte: produção do próprio autor.

4.2.4 Séries Multifractais

Nesta subseção, séries multifractais são analisadas com o MF-DFA. Como as séries tem comportamento multifractal, as técnicas espectro de potência e DFA não são usadas. Usando o p-model como modelo, um conjunto de 50 séries temporais multifractais foi gerado para cada índice de não homogeneidade $p = 0,6$, $p = 0,75$ e

$p = 0,9$. As análises foram, então, feitas em trechos dessas séries originais, respeitando os valores de N usado nas subseções anteriores. Quanto maior o índice p, maior o espectro de singularidade formado e maior ω. A Figura 4.18 mostra uma série gerada através do processo binomial multiplicativo com $p = 0,6$. O espectro analítico e o valor de ω foram calculados usando a função encontrada no Apêndice B.6.1.

Figura 4.18 - Exemplo de série multifractal.



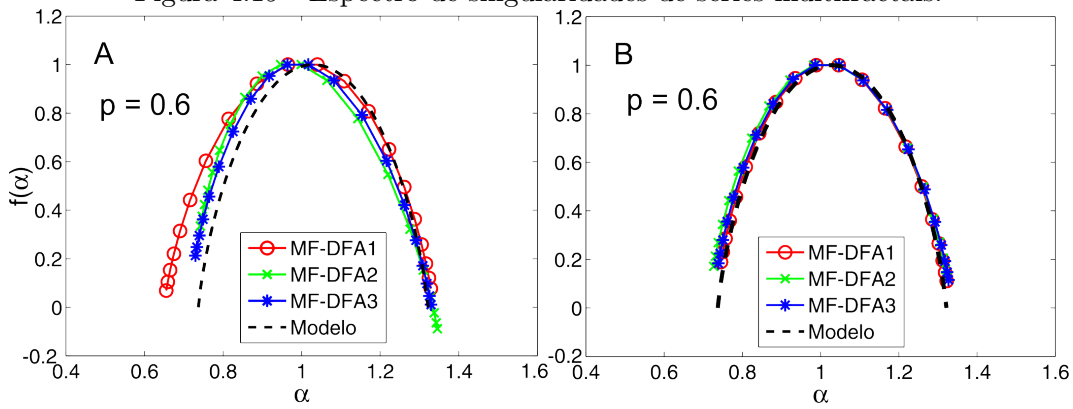
A série foi gerada através do p-model com $p = 0,6$.

Fonte: produção do próprio autor.

Na Figura 4.19 é possível ver a média do espectro de singularidades calculado para o conjunto de séries temporais com $p = 0,6$. É fácil perceber que a série com 65536 pontos cobre muito bem o valor do espectro teórico. Para resoluções menores, como 1024 pontos, a relação não é tão próxima, mas, ainda assim, é válida. Também é interessante notar que independente da ordem do polinômio usado no destendenciamento, o espectro não sofre mudanças significativas.

O comportamento dos resultados para séries com diferentes resoluções pode ser visto na Figura 4.20. Como as séries temporais com resoluções menores são formadas por trechos das originais, alguns resultados apresentaram valores muito próximos de zero no caso em que $p = 0,9$ e foram removidos para não atrapalharem a visualização. Os casos em que ocorre dos valores serem excessivamente altos ainda permanecem. Em geral, os resultados são muito próximos dos valores calculados analiticamente, e têm barras de erro curtas se comparadas às barras dos demais resultados apresentados nas subseções anteriores. Quando $p = 0,6$, a amplitude de ω é muito pequena e séries curtas com pontos de quebra (ver Figura 4.17) apresentam espectros de singularidades com amplitude similar. Nesses casos, e sem conhecimento prévio do

Figura 4.19 - Espectro de singularidades de séries multifractais.

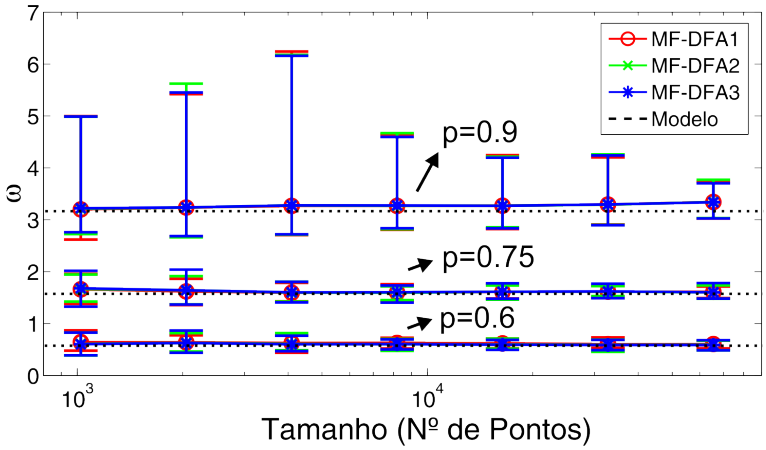


(A) Série com 1024 pontos. (B) Série com 65536 pontos. Os espectros são resultados da média de 50 séries temporais diferentes.

Fonte: produção do próprio autor.

comportamento dos dados, não se pode classificá-los.

Figura 4.20 - Comportamento do MF-DFA de séries mutifractais com diferentes tamanhos.



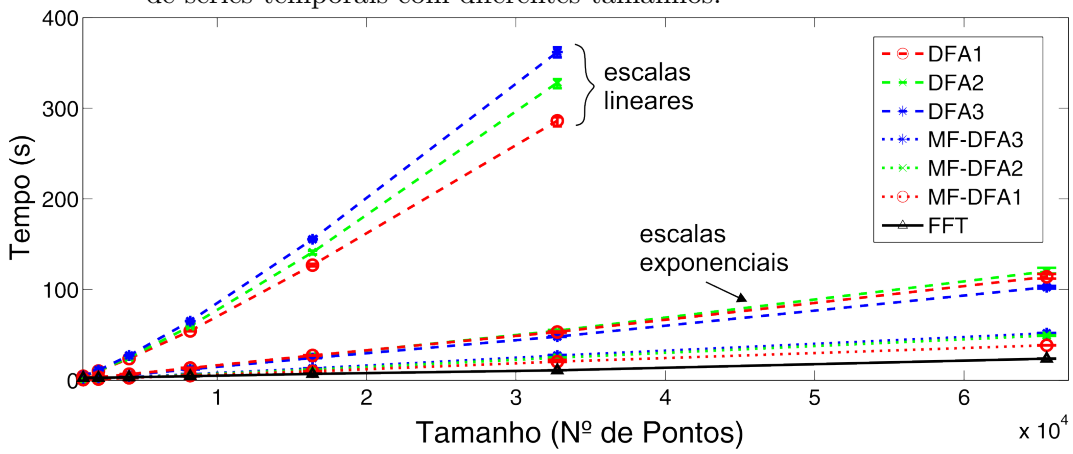
Três sinais diferentes ($p = 0,6$, $p = 0,75$ e $p = 0,9$) foram usados para estimar ω, todos gerados com o p-model. À medida que o sinal se torna menos homogêneo, o espectro de singularidades aumenta. As barras de erro correspondem aos valores máximo e mínimo obtidos.

Fonte: produção do próprio autor.

4.3 Tempo de Processamento

Como forma de verificar a análise de complexidade computacional temporal dos métodos, realizada na seção 3.5, o tempo de processamento de cada um deles foi registrado. Vale aqui lembrar que o tempo gasto dos métodos DFA e MF-DFA é diretamente proporcional às escalas usadas. Além disso, a ordem do polinômio usado para remover as tendências influencia o tempo de processamento, embora em menor grau. A Figura 4.21 mostra o tempo médio gasto em função do tamanho das séries temporais. Para cada N, a media de 10 casos foi calculada.

Figura 4.21 - Tempo de processamento dos métodos espectro de potência, DFA e MF-DFA de séries temporais com diferentes tamanhos.



O espectro de potência é representado pela sigla FFT e foi multiplicado por 10^4 para que pudesse ser comparado aos outros métodos. As barras de erro representam o maior e menor valores obtidos nas análises.

Fonte: produção do próprio autor.

É visível a diferença de tempo gasto pelo DFA usando escalas exponencialmente e linearmente espaçadas. Enquanto o primeiro tem limite assintótico $O(Nlog(N))$, o segundo tem limite assintótico $O(N^2)$. É importante notar a diferença entre entre os três tipos de MF-DFA, sendo o mais lento o MF-DFA3 e o mais rápido o MF-DFA1. Por outro lado, o DFA1, DFA2 e DFA3 não estão nessa ordem, pois as escalas usadas em cada um deles varia, o que não ocorre com o MF-DFA.

Para melhorar a visualização dos resultados, o tempo de processamento do espectro de potência (FFT na Figura) foi multiplicado por 10^4. Isso significa que ele é cerca de 4 ordens de grandeza mais rápido que os outros métodos. Mas isso ocorre pelo

fato de que o algoritmo FFT faz parte da biblioteca padrão do Matlab, enquanto que os demais métodos não; o espectro de potência só foi inserido na Figura 4.21 para comparar a evolução do tempo de processamento, que é $O(Nlog(N))$, e não o tempo em si.

O computador usado no processamento dos dados é um notebook da série $K45VM$, da marca Asus. As configurações relevantes do computador são estas: processador $Intel^{®}\ Core^{TM}\ i7\ 2,3\ GHz$ (até $3,3\ GHz$), $8\ GB$ de memória $DDR3\ 1600Hz$, $Windows\ 7\ Professional\ Sevice\ Pack\ 1$. As análises foram feitas sem outros processos concorrentes.

5 IRREGULARIDADES NA IONOSFERA EQUATORIAL

O objetivo deste capítulo é apresentar uma breve introdução sobre ionosfera e bolhas de plasma, tópicos que estão relacionados à motivação desta dissertação. A primeira seção é dedicada à introdução sobre a ionosfera. Na subseção 5.1.1, será discutido o fenômeno chamado de bolhas de plasma e a principal forma de análise das irregularidades de pequenas escalas, em cujo contexto a motivação deste trabalho se encontra.

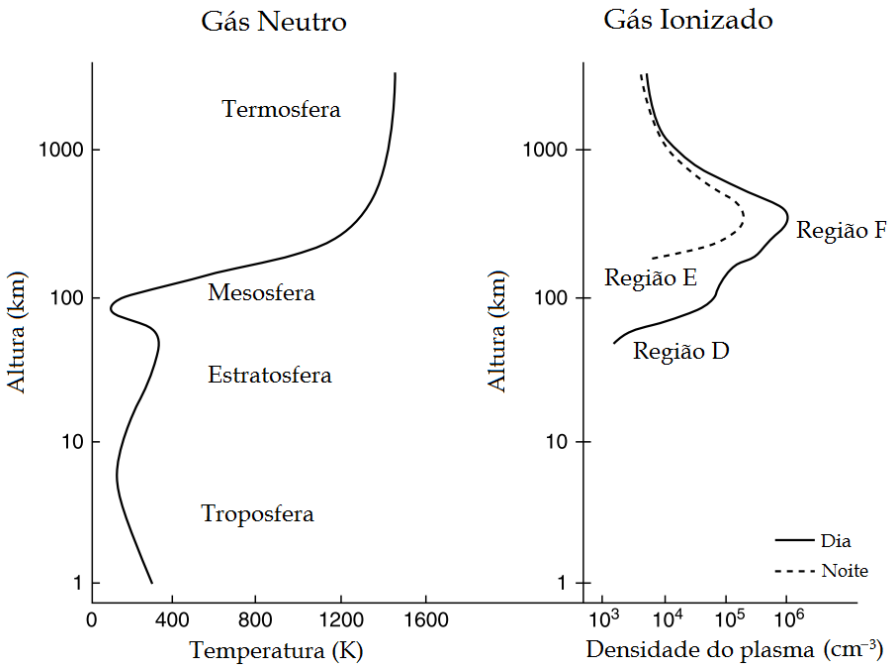
5.1 Atmosfera Neutra e Ionosfera

A descoberta da ionosfera se deu através de observações na propagação de ondas de rádio intercontinentais. Afinal, para que ondas eletromagnéticas fossem capazes de se propagar de um continente a outro, uma explicação possível era a existência de uma camada na atmosfera composta de íons capaz de refletir as ondas de volta para a Terra. Desde essa época, a física da ionosfera cresceu como uma disciplina que visa compreender a origem e os efeitos da ionosfera em propagações de ondas de rádio. Em 1946, Sidney Chapman cunhou o termo aeronomia e, em 1960, veio a defini-lo como a ciência da alta atmosfera, onde fenômenos de fotoionização e ionização são importantes (NAGY, 2008).

Como a atmosfera neutra é formada por uma mistura de gases (N_2, O_2, Ar, CO_2), apenas para citar alguns, na alta atmosfera as moléculas mais pesadas tendem a ficar mais próximas da superfície, em menores altitudes, enquanto as moléculas mais leves tendem a subir para as camadas mais altas, criando uma diferença na concentração química das substâncias. Além disso, a densidade do ar se torna exponencialmente menor à medida que a altura aumenta. Devido a essas e outras características, como a intensidade de radiação solar, em regiões em torno dos 100 km de altura ocorre o processo de formação de íons, intrínseco à ionosfera. Nesse sentido, a ionosfera pode ser descrita como uma mistura de gases parcialmente ionizados que envolve a Terra (KELLEY, 2009).

Enquanto a estrutura da atmosfera é classificada de acordo com seu perfil de temperatura, a ionosfera é dividida de acordo com a densidade do plasma. Como a densidade do plasma é aproximadamente igual à densidade eletrônica, esse último parâmetro é comumente usado para descrever o perfil vertical da ionosfera (KELLEY, 2009). Os perfis verticais da temperatura e da densidade eletrônica podem ser vistos na Figura 5.1.

Figura 5.1 - Perfis verticais da temperatura da atmosfera neutra e da densidade eletrônica da ionosfera.



É importante notar que esses são perfis típicos, podendo existir diferenças a depender da posição geográfica, época do ano, intensidade da atividade solar, etc.

Fonte: adaptada de Kelley (2009).

Por conta da gravidade, a maior parte da massa da atmosfera neutra se encontra abaixo dos 50 km de altura (WALLACE; HOBBS, 2006). Nos primeiros quilômetros, a temperatura diminui linearmente até que, em torno dos 10 km, o processo reverte, marcando o fim da troposfera e o início da estratosfera. A temperatura aumenta até chegar em um ponto máximo, em torno dos 50 km de altura, no qual a temperatura volta a diminuir. A partir daí, devido à forte incidência de radiação solar, a temperatura aumenta até atingir mais de 1000 K. Coexistindo com a atmosfera neutra, na região acima dos 150 km de altura situa-se a camada com maior densidade eletrônica da ionosfera, chamada de camada F. Logo abaixo, entre $90 - 150$ km de altura existe a região chamada de E, cuja densidade eletrônica é consideravelmente menor que na F, e a ionização que ocorre abaixo dos 90 km é chamada de região D (KELLEY, 2009).

5.1.1 Bolhas de Plasma

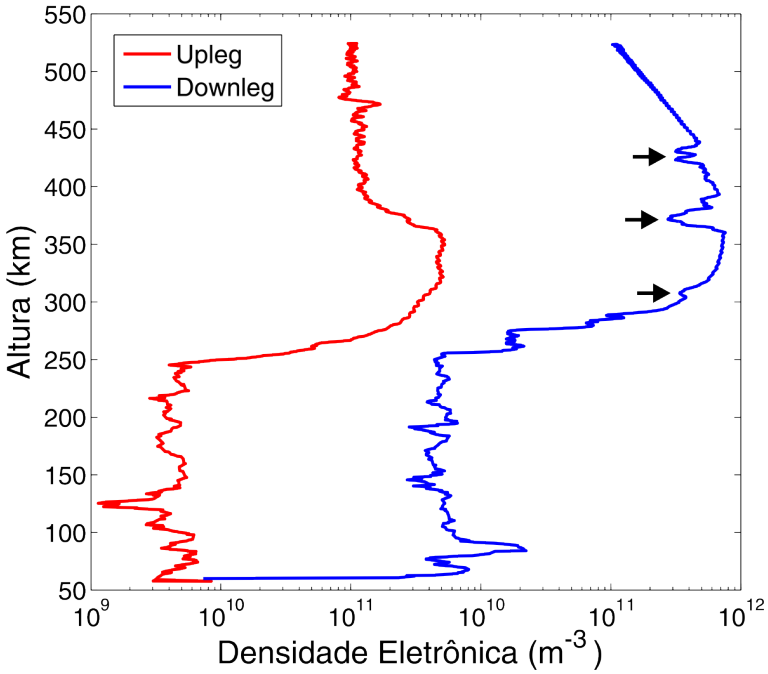
Em 1938, um estudo revelou um comportamento anômalo na região F da ionosfera equatorial e foi definido como uma irregularidade daquela região (BOOKER; WELLS, 1938). A partir daí, outras técnicas se mostraram capazes de detectar o mesmo fenômeno e estudos foram dedicados a caracterizá-lo quanto a sua localização temporal, geográfica e sazonal (WOODMAN, 2009). Entre outras características, essas irregularidades são essencialmente noturnas que, em condições magnéticas normais, geralmente ocorrem depois do pôr do sol e antes da meia-noite dentro de um cinturão de até 30-40^o em torno do equador magnético (WOODMAN, 2009).

Nos anos 1970, com a utilização do radar de retroespalhamento, foi possível elaborar mapas bidimensionais em função da altura e do tempo das irregularidades. Isso permitiu a visualização da evolução do fenômeno ao longo do tempo e levou Woodman e La Hoz a empregarem os termos "bolha" e "pluma" para definir o seu processo de desenvolvimento (WOODMAN; LA HOZ, 1976). "Bolhas de plasma" passou então a ser um jargão usado para indicar o tipo mais conhecido de irregularidades na densidade eletrônica da região F da ionosfera equatorial. Dado que diferentes técnicas de medição "enxergam" as irregularidades de diferentes maneiras, pode haver confusão de nomenclaturas. Aqui, o termo "bolhas de plasma" será utilizado para indicar as regiões onde ocorrem depleções no perfil de densidade eletrônica de dados *in situ*, como mostra a Figura 5.2.

O perfil da Figura 5.2 foi obtido ao longo da trajetória de um foguete de sondagem. Além dos foguetes, os satélites também são veículos capazes de carregar instrumentação para realizar medidas *in situ*. A principal diferença entre eles reside no fato de que o primeiro traça um perfil essencialmente vertical, uma vez que sua trajetória é semelhante a uma parábola, saindo do solo, atingindo o apogeu e retornando ao solo. Já o satélite, por orbitar a Terra, traça um perfil essencialmente horizontal. Em ambos os casos, os perfis das bolhas de plasma aparecem como depleções.

O perfil típico da ionosfera sem irregularidades, como mostra a Figura 5.1, é diferente do perfil da Figura 5.2, na qual aparecem bolhas. O tamanho das bolhas pode variar de centímetros à centenas de quilômetros (ABDU, 2012). Embora não exista uma divisão bem aceita quanto à escala das bolhas, aquelas que apresentam tamanhos superiores a 1 quilômetro são classificadas como de grande escala (MURALIKRISHNA; VIEIRA, 2007). A Figura 5.2 apresenta uma bolha desse tipo na região entre 360 km e 390 km. Entre 25 metros a 1 quilômetro estão as bolhas consideradas de média escala, enquanto que as de pequena escala são inferiores a 25 metros (MURALIKRISHNA;

Figura 5.2 - Perfil vertical de bolhas de plasma obtido através de um foguete de sondagem.



Perfil vertical da densidade eletrônica obtido através de medidas de uma sonda de Langmuir a bordo de um foguete lançado em 11/12/1985 de Natal, Brasil. As setas indicam bolhas de plasma. O perfil de descida do voo do foguete (*downleg*) foi movido para a direita para não sobrepor o perfil de subida (*upleg*).

Fonte: produção do próprio autor.

VIEIRA, 2007).

A explicação para o surgimento das bolhas de médias e grandes escalas é baseada na ideia de que uma perturbação na base da camada F desencadeia instabilidades que evoluem até darem origem às bolhas (WOODMAN, 2009). Estudos com sensores levados a bordo de foguete reforçam essa concepção (MCCLURE et al., 1977). As pequenas escalas, por sua vez, são explicadas com base na hipótese de Haerendel (1973) como uma consequência da cascata das instabilidades primárias, i.e., decorrente do processo de formação das bolhas de médias e grandes escalas. À medida que essas últimas se desenvolvem, pequenas bolhas vão surgindo como consequências diretas das primeiras, semelhante ao processo de cascata de turbulência, em que um vórtice maior dá origem a um menor. Inclusive, o termo turbulência é empregado para descrever esse processo (KELLEY et al., 1982; LABELLE et al., 1986; HYSELL, 2000; WOODMAN, 2009).

Para estudar as pequenas escalas e suas relações, análises do espectro do sinal, obtidos através da transformada de Fourier, são feitas. Estudos envolvendo a inclinação de regiões dos espectros apontam para um mecanismo de propagação em cascata (COSTA; KELLEY, 1978). Nesse sentido, a análise de Fourier se tornou uma ferramenta amplamente usada. A Tabela 5.1 reúne inclinações do índice espectral de diferentes experimentos de foguetes, que serão discutidos ao longo do texto.

Tabela 5.1 - Índices espectrais obtidos a partir de espectros de potência de experimentos de medidas *in situ* de parâmetros do plasma ionosférico realizadas com foguetes de sondagem.

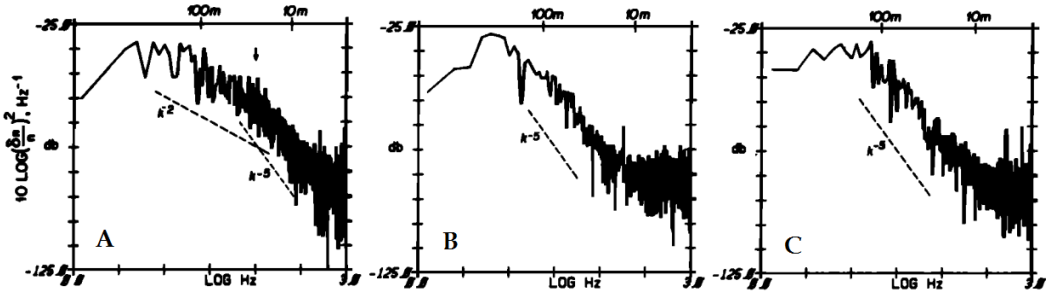
Experimento	Lançamento	Altura (km)	β_1	β_2
Plumex I	17/07/1979	248	2	5
Condor	01/03/1983	450	$2,5$	$4,5$
BI	11/12/1985	275	$0,82$	$1,87$
EQUIS	30/07/1990	450	$1,92$	$4,75$
Guará	14/10/1994	300 a 900	$0,5$ a $3,75$	2 a $7,25$

Na primeira coluna da Tabela 5.1 estão os nomes das campanhas às quais os experimentos de foguetes estão vinculados. A segunda coluna indica o dia, mês e ano do lançamento do foguete, e é usada para ordenar a Tabela. Como os espectros são calculados para trechos do voo do foguete, na terceira coluna estão as altitudes médias dos trechos que foram utilizados, e, nas duas últimas colunas estão os valores dos índices espectrais de flutuação de densidade eletrônica, sendo que β_1 representa as baixas frequências (grandes comprimentos de onda) e β_2 as altas frequências (baixos comprimentos de onda). Todas as campanhas listadas acima examinaram a ionosfera em latitudes equatoriais.

O foguete Plumex I, lançado às 00:31:30 (hora local) no dia 17 de julho de 1979 do atol de Kwajalein ($8,8^oN$; $167,5^oE$), interceptou várias bolhas de plasma durante os voos de subida e de descida (KELLEY et al., 1982). Intervalos temporais de $0,82$ s, equivalente a séries de 2048 pontos, foram escolhidos dentro das bolhas e analisados através do espectro de potência. Os índices espectrais, estimados através da comparação de retas posicionadas ao lado do espectro, apresentaram valores de $\beta_1 = 2$ e $\beta_2 = 5$, como pode ser visto na Figura 5.3.

A Figura 5.3 mostra que existe um comportamento característico de inclinação acentuada ($\beta \approx 5$) proveniente das maiores escalas em direção às menores. Além disso, a Figura 5.3(A) mostra duas inclinações com ponto de quebra em torno dos 100 Hz.

Figura 5.3 - Espectros de potência de flutuação de densidade eletrônica obtida pelo Plumex I.



Os espectros equivalem à series temporais em diferentes alturas: (A) 248 km; (B) 285 km; (C) 366 km. Os valores superiores são os comprimentos de onda das estruturas. A seta em (A) indica o ponto de quebra do espectro.

Fonte: adaptada de Kelley et al. (1982).

A campanha Condor contou com dois foguetes de sondagem que foram lançados de Punta Lobos $(12,5^oS;\ 76,8^oW)$, Peru, respectivamente, em 1 de março e 14 de março de 1983. O único espectro de potência apresentado no trabalho revela índices espectrais próximos a $2,5$ e $4,5$ para β_1 e β_2 respectivamente (LABELLE et al., 1986). Esse espectro foi calculado através de uma série temporal de medidas de flutuação de densidade eletrônica em uma altura próxima a 450 km durante seu primeiro lançamento. A resolução da série temporal e o intervalo de voo utilizados não foram especificados no trabalho.

Em 11 de dezembro de 1985 foi lançado de Natal $(5,9^oS;\ 35,2^oW)$, Brasil, o foguete da operação Barreira do Inferno, que passou por várias bolhas de plasma durante o voo de subida. A taxa de amostragem da sonda de Langmuir utilizada foi de 1250 Hz. Embora o intervalo temporal das séries não tenha sido especificado, o intervalo espacial foi de 3 km (VIEIRA, 2002). Como a velocidade do foguete é de aproximadamente 2 km/s, o intervalo de tempo de cada série foi cerca de $1,5$ s. Três espectros foram calculados em alturas referentes à 250 km, 275 km e 300 km. O índice β_1 foi estimado através de ajuste no espectro, e apresentou valores de $-0,18$; $0,82$ e $0,1$. Já β_2 apresentou valores iguais a $2,4$; $1,87$ e $3,1$ para as mesmas altitudes anteriores.

A campanha EQUIS contou com um foguete de sondagem lançado em 30 de julho de 1990 do Atol de Kwajalein. A taxa de amostragem da sonda foi de $2,5$ kHz. O

cálculo do espectro de potência envolveu o uso da janela de Blackman-Harris e retas foram ajustadas usando as informações dos espectros para estimar o índice espectral (HYSELL et al., 1994). O intervalo de tempo selecionado para calcular o espectro de potência variou de 10 s a 55 s, e a altitude do foguete dentro das bolhas variou de 400 km a 500 km. Os resultados apresentaram valores de β_1 que variaram entre $1,73$ a $2,20$ e de β_2 entre $4,19$ a $5,03$.

O experimento Guará contou com um foguete lançado de Alcântara ($2,31^oS$; $44,4^oW$), Brasil, em 14 de outubro de 1996. Os espectros de potência foram calculados usando a janela de Hanning a partir de séries temporais com intervalos de $1,125$ s a uma taxa de amostragem de 4 kHz (JAHN; LABELLE, 1998). A principal inovação nesse trabalho foi o uso de uma ferramenta automática para estimar o valor dos índices espectrais. Porém, como consequência da automatização, as frequências do espectro ficaram restritas a um intervalo fixo. No total, 588 séries temporais foram analisadas em uma altura que variou de 300 km a 900 km. Histogramas mostraram que os índices variaram de $0,5$ a $3,75$, com pico em 2, para β_1 e 2 a $7,25$, com pico em $5,5$ para β_2.

Diferentes experimentos prescrutaram a ionosfera equatorial entre os anos de 1979 e 1994 e, em todos eles, o espectro de potência foi a ferramenta usada para análise dos dados. Apesar das peculiaridades de cada experimento (e.g, taxa de amostragem, intervalo de tempo das séries temporais, janela usada no cálculo do espectro, etc), uma coisa é certa: os espectros revelaram inclinações, e mais de uma por espectro. Para Woodman (2009) as séries temporais produzidas pelas sondas contém mais informação do que os espectros revelam. O autor também afirma que as flutuações de plasma observadas não são similares à cascata de turbulência típica de Kolmogorov.

6 EXPERIMENTO E PRÉ-PROCESSAMENTO DE DADOS

Os dados ionosféricos utilizados nesta dissertação, bem como as metodologias adotadas durante o seu pré-processamento, serão o objeto deste capítulo. As características da instrumentação empregada nas medidas *in situ* serão apresentadas na seção 6.1. Na seção seguinte, discutiremos a obtenção de séries temporais compatíveis com a descrição encontrada na seção 2.4 do capítulo 2.

6.1 Experimento

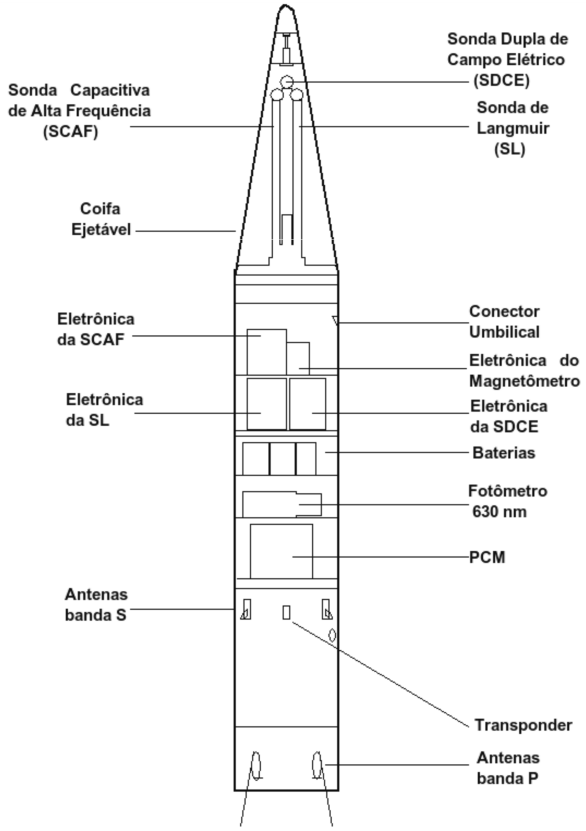
Os dados foram obtidos através de medidas *in situ* da ionosfera realizadas por instrumentos a bordo de um foguete de sondagem brasileiro Sonda III lançado da estação equatorial de Alcântara $(2,31^oS;\ 44,4^oW)$, Brasil, às $21h17min$ (hora local) do dia 18 de dezembro de 1995. Denominado de IONEX-II, esse experimento teve como principal objetivo o estudo do comportamento do plasma ionosférico sob condições favoráveis ao desenvolvimento de bolhas de plasma (MURALIKRISHNA et al., 2003).

Montada no segundo estágio do Sonda III, que abriga uma baia de instrumentação, a carga útil científica do experimento era composta dos seguintes sensores de plasma: uma sonda dupla de campo elétrico (SDCE), uma sonda capacitiva de alta frequência (SCAF) e uma sonda de Langmuir (SL) (MURALIKRISHNA et al., 2004). A disposição dos instrumentos na baia de instrumentação e na carga útil é mostrada na Figura 6.1.

Para não sofrer influência do potencial do revestimento iônico da superfície do foguete, os sensores esféricos das sondas foram montados nas extremidades de hastes isolantes. Com o objetivo de protegê-los do arrasto aerodinâmico durante o lançamento, os sensores foram acondicionados na coifa do foguete (Fig.6.2, painel superior). Após a ejeção da coifa, aos 65 km de altitude, as hastes foram liberadas e os sensores foram posicionados no plano perpendicular ao eixo de rotação do foguete (Fig.6.2, painel inferior).

Com o objetivo de medir os componentes AC (corrente alternada) e DC (corrente contínua) do campo elétrico, a sonda dupla de campo elétrico constava de dois sensores esféricos de 60 mm de diâmetro fixados na extremidade de duas hastes, cada uma, quando plenamente aberta, media 156 cm de comprimento. Era esperado que no momento em que as hastes se encontrassem totalmente esticadas a distância entre os dois sensores distassem, aproximadamente, $3,6\ m$ um do outro. Porém, por conta de uma taxa de rotação inesperadamente baixa (menos que 3 rotações por

Figura 6.1 - Disposição da instrumentação do experimento IONEX-II a bordo do segundo estágio de um foguete tipo Sonda III.



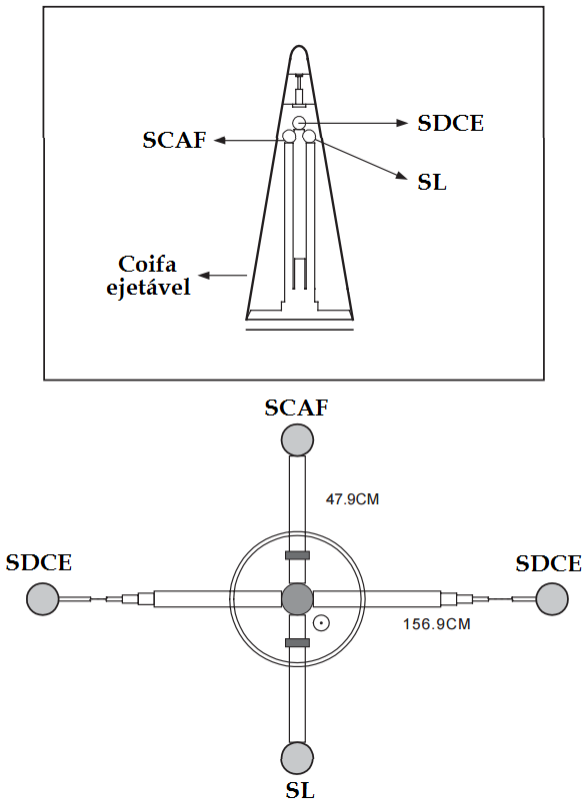
Fonte: adaptada de Muralikrishna et al. (2004).

segundo), os sensores se afastaram apenas $1,3\ m$ um do outro, o que impossibilitou a determinação da componente DC do campo elétrico (MURALIKRISHNA et al., 2003). Por outro lado, a flutuação do campo elétrico, ou componente AC, pôde ser medida em uma altura entre $95 - 557\ km$ em um plano perpendicular ao eixo de rotação do foguete.

Usando a Terra como referência, a diferença de potencial $\delta\varphi$ entre os dois sensores de campo elétrico é diretamente relacionada ao campo elétrico do ambiente através da relação

$$\delta\varphi = (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \cdot \vec{L} + \varphi s, \tag{6.1}$$

Figura 6.2 - Detalhes da carga útil do experimento IONEX-II.



Acima: hastes dos sensores acondicionadas no interior da coifa. Abaixo: hastes liberadas após a ejeção da coifa. As siglas indicam os sensores dos respectivos instrumentos: Sonda Capacitiva de Alta Frequência (SCAF), Sonda Dupla de Campo Elétrico (SDCE) e Sonda de Langmuir (SL).

Fonte: adaptada de Muralikrishna (2006).

onde $\vec{V}$ é a velocidade do foguete, $\vec{B}$ é o campo geomagnético, $\vec{L}$ é o vetor distância entre os dois sensores e φs é a diferença de potencial entre os sensores. As variações em $\delta\varphi$ são causadas pela perturbação do campo elétrico local $\vec{E}$ (componente AC do campo elétrico) e variações de $\vec{V} \times \vec{B}$. Além disso, pode-se assumir que a diferença de potencial φs, inerente às características elétricas da sonda, é constante (MURALIKRISHNA et al., 2003).

As flutuações de baixa frequência de $\delta\varphi$ são causadas pela rotação e precessão do foguete em torno do próprio eixo, porque os termos $\vec{V} \times \vec{B} \cdot \vec{L}$ e $\vec{E} \cdot \vec{L}$ variam em função da contínua mudança de ângulo entre $\vec{B}$ e $\vec{L}$, e entre $\vec{E}$ e $\vec{L}$. Consequentemente, as flutuações de $\delta\varphi$ em frequências diferentes da gerada pela rotação do foguete são

produzidas pela própria flutuação do campo elétrico local, $\vec{E}$. Essa parte flutuante da diferença de potencial $\delta\varphi$ foi separada do restante através de um filtro passa-altas com frequência de corte de 3 db em cerca de 10 Hz com uma taxa de amostragem de cerca de 1250 s^{-1} (MURALIKRISHNA et al., 2003).

Operando em duas configurações de potencial, o tipo de sonda de Langmuir (SL) encontrada no experimento IONEX-II permite a determinação da temperatura e da densidade eletrônica. O potencial de polarização aplicado ao sensor da sonda varia linearmente de -1 V até $+2,5$ V em aproximadamente $1,5$ s, e, a seguir, permanece constante com um potencial de $+2,5$ V por cerca de 1 s, totalizando um ciclo de $2,5$ s. A variação deste potencial não pode ser lenta o bastante para permitir modificações do plasma durante o ato da medida, e nem tão rápida, para que não venha a provocar distorções na curva característica I-V ao não se respeitar o tempo necessário de adaptação do revestimento iônico ao novo potencial aplicado.

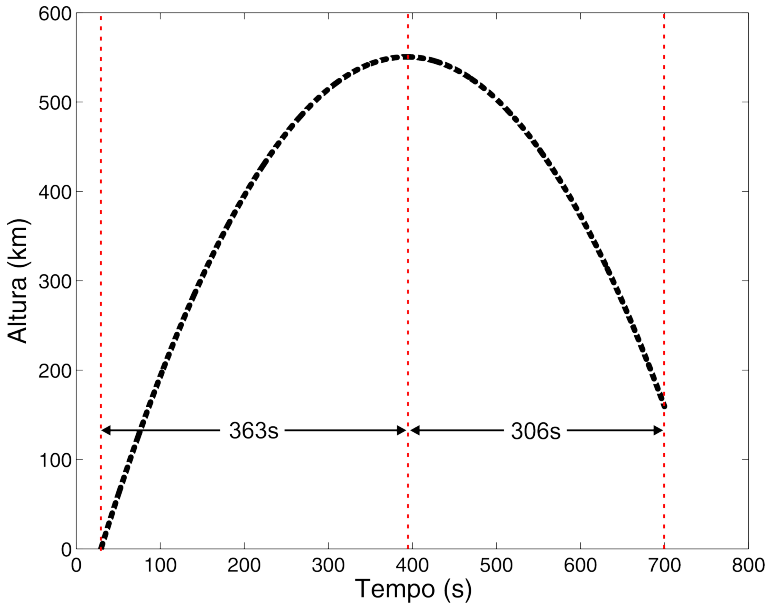
Com um diâmetro de 60 mm, o sensor esférico da sonda foi montado na extremidade de uma haste não-telescópica com aproximadamente 50 cm de comprimento. A corrente coletada por esse sensor durante o intervalo de $1,5$ s é utilizada para calcular a temperatura eletrônica, enquanto que aquela coletada no período de 1 s, denominada de corrente eletrônica de saturação, está associada à densidade eletrônica e suas flutuações (MURALIKRISHNA et al., 2003).

O perfil vertical de densidade eletrônica foi obtido através da filtragem da corrente gerada pela SL pelo filtro passa-altas com frequência de corte de 3 db em aproximadamente 50 Hz e amostrada a uma taxa de $44,64$ s^{-1}. A parte flutuante da corrente foi separada utilizando um filtro passa-baixas com frequência de corte de 3 db em cerca de 10 Hz e amostrada a uma taxa de aproximadamente 1250 s^{-1}. Essa medida será usada em estudos envolvendo análise espectral (MURALIKRISHNA et al., 2003).

O tempo de voo do foguete enquanto realizava medições foi de aproximadamente 11 min ($670,4726$ s), sendo $363,7942$ s durante a subida e, $306,6784$ s durante a descida. A contagem de tempo iniciou-se $29,5268$ s antes da decolagem, justificando o tempo completo do experimento de, aproximadamente, 700 s. A trajetória do foguete durante a sondagem pode ser vista na Figura 6.3.

As medidas das flutuações correspondem às projeções verticais e horizontais das flutuações reais. A depender da variável independente escolhida, que, por sua vez, está atrelada à variação vertical ou horizontal percorrida pelo foguete, diferentes mensurações das flutuações serão feitas. Assumindo que as flutuações são horizontais,

Figura 6.3 - Correspondência entre tempo e altura do foguete durante o experimento.



Fonte: produção do próprio autor.

tomar a variável independente como a velocidade vertical irá gerar medidas muito próximas do seu tamanho real (MURALIKRISHNA et al., 2003).

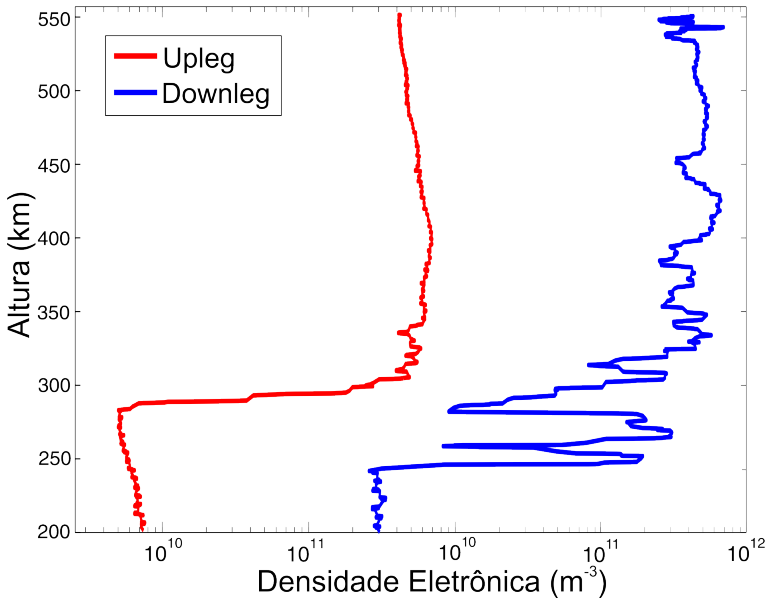
É importante notar que a diminuição na velocidade vertical do foguete gera uma diferença na frequência de flutuações observáveis. Supondo que as flutuações são horizontais, à medida que o foguete ganha altitude, sua velocidade diminui, e novas flutuações, com tamanho menores, podem ser observadas. Isso pode ser melhor entendido através da fórmula do número de onda, $\lambda = v/f$, onde λ é o comprimento de onda, v é a velocidade e f é a frequência. Tomando f como constante, à medida que v diminui, o comprimento de onda também diminui. Para regiões próximas ao apogeu do foguete, o tamanho da menor flutuação vertical observável tende a 0.

As flutuações de campo elétrico (δE) e densidade eletrônica (δNe) foram coletadas e dispostas em arquivos texto a uma taxa próxima de 1250 amostras por segundo, gerando um arquivo cujo conteúdo soma 811482 linhas, as quais também contém as respectivas informações de tempo e altura de cada medida.

A Figura 6.4 exibe os perfis de densidade eletrônica (em m^{-3}) estimados através de uma sonda de Langmuir, operando na região de saturação eletrônica, durante os intervalos dos voos de subida e descida. No perfil de subida é possível notar uma

base da região F bem definida em torno dos 300 km de altitude. Logo acima desta região, pode-se distinguir algumas poucas depleções de pequena escala. Um quadro diferente é verificado no perfil de descida, onde o foguete atravessa diversas bolhas de plasma de média e grande escala no intervalo entre 250 e 550 km de altitude.

Figura 6.4 - Perfis verticais de densidade eletrônica medidos durante os voos de subida (*upleg*) e descida (*downleg*) do experimento IONEX-II.



Para facilitar a visualização, o eixo x do perfil de descida está deslocado em duas ordens para a direita.

Fonte: adaptada de Muralikrishna (2006).

6.2 Procedimentos de pré-processamento dos dados

Para facilitar as análises espectrais, os dados de δE e δNe foram segmentados em intervalos amostrais de 1024 pontos. Esse tamanho de intervalo foi definido devido às descontinuidades presentes nos dados de flutuação de densidade eletrônica que correspondem aos intervalos de potencial de varredura utilizados para estimar a temperatura eletrônica.

Cabe, aqui, ressaltar a diferença entre "amostra", "intervalo amostral" e "taxa de amostragem". Nesse trabalho, "intervalo amostral" é usado para se referir ao intervalo de tempo que possui uma certa quantidade de amostras. A quantidade de amostras geradas por intervalo de tempo é definida pela "taxa de amostragem". Por

último, “amostra” se refere à medição realizada por um sensor. Em uma série temporal, um ponto é equivalente a uma amostra; o tempo total da série é seu intervalo amostral; e, a taxa de amostragem é a quantidade de amostras (ou pontos) dividida pelo intervalo amostral.

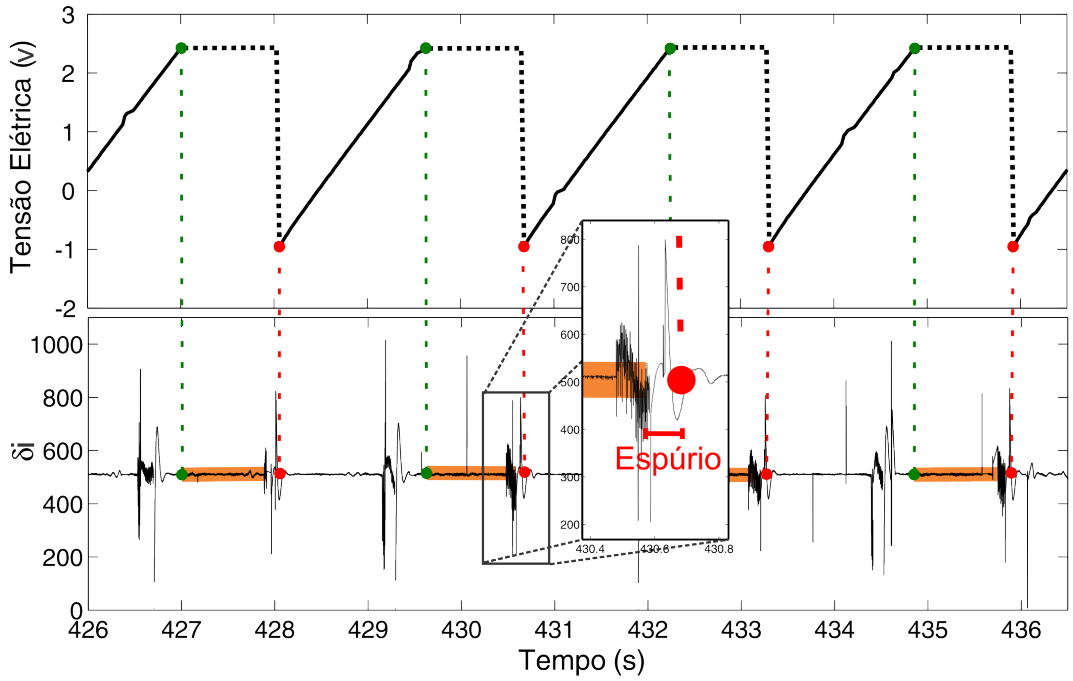
Uma vez que a SL não é dedicada exclusivamente à medições de δNe, os intervalos amostrais não podem ser selecionados sem critério. O critério de seleção é a tensão no potencial de polarização aplicado ao sensor da sonda. A tensão aumenta linearmente de $-1\ V$ até $+2,5\ V$ durante $1,5\ s$. Quando ela atinge $+2,5\ V$, mantém-se constante por cerca de $1\ s$. É durante esse intervalo que ocorre a amostragem de δNe. E é esse intervalo que deve ser selecionado. Logo em seguida, a tensão volta a ser $-1\ V$ e o ciclo se repete, gerando um perfil serrilhado em que o eixo x é o tempo e o eixo y é a tensão no sensor da sonda. Através desse perfil é possível selecionar os intervalos amostrais corretos. Como a sonda é dedicada a determinar δNe durante, aproximadamente, $1\ s$ e a taxa de amostragem é de $1250\ s^{-1}$, então, cerca de 1250 amostras contínuas de δNe são geradas a cada ciclo de $2,5\ s$. Aqui, caberia selecionar 1024 pontos contínuos dos 1250 medidos pela SL. Porém, ainda mais um detalhe deve ser levado em consideração. No momento em que o ciclo se encerra, a tensão é reiniciada com valor de $-1\ V$ e amostras espúrias são geradas no final do ciclo de medição. Para solucionar esse problema, apenas as primeiras 1024 amostras são escolhidas, descartando o restante, e garantindo que o final do ciclo não faça parte do intervalo selecionado. A Figura 6.5 ilustra esse processo.

Dos 231 intervalos amostrais de δNe, 115 intervalos foram obtidos tanto durante o voo de subida, quando no de descida, sendo que um único intervalo corresponde ao momento de inversão do sentido de voo do foguete. Os intervalos foram, então, divididos em três classes, levando em conta as camadas da ionosfera: a região E, a transição da região E para F, e a região F. A Figura 6.6 mostra o número de intervalos obtidos para cada classe. É importante ressaltar que os dados de δE não possuem lacunas como nos dados de δNe e, por isso, não é necessário fazer nenhuma restrição no sentido de selecionar amostras em intervalos específicos. Porém, para comparar as duas medidas, o intervalo de amostragem precisa ser o mesmo.

A distinção de intervalos de dados corresponde a medidas na camada F e na região do vale entre as regiões E e F da ionosfera noturna. Essa distinção é crucial para a correta interpretação da análise espectral, uma vez que cada uma delas é, geralmente, dominada por diferentes regimes de fluxo (KELLEY, 2009).

Por último, todas os intervalos amostrais foram processados para remover possíveis

Figura 6.5 - Exemplo da seleção dos intervalos amostrais de acordo com o perfil de tensão no sensor da SL.



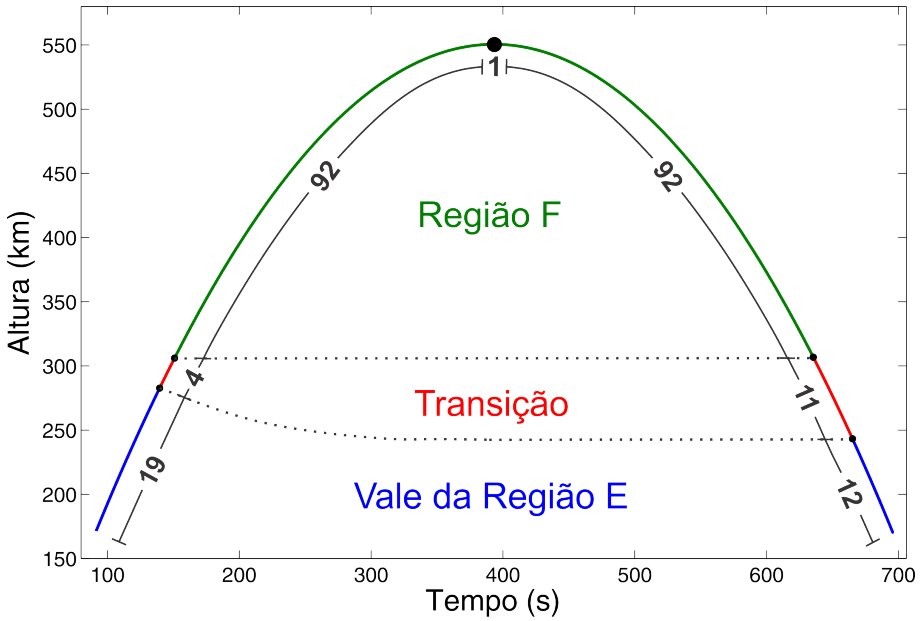
A linha tracejada representa os intervalos em que foi medida a densidade eletrônica. O início e o final da medição de δNe são representados pelos círculos verde e vermelho, respectivamente. A faixa laranja representa a parte útil que foi selecionada como amostra.

Fonte: produção do próprio autor.

amostras faltantes. Essas amostras são representadas em Matlab como *NaN* (do Inglês, *Not a Number*). Para manter o tamanho do intervalo constante em 1024 pontos, para cada medida faltante, uma nova é acrescentada no final. As medidas removidas são substituídas pela diferença existente entre os 1024 pontos selecionados e as 1250 amostras originais. Caso o intervalo possuir um número maior que 20 $NaNs$, ele é descartado; porém, nenhum intervalo apresentou essa característica. Além disso, após a remoção dos *NaN*s, as amostras foram homogenizadas na dimensão temporal, ou seja, o intervalo amostral se tornou o mesmo para quaisquer duas amostras consecutivas. Dessa forma, as séries temporais obtidas podem ser tratadas como vetores unidimensionais, em que a informação temporal é ignorada, conforme definido na seção 2.4 do capítulo 2. A Figura 6.7 ilustra um intervalo amostral antes e depois desse processo.

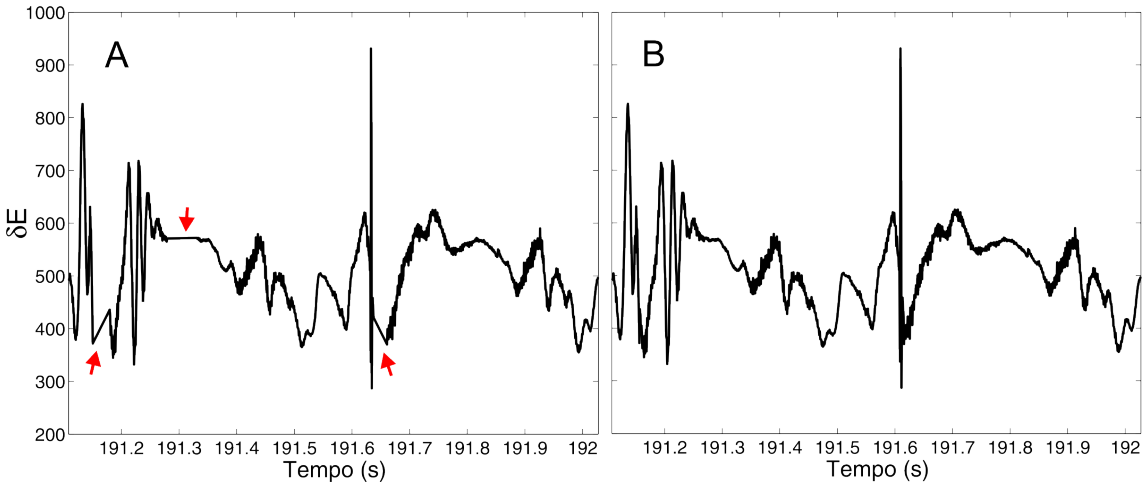
Por último, para remover possíveis influências que não são intrínsecas das séries,

Figura 6.6 - Perfil dos intervalos amostrais: localização, classificação e quantidade.



Fonte: produção do próprio autor.

Figura 6.7 - Exemplo do processo de filtragem das amostras.



(A) Antes da filtragem. (B) Após a filtragem. As setas vermelhas indicam as lacunas que foram removidas durante o pré-processamento dos dados. A tarefa de homogenizar as distâncias temporais entre as amostras não revela nenhuma mudança drástica no comportamento da curva porque esses valores são muito próximos.

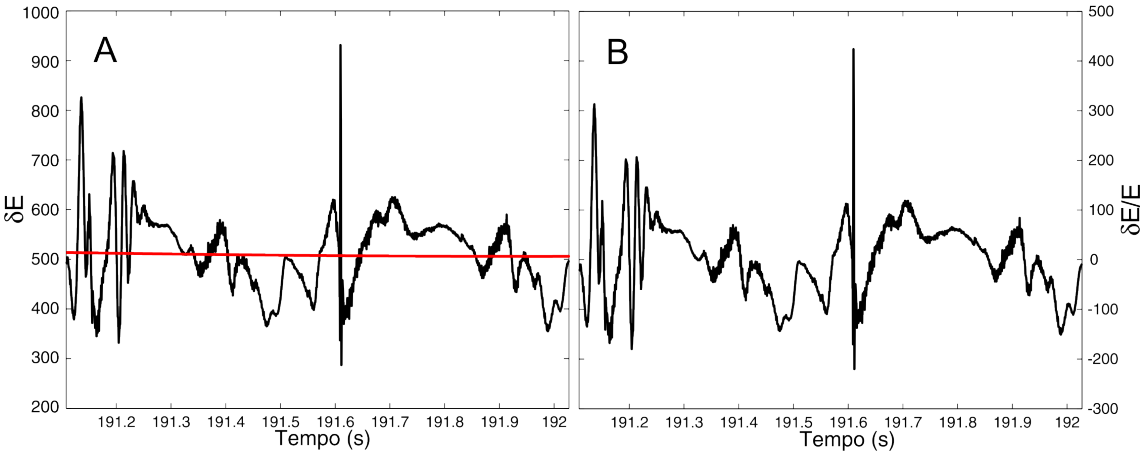
Fonte: produção do próprio autor.

os dados são destendenciados. Há diversas maneiras de remover a tendência dos dados, como, por exemplo, através de uma reta de melhor ajuste (DYSON et al., 1974), através de ajuste polinomial quadrático (RODRIGUES et al., 2009) e através de splines (SPICHER, 2013). Uma vez que removida, os dados passam a ser chamados de $\delta Ne/Ne$ e $\delta E/E$, indicando que apenas as flutuações de pequena escala estão contidas nas séries.

Neste trabalho, uma nova técnica de remoção de tendência será usada. Essa técnica está associada ao método de decomposição empírico (EMD, em Inglês), que é capaz de decompor o sinal em diversos módulos, sendo que o último deles é a tendência do sinal (HUANG et al., 1998; HUANG et al., 2003). A ideia de usar esse método é diminuir as condições que os demais métodos impõe; o ajuste polinomial de grau 2, por exemplo, impõe que a tendência deve ter um comportamento quadrático. O código usado para decompor o sinal usando o EMD pode ser visto do Apêndice B.7.

A Figura 6.8 ilustra o processo de destendenciamento da mesma amostra usada na Figura 6.7. É importante notar que a média das flutuações mudou e, agora, a curva tem média de, aproximadamente, zero. Além disso, a tendência removida, nesse caso, é muito próxima a uma linha reta e a técnica de ajuste polinomial teria um resultado semelhante.

Figura 6.8 - Exemplo do processo de remoção da tendência das amostras por meio do EMD.



(A) Antes de remover a tendência. (B) Após remover a tendência. A linha em vermelho mostra a tendência que foi removida.

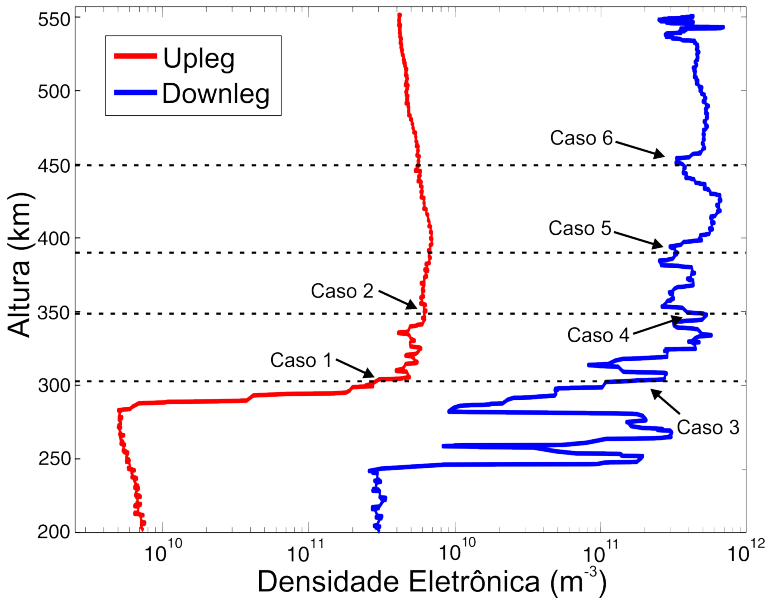
Fonte: produção do próprio autor.

O último ponto, e talvez o mais importante, é que esse processo é feito para que o espectro de potências possa ser aplicado sem que as tendências externas da série influenciem o resultado. No entanto, o DFA não precisa dessa etapa; ele, por si só, é capaz de destendenciar a série. Como ambas as técnicas serão usadas neste trabalho, essa etapa de pré-processamento será mantida.

7 RESULTADOS

Foram selecionados intervalos de flutuação de densidade eletrônica e flutuação de campo elétrico através do perfil de voo do foguete. A seleção dos intervalos está baseada no perfil de densidade eletrônica de forma que foram selecionados intervalos dentro e fora de bolhas. Dos 231 intervalos de $\delta Ne/Ne$ ou $\delta E/E$ que podem ser usados para análise respeitando as condições do experimento relatadas no capítulo anterior, 6 foram escolhidos, sendo 2 na subida e 4 na descida do foguete. Os dois casos durante a subida têm um correspondente com aproximadamente a mesma altitude na descida. A localização dos intervalos selecionados no perfil de voo do foguete pode ser vista na Figura 7.1.

Figura 7.1 - Posição dos 6 exemplos escolhidos através do perfil de densidade eletrônica.



Fonte: produção do próprio autor.

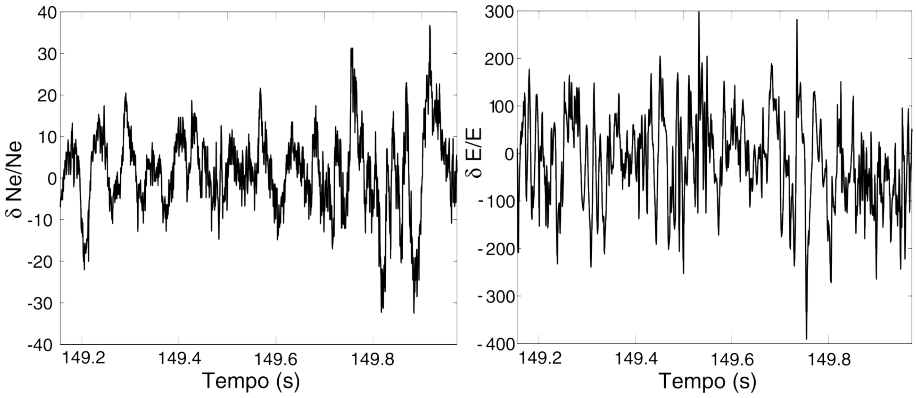
Os exemplos foram nomeados em ordem de altura como “caso 1”, “caso 2”, “caso 3”, “caso 4”, “caso 5” e “caso 6”, sendo os 2 primeiros casos na subida, e os outros 4 na descida. Dessa forma, o correspondente em altitude do caso 1 é o caso 3 e o do caso 2 é o caso 4. As características do foguete no momento da medição de cada caso podem ser vistas na Tabela 7.1. O sinal $\pm$ é usado para identificar a variação temporal e espacial do intervalo em que ocorreu a medição. A velocidade, quando negativa, caracteriza a descida do foguete. Pode-se notar que o caso 1 e o caso 3 têm aproximadamente a mesma altura média e variação espacial.

Tabela 7.1 - Características do foguete nos 6 diferentes intervalos amostrais escolhidos.

	Velocidade (km/s)	Tempo (s)	Altura (km)
Caso 1	$2,02$	$149,56 \pm 0,41$	$303,38 \pm 0,83$
Caso 2	$1,83$	$173,18 \pm 0,45$	$348,94 \pm 0,83$
Caso 3	$-2,03$	$637,12 \pm 0,41$	$303,24 \pm 0,83$
Caso 4	$-1,83$	$613,55 \pm 0,44$	$348,74 \pm 0,81$
Caso 5	$-1,63$	$589,95 \pm 0,41$	$389,67 \pm 0,67$
Caso 6	$-1,28$	$548,04 \pm 0,44$	$450,94 \pm 0,57$

Uma vez que o campo elétrico é proporcional à perturbação de densidade eletrônica, o formato dos espectros dos dois parâmetros é similar (KELLEY, 2009). Dessa forma, para cada caso, os dois tipos de dados serão analisados: $\delta Ne/Ne$ e $\delta E/E$. Exemplos de séries temporais já pré-processadas (ver capítulo 6) do caso 1 são mostradas na Figura 7.2.

Figura 7.2 - Séries temporais de $\delta Ne/Ne$ e $\delta E/E$ do caso 1.



Fonte: produção do próprio autor.

Por último, os argumentos usados para realizar as análises são resumidos na Tabela 7.2. No espectro de potência, a janela de Hanning será usada. Por não conhecermos as possíveis influências externas que os dados podem ter sofrido e para garantir que as séries não são influenciadas por elas, o limite superior do polinômio usado no destendenciamento foi estendido para 5, ao invés de 3, como usado no capítulo 4. Além disso, devido à frequência de Nyquist, para que seja possível comparar o espectro gerado pelo DFA com o espectro gerado pela transformação de Fourier, o limite superior das escalas escolhido foi de $N/2$. Como a literatura aconselha o uso de escalas de até $N/4$ pontos (KANTELHARDT, 2012), a região do espectro entre $N/4$

e $N/2$ pontos será demarcada com uma área cinza, indicando uma área de pouca confiabilidade estatística. No MF-DFA, os argumentos são os mesmos que os usados no capítulo 4, com exceção da variação do fator de ponderação, δq, que foi reduzida para $0,2$, e das escalas, que seguem a mesma regra do DFA.

Tabela 7.2 - Argumentos usados nas análises dos casos de $\delta Ne/Ne$ e $\delta E/E$.

Variável de Entrada	Método	Valor
Tipo de Janela	Espectro de Potência	Hanning
Grau do Polinômio (m)	DFA	1, 2, 3, 4 e 5
Grau do Polinômio (m)	MF-DFA	1, 2, 3, 4 e 5
Escalas	DFA	$m+2$ até $N/2$ (exponencial)
Escalas	MF-DFA	10 até $N/4$
Fator de Ponderação (q)	MF-DFA	$-10; -9,8; -9,6; \ldots; 9,6; 9,8; 10$

7.1 Comparação entre DFA e Espectro de Potência

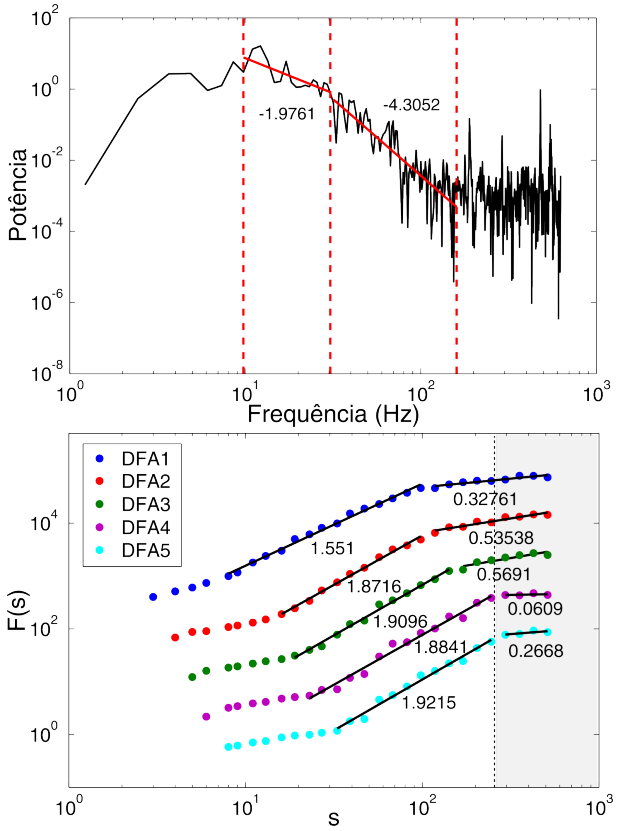
O primeiro grupo de análises será feito usando os dados de $\delta Ne/Ne$. Para cada caso, foram calculados um espectro de potência e 5 espectros do DFA, correspondentes aos DFA1, ..., DFA5. A inclinação desses espectros foi então medida através do ajuste por mínimos quadrados de uma reta. Por apresentarem pontos de quebra, os intervalos no espectro usados no cálculo da inclinação foram escolhidos via inspeção visual. Os resultados são discutidos nas seções 7.1.1 e 7.1.2, que contém apenas uma Figura de exemplo. As Figuras restantes podem ser vistas no Apêndice C.3.

7.1.1 Análise da Flutuação de Densidade Eletrônica

No total, foram gerados 6 Figuras através da transformada de Fourier e 6 através do DFA. Como a forma de definir a inclinação dos espectros foi através da inspeção visual, para evitar que o tipo de dado e a localização dos mesmos gerassem tendências, os resultados foram embaralhados e tratados individualmente. Após calcular os expoentes β, quando o espectro de potência for usado, e α, quando for o DFA, os resultados foram colocados em cima e embaixo, como mostra a Figura 7.3.

Os gráficos de flutuações, gerados pelo DFA, aparecem invertidos em relação ao espectro de potência. Isso ocorre por conta da relação $f = 1/s_x$. Porém, mesmo se o valor das escalas, s, fosse convertido em frequência, f, os espectros ainda não poderiam ser comparados diretamente, pois o grau do polinômio usado no destendenciamento, m, gera uma distorção no valor do ponto de quebra das escalas; em

Figura 7.3 - Espectros de Fourier e DFA de $\delta Ne/Ne$ do caso 3.



A área cinza no gráfico do DFA representa as escalas que variam de $N/4$ a $N/2$. Os espectros de flutuação foram multiplicados por 5 para que não ficassem sobrepostos.

Fonte: produção do próprio autor.

geral, quanto maior m, mais para direita o ponto de quebra se encontra. Por esse motivo, apenas a forma do espectro e os valores de α são usados na comparação dos resultados.

Como mostra a Figura 7.3, não há confirmação das duas inclinações no espectro de flutuações, como ocorre usando Fourier. O que o DFA revela é a existência de dois pontos de quebra: um dividindo a primeira região "plana" do gráfico do início da inclinação, e outro dividindo o final da inclinação da segunda região "plana". Aqui, região "plana" está sendo usada para indicar as regiões que se encontram nas bordas do espectro e que têm índices $\beta \approx 0$ e $\alpha \approx 0,5$.

Ignorando essa parte de ajustes de uma ou duas retas, que é extremamente subjetiva e passível de críticas, vamos focar o estudo nos valores encontrados pelas técnicas. A inclinação ocorre em escalas intermediárias e é íngreme: α varia de $1,55$ a $1,92$

dependendo do grau do polinômio usado no caso do DFA e $2,65$ usando Fourier. As regiões "planas" dos espectros apresentam valores também consistentes. Para $s \gtrsim 200$ os resultados não são estatisticamente confiáveis, pois $s > N/4$, mas apresentam consistência se comparados aos valores em que $f \lesssim 10$. O mesmo ocorre com $s \lesssim 20$ e $f \gtrsim 200$.

As análises dos outros casos é similar a essa, e podem ser vistas no Apêndice C.3.1. A Tabela 7.3 mostra os valores de α para todos os 6 casos escolhidos. No caso do espectro de potência, o valor de α foi calculado através da relação $\alpha = (\beta + 1)/2$. Os valores de α_1 e α_2 correspondem aos índices espectrais obtidos nas baixas e altas frequências respectivamente. Quando o espectro apresenta um único índice espectral, esse é exibido como sendo α_1. A primeira linha da tabela mostra o resultado encontrado usando o espectro de potência; $m = 0$ foi escolhido para representá-lo já que esse método não usa polinômios no destendenciamento de séries. O espectro de potência apresenta um valor um pouco mais alto do que o DFA, mas, em geral, os índices espectrais das duas técnicas apresentam consistência entre si. A palavra "consistência" é usada porque a relação $\beta = 2\alpha - 1$ não é explícita, mas os espectros têm formatos semelhantes. Por último, quanto maior m, mais alto tendem a ser os valores de α, o que é um comportamento intrínseco do método.

Tabela 7.3 - Índice α do espectro de potência ($m = 0$) e do DFA ($m = 1, \ldots, 5$) de $\delta Ne/Ne$.

	Caso 1		Caso 2		Caso 3		Caso 4		Caso 5		Caso 6	
m	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2
0	$1,40$	–	$1,27$	$2,10$	$1,49$	$2,65$	$1,69$	$3,44$	$1,63$	$2,81$	$2,11$	–
1	$1,27$	–	$0,57$	$1,23$	$1,55$	–	$0,83$	$1,66$	$0,36$	$1,53$	$0,99$	–
2	$1,38$	–	$0,76$	$1,41$	$1,87$	–	$1,05$	$2,04$	$1,06$	$1,94$	$0,96$	$1,19$
3	$1,43$	–	$0,88$	$1,56$	$1,91$	–	$0,55$	$1,91$	$1,30$	$1,96$	$0,66$	$0,96$
4	$1,66$	$1,18$	$0,99$	$1,59$	$1,88$	–	$1,00$	$1,96$	$1,64$	$2,21$	$0,69$	$0,59$
5	$1,53$	$1,14$	$1,09$	$1,78$	$1,92$	–	$0,91$	$2,11$	$1,57$	$2,57$	$0,98$	$0,77$

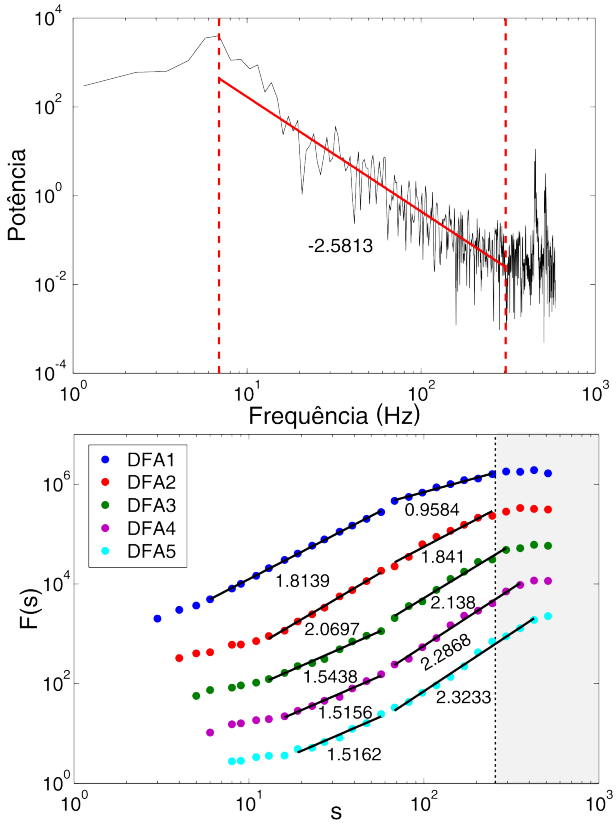
No primeiro caso, ambas as técnicas detectam apenas uma inclinação, com $\alpha \approx 1,40$, exceto quando $m = 4$ e $m = 5$, quando surge uma segunda inclinação. No caso 2, quanto maior o valor de m, mais os valores do DFA se aproximam do espectro de potência. No quarto caso, há a detecção de duas inclinações por ambas as técnicas, porém os índices ainda permanecem muito diferentes. O caso 5 revela proximidade entre as duas técnicas, principalmente quando $m = 4$ e $m = 5$. E, no última caso, várias tentativas usando ajuste com duas retas foram feitos para alcançar o valor

obtido pelo espectro de potência, porém nenhuma delas obteve sucesso.

7.1.2 Análise da Flutuação de Campo Elétrico

Como na subseção anterior, 12 espectros foram gerados. As inclinações foram estimadas usando o mesmo método e apenas a Figura do caso 4 está nesta seção, os demais podem ser vistos no Apêndice C.3.2. A Figura 7.4 mostra os dois espectros do caso 4.

Figura 7.4 - Espectros de Fourier e DFA de $\delta E/E$ do caso 4.



A área cinza no lado direito do gráfico do DFA representa as escalas que variam de $N/4$ a $N/2$. Os espectros de flutuação foram multiplicados por 5 para que não ficassem sobrepostos.

Fonte: Produção do próprio autor.

Esse exemplo foi escolhido para mostrar que, no caso do DFA, os ajustes são diferentes dos encontrados usando Fourier. Enquanto que o espectro de potência tem um único declive, as retas de ajuste no DFA apresentam dois comportamentos. No caso do DFA2, os coeficientes angulares das retas são muito próximos e a confiabilidade

dos ajustes pode ser questionada. Talvez, essa impressão de duas inclinações seja decorrente do fato de que o ponto de quebra não é abrupto e envolve um intervalo de escalas.

Usando a relação $\alpha = (\beta + 1)/2$, o índice calculado através de Fourier no caso 4 é $\alpha = 1,79$. Esse valor é muito próximo do valor de α_2 calculado pelo DFA1 ou de α_1 usando DFA2. A diferença entre os valores pode estar relacionada ao fato de que as séries temporais têm apenas 1024 pontos, o que gera um espectro de flutuações com 28 escalas, mesmo incluindo $s > N/4$. Como as retas são ajustadas nas escalas intermediárias, um valor ainda menor de pontos é usado, o que torna seu valor ainda mais suscetível à mudanças.

Os demais casos são similares a esse e podem ser vistos na Tabela 7.4. Quando $m = 0$, α foi obtido através da relação $\alpha = (\beta + 1)/2$ a partir do espectro de potência. Os índices obtidos para os dados de $\delta E/E$ são mais consistentes do que os dados de $\delta Ne/Ne$ (ver Tabela 7.3). No caso 1, os valores de α_1 e α_2 são quase iguais. No caso 2, a diferença está relacionada principalmente ao fato de que apenas um ajuste foi feito no espectro de potência e dois no espectro de flutuações. O caso 3 é interessante porque, embora ambas as técnicas apresentem duas inclinações, à medida em que m aumenta, os índices vão se tornando cada vez mais próximos até se tornarem quase iguais, o que coloca em questão o ajuste através de duas retas. O caso 4 foi discutido ao longo desta subseção. Os dois últimos casos revelam índices entre o DFA4/DFA5 e o espectro de potência. No caso 6, o espectro de Fourier foi ajustado usando duas retas para mostrar que seus valores são muito próximos e, consequentemente, há apenas uma inclinação.

Tabela 7.4 - Índice α do espectro de potência ($m = 0$) e do DFA ($m = 1, \ldots, 5$) de $\delta E/E$.

	Caso 1		Caso 2		Caso 3		Caso 4		Caso 5		Caso 6	
m	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2
0	0,99	2,23	3,10	–	1,33	2,10	1,79	–	1,75	2,40	2,38	2,43
1	1,02	1,76	0,62	1,76	0,88	1,77	0,96	1,81	0,86	1,77	1,56	–
2	1,15	2,24	0,88	2,46	1,12	1,98	1,84	2,07	1,14	2,18	1,99	–
3	1,28	2,42	0,86	2,69	1,38	2,03	2,14	1,54	1,17	2,33	1,87	–
4	1,18	2,36	0,93	2,81	1,62	1,95	2,29	1,52	1,35	2,59	1,98	–
5	1,25	2,15	0,94	2,77	1,83	1,82	2,32	1,52	1,42	2,54	2,01	–

7.2 MF-DFA

Usando a generalização do DFA foram feitas análises multifractais dos dados de $\delta Ne/Ne$ e $\delta E/E$. Em um primeiro momento, para evitar que os pontos de quebra influenciassem a análise, apenas as escalas intermediárias foram escolhidas. Essa escolha foi feita usando os pontos de quebra da seção anterior, feita através da inspeção visual dos espectros. Talvez por conta da quantidade reduzida de escalas, os resultados não se mostraram confiáveis, e podem ser vistos no Apêndice C.1.

Por esse motivo, as escalas escolhidas foram mantidas fixas e ampliadas de forma a englobar o maior número possível de pontos. Os dados de $\delta Ne/Ne$ não apresentam espectros com amplitude, ω, suficientemente grande para garantir a multifractalidade do sinal. Além disso, à medida que o grau do polinômio, m, aumenta, o valor de ω diminui, confirmando a conclusão anterior. Isso pode ser visto na Tabela 7.5.

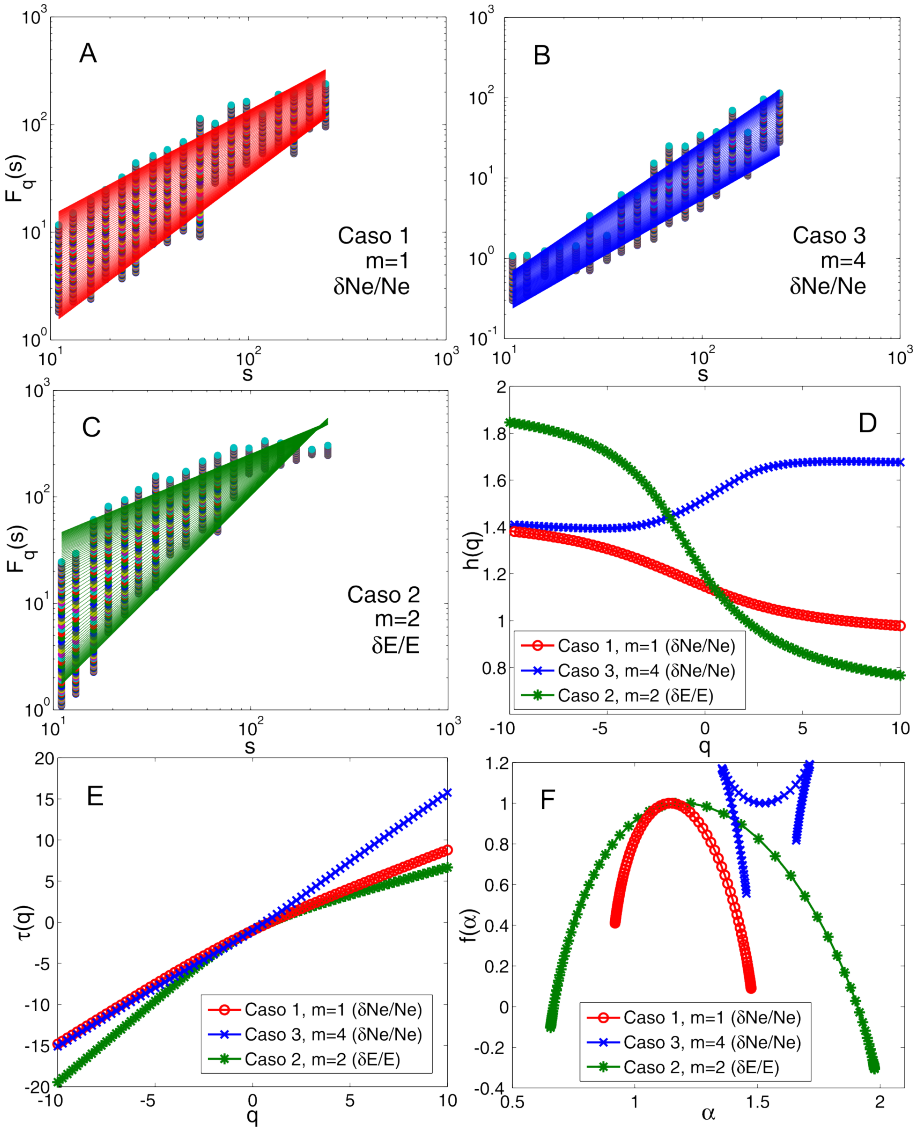
Tabela 7.5 - Índice ω de $\delta Ne/Ne$.

m	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
1	$0,55$	$0,64$	$0,76$	$0,47$	$0,33$	$1,12$
2	$0,36$	$0,25$	$0,26$	$0,13$	$0,35$	$0,52$
3	$0,23$	$0,17$	$0,19$	$0,34$	$0,59$	$0,55$
4	$0,18$	$0,14$	$0,37$	$0,30$	$0,60$	$0,53$
5	$0,10$	$0,13$	$0,38$	$0,37$	$0,60$	$0,55$

Nos casos 3, 4, 5 e 6 da Tabela 7.5 ocorre um fenômeno de inversão do espectro, o que justifica o aumento nos seus valores (indicados na tabela com a cor laranja). À medida que o grau do polinômio aumenta, os valores de flutuação das pequenas escalas diminui mais do que os valores de flutuação das grandes escalas. As pequenas escalas são mais sensíveis à mudança de m do que as grandes escalas. Isso é natural do método e, no DFA, é o que causa a mudança no ponto de quebra causando o consequente aumento no índice espectral. No MF-DFA, ao ponderar as flutuações, as pequenas escalas passam a apresentar menos variação e as grandes escalas, por sua vez, não. Consequentemente, o leque que antes era quase paralelo, passa a divergir, como pode ser visto na Figura 7.5(B). Em um sinal tipicamente multifractal isso não acontece.

Em decorrência dessa divergência, o cálculo dos valores dos expoentes de Hurst generalizados, $h(q)$, aumenta a medida que q aumenta (Figura 7.5-D), o que faz com que o gráfico de $\tau(q)$ (Figura 7.5-E) apresente uma quebra na inclinação superior a

Figura 7.5 - Resultados do MF-DFA dos casos 1, 2 e 3.



Fonte: Produção do próprio autor.

180° e gere um espectro de singularidades com a concavidade para cima. A Figura 7.5(A) apresenta um leque convergente, mas, uma vez que os valores de $h(q)$ não têm amplitude suficiente para garantir um amplo espectro, seu comportamento é classificado como fractal.

O único caso em que ω é suficientemente grande ($\omega > 1$) para garantir que o comportamento é multifractal, é o caso 2 dos dados de $\delta E/E$. Na Tabela 7.6 podem ser vistos os valores de ω para os 4 casos. As escalas do caso 1 aumentam de valor não por causa do fenômeno anterior, mas porque as escalas iniciais ($s < 20$) apresentam

amplitude inesperada (semelhante ao que ocorre ao escolher $s < 10$), fazendo com que o ω aumente. Os valores entre parênteses são calculados removendo essas escalas. Embora o caso 3 e o caso 4 têm um espectro consideravelmente amplo, eles não são considerados multifractais porque têm valores próximos dos que foram encontrados na análise de sinais fractais na subseção 4.2.3. O caso 5 tem uma diminuição da amplitude à medida que m aumenta, muito parecido com o caso 4. No último caso, ocorre a inversão do espectro para $m > 2$, de forma similar ao que ocorre nos dados de densidade eletrônica.

Tabela 7.6 - Índice ω de $\delta E/E$.

m	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
1	$0,70$	$1,04$	$1,10$	$0,96$	$0,97$	$0,63$
2	$0,65$	$1,32$	$0,67$	$0,80$	$0,81$	$0,35$
3	$0,78(0,41)$	$1,26$	$0,66$	$0,76$	$0,62$	$0,46$
4	$0,83(0,29)$	$1,14$	$0,61$	$0,56$	$0,28$	$0,64$
5	$0,92(0,38)$	$1,05$	$0,53$	$0,38$	$0,20$	$0,60$

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, duas técnicas de análise espectral de séries temporais, o DFA e o MF-DFA, foram usadas para estudar as bolhas de plasma da ionosfera equatorial noturna. Enquanto a primeira é classificada como técnica de análise fractal, a segunda é classificada como multifractal. Uma vez que a análise via transformada de Fourier é amplamente usada nesse contexto, essas abordagens surgiram como uma tentativa de ampliar o conjunto de ferramentas que são usadas para estudar as bolhas.

Sendo ambas consideradas formas de se realizar a mesma medida (HENEGHAN; MCDARBY, 2000), o DFA e o espectro de potência diferem do fato de que a primeira possui a vantagem de poder ser empregada em séries temporais não estacionárias. Por outro lado, o processo de destendenciamento do método é feito através do ajuste por polinômios e causa o deslocamento do ponto de quebra da série. Esse problema, por sua vez, pode ser corrigido (KIYONO, 2015).

Os resultados mostraram a equivalência entre o DFA e o espectro de potência no sentido de revelar uma inclinação com índice espectral alto ($\alpha > 1$) em escalas intermediárias; de maneira geral, os índices α e β satisfizeram a regra $\beta = 2\alpha - 1$, fato que ficou mais evidente nos dados de $\delta E/E$. Ainda assim, como no caso 4 dos dados de $\delta Ne/Ne$, em que $\alpha = 2.11$ e $\beta = 5.88$, os índices revelaram uma discrepância muito grande. Isso pode ser explicado pela baixa resolução dos dados e pelo processo de ajuste das retas para se obter os índices, que é extremamente subjetivo. Talvez pelos mesmos motivos, algumas séries apresentaram duas inclinações usando uma técnica e apenas uma usando a outra. Essa falsa dupla inclinação também pode ser decorrente do ponto de transição que os espectros apresentam para formar a inclinação em si; às vezes, o ponto de quebra não é um cotovelo nítido, mas uma curva que envolve todo um intervalo de escalas. De uma forma ou de outra, usar o DFA como técnica auxiliar do espectro de potência ajuda a evitar conclusões espúrias. Além disso, as flutuações ponderadas do DFA podem ser usadas para detectar pontos de quebra automaticamente (GE; LEUNG, 2012), i.e., sem a subjetividade da inspeção visual feita por uma pessoa.

Dada a baixa resolução dos dados e dado o fato das séries apresentarem pontos de quebra, a análise dos resultados gerados pelo MF-DFA foi feita de duas formas: usando apenas o intervalo de escalas intermediárias em que a inclinação foi detectada e usando o maior intervalo possível de escalas. Como foi discutido, dentre todos os casos, apenas um único caso revelou um espectro com amplitude suficientemente grande para ser classificado como multifractal. Os casos em que $\omega \approx 0.7$ não foram

classificados como multifractais pois essa mesma amplitude foi detectada em séries fractais com duas inclinações. Os dados de $\delta E/E$ apresentaram espectros com amplitudes maiores em comparação com os dados de $\delta Ne/Ne$, que revelaram espectros cada vez menores à medida que o grau do polinômio aumentava. Isso pode ser devido tanto à qualidade dos dados de campo elétrico, quanto à presença de ondas eletrostáticas, que só estão presentes nesse tipo de dado. Porém, para compreender a causa do resultado é necessário um estudo mais extenso do que o feito aqui.

Talvez devido ao número reduzido de casos que foram analisados, 12 somando os dois tipos de dados, não foi possível detectar nenhum padrão nos espectros entre a subida e descida ou dentro e fora das bolhas. Detectar um padrão nessa área, como foi feito na ionosfera polar (SPICHER et al., 2014), é crucial para compreender o fenômeno. Usar extensivamente diferentes técnicas de análise é um caminho para revelar esse padrão e, nesse sentido, outras técnicas, como o espectro cruzado e a análise wavelet, também devem compor as ferramentas de análise dessa área.

Neste trabalho, não foi dado ênfase à fenomenologia do problema. O que foi constatado recupera o que já havia sido por Woodman (2009), reforçando que as inclinações encontradas nos espectros não são típicas de Kolmogorov, i.e., não têm valor de $-5/3$. Além disso, independente da metodologia empregada, as inclinações apresentam valores bastante elevados, que podem ser superiores a 5 (usando β como índice espectral).

Por último e fugindo do escopo de técnicas de análise de séries temporais, no que tange à resolução dos dados, a melhor resolução de $\delta Ne/Ne$ já alcançada foi através de um tipo de sonda de Langmuir, cuja resolução é de $5,7\ kHz$ (SPICHER et al., 2015). Os dados usados neste trabalho têm resolução de $1,2\ kHz$ e possuem limitação temporal de $1\ s$. Dessa forma, 2 segundos de dados gerados com a primeira sonda equivalem a 10 vezes o tamanho das séries usadas neste trabalho e, obviamente, um dado com 10 vezes mais pontos apresenta uma confiabilidade estatística maior.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABDU, A. M. Equatorial spread F plasma bubble irregularities under storm time disturbance electric fields. **Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics**, v. 75-76, p. 44–56, 2012. ISSN 13646826. 1, 59

ABRY, P.; SELLAN, F. The Wavelet-Based synthesis for fractional Brownian motion proposed by F. Sellan and Y. Meyer: remarks and fast implementation. **Applied and Computational Harmonic Analysis**, v. 3, p. 377–383, 1996. 29

BARABÁSI, A.-L.; STANLEY, H. E. **Fractals concepts on surface growth**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. 366 p. ISBN 0521483085. 11

BARDET, J. M.; LANG, G.; OPPENHEIM, G.; PHILIPPE, A.; TAQQU, M. S. Generators of long-range dependent processes: a survey. **Theory and applications of long-range dependence**, p. 579–623, 2003. 29

BOOKER, H. G.; WELLS, H. W. Scattering of radio waves by the F-region of the ionosphere. **Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity**, v. 43, n. 3, p. 249–256, 1938. ISSN 0096-8013. 59

BUNDE, A.; HAVLIN, S.; KANTELHARDT, J. W.; PENZEL, T.; PETER, J. H.; VOIGT, K. Correlated and uncorrelated regions in heart-rate fluctuations during sleep. **Physical Review Letters**, v. 85, n. 17, p. 3736–3739, 2000. ISSN 00319007. 23, 25

BUNDE, A.; SHLOMO, H. Fractal geometry, a brief introduction to. In: MEYERS, R. A. (Ed.). **Mathematics of complexity and dynamical systems**. [S.l.]: Springer, 2009. p. 409–428. 11, 14

CHAPRA, S. C. **Métodos numéricos aplicados com MATLAB para engenheiros e cientistas**. Porto Alegre: McGraw Hill, 2013. 655 p. ISBN 978-85-8055-176-1. 21, 22

CHEN, K. Y.; YEH, H. C.; SU, S. Y.; LIU, C. H.; HUANG, N. E. Anatomy of plasma structures in an equatorial spread F event. **Geophysical Research Letters**, v. 28, n. 16, p. 3107–3110, 2001. ISSN 1944-8007. 2

CHEN, Z.; HU, K.; CARPENA, P.; BERNAOLA-GALVAN, P.; STANLEY, H. E.; IVANOV, P. C. Effect of nonlinear filters on detrended fluctuation analysis. **Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics**, v. 71, n. 1, p. 1–11, 2005. ISSN 15393755. 29, 40

CHEN, Z.; IVANOV, P. C.; HU, K.; STANLEY, E. Effect of nonstationarities on detrended fluctuation analysis. **Phys. Rev. E**, v. 65, p. 041107, April 2002. 29, 40

CORMEM, T.; LEISERSON, C.; RIVEST, R.; STEIN, C. **Algoritmos**: teoria e prática. Rio de Janeiro: Elsevier, 2002. 916 p. ISBN 85-352-0926-3. 33

COSTA, E.; KELLEY, M. C. On the role of steepened structures and drift waves in equatorial spread F. **Journal of Geophysical Research: Space Physics**, v. 83, n. A9, p. 4359–4364, 1978. ISSN 2156-2202. 61

DYSON, P.; MCCLURE, J.; HANSON, W. In situ measurements of the spectral characteristics of F region ionospheric irregularities. **Journal of Geophysical Research**, Wiley Online Library, v. 79, n. 10, p. 1497–1502, 1974. 74

FEDER, J. **Fractals**. New York: Plenum, 1988. 283 p. ISBN 0306428512. 7, 9, 10, 11, 12, 15, 17, 18, 19, 32

GE, E.; LEUNG, Y. Detection of crossover time scales in multifractal detrended fluctuation analysis. **Journal of Geographical Systems**, v. 15, n. 2, p. 115–147, 2012. ISSN 1435-5949. 48, 87

GU, G.-F.; ZHOU, W.-X. Detrended fluctuation analysis for fractals and multifractals in higher dimensions. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 74, p. 061104, Dec 2006. 24, 26

HAERENDEL, G. Theory of equatorial spread F. Max-Planck Institute für Physik and Astrophysik. 1973. 60

HEINZEL, G.; RüDIGER, a.; SCHILLING, R.; HANNOVER, T. **Spectrum and spectral density estimation by the discrete Fourier transform (DFT), including a comprehensive list of window functions and some new flat-top**. Max Plank Institute, 2002. 1–84 p. 21, 22, 23, 35

HENEGHAN, C.; MCDARBY, G. Establishing the relation between detrended fluctuation analysis and power spectral density analysis for stochastic processes. **Physical Review E**, v. 62, n. 5, p. 6103–6110, 2000. 24, 25, 29, 40, 87

HU, K.; IVANOV, P. C.; CHEN, Z.; CARPENA, P.; STANLEY, E. Effect of trends on detrended fluctuation analysis. **Phys. Rev. E**, v. 64, p. 011114, June 2001. 29, 40, 42

HUANG, N. E.; SHEN, Z.; LONG, S. R.; WU, M. C.; SHIH, H. H.; ZHENG, Q.; YEN, N.-C.; TUNG, C. C.; LIU, H. H. The empirical mode decomposition and the

Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. In: THE ROYAL SOCIETY. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**. [S.l.], 1998. v. 454, n. 1971, p. 903–995. 74

HUANG, N. E.; WU, M.-L. C.; LONG, S. R.; SHEN, S. S.; QU, W.; GLOERSEN, P.; FAN, K. L. A confidence limit for the empirical mode decomposition and Hilbert spectral analysis. In: THE ROYAL SOCIETY. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**. [S.l.], 2003. v. 459, n. 2037, p. 2317–2345. 74

HURST, H. E.; BLACK, R. P.; SIMAIKA, Y. M. **Long-term storage**: an experimental study. London: Constable, 1965. 145 p. 13

HYSELL, D. An overview and synthesis of plasma irregularities in equatorial spread F. **Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics**, v. 62, n. 12, p. 1037–1056, 2000. ISSN 13646826. 1, 60

HYSELL, D. L.; KELLEY, M. C.; SWARTZ, W. E.; PFAFF, R. F.; SWENSON, C. M. Steepened structures in equatorial spread F: 1. New observations. **Journal of Geophysical Research**, v. 99, n. A5, p. 8827, 1994. ISSN 0148-0227. 1, 63

JAHN, J.-M.; LABELLE, J. Rocket measurements of high-altitude spread F irregularities at the magnetic dip equator. **Journal of Geophysical Research**, v. 103, n. A10, p. 23427, 1998. ISSN 0148-0227. 1, 35, 63

KANTELHARDT, J. W. Fractal and multifractal time series. In: **Mathematics of complexity and dynamical systems**. [S.l.]: Springer, 2012. p. 463–487. 12, 13, 21, 23, 30, 78

KANTELHARDT, J. W.; ASHKENAZY, Y.; IVANOV, P. C.; BUNDE, A.; HAVLIN, S.; PENZEL, T.; PETER, J. H.; Eugene Stanley, H. Characterization of sleep stages by correlations in the magnitude and sign of heartbeat increments. **Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics**, v. 65, n. 5, p. 1–6, 2002. ISSN 15393755. 25, 36

KANTELHARDT, J. W.; KOSCIELNY-BUNDE, E.; REGO, H. H.; HAVLIN, S.; BUNDE, A. Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis. **Physica A**, v. 295, p. 441–454, June 2001. 29, 40, 42

KANTELHARDT, J. W.; ZSCHIEGNER, S. A.; KOSCIELNY-BUNDE, E.; HAVLIN, S.; BUNDE, A.; STANLEY, H. Multifractal detrended fluctuation

analysis of nonstationary time series. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 316, n. 1-4, p. 87–114, 2002. ISSN 03784371. 23, 26, 27, 37, 38

KELLEY, M. C. **The earth's ionosphere**. [S.l.]: Academic Press, 2009. 576 p. ISBN 9780120884254. 57, 58, 71, 78

KELLEY, M. C.; PFAFF, R.; BAKER, K. D.; ULWICK, J. C.; LIVINGSTON, R.; RINO, C.; TSUNODA, R. Simultaneous rocket probe and radar measurements of equatorial spread F - Transitional and short wavelength results. **Journal of Geophysical Research**, v. 87, n. A3, p. 1575, 1982. ISSN 0148-0227. 60, 61, 62

KIYONO, K. Establishing a direct connection between detrended fluctuation analysis and Fourier analysis. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 92, p. 042925, Oct 2015. 50, 87

LABELLE, J.; KELLEY, M. C.; SEYLER, C. E. An analysis of the role of drift waves in equatorial spread F. **Journal of Geophysical Research**, v. 91, n. A5, p. 5513, 1986. ISSN 0148-0227. 60, 62

MA, Q. D. Y.; BARTSCH, R. P.; BERNAOLA-GALVÁN, P.; YONEYAMA, M.; IVANOV, P. C. Effect of extreme data loss on long-range correlated and anticorrelated signals quantified by detrended fluctuation analysis. **Phys. Rev. E**, v. 81, p. 031101, Mar 2010. 29, 40

MAKSE, H. A.; HAVLIN, S.; SCHWARTZ, M.; STANLEY, H. E. Method for generating long-range correlations for large systems. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 53, p. 5445–5449, May 1996. 28

MALAMUD, B. D.; TURCOTTE, D. L. Self-affine time series: measures of weak and strong persistence. **Journal of Statistical Planning and Inference**, v. 80, p. 173–196, 1999. 21

MATLAB. **Fast Fourier transform (FFT)**. 2015. Online; acessado em 01 de Dezembro de 2015. Disponível em: <http://www.mathworks.com/help/matlab/math/fast-fourier-transform-fft.html>. 33

_____. **Fractional Brownian motion synthesis (WFBM)**. 2015. Online; acessado em 02 de Fevereiro de 2016. Disponível em: <http://www.mathworks.com/help/wavelet/ref/wfbm.html>. 29

MCCLURE, J. P.; HANSON, W. B.; HOFFMAN, J. H. Plasma bubbles and irregularities in the equatorial ionosphere. **Journal of Geophysical Research**, v. 82, n. 19, p. 2650–2656, 1977. ISSN 2156-2202. 60

MENEVEAU, C.; SREENIVASAN, K. R. Simple multifractal cascade model for fully developed turbulence. **Physical Review Letters**, v. 59, n. 13, p. 1424–1427, 1987. ISSN 00319007. 30, 32

MURALIKRISHNA, P. Electron temperature variations in developing plasma bubbles - rocket observations from Brazil. **Advances in Space Research**, v. 37, p. 903–909, 2006. 67, 70

MURALIKRISHNA, P.; VIEIRA, L. P. Equatorial F-region irregularities generated by the Rayleigh-Taylor instability mechanism: rocket observations from Brazil. **Revista Brasileira de Geofísica**, v. 25, p. 135–149, 2007. ISSN 0102-261X. 59, 60

MURALIKRISHNA, P.; VIEIRA, L. P.; ABDU, M. a. Electron density and electric field fluctuations associated with developing plasma bubbles. **Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics**, v. 65, p. 1315–1327, 2003. ISSN 13646826. 65, 66, 67, 68, 69

MURALIKRISHNA, P.; VIEIRA, L. P.; ABDU, M. A. Experimental observations of medium and small scale electrostatic waves associated with ionospheric electron density fluctuations. **Geofísica Internacional Special Issue (Part B)**, v. 43, n. 002, p. 173, 2004. ISSN 0016-7169. 65, 66

MUZY, J.; BACRY, E.; ARNEODO, A. The multifractal formalism revisited with wavelets. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 04, p. 245–302, 1994. ISSN 0218-1274. 38

NAGY, A. F. Comparative aeronomy. In: _____. New York, NY: Springer New York, 2008. cap. Preface, p. 1–2. ISBN 978-0-387-87825-6. 57

NAVA, O. A. **Analysis of plasma bubble signatures in the ionosphere**. 81 p. Thesis — Air Force Institute of Technology, 2011. 1

NUNES, R. S. R. **Geometria fractal e aplicações**. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 1 2006. 9, 10

PENG, C. K.; BULDYREV, S. V.; HAVLIN, S.; SIMONS, M.; STANLEY, H. E.; GOLDBERGER, A. L. Mosaic organization of DNA nucleotides. **Physical Review E**, v. 49, n. 2, p. 1685–1689, 1994. ISSN 1063651X. 23, 25

RISHBETH, H. Basic physics of the ionosphere: a tutorial review. **Journal of the Institution of Electronic and Radio Engineers**, v. 58, n. 6S, p. S207, 1988. ISSN 02671689. 1

RODRIGUES, F. S.; KELLEY, M. C.; RODDY, P. a.; HUNTON, D. E.; PFAFF, R. F.; De La Beaujardière, O.; Bust Atmospheric, G. S. C/NOFS observations of intermediate and transitional scale-size equatorial spread F irregularities. **Geophysical Research Letters**, v. 36, n. 18, p. 2–5, 2009. ISSN 00948276. 1, 35, 74

SPICHER, A. **Spectral analysis of the electron density fluctuations measured by the ICI-2 sounding rocket**. Dissertação (Mestrado) — University of Oslo, 2013. 74

SPICHER, A.; MILOCH, W. J.; CLAUSEN, L. B. N.; MOEN, J. I. Plasma turbulence and coherent structures in the polar cap observed by the ICI-2 sounding rocket. **Journal of Geophysical Research: Space Physics**, v. 120, n. 12, p. 10,959–10,978, 2015. ISSN 2169-9402. 2, 88

SPICHER, A.; MILOCH, W. J.; MOEN, J. I. Direct evidence of double-slope power spectra in the high-latitude ionospheric plasma. **Geophysical Research Letters**, v. 41, n. 5, p. 1406–1412, 2014. ISSN 1944-8007. 1, 35, 88

SZCZEPANIAK, a.; MACEK, W. M. Asymmetric multifractal model for solar wind intermittent turbulence. **Nonlinear Processes in Geophysics**, v. 15, n. 4, p. 615–620, 2008. ISSN 1607-7946. 32

TAQQU, M. S.; TEVEROVSKY, V.; WILLINGER, W. Estimators for long-range dependence: an empirical study. **Fractals**, v. 3, n. 4, p. 785–798, 1995. 21

VIEIRA, L. P. **Características das irregularidades do plasma na ionosfera equatorial, observadas a partir de medidas in situ**. Dissertação (Mestrado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2002. 62

WALLACE, J. M.; HOBBS, P. V. **Atmospheric science**: an introductory survey. 2nd. ed. [S.l.]: Academic Press, 2006. 505 p. ISBN 978-0127329512. 58

WOODMAN, R. F. Spread F - An old equatorial aeronomy problem finally resolved? **Annales Geophysicae**, v. 27, n. 5, p. 1915–1934, 2009. ISSN 09927689. 1, 59, 60, 63, 88

WOODMAN, R. F.; LA HOZ, C. Radar observations of F region equatorial irregularities. **Journal of Geophysical Research**, v. 81, n. 31, 1976. ISSN 0148-0227. 1, 59

APÊNDICE C - RESULTADOS

C.1 Escalas alternativas usadas como Parâmetros do MF-DFA

Para tentar eliminar o problema dos pontos de quebra que os espectros obtidos através dos parâmetros do plasma ionosférico apresentam, apenas as frequências intermediárias foram selecionadas. Elas foram geradas com espaçamento exponencial através da função do Anexo B.2.1, e posteriormente, filtradas segundo os limites apresentados nas Tabelas C.1 e C.2. Dessa forma foi possível garantir que os valores em comum das escalas forem iguais. Os valores das Tabelas foram obtidos através dos espectros do Apêndice C.3.

Tabela C.1 - Limites inferior (s_i) e superior (s_f) das escalas usadas nos dados de $\delta Ne/Ne$.

	Caso 1		Caso 2		Caso 3		Caso 4	
m	s_i	s_f	s_i	s_f	s_i	s_f	s_i	s_f
1	10	118	10	246	10	98	11	57
2	10	118	13	246	16	98	23	82
3	11	142	16	246	19	142	27	204
4	13	142	23	246	23	246	33	246
5	13	142	27	246	33	246	47	246

Tabela C.2 - Limites inferior (s_i) e superior (s_f) das escalas usadas nos dados de $\delta E/E$.

	Caso 1		Caso 2		Caso 3		Caso 4	
m	s_i	s_f	s_i	s_f	s_i	s_f	s_i	s_f
1	10	47	10	27	10	246	10	246
2	10	82	10	27	10	246	13	246
3	10	82	10	33	10	246	13	246
4	10	118	10	39	13	246	16	246
5	10	118	10	47	16	246	19	246

C.2 Resultados do MF-DFA usando as Escalas do Apêndice C.1

A amplitude de variação entre os diferentes tipos de polinômios escolhidos foi uma das motivações para desconfiar desses resultados. No caso 4 dos dados de $\delta Ne/Ne$, o DFA2 tem $\omega = 0,93$, enquanto que o DFA3 tem $\omega = 0,31$. Além disso, diversos espectros de singularidades se apresentaram invertidos, em que o leque das flutuações diverge, diminuindo ainda mais a confiabilidade dos resultados.

Um dos únicos casos em que os resultados não apresentaram o espectro de singularidades invertido foi o caso 3 da Tabela C.4. Ao analisar esse caso em específico, notou-se que as escalas englobam quase todo o espectro de flutuações. Por isso, novos resultados foram gerados contendo o maior número de escalas possível. Como os novos resultados se revelaram mais confiáveis, esses foram descartados.

Tabela C.3 - Valores de ω de $\delta Ne/Ne$.

m	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
1	$0,44$	$0,64$	$0,51$	$0,58$
2	$0,11$	$0,37$	$0,73$	$0,93$
3	$0,08$	$0,28$	$0,44$	$0,31$
4	$0,16$	$0,26$	$0,36$	$0,20$
5	$0,14$	$0,20$	$0,23$	$0,25$

Tabela C.4 - Valores de ω de $\delta E/E$.

m	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
1	$0,52$	$1,70$	$1,10$	$0,96$
2	$0,79$	$1,23$	$0,67$	$0,84$
3	$1,23$	$0,87$	$0,66$	$0,80$
4	$1,13$	$0,98$	$0,68$	$0,68$
5	$1,24$	$0,95$	$0,66$	$0,64$

C.3 Comparação entre DFA e Espectro de Potência

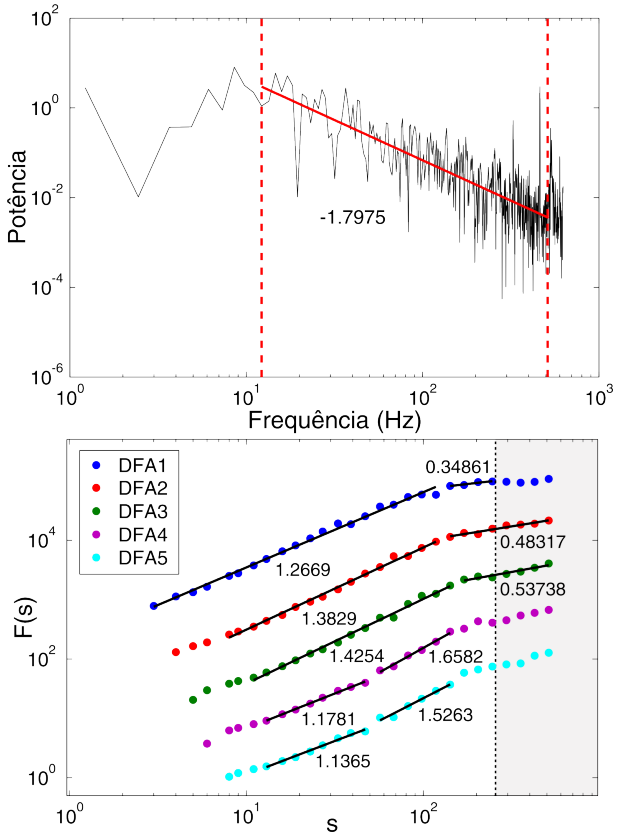
Nesta seção são apresentados os resultados referentes aos 5 casos faltantes do capítulo 7. A subseção C.3.1 apresenta os espectros de flutuação de densidade eletrônica, $\delta Ne/Ne$, e a subseção C.3.2 apresenta os espectros de flutuação de campo elétrico, $\delta E/E$.

C.3.1 Análise da Flutuação de Densidade Eletrônica

De maneira geral, o formato dos espectros obtidos via Fourier e DFA é semelhante: as baixas frequências (grandes escalas) revelam um comportamento plano ($\beta \approx 0$ e $\alpha \approx 0.5$), as frequências intermediárias exibem uma inclinação ingrime, e as altas frequências voltam a ficar planas. Às vezes, o ponto de quebra está localizado em regiões de alta frequência e o espectro não exibe uma região plana, ou exibe uma região plana pequena, como mostra a Figura C.1. O mesmo pode acontecer com

as regiões de baixa frequência, como mostra a Figura C.5. Além disso, em regiões intermediárias, o espectro pode apresentar duas inclinações ao invés de apenas uma, como mostram as Figuras C.3 e C.4. Nessa última, é interessantes notar que os espectros de Fourier e DFA revelam formatos similares: a região de altas frequências ($f > 100\ Hz$; $s < 40$) é plana ($\beta \approx 0$), enquanto que a região intermediária ($100 > f > 8$; $256 > s > 40$) possui duas inclinações. Apesar das diferenças entre os espectros gerados pelas duas técnicas, todos eles apresentam uma característica clara: uma inclinação ingrime que tem origem nas baixas frequências e termina nas altas frequências.

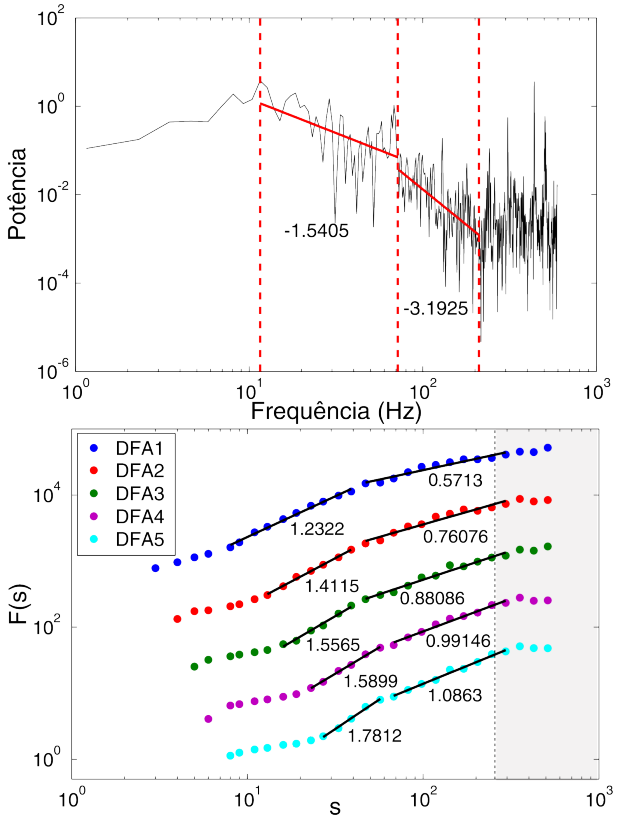
Figura C.1 - Espectros de Fourier e DFA de $\delta Ne/Ne$ do caso 1.



A área cinza no lado direito do gráfico do DFA representa as escalas que variam de $N/4$ a $N/2$. Os espectros de flutuação foram multiplicados por 5 para que não ficassem sobrepostos.

Fonte: produção do próprio autor.

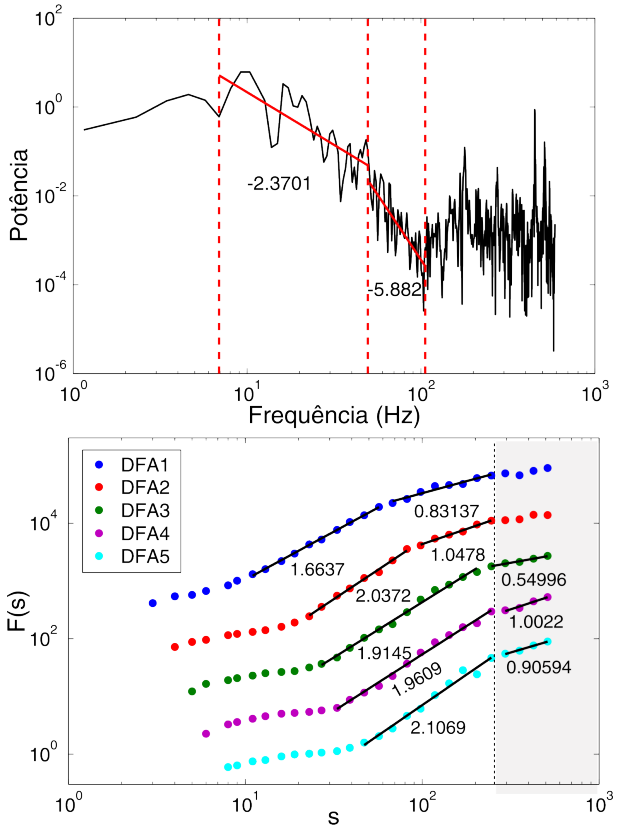
Figura C.2 - Espectros de Fourier e DFA de $\delta Ne/Ne$ do caso 2.



A área cinza no lado direito do gráfico do DFA representa as escalas que variam de $N/4$ a $N/2$. Os espectros de flutuação foram multiplicados por 5 para que não ficassem sobrepostos.

Fonte: produção do próprio autor.

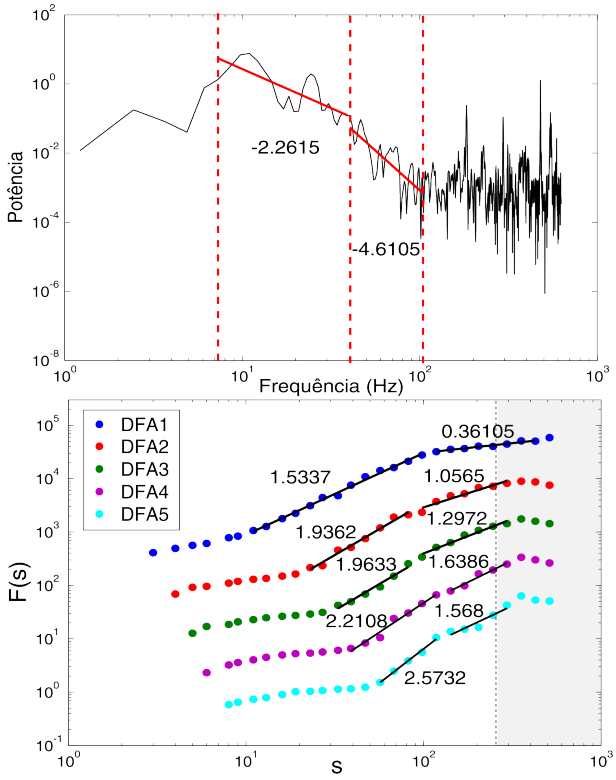
Figura C.3 - Espectros de Fourier e DFA de $\delta Ne/Ne$ do caso 4.



A área cinza no lado direito do gráfico do DFA representa as escalas que variam de $N/4$ a $N/2$. Os espectros de flutuação foram multiplicados por 5 para que não ficassem sobrepostos.

Fonte: produção do próprio autor.

Figura C.4 - Espectros de Fourier e DFA de $\delta Ne/Ne$ do caso 5.



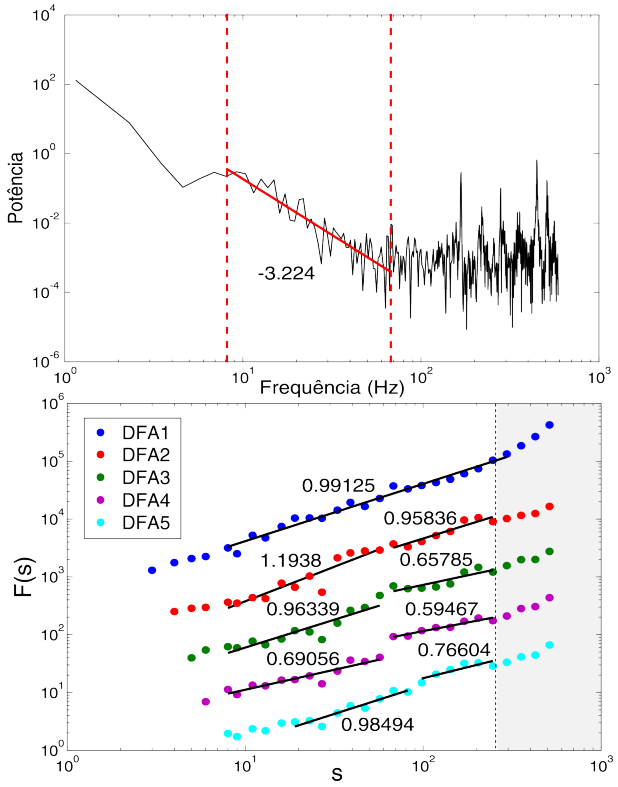
A área cinza no lado direito do gráfico do DFA representa as escalas que variam de $N/4$ a $N/2$. Os espectros de flutuação foram multiplicados por 5 para que não ficassem sobrepostos.

Fonte: produção do próprio autor.

C.3.2 Análise da Flutuação de Campo Elétrico

Assim como nos espectros dos dados de $\delta Ne/Ne$, os espectros gerados através da transformada de Fourier e do DFA apresentam consistência entre si. A Figura C.6 exibe espectros cuja inclinação é quase plana nas frequências baixa e intermediária ($\beta = 0,98$; $\alpha = 1,18$), mas que têm inclinação ingrime nas regiões de alta frequência ($\beta = 3,45$; $\alpha = 2,36$). A Figura C.7 apresenta o espectro de Fourier com uma pequena região plana nas altas frequências ($f > 360\ Hz$), característica que não pode ser vista no espectro via DFA. Porém, ambos espectros apresentam a característica de uma ampla área plana nas baixas frequências ($f < 50\ Hz$; $s > 40$) e uma inclinação ingrime ($\beta = 5,19$; $\alpha = 2,80$) nas frequências intermediárias e altas. As Figuras C.9 e C.10 revelam uma proximidade muito grande entre o DFA e o espectro de potência, sendo que ambos mostram duas inclinações nas escalas intermediárias. No espectro de Fourier da Figura C.10 foram ajustadas duas retas para mostrar que

Figura C.5 - Espectros de Fourier e DFA de $\delta Ne/Ne$ do caso 6.

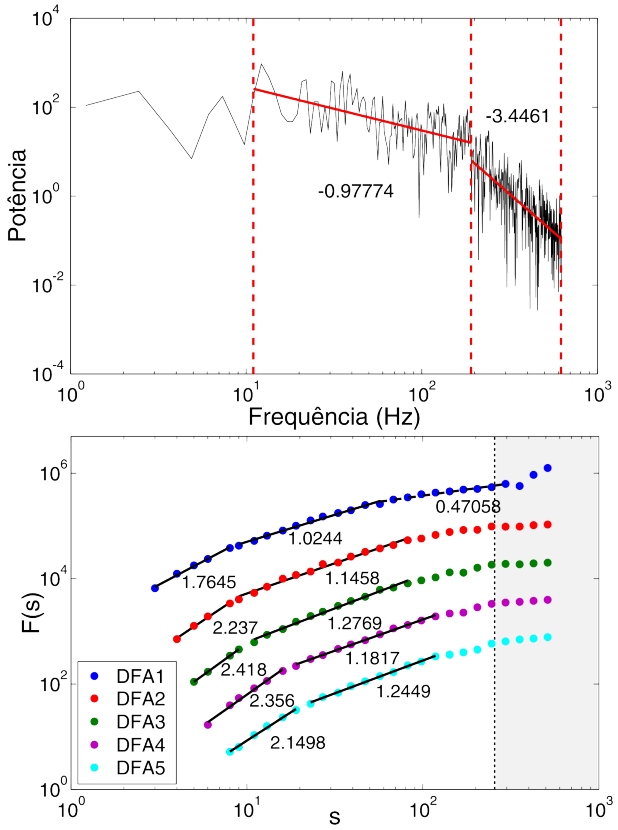


A área cinza no lado direito do gráfico do DFA representa as escalas que variam de $N/4$ a $N/2$. Os espectros de flutuação foram multiplicados por 5 para que não ficassem sobrepostos.

Fonte: produção do próprio autor.

existe apenas um índice espectral ($\beta_1 = 3,75$; $\beta_2 = 3,85$), como mostra o espectro do DFA.

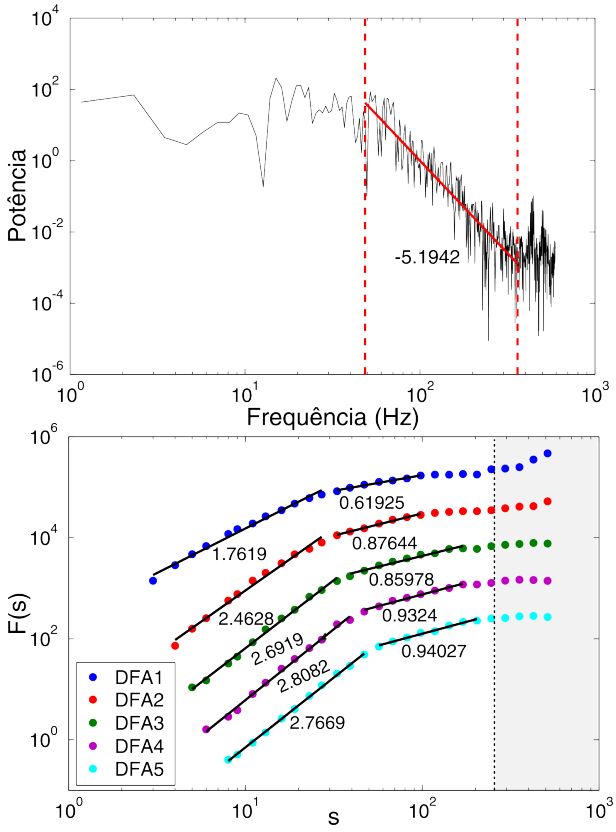
Figura C.6 - Espectros de Fourier e DFA de $\delta E/E$ do caso 1.



A área cinza no lado direito do gráfico do DFA representa as escalas que variam de $N/4$ a $N/2$. Os espectros de flutuação foram multiplicados por 5 para que não ficassem sobrepostos.

Fonte: produção do próprio autor.

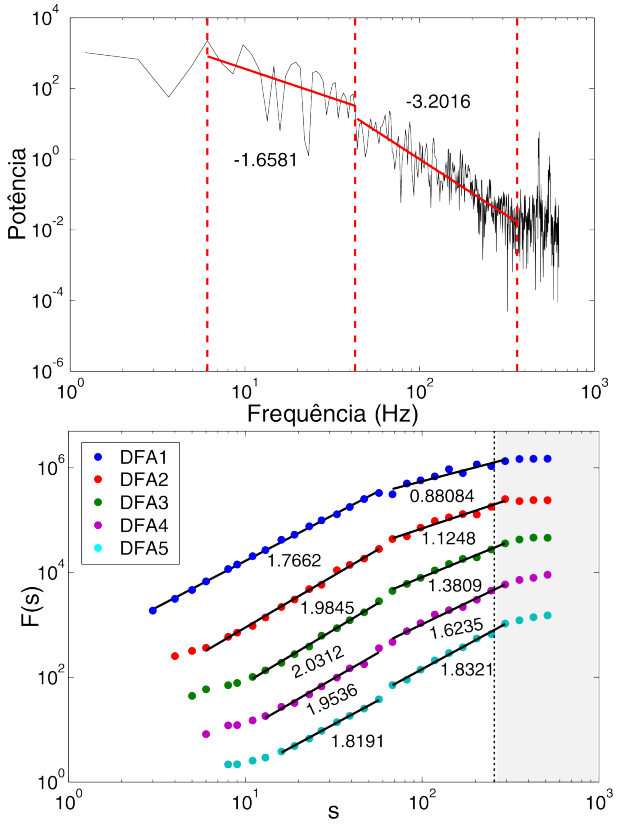
Figura C.7 - Espectros de Fourier e DFA de $\delta E/E$ do caso 2.



A área cinza no lado direito do gráfico do DFA representa as escalas que variam de $N/4$ a $N/2$. Os espectros de flutuação foram multiplicados por 5 para que não ficassem sobrepostos.

Fonte: produção do próprio autor.

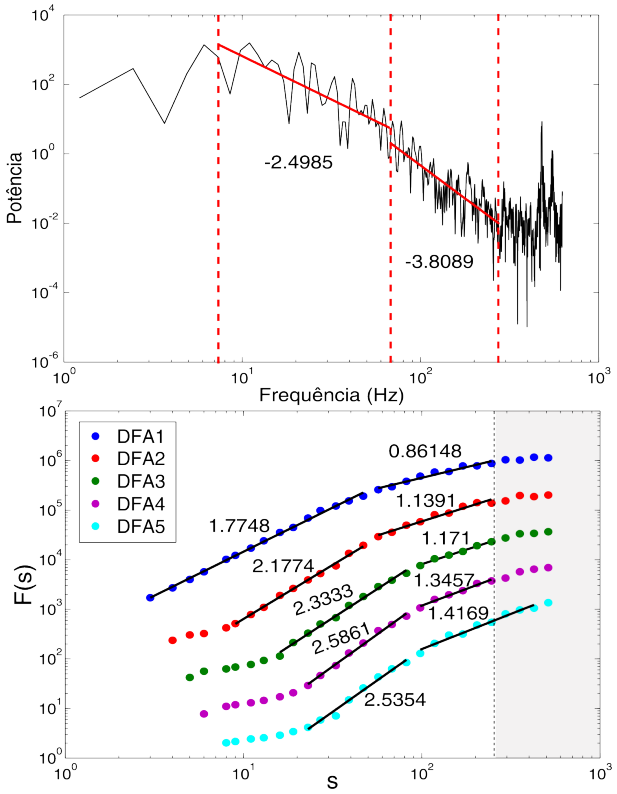
Figura C.8 - Espectros de Fourier e DFA de $\delta E/E$ do caso 3.



A área cinza no lado direito do gráfico do DFA representa as escalas que variam de $N/4$ a $N/2$. Os espectros de flutuação foram multiplicados por 5 para que não ficassem sobrepostos.

Fonte: produção do próprio autor.

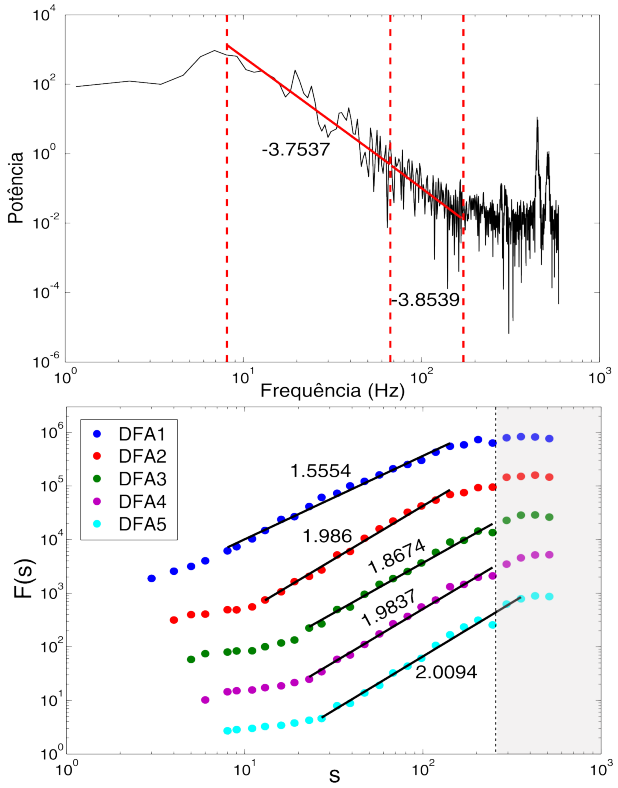
Figura C.9 - Espectros de Fourier e DFA de $\delta E/E$ do caso 5.



A área cinza no lado direito do gráfico do DFA representa as escalas que variam de $N/4$ a $N/2$. Os espectros de flutuação foram multiplicados por 5 para que não ficassem sobrepostos.

Fonte: produção do próprio autor.

Figura C.10 - Espectros de Fourier e DFA de $\delta E/E$ do caso 6.



A área cinza no lado direito do gráfico do DFA representa as escalas que variam de $N/4$ a $N/2$. Os espectros de flutuação foram multiplicados por 5 para que não ficassem sobrepostos.

Fonte: produção do próprio autor.

APÊNDICE B - FUNÇÕES

Os códigos estão escritos em Matlab. Para executar as funções, basta copiá-las para uma arquivo com extensão ".m" e executá-las normalmente pelo terminal do Matlab. As informações, como parâmetros de entrada e saída, da função são dadas pelo comando "$-help\ nome_da_função$". Esse apêndice está dividido em seções. Cada seção foi dedicada a uma função diferente; uma pequena explicação e um exemplo de aplicação também são mostrados.

B.1 Espectro de Potência

No exemplo abaixo um sinal teste (ruído branco) é gerado através da função do Matlab $wgn()$. Esse sinal será usado para calcular o espectro de potência. Um tempo t também é calculado para a série. Na última linha de código, a função $powspec$ é chamada com o parâmetro $'plot'$ para que o gráfico seja plotado ao final do cálculo. Para mais informações sobre a função, basta executar o comando no promt do Matlab "$-help\ powspec$".

```
>> % Exemplo do espectro de potências usando ruído branco
>> wn = wgn(1024, 1, 1);
>> t = (1:1024)/1024;
>> powspec(t, wn, 'plot');
>>
```

```
function [f, P] = powspec(varargin)
% powspec    Power Spectrum of a series X
%   This function estimates the frequency and the power of a signal
%   through the Fast Fourier Transform (FFT). The spectrum is
%   calculated by squaring the Fourier coefficients.
%
% Usage:
%   [f, P] = powspec(x, t, 'velocity', v, window, plot)
%                                       calculates the power(P) for
%                                       each frequency(F) of a time
%                                       series(X)
%
% Inputs:
%   x       time series (vector with samples)
%   t       time (vector with the time of each sample)
%   v       optional; mean velocity during the measure, must be used
%           after 'velocity'
```

```
18 %   win    optional; can be:
19 %              'hanning'  - multiplies the time series by a hanning
20 %                           window
21 %              'hamming'  - multiplies the time series by a hamming
22 %                           window
23 %              'blackman' - multiplies the time series by a blackman
24 %                           window
25 %   'plot' optional; plot the spectrum in a new figure
26 %
27 % Outputs:
28 %   f    frequency
29 %   P    power
30 %
31
32     if nargin < 2
33         error('Insuficient number of parameters');
34     else
35         t = varargin{2};
36         t = t(:);
37         x = varargin{1};
38         x = x(:);
39
40         N = length(x);
41         dt = (t(end)-t(1))/(N-1);
42         fs = 1/dt;
43     end
44     if any(strcmpi(varargin, 'hanning'))
45         win = hanning(N);
46         x=x.*win;
47     elseif any(strcmpi(varargin, 'hamming'))
48         win = hamming(N);
49         x=x.*win;
50     elseif any(strcmpi(varargin, 'blackman'))
51         win = blackman(N);
52         x=x.*win;
53     else
54         win = ones(N, 1);
55     end
56
57     S = sum(win);
58     c = fft(x);
59     c = c(2:(N/2+1));
60     P = (2*abs(c).^2)./(S^2);
61
62     f = (1:N/2)*(fs/N);
```

```
63
64      xLabelName = 'Frequency (Hz)';
65
66      if any(strcmpi(varargin, 'velocity'))
67          iArg = 1;
68          while ~strcmpi(varargin(iArg), 'velocity')
69              iArg = iArg+1;
70          end
71          vel = varargin{iArg+1};
72          f = f.*(2*pi)/vel;
73          xLabelName = 'Wavenumber (rad/km)';
74      end
75
76      if any(strcmpi(varargin, 'plot'))
77          figure;
78          subplot(2,1,1);
79          plot(t, x,'k-');
80          title('Time Series');
81          subplot(2,1,2);
82          loglog(f, P, 'k-');
83          title('Power Spectrum');
84          xlabel(xLabelName);
85      end
86  end
```

B.2 DFA

No exemplo abaixo o DFA será usado para calcular o coeficiente de correlação de um ruído branco. Primeiro o ruído branco é gerado através da função *wgn*. Depois, as escalas são geradas de maneira exponencial, usando a função definida na subseção B.2.1. Se for necessário, pode-se substituir a terceira linha do exemplo por `scales = 4:256;`. Por último, a função *dfa* é usada.

```
1  >> % Exemplo do DFA usando ruído branco
2  >> wn = wgn(1024, 1, 1);
3  >> scales = logscales(4, 256);
4  >> dfa(wn, scales, 1, 1);
5  >>
```

```
1  function [alpha, f] = dfa(x, scales, order, fflag)
2  % Detrended Fluctuation Analysis of signal 'x'.
```

```
3  %
4  % Usage:
5  %   [alpha, f] = dfa(x, scales, order, fflag);
6  %
7  % Inputs:
8  %   x        signal (time series)
9  %   scales   vector with all desired scales
10 %   order    optional; polynomial order for the least square
11 %            (order = 1 standard DFA)
12 %   fflag    optional; 1|0 - for output log-log plot of F('scales')
13 %                            versus 'scales'
14 %
15 % Outputs:
16 %   alpha    fit of log(f) versus log(scales)
17 %   f        average fluctuation
18 %
19
20     if nargin < 4
21         fflag = 0;
22     end
23     if nargin < 3
24         order = 1;
25     end
26
27     xLen = length(x);
28
29     %Step 1 - Cumulative sum minus mean
30     y = cumsum(x(:) - mean(x));
31     %y = (x(:) - mean(x));
32
33     nScales = length(scales);
34     f = zeros(nScales, 1);
35     for iScale=1:nScales
36         scale = scales(iScale);
37
38         %Step 2 - Divide 'y' into 'n' segments of length 's'
39         nSgm = floor(xLen/scale);
40
41         %Step 3 - Calculate local trend for each segment by
42         %                                          least-square
43         fq = zeros(nSgm, 1);
44         for iSgm=1:nSgm
45             values = scale*(iSgm-1)+1:scale*iSgm;
46             pol = polyfit(values, y(values)', order);
47             fq(iSgm) = (1/scale)*sum((y(values)' - ...
```

```
                                        polyval(pol, values)).^2);
        end
        fqInv = zeros(nSgm, 1);
        for iSgm=1:nSgm
            values = xLen-scale*iSgm+1:xLen-scale*(iSgm-1);
            pol = polyfit(values, y(values)', order);
            fqInv(iSgm) = (1/scale)*sum((y(values)' - ...
                                        polyval(pol, values)).^2);
        end
        f(iScale) = sqrt((sum(fq)+sum(fqInv))/(2*nSgm));
    end

    pol = polyfit(log(scales)', log(f), 1);
    alpha = pol(1);

    if fflag
        figure;
        loglog(scales, f, 'ko', 'MarkerSize', 10);
        hold on;
        loglog(scales, exp(polyval(pol, log(scales))), ...
                                        'k-', 'LineWidth', 2);
        title(['F_{2}(s) with h_{2} = ' num2str(alpha)], ...
                                        'FontSize', 24);
        xlabel('scales', 'FontSize', 20);
        ylabel('F_{2}(s)', 'FontSize', 20);
        set(gca, 'FontSize', 16);
    end
end
```

B.2.1 Escalas logarítmicas

```
function [scales] = logscales(a, b, n)
% Generates exponentially spaced numbers beetween lower and
% upper limits.
%
% Usage:
%   [scales] = pmodelSignal(a, b, n);
%
% Inputs:
%   a       lower bound; first scale
%   b       upper bound; last scale
%   n       optional; number os scales (if not defined,
%                                   n = (log2(b)-log2(a))*4)
%
```

```
% Outputs:
%   scales  array with exponentially spaced scales
%

    if nargin < 3
       n = (log2(b) - log2(a))*4;
    end

    scales = round(logspace(log10(a), log10(b), n));
    scales = unique(scales, 'first');
end
```

B.3 MF-DFA

No exemplo abaixo, o três parâmetros necessários para a análise do MF-DFA são calculados. Primeiro, o sinal wn é um ruído branco gerado a partir da função wgn. As escalas são geradas, com espaçamento exponencial, a partir da função do anexo B.2.1. E, por último, o parâmetro q é definido como um vetor com valores variando de -10 a 10.

```
>> % Exemplo do MF-DFA usando ruído branco
>> wn = wgn(1024, 1, 1);
>> scales = logscales(10, 256);
>> q = -10:10;
>> mfdfa(wn, scales, q, 1, 1);
>>
```

```
function [alpha, fAlpha, q, tauq, hq] = mfdfa(x, scales, ...
                                              q, order, fflag)
% Calculates the multifractal spectrum of signal 'x' using
% DFA method.
%
% Usage:
%   [alpha, falpha, q, tauq] = mfdfa(x, scales, q, order, fflag);
%
% Inputs:
%   x         signal (time series)
%   scales    vector with all desired scales
%   q         vector with all q-order that weight the variations
%   order     optional; polynomial order for the least square
%                                   (order = 1 standard DFA)
```

```
15 %   fflag    optional; 1|0 - for output plot of singularity
16 %                                spectrum and vector of moments
17 %
18 % Outputs:
19 %   alpha    Singularity Strength
20 %   falpha   Hausdorff Dimension
21 %   q        List of Exponents
22 %   tauq     Vector of Moments
23 %
24
25     if nargin < 5
26         fflag = 0;
27     end
28     if nargin < 4
29         order = 1;
30     end
31
32     nq = length(q);
33     xLen = length(x);
34
35     %Step 1 - Cumulative sum minus mean
36     y = cumsum(x(:) - mean(x));
37
38     nScales = length(scales);
39     f = zeros(nq, nScales);
40     for iScale=1:nScales
41         scale = scales(iScale);
42
43         %Step 2 - Divide 'y' into 'n' segments of length 's'
44         nSgm = floor(xLen/scale);
45
46         %Step 3 - Calculate local trend for each segment by
47         %                                          least-square
48         fq = zeros(nSgm, 1);
49         for iSgm=1:nSgm
50             values = scale*(iSgm-1)+1:scale*iSgm;
51             pol = polyfit(values, y(values)', order);
52             fq(iSgm) = (1/scale)*sum((y(values)' - ...
53                                       polyval(pol, values)).^2);
54         end
55         fqInv = zeros(nSgm, 1);
56         for iSgm=1:nSgm
57             values = xLen-scale*iSgm+1:xLen-scale*(iSgm-1);
58             pol = polyfit(values, y(values)', order);
59             fqInv(iSgm) = (1/scale)*sum((y(values)' - ...
```

```
60                                          polyval(pol, values)).^2);
61          end
62          for iq = 1:nq
63              if(q(iq) == 0)
64                  f(iq, iScale) = exp(1/(4*nSgm) * (sum(log(fq))+ ...
65                                          sum(log(fqInv))));
66              else
67                  f(iq, iScale) = (1/(2*nSgm)*(sum(fq.^(q(iq)/2))+...
68                                  sum(fqInv.^(q(iq)/2))))^(1/q(iq));
69              end
70          end
71      end
72      hq = zeros(nq, 1);
73      for iq = 1:nq
74          coef = polyfit(log(scales), log(f(iq, :)), 1);
75          hq(iq) = coef(1);
76      end
77
78      tauq = hq.*q' - 1;
79
80      % First Derivative - Legendre Transform
81      alpha = diff(tauq);
82      for iAlpha = 1:length(tauq)-1
83          alpha(iAlpha) = alpha(iAlpha)/(q(iAlpha+1)-q(iAlpha));
84      end
85      fAlpha = (q(1:end-1).*alpha') - tauq(1:end-1)';
86
87      % Remove discontinuity
88      q1 = q;
89      idx = (q>.5 & q<1.5); %(q > 0 & q < 2);
90      q1(idx) = [];
91      Dq = tauq./(q-1)';
92      Dq(idx) = [];
93
94      % Plots
95      if fflag
96          figure;
97          loglog(scales, f, '.', 'MarkerSize', 20, 'LineWidth', 2.5);
98          title('Fluctuation Functions - F_{q} versus s', ...
99                'FontSize', 24);
100         xlabel('s', 'FontSize', 20);
101         ylabel('F_{q}(s)', 'FontSize', 20);
102         legend(num2str(q'));
103         set(gca, 'FontSize', 16);
104         hold on;
```

```
105         for iq = 1:nq
106             loglog(scales, exp(polyval(polyfit(log(scales), ...
107                    log(f(iq, :)), 1), log(scales))));
108         end
109         hold off;
110 
111         figure;
112         plot(q, hq, 'ko', 'MarkerSize', 6, 'LineWidth', 2.5);
113         title('Hurst Exponent - h(q) versus q', 'FontSize', 24);
114         xlabel('q', 'FontSize', 20);
115         ylabel('h(q)', 'FontSize', 20);
116         set(gca, 'FontSize', 16);
117 
118         figure;
119         plot(q1, Dq, 'ko', 'MarkerSize', 10, 'LineWidth', 2.5);
120         title('Generalized Dimensions - D(q) versus q', ...
121               'FontSize', 24);
122         xlabel('q', 'FontSize', 20);
123         ylabel('Dq', 'FontSize', 20);
124         set(gca, 'FontSize', 16);
125 
126         figure;
127         plot(q, tauq, 'ko', 'MarkerSize', 10, 'LineWidth', 2);
128         title('Mass exponent - \tau(q) versus q', ...
129               'FontSize', 24);
130         xlabel('q', 'FontSize', 20);
131         ylabel('\tau(q)', 'FontSize', 20);
132         set(gca, 'FontSize', 16);
133 
134         figure;
135         plot(alpha, fAlpha, 'ko', 'MarkerSize', 10, 'LineWidth', 2);
136         title('Singularity Spectrum - f(\alpha) versus \alpha', ...
137               'FontSize', 24);
138         xlabel('\alpha', 'FontSize', 20);
139         ylabel('f(\alpha)', 'FontSize', 20);
140         set(gca, 'FontSize', 16);
141     end
142 end
```

B.4 Filtro de Fourier

No exemplo abaixo a função $ffiltering$ é usada para gerar uma série de 512 pontos com expoente de Hurst $H = 0.5$, que significa uma série não correlacionada.

```
>> % Exemplo do filtro de Fourier para gerar um ruído branco
>> x = ffiltering(.5, 512);
>> plot(x);
>>
```

```
function [x] = ffiltering(H, n, fflag)
% Fourier filtering method to generate correlated series.
%
% Usage:
%   [x] = ff(H, n, fflag);
%
% Inputs:
%   H        Hurst exponent (must be between 0.5 and 1.5)
%   n        length of the output series x
%   fflag    optional; 1|0 - for output plot of x
%
% Outputs:
%   x        signal (time series)
%

    if H < .5 || H > 1.5
        error('Parameter H must be between 0.5 and 1.5');
    end

    if nargin < 3
        fflag = 0;
    end

    beta = 2*H-1;

    n = 4*n;
    x = wgn(n, 1, 1);

    c = (fft(x));
    c(1) = [];
    m = 1:(length(c)/2)+1;
    c = 2*c(m)'.*((m/n).^(-beta/2));

    ic = ifft(c);
    x = real(ic((n/8+1):(n*3/8)));

    x = x-mean(x);

```

```
39      if fflag
40          figure;
41          plot(x);
42          title(strcat('Correlated Series (H=', num2str(H), ')'), ...
43                       'FontSize', 24);
44          xlabel('Time', 'FontSize', 20);
45          ylabel('Amplitude', 'FontSize', 20);
46          set(gca, 'FontSize', 16);
47      end
48  end
```

B.5 Modificação da série

Nessa seção, duas funções são apresentadas para modificar séries temporais. Na subseção B.5.1 é apresentada a função que adiciona tendência nos dados. Na subseção B.5.2 é apresentada a função do filtro de Fourier modificado que cria um crossover na série.

B.5.1 Adição de tendência

No exemplo abaixo a função $ffiltering$ é usada para gerar uma série de 512 pontos e a função *addtrend* é usada para adicionar uma tendência linear $p = 1$ nos dados. A constante a foi definida com valor 10^2.

```
1  >> % Exemplo da adição de uma tendência linear em um ruído branco
2  >> x = ffiltering(.5, 512);
3  >> px = addtrend(x, 10^2, 1)
4  >> plot(px);
5  >>
```

```
1  function [px] = addtrend(x, a, p, fflag)
2  % Combine a monotonous trend with a signal by adding polynomials of
3  % different order p to the time series x.
4  %
5  % Usage:
6  %    [px] = ff(x, a, p, fflag);
7  %
8  % Inputs:
9  %    x         time series
10 %    a         a constant (e.g. 10^2)
11 %    p         polynomial order (not necessarily an integer)
```

```
%   fflag    optional; 1|0 - for output plot of px
%
% Outputs:
%   px       modified signal (time series)
%

    if nargin < 4
        fflag = 0;
    end

    x = x(:);
    n = length(x);
    i = (1:n)'/n;

    length(x)
    length(i)

    px = x + a.*(i.^p);

    if fflag
        figure;
        plot(px);
        title(strcat('Series with trend (a=', num2str(a), ', p=', ...
                     num2str(p), ')'), 'FontSize', 24);
        xlabel('Time', 'FontSize', 20);
        ylabel('Amplitude', 'FontSize', 20);
        set(gca, 'FontSize', 16);
    end
end
```

B.5.2 Filtro de Fourier Modificado

No exemplo abaixo a função $mffiltering$ é usada para gerar uma série de 1024 pontos com ponto de quebra $S_x = 100$ e expoente de Hurst $H = 0.9$.

```
>> % Exemplo do filtro de Fourier modificado para gerar uma série
>> x = mffiltering(.9, 100, 1024);
>> plot(x);
>>
```

```
function [x] = mffiltering(H, sx, n, fflag)
% Modified Fourier filtering method to generate correlated series
```

```
3  % with different behaviours (crossover).
4  %
5  % Usage:
6  %   [x] = ff(H, sx, n, fflag);
7  %
8  % Inputs:
9  %   H         Hurst exponent (must be between 0.5 and 1.5)
10 %   sx        Scale crossover (fx = 1/sx)
11 %   n         length of the output series x
12 %   fflag     optional; 1|0 - for output plot of x
13 %
14 % Outputs:
15 %   x         signal (time series)
16 %
17
18     if H < .5 || H > 1.5
19         error('Parameter H must be between 0.5 and 1.5');
20     end
21
22     if nargin < 4
23         fflag = 0;
24     end
25
26     beta = 2*H-1;
27
28     n = 4*n;
29     x = wgn(n, 1, 1);
30
31     c = (fft(x));
32     c(1) = [];
33     m = 1:(length(c)/2)+1;
34     c = c(m);
35     f = m./n;
36
37     fx = 1/sx;
38     ix = find(f>fx);
39
40     c(ix) = 2*c(ix)'.*((f(ix)/fx).^(-beta/2));
41
42     ic = ifft(c);
43     x = real(ic((n/8)+1:(n*3/8)));
44
45     x = x-mean(x);
46
47     if fflag
```

```
48          figure;
49          plot(x);
50          title(strcat('Correlated Series (H=', num2str(H), ')'), ...
51                       'FontSize', 24);
52          xlabel('Time', 'FontSize', 20);
53          ylabel('Amplitude', 'FontSize', 20);
54          set(gca, 'FontSize', 16);
55      end
56  end
```

B.6 P-model

No exemplo abaixo a função *pmodel* é usada para gerar uma série de 512 pontos. O número de etapas definido foi de 5, e os parâmetros $p = 0.7$ e $l1 = l2 = 0.5$.

```
1  >> % Exemplo do p-model para gerar uma série de 512 pontos
2  >> x = pmodel(5, .7, .5, .5, 512);
3  >> plot(x);
4  >>
```

```
1  function x = pmodel(steps, p, i1, i2, n, fflag)
2  % Creates a multifractal signal based on the p-model.
3  %
4  % Usage
5  %    [x] = pmodel(steps, p, i1, i2, n, fflag);
6  %
7  % Inputs:
8  %    steps     number of loops
9  %    p         probability [0 1]
10 %    i1        size of gap 1
11 %    i2        size of gap 2
12 %    n         optional; sample length (if not defined, n = 2^steps)
13 %    fflag     optional; 1|0 - for output plot
14 %
15 % Outputs:
16 %    x         multifractal signal (length = 2^steps OR length = n)
17 %
18
19     if nargin < 6
20         fflag = 0;
21     end
22     if nargin < 5
```

```
23          n = 2^steps;
24      end
25
26      x = ones(n, 1);
27      p2 = p;
28      p1 = 1-p2;
29
30      for iStep = 0:steps-1
31          nSgm = 2^iStep;
32          sgm = round(n/nSgm);
33
34          for iSgm = 1:nSgm
35
36              if rand(1, 1) >= .5
37                  x(((iSgm-1)*sgm)+1:(iSgm*sgm)*i1) = ...
38                      x(((iSgm-1)*sgm)+1:(iSgm*sgm)*i1)*2*p1;
39                  x(((iSgm-1)*sgm)+1+sgm*i1:(iSgm*sgm)) = ...
40                      x(((iSgm-1)*sgm)+1+sgm*i1:(iSgm*sgm))*2*p2;
41              else
42                  x(((iSgm-1)*sgm)+1:(iSgm*sgm)*i2) = ...
43                      x(((iSgm-1)*sgm)+1:(iSgm*sgm)*i2)*2*p2;
44                  x(((iSgm-1)*sgm)+1+sgm*i2:(iSgm*sgm)) = ...
45                      x(((iSgm-1)*sgm)+1+sgm*i2:(iSgm*sgm))*2*p1;
46              end
47          end
48      end
49
50      if fflag
51          figure;
52          title(['P-model with ' num2str(n) ' points'], 'FontSize', ...
53                                                                  24);
54          xlabel('Points', 'FontSize', 20);
55          ylabel('Amplitude', 'FontSize', 20);
56          plot(x./max(x)-4, 'k-', 'LineWidth', 2.0);
57          set(gca, 'FontSize', 16);
58      end
59  end
```

B.6.1 P-model analítico

No exemplo abaixo o espectro de singularidades é plotado através da resolução analítica do p-model com os parâmetros $p = 0.7$ e $l1 = l2 = 0.5$.

```
>> % Exemplo do p-model para gerar uma série de 512 pontos
>> [alpha, falpha] = apmodel(.7, .5, .5);
>> plot(alpha, falpha);
>>
```

```
function [alpha, falpha] = apmodel(p, l1, l2, fflag, n)
% Calculates the multifractal spectrum according to p-model.
%
% Usage:
%   [alpha, falpha] = apmodel(p, l1, l2, fflag, n)
%
% Inputs:
%   p         eddy partition measure (0 <= p <= 1)
%   l1        eddy scale 1
%   l2        eddy scale 2
%   fflag     optional; 1|0 - for output plot of falpha versus alpha
%   n         optional; number of points of alpha
%
% Outputs:
%   alpha     singularity strength
%   falpha    Hausdorff dimension
%

    if nargin < 4
        fflag = 0;
    end
    if nargin < 5
        n = 100;
    end
    if p > 1
        error('Arg p have to be beetween 0 and 1');
    end

    m = 2:n-1;
    p1 = p;
    p2 = 1-p;

    falpha = zeros(n, 1);
    alpha = zeros(n, 1);

    falpha(end-1:-1:2) = ((n./m-1).*log(n./m-1)-(n./m).*...
                          log(n./m))./(log(l1)+(n./m-1).*log(l2));
    alpha(end-1:-1:2) = (log(p1)+(n./m-1)*log(p2))./...
                         (log(l1)+(n./m-1)*log(l2));
```

```
40
41      % leftmost point
42      alpha(1) = log(p1)/log(l1);
43
44      % rightmost point
45      alpha(end) = log(p2)/log(l2);
46
47      if fflag
48          figure;
49          plot(alpha, falpha);
50          title('Singularity Spectrum', ...
51                'FontSize', 24);
52          xlabel('\alpha', 'FontSize', 20);
53          ylabel('f(\alpha)', 'FontSize', 20);
54          set(gca, 'FontSize', 16);
55      end
56  end
```

B.6.2 Processo Binomial Multiplicativo analítico

Abaixo, o processo binomial multiplicativo é calculado para $p = 0.7$.

```
1  >> % Exemplo do processo binomial multiplicativo
2  >> [alpha, falpha] = abmp(.7, -10:10, 1);
3  >>
```

```
1  function [alpha, falpha, Dq, tauq] = abmp(p, q, fflag)
2  % Calculates the multifractal spectrum according to binomial
3  % multiplicative process.
4  %
5  % Usage:
6  %   [alpha, falpha, Dq, tauq] = abmp(p, q, fflag)
7  %
8  % Inputs:
9  %   p         eddy partition measure (0 <= p <= 1)
10 %   q         weight exponent
11 %   fflag     optional; 1|0 - for output plot of falpha versus alpha
12 %
13 % Outputs:
14 %   alpha     singularity strength
15 %   falpha    Hausdorff dimension
16 %   Dq        Fractal dimension
```

```
%    tauq      mass exponent
%

    if nargin < 3
        fflag = 0;
    end

    idx = find(q==1);

    tauq = -log(p.^q + ((1-p).^q))/log(2);
    Dq = -tauq./(1-q);

    if ~isempty(q)
        qtau = q;
        qtau(idx) = [];
        Dq(idx) = [];
    end

    % First Derivative - Legendre Transform
    alpha = diff(tauq);
    for iAlpha = 1:length(tauq)-1
        alpha(iAlpha) = alpha(iAlpha)/(q(iAlpha+1)-q(iAlpha));
    end
    falpha = (q(1:end-1).*alpha) - tauq(1:end-1);

    if fflag
        figure;
        plot(qtau, Dq, 'LineWidth', 2.5);
        title('Generalized Dimensions - D_{q} versus q', ...
              'FontSize', 24);
        xlabel('q', 'FontSize', 20);
        ylabel('Dq', 'FontSize', 20);
        set(gca, 'FontSize', 16);

        figure;
        plot(qtau, alpha, 'LineWidth', 2.5);
        title('Lipschitz Holder Exponent - \alpha versus q', ...
              'FontSize', 24);
        xlabel('q', 'FontSize', 20);
        ylabel('\alpha', 'FontSize', 20);
        set(gca, 'FontSize', 16);

        figure
        plot(q, tauq, 'LineWidth', 2.5);
        title('Mass Exponent - \tau(q) versus q', 'FontSize', 24);
```

```
62          xlabel('q', 'FontSize', 20);
63          ylabel('\tau(q)', 'FontSize', 20);
64          set(gca, 'FontSize', 16);
65
66          figure;
67          plot(alpha, falpha, 'LineWidth', 2.5)
68          title('Singularity Spectrum - f(\alpha) versus \alpha', ...
69                                      'FontSize', 24);
70          xlabel('\alpha', 'FontSize', 20);
71          ylabel('f(\alpha)', 'FontSize', 20);
72          set(gca, 'FontSize', 16);
73      end
74  end
```

B.7 Processo de Decomposição Empírico (EMD)

Abaixo, um exemplo de como a tendência pode ser obtida através do EMD.

```
1  >> % Exemplo da adição de uma tendência linear em um ruído branco
2  >> x = ffiltering(.5, 512);
3  >> px = addtrend(x, 10^2, 1);
4  >> imf = emd(px');
5  >> plot(imf(:, end));
6  >>
```

```
1  function [alpha, falpha, Dq, tauq] = abmp(p, q, fflag)
2  % Calculates the multifractal spectrum according to binomial
3  % multiplicative process.
4  %
5  % Usage:
6  %   [alpha, falpha, Dq, tauq] = abmp(p, q, fflag)
7  %
8  % Inputs:
9  %   p        eddy partition measure (0 <= p <= 1)
10 %   q        weight exponent
11 %   fflag    optional; 1|0 - for output plot of falpha versus alpha
12 %
13 % Outputs:
14 %   alpha    singularity strength
15 %   falpha   Hausdorff dimension
16 %   Dq       Fractal dimension
17 %   tauq     mass exponent
```

```
18 %
19
20     if nargin < 3
21         fflag = 0;
22     end
23
24     idx = find(q==1);
25
26     tauq = -log(p.^q + ((1-p).^q))/log(2);
27     Dq = -tauq./(1-q);
28
29     if ~isempty(q)
30         qtau = q;
31         qtau(idx) = [];
32         Dq(idx) = [];
33     end
34
35     % First Derivative - Legendre Transform
36     alpha = diff(tauq);
37     for iAlpha = 1:length(tauq)-1
38         alpha(iAlpha) = alpha(iAlpha)/(q(iAlpha+1)-q(iAlpha));
39     end
40     falpha = (q(1:end-1).*alpha) - tauq(1:end-1);
41
42     if fflag
43         figure;
44         plot(qtau, Dq, 'LineWidth', 2.5);
45         title('Generalized Dimensions - D_{q} versus q', ...
46               'FontSize', 24);
47         xlabel('q', 'FontSize', 20);
48         ylabel('Dq', 'FontSize', 20);
49         set(gca, 'FontSize', 16);
50
51         figure;
52         plot(qtau, alpha, 'LineWidth', 2.5);
53         title('Lipschitz Holder Exponent - \alpha versus q', ...
54               'FontSize', 24);
55         xlabel('q', 'FontSize', 20);
56         ylabel('\alpha', 'FontSize', 20);
57         set(gca, 'FontSize', 16);
58
59         figure
60         plot(q, tauq, 'LineWidth', 2.5);
61         title('Mass Exponent - \tau(q) versus q', 'FontSize', 24);
62         xlabel('q', 'FontSize', 20);
```

```
63          ylabel('\tau(q)', 'FontSize', 20);
64          set(gca, 'FontSize', 16);
65
66          figure;
67          plot(alpha, falpha, 'LineWidth', 2.5)
68          title('Singularity Spectrum - f(\alpha) versus \alpha', ...
69                                      'FontSize', 24);
70          xlabel('\alpha', 'FontSize', 20);
71          ylabel('f(\alpha)', 'FontSize', 20);
72          set(gca, 'FontSize', 16);
73      end
74  end
```

APÊNDICE C - SCRIPTS

Neste apêndice são apresentados os scripts que têm a função de gerar séries temporais, analisá-las e graficá-las. Os códigos foram desenvolvidos em Matlab e usam algumas funções do apêndice B. Os scripts têm uma numeração, pois devem ser usados em sequência. Na seção C.1 é apresentado o script que gera as séries e na seção C.2 o script que plota os resultados.

C.1 Análise através do DFA

```
%
% Script #1
%
%   Análise da resolução do sinal para Movimento Browniano
%   Fracionário com séries geradas através do método do filtro
%   de Fourier
%
%   Os resultados são salvos em uma pasta chamada
%       alph_+"valor do alfa"+res_+"resolução escolhida"
%
%   em três arquivos diferentes:
%       DFA_alps.txt - os valores de alfa
%       DFA_time.txt - o tempo de processamento de cada série
%       DFA_fluc.txt - a média das flutuações F
%

genAlpha = .5;
nSeries = 50;
sizeSeries = 2^10;  % 2^16 = 65k

dirName = strcat('alph_', num2str(genAlpha), '_res_', ...
                 num2str(sizeSeries));

[s, message] = mkdir(dirName);
if ~isempty(message)
    error(message);
end

scales = logscales(3, sizeSeries/4);

dfaRes = zeros(3, nSeries);
timeRes = zeros(3, nSeries);
flucRes = zeros(3, length(scales));
```

```
for iSample=1:nSeries

    x = ffiltering(genAlpha, sizeSeries);

    % Igual ao filtro de Fourier
    %x = diff(wfbm(genAlpha, sizeSeries));

    % DFA
    for m=1:3
        tic;
        [dfaRes(m, iSample), fluc] = dfa(x, scales(m:end), m);
        timeRes(m, iSample) = toc;
        if iSample == 1
            flucRes(m, m:end) = fluc';
        else
            flucRes(m, m:end) = (flucRes(m, m:end)+fluc(:)')./2;
        end
    end

    % Salvar em arquivos txt
    fileName = strcat(dirName, '/DFA_alps.txt');
    fileID = fopen(fileName,'w');
    fprintf(fileID,'%.8f    %.8f    %.8f\n', dfaRes);
    fclose(fileID);

    fileName = strcat(dirName, '/DFA_time.txt');
    fileID = fopen(fileName,'w');
    fprintf(fileID,'%.8f    %.8f    %.8f\n', timeRes);
    fclose(fileID);

    fileName = strcat(dirName, '/DFA_fluc.txt');
    fileID = fopen(fileName,'w');
    fprintf(fileID,'%.8f    %.8f    %.8f\n', flucRes);
    fclose(fileID);
end

clear genAlpha nSeries sizeSeries dirName;
clear s message;
clear dfaRes timeRes flucRes fluc m x scales;
clear fileName fileID iSample;
```

C.2 Geração dos Gráficos

```
%
```

```
% Script #2
%
%   Plot dos resultados gerados pelo script #1
%
%   Os resultados são carregados a partir da(s) pasta(s)
%   chamada(s)
%       alph_+"valor do alfa"+res_+"resolução escolhida"
%

genAlpha = .5;
nSeries = 50;
sizeSeries = [2^10 2^11 2^12 2^13 2^14 2^15 2^16];  % 2^16 = 65k


dirName = strcat('alph_', num2str(genAlpha), '_res_', ...
                    num2str(sizeSeries(iSize)), '/');

maxAlph = zeros(length(sizeSeries), 3);
minAlph = zeros(length(sizeSeries), 3);
meanAlph = zeros(length(sizeSeries), 3);

maxTime = zeros(length(sizeSeries), 3);
minTime = zeros(length(sizeSeries), 3);
meanTime = zeros(length(sizeSeries), 3);
for iSize=1:length(sizeSeries)

    % Load
    dfaRes = load([dirName 'DFA_alps.txt']);
    timeRes = load([dirName 'DFA_time.txt']);
    flucRes = load([dirName 'DFA_fluc.txt']);

    for m=1:3
        maxAlph(iSize, m) = max(dfaRes(:, m));
        minAlph(iSize, m) = min(dfaRes(:, m));
        meanAlph(iSize, m) = mean(dfaRes(:, m));

        maxTime(iSize, m) = max(timeRes(1:nSeries, m));
        minTime(iSize, m) = min(timeRes(1:nSeries, m));
        meanTime(iSize, m) = mean(timeRes(1:nSeries, m));
    end

    % Plot da flutuação F(s)
    scales = logscales(3, sizeSeries(iSize)/4);
    figure;
    loglog(scales(1:end), flucRes(1:end, 1), 'ro-', ...
```

```
47              'MarkerSize', 10);
48      hold on;
49      loglog(scales(2:end), flucRes(2:end, 2), 'gx-', ...
50              'MarkerSize', 10);
51      loglog(scales(3:end), flucRes(3:end, 3), 'b*-', ...
52              'MarkerSize', 10);
53      title(num2str(sizeSeries(iSize)), 'FontSize', 24);
54      legend('DFA1', 'DFA2', 'DFA3');
55      xlabel('Escala', 'FontSize', 20);
56      ylabel('F(s)', 'FontSize', 20);
57      set(gca, 'FontSize', 16);
58  end
59
60  % Plot valores de alpha
61  figure;
62  errorbar(sizeSeries, meanAlph(:, 1), minAlph(:, 1)-...
63           meanAlph(:, 1), maxAlph(:, 1)-meanAlph(:, 1), ...
64           'ro-', 'MarkerSize', 10, 'LineWidth', 2);
65  hold on;
66  errorbar(sizeSeries, meanAlph(:, 2), minAlph(:, 2)-...
67           meanAlph(:, 2), maxAlph(:, 2)-meanAlph(:, 2), ...
68           'gx-', 'MarkerSize', 10, 'LineWidth', 2);
69  hold on;
70  errorbar(sizeSeries, meanAlph(:, 3), minAlph(:, 3)-...
71           meanAlph(:, 3), maxAlph(:, 3)-meanAlph(:, 3), ...
72           'b*-', 'MarkerSize', 10, 'LineWidth', 2);
73  title(dirAnalysis, 'FontSize', 24);
74  legend('DFA1', 'DFA2', 'DFA3');
75  xlabel('Tamanho', 'FontSize', 20);
76  ylabel('\alpha', 'FontSize', 20);
77  set(gca, 'FontSize', 16);
78
79  % Plot do tempo
80  figure;
81  errorbar(sizeSeries, meanTime(:, 1), minTime(:, 1)- ...
82           meanTime(:, 1), maxTime(:, 1)-meanTime(:, 1), ...
83           'ro-', 'MarkerSize', 10, 'LineWidth', 2);
84  hold on;
85  errorbar(sizeSeries, meanTime(:, 2), minTime(:, 2)- ...
86           meanTime(:, 2), maxTime(:, 2)-meanTime(:, 2), ...
87           'gx-', 'MarkerSize', 10, 'LineWidth', 2);
88  hold on;
89  errorbar(sizeSeries, meanTime(:, 3), minTime(:, 3)-...
90           meanTime(:, 3), maxTime(:, 3)-meanTime(:, 3), ...
91           'b*-', 'MarkerSize', 10, 'LineWidth', 2);
```

```
92 title(Tempo, 'FontSize', 24);
93 legend('DFA1', 'DFA2', 'DFA3');
94 xlabel('Tamanho', 'FontSize', 20);
95 ylabel('Tempo (s)', 'FontSize', 20);
96 set(gca, 'FontSize', 16);
97
98
99 clear genAlpha nSeries sizeSeries iSize dirName;
100 clear maxAlph minAlph meanAlph;
101 clear maxTime minTime meanTime;
102 clear s message;
103 clear a p dfaRes timeRes flucRes fluc m x scales;
104 clear fileName fileID iSample;
105 clear falph ftime
```