

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Método baseado em redes complexas para a caracterização da dinâmica caótica

Juliana C. Lacerda¹

Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada, INPE, São José dos Campos, SP

Elbert E. N. Macau²

Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada, INPE, São José dos Campos, SP

1 Introdução

A detecção de que um sistema dinâmico apresenta dinâmica caótica, notadamente a partir de séries temporais, apresenta um grande desafio científico. Várias técnicas já foram criadas, mas nenhuma delas representa uma solução geral. Para contribuir com esse tópico, apresentamos aqui um novo enfoque, que conjuga dinâmica simbólica e redes complexas.

A metodologia proposta é exemplificada no contexto do mapa Logístico:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (1)$$

onde $0 \leq x_n \leq 1$ é uma medida adimensional da população na n-ésima geração e $0 \leq r \leq 4$ é a taxa de crescimento.

R. May mostrou que este modelo apresenta um comportamento "complexo" quando seu parâmetro r é explorado no contexto de um espaço de parâmetros [3]. Estudos subsequentes provaram que para certas regiões deste parâmetro existe comportamento caótico. Feigenbaum tomou este modelo como paradigma para mostrar a agora denominada "rota de duplicação de período" para o caos, exibindo os comportamentos universais que regem as transições dinâmicas [1]. Todas essas características fazem deste modelo um paradigma de um sistema com dinâmica caótica.

A partir de uma série temporal do mapa Logístico, introduz-se uma representação que permite sua descrição segundo uma sequência de símbolos. Subsequentemente, esta sequência é analisada segundo o formalismo das Redes Complexas. Como resultado, tem-se uma técnica confiável, robusta e cuja aplicação não necessita de recursos computacionais intensos.

2 Geração e Análise das Redes do Mapa Logístico

Para construir a rede, fazemos o uso da dinâmica simbólica. Para cada ponto da série temporal é designado o símbolo 0 se este valor está entre $[0, 0.5]$, caso contrário, é designado

¹juliana.lacerda@inpe.br

²elbert.macau@inpe.br

o símbolo 1. Após isso, é construída uma série decimal fixando palavras de tamanho dez na série simbólica e fazendo a conversão desse número binário para decimal (após essa conversão, a palavra de tamanho dez da série simbólica é deslocada de uma unidade para a direita e o processo é repetido até que a série simbólica chegue no fim). Essa série decimal será usada para a construção da rede, onde cada valor da série corresponde a um nó. Um nó da rede é ligado a outro somente se eles forem vizinhos na série decimal. Autoconexões são aceitas e só é permitida a existência de uma aresta ligando um par de nós [2].

No experimento, o número de vértices foi fixado em $N = 2^{10}$. Foram feitas 10500 iterações (descartando as 500 primeiras) e foram usados 1000 valores de r , variando entre 2.9 e 4.0, gerando assim um total de 1000 redes. O valor inicial x_0 foi fixado em 0.7, pois os resultados são praticamente os mesmos para diferentes condições iniciais [4].

Com o uso dessas redes, foram estudadas as seguintes propriedades: grau dos nós, grau médio, número de vértices conectados, densidade da rede e média da centralidade *betweenness* normalizada.

Correspondências foram encontradas ao comparar graficamente todas as propriedades citadas acima com os expoentes de Lyapunov e o diagrama de bifurcação do mapa Logístico. Foi possível prever a existência de algumas janelas periódicas deste mapa.

3 Conclusões

A partir da análise realizada através do formalismo de redes complexas e do uso da dinâmica simbólica, foram encontradas correspondências entre propriedades das redes com os expoentes de Lyapunov e o diagrama de bifurcação. Com isso, é possível prever o aparecimento de algumas janelas periódicas do mapa Logístico. Essas correspondências podem ser estendidas para a análise de outros mapas.

Referências

- [1] M. J. Feigenbaum, Universal behavior in nonlinear systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 7:16-39, 1983.
- [2] V. L. S. Freitas e E. E. N. Macau, Uso de redes complexas para caracterização dinâmica de sistemas não lineares. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, (to appear).
- [3] R. M. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261:459-467, 1976.
- [4] X. Yu, Z. Jia and X. Jian, Logistic mapping-based complex network modeling. *Applied Mathematics*, 4:1158-1562, 2013.