IMPLEMENTAÇÃO DE UM MÉTODO DE SUBGRADIENTES PARA O PROBLEMA DAS P-MEDIANAS.

ACIOLI ANTONIO DE OLIVO
EDSON LUIZ FRANÇA SENNE

INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS
LABORATÓRIO ASSOCIADO DE COMPUTAÇÃO E MATEMÁTICA APLICADA-LAC
CAIXA POSTAL 515 - 12201 - SÃO JOSÉ DOS CAMPOS - SP

1. INTRODUÇÃO

Localizar facilidades em uma rede, tal que seja minimizada a soma das distâncias de cada nó até a facilidade mais próxima, é um problema clássico, denominado de p-medianas. Vários autores tem tratado do assunto, como SLATER (1981), CHRISTOFIDES e BEASLEY (1982) e BEASLEY (1985).

Este trabalho não tem a pretensão de resolver problemas da dimensão daqueles resolvidos por BEASLEY em um super computador (900 nós). Entretanto, usando relaxação lagrangeana combinada com um método de subgradientes, desenvolveu-se uma estrutura de dados que explora a estrutura matricial do problema, para implementação em micro-computadores tipo IBM-PC, e solucionar problemas com até 200 nós.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Seja $d_{ij} \geq 0$ a distância mínima entre o nó i e o nó j de uma rêde formada pelo conjunto N de nós. Seja $x_{ij} = 1$, se o nó i é alocado ao nó j, e 0 caso contrário. O problema pode ser formulado como um problema de programação inteira zero-um, da forma:

$$\text{MIN } Z = \sum_{ij}\sum d_{ij}\, x_{ij}$$

sujeito a

$$(P) \qquad \begin{aligned} &\sum_j x_{ij} = 1, \quad \forall\, i \in N, && (1)\\ &\sum_j x_{jj} = p, && (2)\\ &x_{ij} \leq x_{jj}, \quad \forall\, i,j \in N && (3)\\ &x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall\, i,j \in N. && (4) \end{aligned}$$

A relaxação lagrangeana será utilizada para resolver o problema (P). SHAPIRO (1971) e FISCHER (1981) mostram que a dualização de parte das restrições produz um problema mais fácil de resolver, e cuja solução ótima é um limitante inferior para o problema (P). Associando-se um vetor u de multiplicadores de Lagrange ao conjunto (1) de restrições da (P), define-se o problema lagrangeano:

$$(PL) \qquad \text{MIN } ZD(u) = \sum_i \sum_j (d_{ij} - u_i)x_{ij} + \sum_i u_i$$

sujeito a (2),(3) e (4).

O problema (PL) é mais fácil de resolver que o problema (P). Suponha-se que para um dado u seja conhecido o conjunto de p-medianaa x_{jj}. Então para um nó k que seja uma mediana, a melhor alocação dos outros nós a k é dada por: $x_{ik} = 1$, se $d_{ik} < u_i$, $i \neq k$, e 0, caso contrário.

Substituindo-se esta expressão em (PL), obtém-se um problema de solução trivial.

3.MÉTODO DOS SUBGRADIENTES

O método dos subgradientes consiste em atualizar os multiplicadores de Lagrange de maneira sistemática de modo a maximizar o valor do problema lagrangeano, o qual , deve convergir para um valor ZD = Z, se não houver um "gap" de dualidade. Dado um vetor inicial u^o, constrói-se uma sequência $\{u^k\}$,dada por:

$$u^{k+1} = u^k + \theta^k S^k,$$

onde: $S_i^k = 1 - \sum_j x_{ij}^k$ e θ^k é tal que $ZD(u^k)$ converge para ZD.

Alguns autores, como HELD, WOLFE & CROWDER (1974), recomendam valores de da forma:

$$\theta^k \to 0 \quad e \quad \sum_k^{\infty} \theta^k \to \infty \; .$$

Uma expressão frequentemente utilizada é:

$$\theta^k = PI \; (LS - ZD(u^k)/\| S^k \|^2,$$

onde $0 \leq PI \leq 2$ e LS é um limitante superior de (P), obtido por meio de alguma heurística.

4. IMPLEMENTAÇÃO E TESTES

O algoritmo foi implementado em TURBO-PASCAL usando um microcomputador tipo IBM-PC e testado com problemas gerados aleatoriamente com $d_{ij} \in [5,100]$, redes de 10, 20, 50, 100, 150 e 200 nós e número de medianas igual n/10, n/5 e n/3. A literatura indica que para n/3 medianas, o problema torna-se mais difícil.

A tabela 1 apresenta os resultados, com o "gap" de dualidade sendo calculado por (LS - LI)/LS, onde LI é o melhor limitante inferior.

5.CONCLUSÕES

D uso de um método de subgradientes associado à relaxação lagrangeana na reaolucão de problemas de p-medianas pode ser considerado uma excelente heurística na obtenção de bons limitantes. Eates limitantes, usados em um algoritmo do tipo "branch-and-bound", tornam possível solucionar de modo exato problemas de grande porte.

TABELA 1: RESULTADOS DA IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORÍTMO

Problema	n	p	Número iterações	"gap"
1	10	3	23	-
2	20	2	28	-
3	20	4	42	-
4	20	7	45	0.06
5	50	5	112	-
6	50	10	83	0.10
7	50	17	127	0.12
8	100	10	186	-
9	100	20	238	0.08
10	100	33	255	0.12
11	150	15	290	0.04
12	150	30	315	0.08
13	150	50	355	0.09
14	200	20	450	0.10
15	200	40	470	0.09
16	200	66	515	0.15

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

SHAPIRO, J,F. Generalized Lagrange Multipliers in Integer Programming. **Operations Research**, 19(1971):68-76.

HELD,M.; WOLFE,P.; CROWDER,H.P. Validation of Subgradient Optimization. **Mathematical Programming**, 6(1974):62-88.

FISCHER,M.L. The Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems. **Management Science**, 27(1)(1981):1-18.

CHRISTOFIDES,N.;BEASLEY,J.E. A Tree Search Algorithm for the p-Median Problem. **European Journal of Operational Research**, 10(2)(1982):196-204.

BEASLEY,J.E. A Note on Solving Large p-Median Problems. **European Journal of Operational Research**, 21(1985):270-273.